

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes

Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique théorique

Thème

Calculs des fonctions de corrélations des champs scalaires avec une auto interaction en ϕ^4 par la méthode des intégrales de chemins

Présentée par

Mr. Laala Ishak

Soutenu le: Dimanche 02 juillet 2017

devant le Jury composé de:

Amatousse	Nawel	MCA	Présidente
Chennit	Makhlouf	MAA	Examineur
Mohamed Meziani	Abdelkader	MCA	Rapporteur

Année universitaire 2016/2017

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord et avant tout le bon dieu tout puissant de nous avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Nous désirons remercier mon encadreur Dr M.A Meziani pour sa disponibilité, son aide précieuse et ses conseils qui nous ont accompagné tout au long ce travail. Nous sommes très reconnaissant d'avoir cru en nos capacités et d'avoir accordé sa confiance, et aussi pour ses qualités scientifiques, pédagogiques et humaine.

Nous remercions l'ensemble des jurys qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Nous remercions aussi nos parents et proches pour leurs aides et encouragements.

Sans oublier nos amis et camarades pour leurs soutiens qu'ils nous ont apportés.

Merci pour tout.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma très chère mère Houria, aucune dédicace ne saurait être à la hauteur pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis mon plus jeune âge, et même à l'âge adulte.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieux, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

Au meilleur des pères Moustapha, les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement et le respect que je te porte. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation

A mon frère Moncef

A mes sœurs Aya et Raita

A toute ma famille

A ma grande mère Khadija

A mon cousin Mouhamed

A mes cousins Rachid Kamel Hasen Farouk Adoula

A tous mes amis

LAALA Ishak

Table des matières

Introduction	5
1 Les intégrales de chemins	8
1.1 Intégrales de chemins et la mécanique quantique	8
1.2 Propagateur comme intégrale de chemins	10
1.3 Théorie des perturbations	12
1.3.1 Propagateur libre	13
1.3.2 Développement perturbatif :	16
1.3.3 Propagateur du 1 ^{er} ordre :	16
1.3.4 Propagateur du 2 ^{ème} ordre :	18
1.3.5 Équation de Bethe-Salpeter :	19
1.3.6 Application à la diffusion :	21
2 Fonctions génératrices et Fonctions de Green	25
2.1 Fonctions génératrices	25
2.1.1 Transition de l'état fondamental vers l'état fondamental . . .	25
2.1.2 Rotation de Wick	26
2.1.3 Fonction génératrice	28
2.1.4 Dérivées fonctionnelles des amplitudes de transition	28
2.2 matrice S et fonctions de Green	31
2.2.1 Matrice S	31
2.2.2 Théorème de réduction	32
2.3 Fonctions de Green	37
2.3.1 Fonctions de Green à n-points	37
2.3.2 Représentation d'impulsion	38
2.3.3 Champs scalaires libres	38
2.3.4 règles de Feynman	40
2.3.5 Champs Scalaires en interaction	42
2.3.6 Développement perturbatif	43
3 Intégrales de chemins pour les champs scalaires	46
3.1 Introduction	46
3.2 Fonction génératrice pour les champs	46
3.2.1 Représentation Euclidienne :	47
3.3 Évaluation des intégrales de chemins	49
3.3.1 champs scalaires libres :	49
3.3.2 Évaluation numérique des intégrales de chemins :	51

4 Théorie perturbative ϕ^4	52
4.1 Développement perturbatif de la fonction génératrice	52
4.2 Règles de Feynman	53
4.2.1 Contributions du vide	55
4.3 Fonction de Green à 2-points	56
4.3.1 Termes en $O(g^0)$	56
4.3.2 Termes jusqu'à $O(g)$	58
4.4 Représentation d'impulsion	58
4.5 Règles de Feynman	59
Conclusion générale	60
Appendice	61
Intégrales de Gauss	62
Intégrales complexes	64
Bibliographie	66

Introduction

Le formalisme des intégrales de chemins trouve applications dans beaucoup de branches de la physique et des mathématiques. En théorie des champs quantiques, les intégrales de chemins deviennent populaires avec l'avènement des théories de jauge. A l'origine, le formalisme a été introduit par Feynman en théorie quantique pour formuler l'électrodynamique quantique en termes de diagrammes ; "les diagrammes de Feynman". Le principe de moindre action joue un rôle très important en mécanique classique. Il établit qu'une particule suit le chemin pour lequel l'action est extrémale. L'action est définie comme étant l'intégrale du Lagrangien dans le temps. Ce principe est utilisé pour obtenir les équations de Lagrange. Par la suite, le hamiltonien peut être écrit et ce qui représente le point de départ de la quantification canonique. Des objets comme l'espace de Hilbert, opérateurs non commutatifs doivent être introduits et les résultats finaux sont tirés de l'action plus loin. Feynman essaye de mettre une relation plus directe entre l'action et les résultats mesurables, chose qui a été accomplie grâce au formalisme des intégrales de chemins. Ce formalisme doit être vu comme une autre alternative à la formulation de la mécanique quantique. La majorité des résultats bien connus de la théorie de Schrodinger sont retrouvés en moyennant le formalisme des intégrales de chemins.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, on considère le cas de la mécanique quantique dans laquelle on développe la fonction de Green de l'équation de Schrodinger, qui est aussi appelée propagateur comme une intégrale sur tous les chemins possibles menant le système de l'état initial à l'état final. Ceci fait, on procède au calcul du propagateur libre puis, en général en introduisant un potentiel, le propagateur exact ne peut pas être calculé d'une manière exacte. On aura recours au développement perturbatif qui nous mènera à l'équation de Bethe-Salpeter. Ensuite, on procède au calcul du taux de transition de l'état fondamental vers l'état fondamental en présence d'une source extérieure. On définit alors la fonction génératrice qui va nous permettre de calculer toutes les fonctions de corrélation.

Le deuxième chapitre est dédié aux intégrales de chemins dans les théories quantiques relativistes et on va s'intéresser particulièrement aux champs scalaires. On va appliquer tous les résultats obtenus dans le premier chapitre pour enfin aboutir à l'expression de la fonction génératrice pour les champs scalaires. On procédera à l'évaluation des intégrales de chemins dans le cas libre. Ensuite, on démontrera le théorème de réduction qui établit un lien entre l'amplitude de transition pour un processus quelconque, faisant intervenir les particules élémentaires, et les fonction de corrélation.

Le troisième chapitre est dédié aux fonctions de Green et à leurs calculs à partir des dérivées fonctionnelles des fonctions génératrices de la théorie.

Le quatrième chapitre traite l'exemple de champs scalaires qui ont une auto interaction en ϕ^4 . On calculera les fonctions de corrélation correspondantes, le mémoire est clôturé par une conclusion générale.

1

Les intégrales de chemins

1.1 Intégrales de chemins et la mécanique quantique

Considérons une particule non relativiste plongée dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. L'équation de Schrodinger s'écrit.

$$H\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

Cette équation nous permet de calculer la fonction d'onde $\psi(x, t)$ à un temps ultérieure, si on connaît $\psi(x, t_0)$ à l'instant $t_0 > t$. L'équation (1.1) est réécrite sous la forme suivante

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H)\psi(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

On définit la fonction $k(x, t; x_i, t_i)$ comme étant la solution de l'équation :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H)k(x, t; x_i, t_i) = i\hbar \delta(x - x_i) \delta(t - t_i) \quad (1.3)$$

k est la fonction de Green de l'équation de Schrodinger (k est aussi appelé propagateur) avec la condition initiale :

$$k(x, t_i + 0; x_i, t_i) = \delta(x - x_i) \quad (1.4)$$

La solution de l'équation de Schrodinger (1.2) peut s'écrire comme :

$$\psi(x, t) = \int dx_i k(x, t; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) \quad (1.5)$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H)\psi(x, t) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H) \int dx_i k(x, t; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \int dx_i (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H)k(x, t; x_i, t_i)\psi(x_i, t_i) \\
&= i\hbar \int dx_i \delta(t - t_i)\psi(x_i, t_i)\delta(x - x_i) \\
&= i\hbar \delta(t - t_i)\psi(x_i, t_i) = 0 \text{ pour } t > t_i
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ainsi, la fonction d'onde ψ définie en (1.5) est solution de l'équation de Schrodinger pour le temps $t > t_i$. $k(x, t; x_i, t_i)$ est l'amplitude de probabilité pour une transition de x_i à l'instant t_i , vers x , à l'instant ultérieur t . Dans le cas stationnaire où $V(x)$ est indépendant du temps, si les solutions de l'équation de Schrodinger stationnaire ($H\psi = E\psi$), $\phi_n(x)$, et les valeurs propres correspondantes sont connues, on pourra trouver la forme explicite du propagateur. Les fonctions d'onde $\phi_n(x)$ forment un système complet, k peut être développé dans cette base :

$$k(x, t; x_i, t_i) = \sum_n a_n \phi_n(x) e^{i\frac{E_n t}{\hbar}} \theta(t - t_i) \tag{1.7}$$

où $\theta(t - t_i) = 0$ pour $t < t_i$ ou bien $\theta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\theta(t - t_i) = 1$ pour $t \geq t_i$ ou bien $\theta(t) = 1$ pour $t \geq 0$. Il tient compte uniquement de la propagation de la fonction d'onde en avant dans le temps. Les coefficients a_n dépendent de x_i et t_i :

$$a_n = a_n(x_i, t_i) \tag{1.8}$$

la condition initiale : $k(x, t_i + 0; x_i, t_i) = \delta(x - x_i)$ implique :

$$\delta(x - x_i) = \sum_n a_n(x_i, t_i) \phi_n(x) e^{i\frac{E_n t_i}{\hbar}} \tag{1.9}$$

elle est indépendante du temps (le terme de gauche), donc :

$$a_n(x_i, t_i) = a_n(x_i) e^{i\frac{E_n t_i}{\hbar}} \tag{1.10}$$

d'où :

$$\delta(x - x_i) = \sum_n a_n(x_i) \phi_n(x) \tag{1.11}$$

ce qui implique que :

$$a_n(x_i) = \phi_n^*(x_i) \tag{1.12}$$

ce qui correspond à la relation de fermeture. Donc le propagateur a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
k(x, t; x_i, t_i) &= \sum_n \phi_n^*(x) e^{i\frac{E_n t_i}{\hbar}} \phi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \theta(t - t_i) \\
k(x, t; x_i, t_i) &= \theta(t - t_i) \sum_n \phi_n^*(x_i) \phi_n(x) e^{\frac{-i}{\hbar} E_n (t - t_i)}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Dans la représentation de Dirac, on le réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
k(x, t; x_i, t_i) &= \sum_n \phi_n^*(x) \phi_n(x) e^{\frac{-i}{\hbar} E_n (t - t_i)} \theta(t - t_i) \\
&= \sum_n \langle n | x_i \rangle e^{\frac{-i}{\hbar} E_n (t - t_i)} \langle x | n \rangle \theta(t - t_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \langle n | e^{i \frac{E_n t}{\hbar}} | x_i \rangle \langle x | e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} | n \rangle \theta(t - t_i) \\
&= \langle x | e^{-i \frac{E_n (t-t_i)}{\hbar}} | x_i \rangle \theta(t - t_i) = \langle x | U(t, t_i) | x_i \rangle \theta(t - t_i).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Le propagateur n'est que l'opérateur d'évolution dans le temps,

$$U(t, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_i)} \tag{1.15}$$

1.2 Propagateur comme intégrale de chemins

On commence par diviser l'intervalle de temps entre t_i et t en insérant l'instant t_1 . La fonction d'onde est propagée d'abord jusqu'à l'instant t_1 ensuite jusqu'à l'instant t en 2 étapes.

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, t_1) &= \int k(x_1, t_1; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \\
\psi(x, t) &= \int k(x, t; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) dx_1
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Prenant les deux équations ensemble, on obtient :

$$\psi(x, t) = \int \int k(x, t; x_1, t_1) k(x_1, t_1; x_i, t_i) \psi(x_1, t_1) \psi(x_i, t_i) dx_i dx_1 \tag{1.17}$$

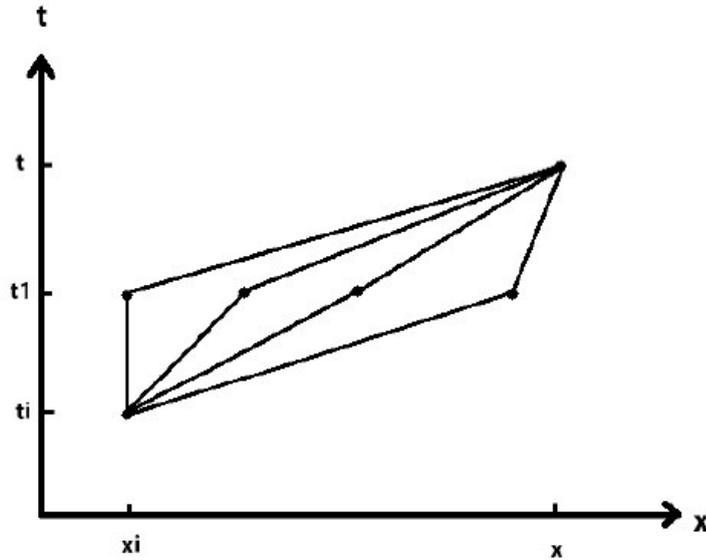
comme

$$\psi(x, t) = \int k(x, t; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i$$

on aura donc :

$$k(x, t; x_i, t_i) = \int k(x, t; x_1, t_1) k(x_1, t_1; x_i, t_i) dx_1 \tag{1.18}$$

On peut ainsi voir la transition de (x_i, t_i) vers (x, t) comme étant le résultat d'une première transition de (x_i, t_i) vers tous les points intermédiaires possibles (x_1, t_1) , qui sont ensuite suivis par une transition de ces points intermédiaires au point final.



Maintenant on subdivise l'intervalle du temps en $(n+1)$ parties égales de longueur $\delta t = \eta$. On généralise la relation (1.18) telle que

$$k(x, t; x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_n [k(x, t; x_n, t_n) k(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \dots k(x_1, t_1; x_i, t_i)] \quad (1.19)$$

L'intégrale se fait à travers tous les chemins possibles entre (x_i, t_i) et (x, t) qui consistent en $(n+1)$ segments qui ont des limites précisées par les intervalles de temps t_i, t_1, \dots, t_n etc.

On calcule maintenant le propagateur pour un intervalle de temps petit η de t_j vers t_{j+1} :

$$\begin{aligned} k(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \langle x_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \eta} | x_j \rangle \\ &\simeq \langle x_{j+1} | 1 - \eta \frac{i}{\hbar} \hat{H} | x_j \rangle \\ &= \delta(x_{j+1} - x_j) - \frac{i}{\hbar} \eta \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1} - x_j)} dp - \frac{i}{\hbar} \eta \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

où

$$\delta(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x_{j+1} - x_j)} dk. \quad (1.21)$$

L'hamiltonien \hat{H} est donné par :

$$\hat{H} = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{V}(\hat{x}) \quad (1.22)$$

d'où

$$\langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle = \langle x_{j+1} | \hat{T}(\hat{p}) + \hat{V}(\hat{x}) | x_j \rangle \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \langle x_{j+1} | \hat{T} | x_j \rangle &= \int dp' dp \langle x_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \hat{T}(\hat{p}) | p \rangle \langle p | x_j \rangle \\ &= \int dp' dp \langle x_{j+1} | p' \rangle \langle p' | p \rangle T(p) \langle p | x_j \rangle \\ &= \int dp' dp \langle x_{j+1} | p' \rangle \delta(p' - p) T(p) \langle p | x_j \rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

on a :

$$\langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} px} \quad (1.25)$$

on obtient donc :

$$\langle x_{j+1} | \hat{T}(\hat{p}) | x_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1} - x_j)} T(p) \quad (1.26)$$

A gauche on a un opérateur \hat{T} , fonction de l'opérateur \hat{p} , alors qu'à gauche on a des nombres p .

Pour la partie fonction du potentiel, on a

$$\langle x_{j+1} | \hat{V} | x_j \rangle = V(x_j) \delta(x_{j+1} - x_j)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1}-x_j)} V(x_j) \quad (1.27)$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} k(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1}-x_j)} dp \\ &- \frac{i\eta}{\hbar} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp T(p) e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1}-x_j)} + \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp V(x_j) e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1}-x_j)} \right) \\ k(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_{j+1}-x_j)} \left(1 - \frac{i\eta}{\hbar} H(p, x_j) \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

quand $\eta \rightarrow 0$, $1 - \frac{i\eta}{\hbar} H(p, x_j) \rightarrow e^{-\frac{i\eta}{\hbar} H(p, x_j)}$
d'où :

$$k(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)_{\eta \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j e^{\frac{i}{\hbar} p_j(x_{j+1}-x_j) - \eta H(p_j, x_j)}, \quad (1.29)$$

H est une fonction des variables p_j et x_j , ce n'est pas un opérateur. On insérât (1.29) dans (1.19) et on obtient :

$$k(x, t; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dx_k \int \prod_{l=0}^n \frac{dp_l}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n p_j(x_{j+1}-x_j) - \eta H(p_j, x_j)} \quad (1.30)$$

avec : $x_0 = x_i$ et $x_{n+1} = x$. Entre x_i et x , on a n étapes intermédiaires, donc il ya $n+1$ intervalles et impulsions correspondantes. Dans la relation (1.30) l'intégrant, pour n fini est une fonction complexe de toutes les coordonnées x_1, \dots, x_n et les impulsions p_1, \dots, p_n . Dans la limite $n \rightarrow \infty$ il dépend de la trajectoire entière $x(t), p(t)$. Donc quand $n \rightarrow \infty$ on aura

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} [p_j(x_{j+1} - x_j) - \eta H(p_j, x_j)] &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta [p_j \frac{x_{j+1} - x_j}{\eta} - H(p_j, x_j)] \\ &\rightarrow_{\eta \rightarrow \infty} \int_{t_i}^t dt' [p(t') \dot{x}(t') - H(p(t'), x(t'))] \end{aligned} \quad (1.31)$$

. La relation (1.31) se réécrit sous la forme suivante :

$$k(x, t; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t dt' [p(t') \dot{x}(t') - H(p(t'), x(t'))]} \quad (1.32)$$

où : $\mathcal{D}x = \prod dx$ et $\mathcal{D}p = \prod \frac{dp_l}{2\pi\hbar}$

L'équation (1.32) est un résultat très important, elle permet de calculer le propagateur et ainsi la solution de l'équation de Schrodinger en fonction d'une intégrale de chemins de fonctions classiques.

1.3 Théorie des perturbations

Dans ce paragraphe on discute d'abord comment calculer le propagateur d'une particule libre. Ensuite, en général en incluant un potentiel, le propagateur exact ne peut pas être calculé. Donc on aura recours aux développements perturbatifs.

1.3.1 Propagateur libre

Dans le cas général, L'hamiltonien a la forme suivante :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \quad (1.33)$$

l'intégrale de chemins :

$$K(x, t; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dx_k \int \prod_{l=0}^n \frac{dl_\ell}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \eta \left[P_j \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\eta} - H \right]\right\} \quad (1.34)$$

se simplifie tel que :

$$K(x, t; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dx_k \int \prod_{l=0}^n \frac{dl_\ell}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \left[P_j \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\eta} - \frac{P_j^2}{2m} - V(x) \right]\right\} \quad (1.35)$$

En utilisant l'intégrale ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ap^2 + bp + c) dp = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ap^2) dp = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1.36)$$

le propagateur s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int \prod_{l=0}^n \frac{dl_\ell}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \left[P_j \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\eta} - \frac{P_j^2}{2m} - V(x) \right]\right\} = \\ & \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n+1} \left(\frac{2m\pi\hbar}{i\eta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\eta}\right)^2 - V(x) \right]\right\} = \\ & = \left(\frac{m}{i2\pi\eta\hbar}\right)^{\frac{n+1}{2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\eta}\right)^2 - V(x) \right]\right\} \end{aligned} \quad (1.37)$$

d'où :

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\eta\hbar}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{k=1}^n dx_k \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\eta}\right)^2 - V(x) \right]\right\} \quad (1.38)$$

avec :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\eta} \equiv \dot{x} \quad , \quad \text{donc} : \quad \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) = \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (1.39)$$

Donc :

$$K(x, t; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt'\right) \quad (1.40)$$

$$K(x, t; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[x(t)]\right) \quad (1.41)$$

avec :

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int_{t_i}^t \mathcal{L}(\dot{x}, x) dt' \quad , \quad \mathcal{N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\eta}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

Revenons au propagateur libre :

$$K_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_0\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\eta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^n dx_k \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \eta \sum_{j=0}^n \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\eta}\right)^2\right\}. \quad (1.42)$$

Cette intégrale peut être estimée exactement :

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\eta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{i^n \pi^n}{(n+1) \left(\frac{m}{2\hbar\eta}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{i}{n+1} \frac{m}{2\hbar\eta} (x - x_i)^2\right\}. \quad (1.43)$$

Comme : $x_{n+1} = x$; $x_0 = x_i$ et $(n+1)\eta = t - t_i$, η peut écrire

$$K_0(\Delta x, \Delta t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t - t_i)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m(x - x_i)^2}{2(t - t_i)}\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m\Delta x^2}{2\Delta t}\right) \quad (1.44)$$

avec : $\Delta x = x - x_i$, $\Delta t = t - t_i$.

C'est le propagateur d'une particule libre pour $\Delta t \geq 0$. Pour $\Delta t < 0$, on impose la condition $K = 0$.

Comme le moment p d'une particule libre est conservé, il est intéressant de transformer K_0 en représentation d'impulsion en utilisant la transformation de Fourier :

$$K_0(P, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\left(\frac{-i}{\hbar} p\Delta x\right) K_0(\Delta x, \Delta t) d\Delta x \quad (1.45)$$

$$K_0(P, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}} \int \exp\left(\frac{-i}{\hbar} P\Delta x\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \Delta x^2\right) d\Delta x. \quad (1.46)$$

On a la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-a\Delta x^2 + b\delta x\} d\Delta x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left\{\frac{b^2}{4a}\right\}$

avec $a = \frac{-i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t}$ et $b = \frac{-i}{\hbar} p$

d'où

$$K_0(P, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}} \sqrt{\frac{\hbar\pi 2\Delta t_i}{m}} \exp\left\{\frac{i}{2} \frac{P^2 \hbar}{\hbar^2 m} \Delta t\right\}$$

$$K_0(P, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{\frac{-i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} \Delta t\right\} \quad (1.47)$$

et

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\{ip\Delta x\} K_0(P, \Delta t) dp. \quad (1.48)$$

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p\Delta x - \frac{P^2}{2m}\Delta t)\right) dp \theta(\Delta t) \quad (1.49)$$

où $\theta(\Delta t)$ tient compte de la causalité (conditions aux limites) $K = 0$ pour $\Delta t < 0$. A partir du théorème des résidus, on peut écrire :

$$\theta(\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega\Delta t)}{\omega - i\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \quad (1.50)$$

Pour $\Delta t > 0$, l'intégrale peut être fermée dans la partie supérieure du plan complexe ω . Le théorème de Cauchy donne l'intégrale égale à $2\pi i$ dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, donc $\theta(t) = 1$

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp d\omega \frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[p\Delta x - (\frac{P^2}{2m} - \hbar\omega)\Delta t]\right\}}{\omega - i\varepsilon}. \quad (1.51)$$

On substitue $E = \frac{P^2}{2m} - \hbar\omega$ et on obtient

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int dp dE \frac{i\hbar \exp\left(\frac{i}{\hbar}[p\Delta x - E\Delta t]\right)}{-E + \frac{p^2}{2m} - i\varepsilon} \quad (1.52)$$

En inversant les bornes d'intégration, on obtient le propagateur suivant

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dp dE \frac{i\hbar \exp\left(\frac{i}{\hbar}[p\Delta x - E\Delta t]\right)}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon}. \quad (1.53)$$

A trois dimensions, On généralise l'expression ci-dessus :

$$K_0(\vec{x}', t; \vec{x}_i, t_i) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}(\vec{x}' - \vec{x}_i) - \frac{p^2}{2m}(t' - t)]\right\} d^3p \theta(t' - t) \quad (1.54)$$

$$K(\vec{x}', t; \vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^3p dE \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\Delta\vec{x} - E\Delta t)\right\} \frac{i\hbar}{E - \frac{p^2}{2m} + i\varepsilon}. \quad (1.55)$$

C'est l'expression du propagateur libre dans la représentation énergie - impulsion. Comme E et P sont 2 variables indépendantes dans l'intégrale, on voit que la propagation se fait à des énergie $E \neq \frac{P^2}{2m}$.

1.3.2 Développement perturbatif :

On suppose maintenant que la particule non perturbée se déplace librement et qu'une perturbation est causée par le potentiel $V(x, t)$. On admet aussi que l'hamiltonien a la forme standard

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x, t). \quad (1.56)$$

Le propagateur est alors donné par :

$$K(x, t; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}\right) \quad (1.57)$$

avec

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^t \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt' = \int_{t_i}^t \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x, t') \right] dt'. \quad (1.58)$$

On a

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t \frac{m\dot{x}^2}{2} dt'\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t V(x, t') dt'\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}\right) \quad (1.59)$$

Le second facteur peut être développé en série de puissances du potentiel

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t V(x, t') dt'\right\} \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t V(x, t') dt' - \frac{1}{2!} \frac{1}{\hbar^2} \left(\int_{t_i}^t V(x, t') dt'\right)^2 + \dots, \quad (1.60)$$

d'où :

$$K = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \left\{ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0\right\} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t V(x, t') dt' - \frac{1}{2!} \frac{1}{\hbar^2} \left(\int_{t_i}^t V(x, t') dt'\right)^2 + \dots \right] \right\} \quad (1.61)$$

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \quad (1.62)$$

1.3.3 Propagateur du 1^{er} ordre :

A l'ordre 1, le propagateur a la forme suivante :

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0\right\} \int_{t_i}^t V(x, t') dt' \quad (1.63)$$

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \eta} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \sum_{K=1}^n V(x_K, t_K) \eta \exp \left[i \frac{m}{2\hbar\eta} \times \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \quad (1.64)$$

ici, l'intégrale est réécrite sous forme d'une somme.

Dans l'étape suivante, on coupe la somme dans l'exponentielle en deux parties, une allant de $j = 0$ à $j = K - 1$ et l'autre allant de $j = K$ à $j = n$ et on sépare les intégrales correspondantes :

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{K=1}^n \eta \int dx_K \{V(x_K, t_K) \\ &\times [N^{\frac{K}{2}} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{K-1} \exp^{[i \frac{m}{2\hbar\eta} \times \sum_{j=0}^{K-1} (x_{j+1} - x_j)^2]}] \\ &\times [N^{\frac{n-K+1}{2}} \int dx_{K+1} dx_{K+2} \dots dx_n \exp\{[i \frac{m}{2\hbar\eta} \times \sum_{j=K}^n (x_{j+1} - x_j)^2]\}] \} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Le terme dans les premiers crochets n'est autre que le propagateur de t_i vers t_K , ($K_0(x_K, t_K; x_i, t_i)$) et le 2^{ème} terme est le propagateur de t_K à t , ($K_0(x, t; x_K, t_K)$). Donc nous avons :

$$K_1(x, t; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{t_i}^t dt K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \quad (1.66)$$

L'intégrale sur le temps peut être étendue à l'infini, en posant :

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = 0 \quad \text{pour } t < t_i$$

$$K_0(x_f, t_f; x, t) = 0 \quad \text{pour } t_f < t \quad ,$$

on obtient alors :

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \quad (1.67)$$

1.3.4 Propagateur du 2^{ème} ordre :

Au deuxième ordre du développement perturbatif le propagateur s'écrit :

$$K_2 = -\frac{1}{2!} \frac{1}{\hbar^2} \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0\right\} \left\{ \int_{t_i}^t V(x, t') dt' \right\}^2 \quad (1.68)$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left(\int dt' V(x, t') \right)^2 &= \frac{1}{2!} \int V(x, t) V(x, t') dt dt' \\ &= \frac{1}{2!} \int [V(x, t) V(x, t') \theta(t' - t) + V(x, t) V(x, t') \theta(t - t')] dt dt' \\ &= \int V(x, t') \theta(t' - t) V(x, t) dt dt' \end{aligned} \quad (1.69)$$

Dans la dernière ligne, on n'a fait qu'un simple changement de variables. Alors,

$$K_2 = -\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0\right\} \int dt dt' V(x, t') \theta(t' - t) V(x, t) \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= -\frac{1}{\hbar^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \eta} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{i=1}^n dx_i \sum_{K=1}^n \sum_{K'=1}^n V(x_K, t_K) V(x_{K'}, t_{K'}) \eta^2 \times \\ &\quad \exp\left[i \frac{m}{2\hbar\eta} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= -\frac{1}{\hbar^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{K=1}^n \sum_{K'=1}^n \eta^2 \int dx_K dx_{K'} \{ V(x_K, t_K) V(x_{K'}, t_{K'}) \\ &\quad \times [N^{\frac{K}{2}} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{K-1} \exp\{[i \frac{m}{2\hbar\eta} \sum_{j=0}^{K-1} (x_{j+1} - x_j)^2]\}] \\ &\quad \times [N^{\frac{K'-K}{2}} \int dx_{K'+1} \dots dx_{K'} \exp\{[i \frac{m}{2\hbar\eta} \sum_{j=K}^{K'} (x_{j+1} - x_j)^2]\}] \\ &\quad \times [N^{\frac{n+1-K-K'}{2}} \int dx_{K'+1} \dots dx_n \exp\{[i \frac{m}{2\hbar\eta} \sum_{j=K+1}^n (x_{j+1} - x_j)^2]\}] \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le propagateur s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$K_2 = -\frac{1}{\hbar^2} \int dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 [K_0(x_f, t_f; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_2, t_2) \\ \times V(x_2, t_2) K_0(x_2, t_2; x_i, t_i)] \quad (1.73)$$

$$K_2 = -\frac{i}{\hbar} \int dt_2 \int dx_2 K_1(x_f, t_f; x_2, t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2, t_2; x_i, t_i). \quad (1.74)$$

D'une manière générale, on peut écrire

$$K_n = -\frac{i}{\hbar} \int dt \int dx K_{n-1}(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i). \quad (1.75)$$

1.3.5 Équation de Bethe-Salpeter :

Le développement du propagateur est écrit comme suit :

$$K = K_0 + K_0 U K_0 + K_0 U K_0 U K_0 + \dots \\ = K_0 + K_0 U (K_0 + K_0 U K_0 + \dots), \quad (1.76)$$

avec $U = -\frac{i}{\hbar} V$.

L'expression entre parenthésées n'est autre que le propagateur K.

On obtient ainsi l'équation de Bethe -Salpeter suivante :

$$K = K_0 + K_0 U K \quad (1.77)$$

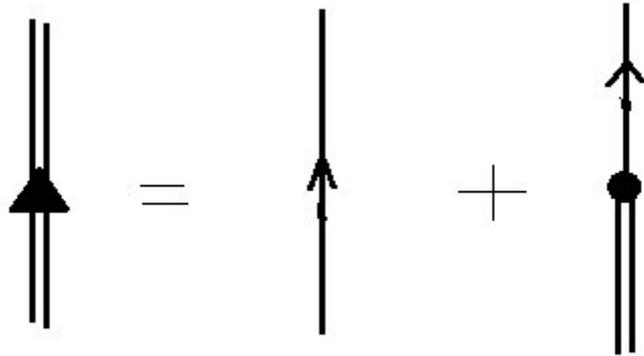
Plus explicitement, on peut la réécrire comme suit :

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) - \frac{i}{\hbar} \int dx dt K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K(x, t; x_i, t_i). \quad (1.78)$$

On peut représenter l'équation de Bethe -Salpeter sous forme de diagramme comme suit :

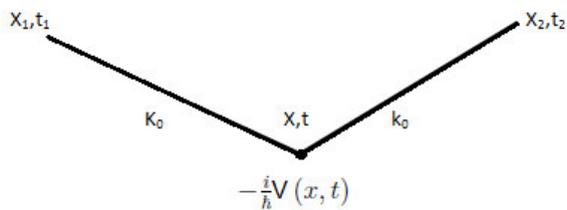
$$\equiv \equiv K(x_2, t_2; x_1, t_1)$$

Donc :

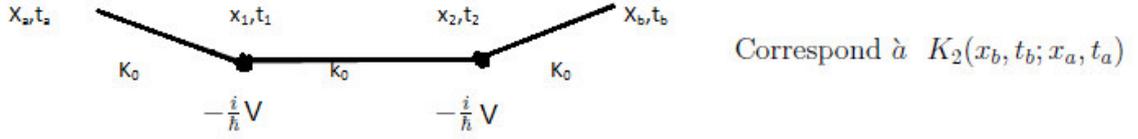


Où $\xrightarrow{x_1, t_1 \quad x_2, t_2} \equiv K_0(x_2, t_2; x_1, t_1)$

$\nabla_{x,t} \equiv -\frac{i}{\hbar}V(x, t)$ + on intègre sur tous les x et t .



Correspond à $K_1(x_2, t_2; x_1, t_1)$



L'équation de Bethe -Saleter peut être écrite dans une forme équivalente pour la fonction d'onde interagissante (en interaction) telle que.

$$\begin{aligned}
\Psi(x_f, t_f) &= \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \\
&= \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) V(x, t) K(x, t; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx dx_i dt \quad (1.79)
\end{aligned}$$

$$\Psi(x_f, t_f) = \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \psi(x, t) dx dt \quad (1.80)$$

Ça constitue l'équation intégrale pour la fonction d'onde $\psi(x, t)$.

1.3.6 Application à la diffusion :

On va appliquer les résultats obtenus au cas de la diffusion. Dans ce cas, la particule est libre à $t = -\infty$, puis elle vient interagir avec le potentiel " diffusif ", puis à $t = +\infty$ elle est de nouveau libre (adiabatic Switching on and off of the potentiel). La condition initiale (à $t = -\infty$), la fonction d'onde de la particule est une onde plane telle que

$$\psi_{in}(x, t) = \mathcal{N} \exp i(\vec{K}_i \vec{x} - \omega_i t) \quad (1.81)$$

où $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}$ où \mathcal{V} est le volume total.

L'état diffusé est noté $\psi^+(x, t)$. et l'indice (+) indique que l'évolution se fait suivant les temps croissants (en avant), en commençant à partir de ψ_{in} à $t = -\infty$. Nous avons la condition aux limites suivante :

$$\psi^{(+)}(x, t \rightarrow -\infty = \psi_{in}(x, t)) . \quad (1.82)$$

Après diffusion, à $t = +\infty$, l'état final est libre et représenté par :

$$\psi_{out}(x, t) = \mathcal{N} \exp\{i(\vec{K}_f \vec{x} - \omega_f t)\} \quad (1.83)$$

L'amplitude de probabilité pour que $\psi_{out}(x, t)$ se trouve dans l'état diffusé $\psi^{(+)}$ est

donnée par :

$$\mathcal{S}_{fi} = \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) \psi^+(x_f, t_f) d^3 x_i \quad \text{pour} \quad t_f \rightarrow \infty . \quad (1.84)$$

C'est l'amplitude de transition de l'état initial i vers l'état final f (matrice \mathcal{S}).
En utilisant l'équation de Bethe -Salpeter, la fonction d'onde diffusée s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \psi^+(x_f, t_f) = & \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i) d^3 x_i - \\ & - \frac{i}{\hbar} \int K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K(x, t; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i) d^3 x_i d^3 x dt . \end{aligned} \quad (1.85)$$

En insérant cette expression dans celle de l'élément de la matrice \mathcal{S}_{fi} , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} = & \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i) d^3 x_i d^3 x_f - \\ & - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K(x, t; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i) d^3 x_i d^3 x d^3 x_f dt . \end{aligned} \quad (1.86)$$

Comme ψ_{in} est une onde plane, on sait que :

$$\phi(x_f, t_f) = \int K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi_{(x_i, t_i)} d^3 x_i \quad (1.87)$$

est aussi une onde plane, car K_0 est le propagateur libre où il n'y a aucune interaction. ϕ est maintenant la même fonction d'onde que ψ_{in} , prise seulement à un instant ultérieur .

$$\phi(x_f, t_f) = \mathcal{N} \exp\{i(\vec{K}_i \vec{x}_f - \omega_i t_f)\} . \quad (1.88)$$

De là, la première intégrale peut être évaluée telle que

$$\int \psi_{out}^*(x_f, t_f) \phi(x_f, t_f) d^3 x_f = \delta^3(\vec{K}_f - \vec{K}_i) . \quad (1.89)$$

Nous avons alors :

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta^3(\vec{K}_f - \vec{K}_i) - \frac{i}{\hbar} \int d^3 x d^3 x_i d^3 x_f dt [\psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K(x, t; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i)] \quad (1.90)$$

avec :

$$K = K_0 + K_0 U K_0 + K_0 U K_0 U K_0 + \dots \quad \text{et} \quad U = -\frac{i}{\hbar} V .$$

Nous allons évaluer le premier ordre de l'amplitude de diffusion :

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int d^3 x d^3 x_i d^3 x_f dt [\psi_{out}^*(x_f, t_f) K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \psi_{in}(x_i, t_i)] \quad (1.91)$$

à une dimension :

$$K_0(x, t; x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p\Delta x - E\Delta t)\right\} dp \theta(\Delta t), \quad (1.92)$$

$$\text{où } E = \frac{p^2}{2m}.$$

On étend cette expression à trois dimension telle que

$$K_0(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}(\vec{x}' - \vec{x}) - \frac{p^2}{2m}(t' - t)]\right\} d^3p \theta(t' - t). \quad (1.93)$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{N}^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int d^3x d^3x_i d^3x_f dt d^3p d^3q \\ &\times \left\{ \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \vec{x}_f - E_f t)\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p}(\vec{x}_f - \vec{x}) - \frac{p^2}{2m}(t_f - t)]\right\} V(\vec{x}, t) \right. \\ &\times \left. \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\vec{q}(\vec{x} - \vec{x}_i) - \frac{q^2}{2m}(t - t_i)]\right\} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_i - E_i t_i)\right\} \right\}, \quad (1.94) \end{aligned}$$

où le temps est ordonné dans le sens croissant $t_f > t > t_i$ et $E_i = \frac{p_i^2}{2m}$, $E_f = \frac{p_f^2}{2m}$.

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{N}^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int d^3x d^3x_i d^3x_f dt d^3p d^3q \\ &\times \left\{ \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \vec{x}_f(\vec{p}_f - \vec{p})\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \vec{x}_i(\vec{p}_i - \vec{q})\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \frac{p_f^2}{2m} t_f\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t_f - t)\right\} \right. \\ &\times \left. V(\vec{x}, t) \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{x}\right\} \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{q^2}{2m}(t - t_i)\right\} \exp^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_i^2}{2m} t_i} \right\} \quad (1.95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{N}^2 \int d^3x d^3p d^3q dt \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}) \delta^3(\vec{p}_i - \vec{q}) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{x}\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{x}\right\} \mathcal{V}(\vec{x}, t) \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar 2m}(q^2 - p_i^2)t_i\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar 2m}(p_f^2 - p^2)t_f\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{q^2}{2m} t\right\} \exp\left\{+\frac{i}{\hbar} \frac{p_f^2}{2m} t\right\} \quad (1.96) \end{aligned}$$

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{N}^2 \int d^3x dt \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_i^2}{2m} t\right\} \exp\left\{+\frac{i}{\hbar} \frac{p_f^2}{2m} t\right\} V(\vec{x}, t) \quad (1.97)$$

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{N}^2 \int d^3x dt \exp^{\frac{i}{\hbar}(-\vec{p}_f \vec{x} + E_f t)} V(\vec{x}, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x} - E_i t)\right\} \quad (1.98)$$

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{N}^2 \int d^3x dt \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right\} V(\vec{x}, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t\right\} \quad (1.99)$$

avec : $E_f = \hbar\omega_f$ et $E_i = \hbar\omega_i$
on intègre sur le temps.

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{N}^2 \int d^3x dt \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right\} V(\vec{x}, t) \exp\{i(\omega_f - \omega_i)t\} \quad (1.100)$$

$$A^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{N}^2 \int d^3x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right\} V(\vec{x}) \delta(\omega_f - \omega_i) (2\pi) \quad (1.101)$$

où on a utilisé la relation suivante :

$$\int V(x, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t\right\} dt = \int_{-T}^T V_x \exp\{i(\omega_f - \omega_i)t\} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i) \quad (1.102)$$

Finalement, on a l'amplitude suivante :

$$A^{(1)} = -i\frac{\mathcal{N}^2}{\hbar} 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i) \int d^3x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right\} V(x) \quad (1.103)$$

Pendant l'intervalle de temps $[-T, T]$, le potentiel est supposé indépendant du temps, et ainsi l'énergie est conservée.

2

Fonctions génératrices et Fonctions de Green

2.1 Fonctions génératrices

Dans ce chapitre on considère l'amplitude de transition en présence d'une "source" externe $J(t)$. L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H_J(x, p) = H(x, p) - \hbar J(t)x. \quad (2.1)$$

Un exemple classique est l'oscillateur harmonique avec une position d'équilibre extérieure mobile $x_0(t)$. Son hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} H_{x_0} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}K(x - x_0(t))^2 \\ &= H - Kx_0(t) + 0(x_0^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $\hbar J(t) = Kx_0(t)$ pour des valeurs petites de x_0 . Comme la position d'équilibre change, l'état du système change aussi avec le temps. Supposons qu'à $t = -\infty$ le système était dans son état fondamental (ground state) et que la source $x_0(t)$ agit périodiquement pendant un temps limité. On peut ainsi calculer la probabilité de transition pour que le système reste dans un état fondamental à $t = +\infty$.

2.1.1 Transition de l'état fondamental vers l'état fondamental

On considère un système quelconque qui à l'instant initial t_i est stationnaire et change ensuite sous l'influence d'une source extérieure $J(t)$ pendant un laps de temps

fini. Après que la source soit "éteinte", l'état fondamental du système reste le même (à un terme de phase près). Le propagateur pour le système est donné par :

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \ e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x,p) + \hbar J(t)x] dt} \quad (2.3)$$

Le propagateur dépend de la source $J(t)$, c'est une fonctionnelle de la source $J(t)$. Premièrement, on admet que la source est non nulle seulement durant un laps de temps compris entre $[-T]$ et $[+T]$, on a alors :

$$(t_i < -T \text{ et } t_f > T) : J(t) = 0 \text{ pour } |t| > T. \quad (2.4)$$

le propagateur peut se décomposer tel que

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \int dx' dx \langle x_f, t_f | x', T \rangle \langle x', T | x, -T \rangle_J \langle x, -T | x_i, t_i \rangle \quad (2.5)$$

le premier et dernier propagateurs sont pris avec l'hamiltonien sans source ($J=0$) à cause de la condition (2.4).

$$\begin{aligned} \langle x, -T | x_i, t_i \rangle &= \langle x | e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H}(-T-t_i)} | x_i \rangle \\ &= \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x_i) e^{\frac{-i}{\hbar} E_n(-T-t_i)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x', T \rangle &= \langle x_f | e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H}(t_f-T)} | x' \rangle \\ &= \sum_n \phi_n(x_f) \phi_n^*(x') e^{\frac{-i}{\hbar} E_n(t_f-T)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où ϕ_n sont les fonctions propres de l'hamiltonien sans source. On suppose que le spectre de \hat{H} est limité par le bas avec les valeurs propres $E_n > E_0$. Prendre les limites $t_i \rightarrow -\infty$ et $t_f \rightarrow +\infty$ n'est pas évident car les temps t_i et t_f apparaissent comme les arguments d'une fonction oscillante. Cette fonction oscille plus vite lorsque les valeurs propres E_n sont importantes.

2.1.2 Rotation de Wick

Cette rotation consiste à remplacer les temps réels t_i et t_f de l'espace de Minkowski par des temps imaginaires pour pouvoir calculer les limites $t_i \rightarrow -\infty$ et $t_f \rightarrow +\infty$, puis ensuite revenir vers les temps réels de nouveau.

Donc :

$$t_i \rightarrow \tau = t e^{-i\epsilon} \quad (2.8)$$

La direction de la rotation est prise telle qu'il n'y ait pas de singularités lors de cette rotation. Ceci a lieu quand $0 \leq \epsilon < \pi$

$$t \rightarrow +\infty \rightarrow \tau = -i\infty, \quad t \rightarrow -\infty \rightarrow \tau = +i\infty \text{ pour } \epsilon = \frac{\pi}{2}.$$

On applique maintenant cette rotation à l'expression :

$$e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 t_i} \langle x, -T | x_i, t_i \rangle = \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x_f) e^{\frac{i}{\hbar} E_n T} e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_0) t_i} \quad (2.9)$$

On tend les temps vers l'infini et on obtient :

$$\lim_{\tau_i \rightarrow -\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 t_i} \langle x, -T | x_i, t_i \rangle = \lim_{\tau_i \rightarrow -\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x_f) e^{\frac{i}{\hbar} E_n T} e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_0) t_i} \quad (2.10)$$

le dernier terme s'annule pour $\tau > 0$ à l'exception de $n = 0 (E_0)$.

$$\lim_{\tau_i \rightarrow -\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 \tau_i} \langle x, -T | x_i, t_i \rangle = \phi_0(x) \phi_0^*(x_i) e^{\frac{i}{\hbar} E_0 T}. \quad (2.11)$$

D'une manière analogue on obtient :

$$\lim_{\tau_f \rightarrow +\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} e^{\frac{i}{\hbar} E_0 \tau_f} \langle x_f, t_f | x', T \rangle = \phi_0(x_f) \phi_0^*(x') e^{\frac{i}{\hbar} E_0 T}. \quad (2.12)$$

Comme les termes de droite des deux expressions ne dépendent pas de t, ils peuvent être continus vers l'axe réel ($\epsilon = 0$) sans changement. On a vu donc comment la rotation de wick nous a permis de rendre les deux expressions convergentes. Dans ce processus, on a remarqué que seulement l'état fondamental (ground state) contribue à l'amplitude, on insert les deux expressions ci-dessus dans celle du propagateur et on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau_i \rightarrow -\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} \lim_{\tau_f \rightarrow +\infty (\cos \epsilon - i \sin \epsilon)} e^{\frac{i}{\hbar} E_0 (\tau_f - \tau_i)} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \\ & = \phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i) e^{\frac{i}{\hbar} 2E_0 T} \times \int dx dx' \langle 0 | x' \rangle \langle x', T | x, -T \rangle_J \langle x | 0 \rangle = \\ & \langle 0, T | 0, -T \rangle_J \phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i) \phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i) e^{\frac{i}{\hbar} E_0 T} \end{aligned} \quad (2.13)$$

En utilisant la rotation de Wick inverse, on obtient :

$$\langle 0, T | 0, -T \rangle_J = \lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} E_0 (t_f - t_i)} e^{\frac{-i}{\hbar} 2E_0 T}}{\phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i)} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J, \quad (2.14)$$

avec (dans la limite $t_i \rightarrow -\infty$ et $t_f \rightarrow +\infty$)

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_{J=0} = \phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i) e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 (t_f - t_i)}. \quad (2.15)$$

On aura alors :

$$\langle 0, T | 0, -T \rangle_J = \lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty} \frac{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J}{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_0} e^{\frac{-2i}{\hbar} E_0 T} \quad (2.16)$$

Elle donne immédiatement l'amplitude de transition libre ($J=0$)

$$\langle 0, T | 0, -T \rangle_0 = e^{\frac{-2i}{\hbar} E_0 T}$$

2.1.3 Fonction génératrice

Le taux de transition de l'état fondamental vers l'état fondamental est une fonctionnelle de la source J, qu'on note par :

$$W[J] = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_{J=} = \lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty, T \rightarrow \infty} \frac{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J}{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_0} e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 2T} \quad (2.17)$$

$W[J]$ est appelée fonction génératrice.

Pour se débarrasser du facteur de phase ($e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 2T}$), on définit une fonction génératrice normalisée définie telle que

$$Z[J] = \frac{W[J]}{W[0]} = \frac{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J}{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_{J=0}} = \lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty} \frac{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J}{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_{J=0}} \quad (2.18)$$

avec $Z[0] = 1$.

Le numérateur est l'amplitude de transition et elle peut donc être écrite comme une intégrale de chemins :

$$\langle x_f, +\infty | x_i, -\infty \rangle_{J=} = N \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} [p\dot{x} - H(x,p) + \hbar J(t)x] dt} \quad (2.19)$$

Si H est quadratique en p et est sous forme : $H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$, le propagateur s'écrit comme suit

$$\langle x_f, +\infty | x_i, -\infty \rangle_{J=} = N \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} [L(x,\dot{x}) + \hbar J(t)x] dt} \quad (2.20)$$

$$Z[J] = \frac{W[J]}{W[0]} = \frac{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J}{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_{J=0}} = \frac{\int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} [L(x,x') + \hbar J(t)x] dt}}{\int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} [L(x,x')] dt}} \quad (2.21)$$

2.1.4 Dérivées fonctionnelles des amplitudes de transition

On commence par l'expression de l'intégrale de chemins comme une limite finie d'intégrale :

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_{J=} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{K=1}^n dx_k \int \prod_{l=0}^n \frac{dp_l}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n [P_j(x_{j+1} - x_j) - \eta H(p_j, x_j) + \hbar J_l x_j]} \quad (2.22)$$

On calcule ensuite ses dérivées fonctionnelles par rapport a J.

Supposons que $F[J]$ est une fonctionnelle de la fonction $f(x)$, la dérivée fonctionnelle de F est définie par :

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)], \quad (2.23)$$

on pose :

$$F(x_i, p_i) = P_j(x_{j+1} - x_j) - \eta H(p_j, x_j) \quad (2.24)$$

$$\frac{\delta \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle}{\delta J(t_1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dx_k \int \prod_{l=0}^n \frac{dp_l}{2\pi\hbar} \left[e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n [F(x_j, p_j) + \hbar x_j [J_j + \epsilon \delta(t_j - t_1)]]} - \frac{i}{\hbar} [F(x_j, p_j) + \hbar x_j J_j] \right] \right] \quad (2.25)$$

$$\frac{\delta \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J}{\delta J(t_1)} = iN \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x, p) + \hbar J(t)x] dt} \quad (2.26)$$

Pour comprendre le sens de cette expression, revenons au propagateur :

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_1 \dots dx_n \langle x_f, t_f | x_n, t_n \rangle \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \quad (2.27)$$

alors que dans :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_{J=0}}{\delta J(t_1)} &= \int dx_1 \dots dx_n \langle x_f, t_f | x_n, t_n \rangle \dots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle x_1(t_1) \\ &= \int dx_1 \dots dx_n \langle x_f, t_f | x_n, t_n \rangle \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle x_1, t_1 | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle \\ &= \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

car $\hat{x}|x_1(t_1)\rangle = x_1(t_1)|x_1(t_1)\rangle$,
d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0} &= iN \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x, p)] dt} \\ &= i \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle \end{aligned} \quad (2.29)$$

.

Dans le cas où H est séparable en p et x et est quadratique en P, cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0} &= iN \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(x, x') dt} \\ &= i \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ainsi, la dérivée fonctionnelle du propagateur par rapport à la source donne l'élément de la matrice de transition de la coordonnée x. Les dérivées d'ordre supérieur donnent :

$$\frac{\delta^n \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle}{\delta J(t_1) J(t_2) \dots J(t_n)} = (i)^n \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) x(t_2) \dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x, p) + J(x)] dt} \quad (2.31)$$

Dans le cas où n=2, on a

$$\frac{\delta^2 \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle}{\delta J(t_\alpha) J(t_\beta)} \Big|_{J=0} = (i)^2 \int dx_1 \dots dx_n \langle x_f, t_f | x_n, t_n \rangle \dots$$

$$\begin{aligned} \dots < x_\ell, t_\ell | \hat{x}(t_\alpha) | x_{\ell-1}, t_{\ell-1} > \dots < x_k, t_k | \hat{x}(t_\beta) | x_{k-1}, t_{k-1} > \dots < x_1, t_1 | x_i, t_i > \quad (2.32) \\ &= i^2 \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_\alpha) x(t_\beta) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x,p)] dt} \end{aligned}$$

On a supposé que $t_\alpha > t_\beta$, car chaque fonction de Green infinitésimale se propage dans le sens croissant du temps. Dans ce cas, on

$$\frac{\delta^2 < x_f, t_f | x_i, t_i >}{\delta J(t_\alpha) J(t_\beta)} = i^2 < x_f, t_f | \hat{x}(t_\alpha) \hat{x}(t_\beta) | x_i, t_i >, \quad (2.33)$$

cependant, si $t_\alpha < t_\beta$, ces deux instants apparaîtront dans un ordre différent. Donc on introduit le produit chronologique T , défini tel que

$$T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2)] = \{ \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \text{ si } t_1 > t_2 \text{ et } \hat{x}(t_2) \hat{x}(t_1) \text{ si } t_2 > t_1 \} \quad (2.34)$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 < x_f, t_f | x_i, t_i >}{\delta J(t_\alpha) J(t_\beta)} \Big|_{J=0} &= i^2 \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) x(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x,p)] dt} \quad (2.35) \\ &= i^2 < x_f, t_f | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2)] | x_i, t_i > \end{aligned}$$

A l'ordre n , on peut généraliser tel que

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n < x_f, t_f | x_i, t_i >}{\delta J(t_1) J(t_2) \dots J(t_n)} \Big|_{J=0} = < x_f, t_f | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | x_i, t_i >. \quad (2.36)$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n < x_f, t_f | x_i, t_i >}{\delta J(t_1) J(t_2) \dots J(t_n)} \Big|_{J=0} &= \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots J(t_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad x(t_1) \dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x,p)] dt}}{\int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \quad e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{x} - H(x,p)] dt}}, \quad (2.37) \\ &= \frac{< x_f, t_f | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | x_i, t_i >}{< x_f, t_f | x_i, t_i >} \end{aligned}$$

avec $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$ et tous les autres instants t_1, t_2, \dots, t_n sont situés entre ces limites.

Dans le cas où H est séparable en (P) et (x) et est quadratique en (P) , on a :

$$\frac{< x_f, t_f | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | x_i, t_i >}{< x_f, t_f | x_i, t_i >} = \frac{\int \mathcal{D}x \quad x(t_1) \dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S(x(t))}}{\int \mathcal{D}x \quad e^{\frac{i}{\hbar} S(x(t))}} \quad (2.38)$$

où $S(x(t))$ est l'action qui dépend de la trajectoire $x(t)$.

$$< x_f, t_f | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | x_i, t_i > \Big|_{J=0} \rightarrow < x_f, t_f | 0 > < 0 | T[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n)] | 0 > < 0 | x_i, t_i > \Big|_{J=0}$$

$$= \langle 0 | T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)\dots\hat{x}(t_n)] | 0 \rangle = \phi_0(x_f) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t_f} \phi_0^*(x_i) e^{\frac{i}{\hbar} E_0 t_i}, \quad (2.39)$$

Le dénominateur s'écrit comme.

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \rightarrow \phi_0(x_f) \phi_0^*(x_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_f - t_i)}. \quad (2.40)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)\dots\hat{x}(t_n)] | 0 \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}x \ x(t_1)\dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S(x(t))}}{\int \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{\hbar} S(x(t))}} \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1)\dots J(t_n)} Z[J] |_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

$\langle 0 | T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)\dots\hat{x}(t_n)] | 0 \rangle$ est appelée fonction de corrélation. Toutes les fonctions de corrélation sont générées par $Z[J]$, cette fonction est appelée fonction génératrice.

2.2 matrice S et fonctions de Green

Dans ce qui va suivre, on va s'intéresser aux calculs des amplitudes de transition pour le processus faisant intervenir les particules élémentaires. On va établir une relation entre ces amplitudes de transition et la valeur moyenne dans le vide des opérateurs des champs. C'est le théorème de réduction.

2.2.1 Matrice S

L'état initial dans une diffusion est formé par des particules séparées "on-shell" à $t = -\infty$. Le terme on-shell signifie que ces particules obéissent à la relation de dispersion $p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$.

L'état fondamental du système est l'état d'énergie minimale, c'est l'état sans aucune particule : le vide. À $t = +\infty$, on a l'état final où les deux particules sont libres on-shell. L'état de vide est le même.

L'amplitude de transition de la collision $m + n \rightarrow m' + n'$ est déterminée par la matrice S qui est l'amplitude pour qu'un état initial $|\alpha, in\rangle$ se trouve, à $t = +\infty$, dans l'état $|\beta, out\rangle$ où .

α et β sont les moments conjugués et les autres nombres quantiques

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle \quad (2.42)$$

. On introduit un opérateur S qui transforme les états "in" en états "out" tel que

$$\langle \beta, out | = \langle \beta, in | \hat{S} \quad (2.43)$$

donc

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, in | \hat{S} | \alpha, in \rangle \quad (2.44)$$

. \hat{S} est un opérateur unitaire :

$$\langle \beta, in | \hat{S} \hat{S}^\dagger | \alpha, in \rangle = \langle \beta, out | \alpha, out \rangle = S_{\alpha\beta} \quad (2.45)$$

donc

$$\hat{S}\hat{S}^+ = I \quad (2.46)$$

Les champs se transforment de la façon standard sous les transformations unitaires tel que .

$$\hat{\phi}_{out} = \hat{S}^+\hat{\phi}_{in}\hat{S} \quad (2.47)$$

l'élément de matrice $S_{\beta\alpha}$ peut s'écrire sous la forme (en théorie classique) .

$$S_{\beta\alpha} = \int \Psi_{\beta}^*(\vec{x}, t \longrightarrow +\infty)\Psi_{\alpha}^+(\vec{x}, t \longrightarrow -\infty)d^3x \quad (2.48)$$

où

$$\Psi^+(\vec{x}, t \longrightarrow -\infty) = \Psi_{in(x,t)} \quad (2.49)$$

On généralisera ceci dans le cas des champs et on introduit les champs asymptotiquement libres ϕ_{in} et ϕ_{out} tele que.

$$\phi_{in} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x, t)$$

$$\phi_{out} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, t)$$

En appliquant l'opérateur d'évolution dans le temps U sur le champs ϕ_{in}, \dots, \dots obtient :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \phi_{out} | U(+\infty, -\infty) | \phi_{in} \rangle \quad (2.50)$$

avec

$$U(+\infty, -\infty) = U(+\infty, t_0)U(t_0, -\infty) \quad (2.51)$$

d'où :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \phi_{out} | U(+\infty, t_0)U(t_0, -\infty) | \phi_{in} \rangle = \langle \phi_{out}^{(-)}(t_0) | \phi_{in}^{(+)}(t_0) \rangle \quad (2.52)$$

Cette forme correspond à :

$$S_{\beta\alpha} = \int \Psi_{\beta}^* \Psi_{\alpha}^{(+)} d^3x \quad (2.53)$$

2.2.2 Théorème de réduction

Les états asymptotiquement libres peuvent être considérés comme les états excités du vide de la théorie. Les champs sont à présent des opérateurs (seconde quantification). La quantification est obtenue en imposant les relations de commutations pour les champs et leurs moments tels que

$$[\Pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.54)$$

$$[\Pi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = 0 \quad (2.55)$$

$$[\Phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = 0 \quad (2.56)$$

Le développement de Fourier de l'opérateur du champ $\phi(x)$ est écrit comme suit :

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3K}{\sqrt{(2\Pi)^3(2\omega_K)}} [a_{\vec{K}}(t) \exp i\vec{K}\vec{x} + a_{\vec{K}}^+(t) \exp^{-i\vec{K}\vec{x}}] \quad (2.57)$$

avec

$$\omega_k = (K^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (2.58)$$

En le développant en série de Fourier, on obtient :

$$\Pi(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^3K \omega_K}{\sqrt{(2\Pi)^3(2\omega_K)}} [a_{\vec{K}}(t) e^{i\vec{K}\vec{x}} - a_{\vec{K}}^+(t) \exp^{-i\vec{K}\vec{x}}] \quad (2.59)$$

Au fait, on a :

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3K}{\sqrt{(2\Pi)^3 2\omega_K}} [a_K e^{i\vec{K}\vec{x} - i\omega_K t} + a_K^+ \exp -i\vec{K}\vec{x} + i\omega_K t] \quad (2.60)$$

et

$$\Pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi} = -i \int \frac{d^3K \omega_K}{\sqrt{(2\Pi)^3 2\omega_K}} [a_K e^{i\vec{K}\vec{x} - i\omega_K t} - a_K^+ e^{-i\vec{K}\vec{x} + i\omega_K t}] \quad (2.61)$$

La mesure dans l'intégrale est choisie de façon à ce qu'elle soit un invariant relativiste , l'élément invariant est :

$$\frac{d^4 K}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(K^2 - m^2) \theta(K_0) \quad \text{avec } K_0 > 0 \quad (2.62)$$

$$= \delta\left[\frac{d^4}{(2\pi)^3} \delta(K^2 - m^2) \theta(K_0)\right] = \frac{d^3 K}{(2\pi)^3 2\omega_K}$$

$a(k)$ et $a^+(k)$ sont des opérateurs.

De la relation :

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_K}} [a_k e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} + a_K^+ e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t}] \quad (2.63)$$

on peut la réécrire sous la forme suivante :

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3 K [a(K) f_K(x) + a^+(k) f_K^*(x)] \quad (2.64)$$

où $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-iKx}$

et

$$\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi} = -i \int d^3 k [a(K) f(K) - a^+(K) f^*(K)] \omega_k \quad (2.65)$$

Les transformées de fourrier inverses donnent

$$\frac{1}{\sqrt{(2x)^3 2\omega_k}} \int d^3 x e^{ikx} \phi(x) = \int f_k^*(x) \phi(x) d^3 x = \frac{1}{2\omega_k} [a(k) + a^+(-k) e^{2i\omega_k t}] \quad (2.66)$$

et

$$\int f_k^*(x) \dot{\phi}(x) d^3 x = \frac{-i}{2} [a(k) - a^+(-k) e^{2i\omega_k t}] \quad (2.67)$$

ceci donne :

$$a(k) = \int f_k^*(\vec{x}, t) [w_k \phi(\vec{x}, t) + i \dot{\phi}(\vec{x}, t)] d^3 x \quad (2.68)$$

$$a(k) = i \int d^3 x [f_k^* \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} - (\frac{\partial f_k^*}{\partial t}) \phi(\vec{x}, t)] \quad (2.69)$$

$$a(k) = i \int d^3 x f_k^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\vec{x}, t) \quad (2.70)$$

où :

$$a(t) \overleftrightarrow{\partial}_0 b(t) = a(t) \frac{\partial b}{\partial t} - \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) b(t) \quad (2.71)$$

et

$$a^+(x) = -i \int d^3x f_k(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\vec{x}, t) \quad (2.72)$$

avec :

$$[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}^+(t)] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (2.73)$$

$$[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}(t)] = [a_{\vec{k}}^+(t), a_{\vec{k}'}^+(t)] = 0 \quad (2.74)$$

L'élément de la matrice $S_{\beta\alpha}$ va s'écrire tel que :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle = \langle \beta, out | a_{in}^+(k) | \alpha - k, in \rangle \quad (2.75)$$

où on a admis que l'état initial $|\alpha, in \rangle$ contenait une particule libre de moment \vec{k} .

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle = \langle \beta, out | a_{out}^+(k) | \alpha - k, in \rangle + \langle \beta, out | a_{in}^+(k) - a_{out}^+(k) | \alpha - k, in \rangle \quad (2.76)$$

les opérateurs de création "in" et "out" s'écrivent comme suit

$$a_{in,out}^+(k) = -i \int d^3k f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in,out}(\vec{x}, t) \quad (2.77)$$

$$\langle \beta, out | \alpha, in \rangle = \langle \beta - k, out | \alpha - k, in \rangle + \langle \beta, out | a_{in}^+(k) - a_{out}^+(k) | \alpha - k, in \rangle \quad (2.78)$$

$$\langle \beta, out | \alpha, in \rangle = \langle \beta - k, out | \alpha - k, in \rangle - i \langle \beta, out | \int d^3x f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 [\phi_{in}(x) - \phi_{out}(x)] | \alpha - k, in \rangle. \quad (2.79)$$

On va démontrer que le terme de droite est indépendant du temps on calcule alors :

$$\begin{aligned} \partial_0 [f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x)] &= \partial_0 [f(x) \partial_0 \phi_{in}(x) - \partial_0 f(x) \cdot \phi_{in}(x)] \\ &= f(x) \partial_0^2 \phi_{in} - (\partial_0^2 f(x)) \cdot \phi_{in}(x) \end{aligned} \quad (2.80)$$

or $f(x)$ et ϕ_{in} sont solutions de l'équation de Klein-Gordon.

$$(\square + m^2)\phi_{in} = 0 \quad et (\square + m^2)e^{ikx} = 0. \quad (2.81)$$

donc :

$$\partial_0 [f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x)] = f(x) [(\nabla^2 \phi_{in}(x)) - m^2 \phi_{in}(x)] - [(\vec{\nabla}^2 f(x)) - m^2 f(x)] \phi_{in}(x) \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 [f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x)] &= f(x) (\vec{\nabla}^2 \phi_{in}(x) - (\vec{\nabla}^2 f(x)) \phi_{in}(x)) \\ &= \vec{\nabla} [f(x) \vec{\nabla} \phi_{in}(x)] - \vec{\nabla} [(\vec{\nabla} f(x)) \phi_{in}(x)] + \vec{\nabla} f \vec{\nabla} \phi(x) - \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \phi_{in}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Quand on intègre sur tout le volume, l'expression s'annule.

Donc

$$\partial_0 [f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x)] = 0$$

Le terme de droite est indépendant du temps ,on peut donc le prendre à n'importe quel instant, en particulier à $t = \pm\infty$. On remplacera les états in et out par $\phi(x)$.

$$\begin{aligned} \langle \beta, out | \alpha, out \rangle = & \langle \beta - k, out | \alpha - k, in \rangle + i \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \beta, out | \int d^3 x f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) | \alpha - k, in \rangle \\ & - i \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \beta, out | \int d^3 x f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) | \alpha - k, in \rangle . \end{aligned}$$

On utilise la relation suivante :

$$\begin{aligned} (\lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty}) \int d^3 x (f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} [f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)] d^3 x \\ &= \int d^4 x [f_k(x) \partial_0^2 \phi(x) - (\partial_0^2 f_k(x)) \phi(x)] \\ &= \int d^4 x [f_k(x) \partial_0^2 - (\vec{\nabla}^2 - m^2) f_k(x)] \phi(x) \end{aligned} \quad (2.84)$$

On doit noter que dans cette relation, $\phi(x)$ est un champ en interaction puisqu'on a intégré entre $-\infty$ et $+\infty$ dans le temps , Donc $\phi(x)$ ne résoudre pas l'équation de Klein-Gordon et donc l'intégrale ne s'annule pas :

$$\int d^4 x (f \partial_0^2 \phi - (\partial_0^2 f) \phi) = \int d^4 x [f \partial_0^2 \phi - (\vec{\nabla}^2 - m^2) f \cdot \phi].$$

En intégrant par partie deux fois,on obtient :

$$\int d^4 x [f \partial_0^2 \phi - (\partial_0^2 f) \phi] = \int d^4 x f(x) (\square + m^2) \phi(x).$$

donc nous avons :

$$\langle \beta, out | \alpha, in \rangle = \langle \beta - k, out | \alpha - k, in \rangle + i \int d^4 x f_k(x) (\square + m^2) \langle \beta, out | \phi(x) | \alpha - k, in \rangle$$

Dans cette expression nous avons supprimé une particule dans l'état "in", Maintenant on continue en supprimant une particule de moment k de l'état " out" en passant exactement par les mêmes étapes de calcul que précédemment. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \beta, out | \phi(x) | \alpha - k, in \rangle &= \langle \beta - k', out | a_{out}(k') \phi(x) | \alpha - k, in \rangle \\ &= \langle \beta - k', out | \phi(x) a_{in}(k') | \alpha - k', in \rangle + \langle \beta - k', out | a_{out}(k') \phi(x) - \phi(x) a_{in}(k') | \alpha - k, in \rangle \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\langle \beta, out | \phi(x) | \alpha - k, in \rangle = \langle \beta - k', out | \phi(x) | \alpha - k - k', in \rangle$$

$$+ i \int d^3 x' \langle \beta - k', out | \{ f_{k'}^*(x') \overrightarrow{\partial}_\nu [\phi_{out}(x') \phi(x) - \phi(x) \phi_{in}(x')] \} | \alpha - k, in \rangle \quad (2.86)$$

$$= \dots + i \langle \beta - k', out | \int d^4 x' \{ [f_{k'}^*(x') \partial_\nu^2 T[\phi(x') \phi(x)] - (\partial_\nu^2 f_{k'}^*(x') T[\phi(x') \phi(x)]] | \alpha - k, in \rangle .$$

On obtient finalement ,en négligeant le 1^{er} terme

$$\begin{aligned} \langle \beta, out | \alpha, in \rangle &= i^2 \int d^4 x d^4 x' f_{k'}^*(x') f_k(x) (\square' + m^2) (\square + m^2) \langle \beta - k', out \rangle \\ &\quad \times T[\phi(x') \phi(x)] | \alpha - k, in \rangle \end{aligned} \quad (2.87)$$

. Cette réduction peut être continuée jusqu'à ce qu'on ait n particules avec moment k' dans l'état final "out" et m particules avec le moment k dans l'état initial "in".

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, nk', out | \alpha, mk, in \rangle =$$

$$i^{m+n} \int \prod_{i=1}^m d^4 x_i \int \prod_{j=1}^n d^4 x'_j f_{k'_j}^*(x'_j) f_{k_i}(x_i) \times (\square'_j + m^2)(\square_i + m^2) \quad (2.88)$$

$$\times \langle 0 | T[\phi(x'_1)\phi(x'_2)\dots\phi(x'_n)\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)] | 0 \rangle$$

Ceci est le "théorème de réduction". Il nous permet d'exprimer les éléments de la matrice S en fonction des fonctions de Green à $(m+n)$ points (qui sont appelées aussi souvent fonction de Corrélation) définies telles que,

$$G(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x_1, x_2, \dots, x_m) = \langle 0 | T[\phi(x'_1)\dots\phi(x'_n)\phi(x_1)\dots\phi(x_m)] | 0 \rangle \quad (2.89)$$

Il faut remarquer que dans le théorème de réduction, l'interaction est contenue dans l'opérateur des champs. L'état du vide est celui de la théorie en interaction. Le processus physique décrit dans le théorème de réduction est celui de m particules "on shell" dans l'état initial, dans les points x_1, \dots, x_m de l'espace-temps et n particules "on shell" dans l'état final, en x'_1, \dots, x'_n avec une région d'interaction entre ensemble de points.

2.3 Fonctions de Green

Au paragraphe précédent, nous avons vu que les éléments de la matrice S peut être calculés, une fois les fonctions de corrélation ou de Green sont connues. Dans ce chapitre on verra comment elles seront obtenues comme des dérivées fonctionnelles des fonctions génératrices de la théorie.

2.3.1 Fonctions de Green à n-points

La fonction de corrélation est la valeur moyenne du produit chronologique des opérateurs de champs dans le vide,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle. \quad (2.90)$$

Elle détermine le taux de transition pour tous les processus physiques,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) e^{is[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{is[\phi]}} \quad (2.91)$$

avec

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4 x, \quad (2.92)$$

où le vide est celui de la théorie en interaction. On a déjà démontré que :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.93)$$

Notons que $G(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction symétrique de ses arguments

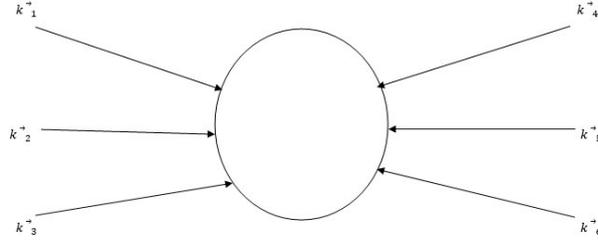
$$Z[J] = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n i^n G(x_1, \dots, x_n) J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) \quad (2.94)$$

2.3.2 Représentation d'impulsion

Il est souvent avantageux de travailler dans l'espace des impulsions. En général la transformation de la fonction de Green dans la représentation d'impulsion est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)} G(x_1, \dots, x_n) d^4 x_1 d^4 x_2 \dots d^4 x_n \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) G(p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (2.95)$$

La fonction δ reflète ici la conservation de l'impulsion totale due à l'invariance par translation. On prend toutes les impulsions qui sont dirigées vers le vertex.



2.3.3 Champs scalaires libres

Dans ce cas, la fonction génératrice est donnée par :

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp \frac{-i}{2} \int J(x) D_F(x-y) J(y) d^4 x d^4 y \\ \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \frac{-i}{2} \int J(x_1) D_F(x_1-x_2) J(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 \Big|_{J=0} \\ &= \frac{-i}{2} \int J(x_1) D_F(x_1-x_2) J(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 \Big|_{J=0} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{\delta}{\delta J(x)} [J(x_1) D_F(x_1-x_2) J(x_2)] \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i}{2} \left\{ \int d^4x_1 \int d^4x_2 \delta(x_1 - x) D_F(x_1 - x_2) J(x_2) + \int d^4x_1 \int d^4x_2 \delta(x - x_2) D_F(x_1 - x_2) J(x_1) \right\} \\
&= \frac{-i}{2} \left\{ \int d^4x_2 D_F(x - x_2) J(x_2) + \int d^4x_1 D_F(x - x_1) J(x_1) \right\} \\
&\quad \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0} = -i \int d^4x_1 D_F(x - x_1) J(x_1) \Big|_{J=0} = 0 \\
\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} &= e^{\frac{-i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 J(x_1) D_F(x_1 - x_2) J(x_2)} [-i D_F(x - y)] + (-i)^2 * \quad (2.97) \\
&\int d^4x_1 D_F(x - x_1) J(x_1) \int d^4x_2 D_F(y - x_2) J(x_2) e^{\frac{-i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 J(x_1) D_F(x_1 - x_2) J(x_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} &= -i D_F(x - y) \exp^{\frac{-i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 J(x_1) D_F(x_1 - x_2) J(x_2)} + (-i)^2 * \\
&\int d^4x_1 \int d^4x_2 D_F(x - x_1) D_F(y - x_2) J(x_1) J(x_2) \exp^{\frac{-i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 J(x_1) D_F(x_1 - x_2) J(x_2)}
\end{aligned}$$

Donc

$$G(x, y) = - \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} \Big|_{J=0} = i D_F(x - y) \quad (2.98)$$

Le propagateur à deux points est le propagateur de Feynman. Les dérivées d'ordres supérieures peuvent être simplement obtenues en développant la fonction génératrice $Z_0[0]$ telle que

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2} \int J(x) D_F(x - y) J(y) d^4x d^4y \right)^n \quad (2.99) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_{2n} D_{12} D_{34} \dots D_{2n-1 \ 2n} J_1 J_2 \dots J_{2n}.
\end{aligned}$$

où

$$D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j) \text{ et } J_k = J(x_k).$$

Il faut remarquer que Z_0 contient toujours un nombre pair de puissance de J , il est donc évident qu'une fonction de Green à nombre impair de points s'annule.

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \left(\frac{1}{i} \right)^{2k} \frac{\delta^{2k} Z_0[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_{2k}} \Big|_{J=0} \quad (2.100)$$

$$= \frac{(i)^k}{2^k k!} \sum_p D_{p_1 p_2} \dots D_{p_{2k-1} p_{2k}}$$

on a $D_{p_1 p_2} = D_{p_2 p_1}$, $p \equiv$ permutations.

La relation ci-dessus établit que la fonction de Green à n-points d'un système de particules libres peut être écrite comme produits de fonctions de Green à deux point. C'est ce qu'on appelle théorème de Wick.

Exemple de $n = 4$:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{i^2}{2^2 2!} \sum_{p \in S_4} D_{p_1 p_2} D_{p_3 p_4} = \frac{1}{8} \sum_{p \in S_4} D_{p_1 p_2} D_{p_3 p_4} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) \\ &\quad - D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \\ &\quad - D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2.102)$$

2.3.4 règles de Feynman

On peut représenter ces résultats d'une manière graphique. Les règles de Feynman qui établissent la relation entre les représentations algébrique et graphique, sont telles que.

1. Chaque propagateur de Feynman est représenté par une ligne :

$$x \text{-----} y \equiv i D_F(x - y)$$

2. Chaque source est représentée par une croix :

$$x \text{-----} \times \equiv i J(x)$$

3. on intègre sur tout l'espace temps, les courants $J(x)$

4. Chaque diagramme a un facteur de symétrie".

par exemple, si on doit intégrer entre les points externes x et y , Ces derniers peuvent être inter changés sans changement de résultat, le facteur de symétrie est donc $\frac{1}{2}$

par exemple :

$$G_0^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = :$$

Maintenant, on pose :

$$Z_0[J] = e^{iS_0[J]} \tag{2.103}$$

avec :

$$iS_0[J] = -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)$$

utilisant les règles 2,3 et 4, on trouve immédiatement :

$$iS_0[J] \equiv \text{---} \times \text{---} \times$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= 1 + \left(-\frac{i}{2}\right) \int J(x) D_F(x-y) J(y) d^4x d^4y \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[-\frac{i}{2} \int J(x) D_F(x-y) J(y) d^4x d^4y\right]^2 + \dots \\ &= 1 + iS_0[J] + \frac{1}{2!} (iS_0[J])^2 + \frac{1}{3!} [iS_0[J]]^3 + \dots \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$Z_0[J] = 1 + \text{---} \times \text{---} \times + \frac{1}{2!} \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \\ \text{---} \times \text{---} \times \end{array} + \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \\ \text{---} \times \text{---} \times \\ \text{---} \times \text{---} \times \end{array} + \dots$$

On appellera tous les graphes collés entre eux "graphes connectés" (connected graphs) et tous les autres "non connectés" (unconnected graphs).

Dans notre exemple, $S_0[J]$ est représenté par un seul graphe connecté

$$iS_0[J] = \text{X} \text{---} \text{X}$$

.Le développement en série de puissances générés des graphes non connectés.

La fonction de Green connectée est donnée par :

$$G_c(x_1, x_2) = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 S_0}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = iD_F(x_1 - x_2) \quad (2.104)$$

Toutes les autres dérivées d'ordres supérieures sont nulles.

2.3.5 Champs Scalaires en interaction

On considère le lagrangien de la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V \quad (2.105)$$

où \mathcal{L}_0 est le lagrangien scalaire libre et V représenté une self interaction des champs. Pour un tel lagrangien, la fonction génératrice pour les fonctions de Green à n -points ne peut pas être calculée. On a alors recours aux calculs perturbatifs. La fonction de Green à un points est par définition donnée :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} \quad (2.106)$$

où

$$e^{iS[\phi]} = e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 - V + i\frac{\epsilon}{2}\phi^2)} \quad (2.107)$$

L'exponentielle de l'action peut être développée en série de Taylor de l'interaction :

$$e^{iS[\phi]} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (-i \int d^4x V)^N e^{iS_0[\phi]} \quad (2.108)$$

avec

$$S_0[\phi] = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + i\phi^2 \frac{\varepsilon}{2}) \quad (2.109)$$

donc

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (-i \int d^4x V)^N e^{iS_0[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (-i \int d^4x V)^N e^{iS_0[\phi]}} \quad (2.110)$$

et

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \tilde{0} | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_n)] | \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{\langle 0 | T[\hat{\phi}_{in}(x_1)\dots\hat{\phi}_{in}(x_n) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (-i \int d^4x V)^N] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (-i \int d^4x V)^N] | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$|\tilde{0}\rangle$ est l'état du vide de l'hamiltonien total en interaction.

L'expression ci dessus permet de calculer la valeur moyenne dans le vide. de la théorie en interaction, du produit chronologique de champs en développent pèrurbatif des valeurs moyennes des champs libres.

2.3.6 Développement perturbatif

Pour le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V(\phi)$, on a :

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z_0 \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 - V(\phi) + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} \\ &= Z_0 \int \mathcal{D}\phi e^{-i \int d^4x V(\phi)} e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} \end{aligned} \quad (2.112)$$

où Z_0 est l'inverse de l'intégrale de chemins pour $J = 0$

$$Z_{-1}^0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 - V(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]}. \quad (2.113)$$

On utilise la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_y} e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} &= \\ \phi(y) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} & \end{aligned} \quad (2.114)$$

et on a aussi :

$$V[\phi(y)] e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} = V\left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)}\right] e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i\frac{\varepsilon}{2}\phi^2]} \quad (2.115)$$

et :

$$e^{-i \int d^4 y V[\phi(y)]} e^{i \int d^4 x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i \frac{\epsilon}{2} \phi^2]} = e^{-i \int d^4 y V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)})} e^{i \int d^4 x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i \frac{\epsilon}{2} \phi^2]} \quad (2.116)$$

$$Z[J] = Z_0 e^{-i \int d^4 y V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)})} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4 x [\mathcal{L}_0 + J(\phi) + i \frac{\epsilon}{2} \phi^2]} \quad (2.117)$$

$$Z[J] = Z_0 e^{-i \int d^4 z V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)})} e^{\frac{-i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} &= Z_0 e^{-i \int d^4 z V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)})} e^{i S_0[J]} \\ &= Z_0 e^{-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)})} Z_0[J]. \end{aligned} \quad (2.119)$$

En développant l'exponentielle contenant V, on obtient l'expansion perturbative de $Z[J]$.

Comme dans la plus part des cas on s'intéresse aux graphes connectés, on ne développera pas $Z[J]$, mais sur logarithme tel que

$$iS[J] = \ln Z[J] \quad \text{or} \quad Z[J] = e^{iS[J]} \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} \ln Z[J] &= \ln Z_0 + \ln(1 + e^{-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)})} e^{i S_0[J]}) \\ &= \ln Z_0 + i S_0[J] + \ln(e^{-i S_0[J]} e^{-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})} e^{i S_0[J]}) \\ &= iS[J] = \ln Z_0 + i S_0[J] + \ln[1 + e^{-i S_0[J]} (e^{-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})} - 1) e^{i S_0[J]}] \end{aligned} \quad (2.121)$$

On pose :

$$\varepsilon[J] = e^{-i S_0[J]} (e^{-i \int d^4 x V} - 1) e^{i S_0[J]} \quad (2.122)$$

et on obtient :

$$iS[J] = \ln Z[J] = \ln Z_0 + i S_0[J] + \ln(1 + \varepsilon[J]) \quad (2.123)$$

$$= \ln Z_0 + i S_0[J] + (\varepsilon[J] - \frac{1}{2} \varepsilon^2[J] + 0(\varepsilon^3)) \quad (2.124)$$

Cette expression représente le développement de S en puissances de V (pour $V \rightarrow 0$). Pour obtenir un développement en puissance de V, on réexprime $\varepsilon[J]$ en fonction de V tel que

$$\varepsilon[J] = \exp^{-i S_0[J]} \left\{ -i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}) + \frac{1}{2!} [-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})]^2 + \dots \right\} \exp^{i S_0[J]} \quad (2.125)$$

On l'insère dans l'expression de $iS[J]$ et on obtient

$$\begin{aligned} iS[J] &= \ln Z_0 + i S_0[J] + e^{-i S_0[J]} [-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})] e^{i S_0[J]} + \\ &\quad + \frac{1}{2!} e^{-i S_0[J]} [-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})]^2 e^{i S_0[J]} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ e^{-i S_0[J]} [-i \int d^4 x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J})] e^{i S_0[J]} \} + 0(V^3) \end{aligned} \quad (2.126)$$

Finalemment, on a :

$$iS[J] = \ln Z_0 + iS_0[J] + iS_1[J] + iS_2[J] - \frac{1}{2}(iS_1[J])^2 + 0(V^3) \quad (2.127)$$

avec :

$$iS_0[J] = -\frac{1}{2} \int J(x) D_F(x-y) J(y) d^4x d^4y, \quad (2.128)$$

$$iS_1[J] = e^{-iS_0[J]} (-i) \int d^4x V\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right) e^{iS_0[J]}, \quad (2.129)$$

$$iS_2[J] = \frac{1}{2!} e^{-iS_0[J]} \left[-i \int d^4x V\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right]^2 e^{iS_0[J]}. \quad (2.130)$$

3

Intégrales de chemins pour les champs scalaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre , on va appliquer les résultats du chapitre précédent au cas des champs scalaires. Il a été démontré que la valeur moyenne dans le vide du produit chronologique des opérateurs \hat{x} pouvait être obtenue comme des dérivées fonctionnelles d'une fonction génératrice .

Tous ces résultats peuvent être appliqués à la théorie des champs, sachant que les champs jouent le rôle de coordonnées de la théorie ceci implique que la valeur moyenne dans le vide du produit chronologique de champs (opérateurs) peut être obtenue par le biais de dérivation d'une fonction génératrice appropriée.

Cette valeur moyenne, dans le vide, de champs joue un rôle très important en théorie des champs. Chaque opérateur de champs crée ou annihile des particules et un produit chronologique d'opérateurs de champs peut ainsi décrire l'amplitude de probabilité pour un processus physique où des particules sont créées et annihilés .

3.2 Fonction génératrice pour les champs

On suppose que le système est décrit par la densité lagrangienne de la forme :

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - V(\phi) \quad (3.1)$$

. Le lagrangien L est donné par :

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x = \int [\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - V(\phi)] d^3x \quad (3.2)$$

. L'action est donnée par :

$$S = \int dt L(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.3)$$

. Pour définir la densité hamiltonienne, on calcule le moment conjugué :

$$\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \dot{\phi} \quad (3.4)$$

. La densité hamiltonienne H est donnée par :

$$H(\pi, \phi, \vec{\nabla} \phi) = \pi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi) \quad (3.5)$$

. La fonction génératrice $W[J] \equiv \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J = N' \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp i \int dt \int d^3x (\pi \dot{\phi} - H + J\phi)$

On se place dans la référentiel où $\hbar = c = 1$. et $J \equiv J(x)$ est une source arbitraire et $d^4x = dt d^3x$.

$$W[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp i \int d^4x [L(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi] = N \int \mathcal{D}\phi \exp i \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - V(\phi) + J(\phi)] \quad (3.6)$$

La fonction génératrice normalisée et donnée par :

$$Z[J] = \frac{W[J]}{W[0]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp -i \int d^4x [\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + V(\phi) - J(\phi)]}{\int \mathcal{D}\phi \exp -i \int d^4x [\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + V(\phi)]} \quad (3.7)$$

ou on a utilisé le fait que :

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi &= \int d^3x [\partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) - \phi (\partial^\mu \partial_\mu \phi)] = - \int d^3x \phi (\partial^\mu \partial_\mu \phi) \\ &= - \int d^3x (\phi \square \phi) \end{aligned} \quad (3.8)$$

est, où : $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - (\vec{\nabla})^2$ est le d'Alembertien.

L'intégrant dans l'expression de $Z[J]$ est une fonction oscillante et l'intégrale de chemins n'est pas bien définie. Il existe deux manières de remédier à ce problème :

a) introduction d'un terme convergent $\exp -\frac{i}{2}\epsilon\phi^2$ avec $\epsilon > 0$

b) définir Z dans un espace euclidien en opérant une rotation de wick.

3.2.1 Représentation Euclidienne :

L'espace réel euclidien est obtenu à partir de l'espace de Minkowski en tournant l'axe des "temps" d'un angle $\delta = -\frac{\pi}{2}$ vers l'axe imaginaire (rotation de wick). On appelle un point dans l'espace-temps Euclidien par x_E . Il est relié au point dans l'espace de Minkowski de telle façon que :

$$x_E = (\vec{x}, x_4) \text{ avec } x_4 = ix_0 = it.$$

Sous la rotation de wick, $t \rightarrow -it$, x_4 devient réel. Donc :

$$d^4x_E \equiv d^3x \quad dx_4 = d^3x \quad idt = id^4x \quad (3.9)$$

$$dx_E^2 = \sum_{j=1}^3 dx_j^2 + dx_4^2 = \sum_{j=1}^3 dx_j^2 - dt^2 = -dx^2 \quad (3.10)$$

$$dx_E^2 = -dx^2 \quad (3.11)$$

L'opérateur d'Alembert(d'Alembertien) est alors donné par :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \vec{\nabla}^2 = -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \equiv -\square_E$$

Ainsi, pour un champ scalaire libre ($V(\phi) = 0$), la fonction génératrice dans la représentation Euclidienne devient :

$$W_E^0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp^{-\int d^4x_E \{ \frac{1}{2} [\partial_E \phi \partial^E \phi + m^2 \phi^2] - J\phi \}} \quad (3.12)$$

où $\partial_E \phi \equiv (\partial_E^\mu \phi)$, avec $\partial_E^\mu \phi \partial_\mu^E \phi = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$

$$W_E^0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp - \int d^4x_E \{ \frac{1}{2} [(\partial_E \phi)^2 + m^2 \phi^2] - J\phi \} \quad (3.13)$$

$(\partial_E \phi)^2$ est toujours positif, donc l'intégral W_E^0 est bien convergente et définie.

La fonction génératrice normalisée est donnée par :

$$Z_E^0[J] = \frac{W_E^0[J]}{W_E^0[0]} = \frac{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J}{\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_{J=0}} \quad (3.14)$$

$|0\rangle$ est l'état du vide de la théorie libre.

On pose :

$$w_E^0(\phi) = \exp - \frac{1}{2} \int d^4x_E [(\partial_E \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (3.15)$$

donc :

$$Z_E^0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi) \exp \int d^4x J\phi}{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi)} \quad (3.16)$$

$Z_E^0[J]$ est vue comme étant une intégration de l'action de la source avec les poids $w_E^0(\phi)$ sur tous les champs ϕ .

Par analogie avec les chapitres précédents, on voit que pour une fonction $O(\phi)$ des champs, on aura :

$$\langle 0 | T [\prod_j O_j(\hat{\phi}(x_j))] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi) \prod_j O_j(\hat{\phi}(x_j))}{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi)} \quad (3.17)$$

Les opérateurs des champs sont ceux des champs libres.

Dans le cas où il y a interaction, toutes ces relations sont toujours valables en remplaçant w_E^0 par "une fonction de poids" pour la théorie en interaction $w_E(\phi)$

$$w_E(\phi) = \exp - \int d^4x_E \{ \frac{1}{2} [(\partial_E \phi)^2 + m^2 \phi^2] + V(\phi) \} \quad (3.18)$$

$$= \exp - \int V(\phi) d^4 x_E \exp - \frac{1}{2} \int [(\partial_E \phi)^2 + m^2 \phi^2] d^4 x_E \equiv \exp - \int d^4 x_E V(\phi) w_E^0(\phi) \quad (3.19)$$

ce qui donne :

$$\langle \tilde{0} | T[\prod_j O_j(\hat{\phi})] | \tilde{0} \rangle = \int \mathcal{D}\phi W^E(\phi) \prod_j O_j(\phi) \quad (3.20)$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi) \exp^{-\int V(\phi) d^4 x_E} \prod_j O_j(\phi)}{\int \mathcal{D}\phi w_E^0(\phi) \exp^{-\int V(\phi) d^4 x_E}} \quad (3.21)$$

où $|\tilde{0}\rangle$ est l'état du vide de la théorie en interaction

$$\langle \tilde{0} | T[\prod_j O_j(\hat{\phi})] | \tilde{0} \rangle = \frac{\langle 0 | T[\prod_j O_j(\hat{\phi}_0) \exp - \int V(\phi) d^4 x_E] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[\exp - \int V(\hat{\phi}_0) d^4 x_E] | 0 \rangle} \quad (3.22)$$

$|0\rangle$ est l'état du vide de la théorie libre.

3.3 Évaluation des intégrales de chemins

3.3.1 champs scalaires libres :

On se place dans le cas où les champs sont libres ; $V = 0$
la fonctionnelle génératrice :

$$W[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp -i \int d^4 x [\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi] \quad , \quad (3.23)$$

ϕ est une variable d'intégration, qui ne vérifie pas l'équation de Klein-Gordon . Maintenant ,on introduit un champ ϕ_0 qui satisfait à la relation :

$$[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0(x) = J(x) \quad , \quad (3.24)$$

$J(x)$ joue le rôle de source pour le champ ϕ_0 . On considère ϕ_0 comme champ de référence et on développe le champ ϕ autour de lui :

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad (3.25)$$

L'intégrant dans l'exponentielle devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi')\square(\phi_0 + \phi') + \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi')(m^2 - i\epsilon)(\phi_0 + \phi') - J(\phi_0 + \phi') \\ &= \frac{1}{2}\phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' + \frac{1}{2}\phi_0[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' + \frac{1}{2}\phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0 - J\phi_0 - J\phi'. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les deux termes :

$$\frac{1}{2}\phi_0[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0 \quad (3.27)$$

donnent la même contribution :

$$\frac{1}{2}\phi_0[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0 = \frac{1}{2}J\phi_0 \quad (3.28)$$

Donc l'intendant s'écrit :

$$\begin{aligned} S[\phi(x), J] &= - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\phi[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi - J\phi \right\} \\ &= - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' + \frac{1}{2}J\phi_0 + \frac{1}{2}\phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0 - J\phi_0 - J\phi' \right\} \end{aligned}$$

$$S[\phi, J] = -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' - J\phi_0 \right\} \quad (3.29)$$

La solution de l'équation :

$$[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi_0(x) = J(x) \quad (3.30)$$

s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi_0(x) = - \int D_F(x-y)J(y)d^4y \quad , \quad (3.31)$$

où $D_F(x-y)$ est le propagateur de Feynman , qui obéit à l'équation

$$[\square + (m^2 - i\epsilon)]D_F(x) = -\delta^4(x) \quad . \quad (3.32)$$

Or

$$\delta x = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4K \exp -iKx, D_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp -iK(x-y)D_F(k) \quad (3.33)$$

Donc :

$$D_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp -ik(x-y)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.34)$$

L'action $S[\phi, J]$ devient alors :

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' + J(x) \int d^4y D_f(x-y)J(y) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ \phi'[\square + (m^2 - i\epsilon)]\phi' \right\} - \frac{1}{2} \int J(x)D_F(x-y)J(y)d^4y d^4x \quad . \quad (3.35) \end{aligned}$$

Le second terme ne dépend pas des champs $\phi(x)$, il peut être extrait de l'intégrale de chemin.

Le premier terme apparaît dans l'expression de $W[J = 0]$ donc :

$$Z[J] = \frac{W[J]}{W[0]} = \exp -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \quad (3.36)$$

Ceci est l'amplitude de transition du vide vers le vide pour la théorie libre des champs scalaires.

De la relation :

$$\begin{aligned} [\square + (m^2 - i\varepsilon)] D_F(x-y) &= -\delta^4(x-y) & (3.37) \\ D_F(x-y) &= -\delta^4(x-y) [\square + (m^2 - i\varepsilon)]^{-1} & , \varepsilon \rightarrow 0 \\ D_F(x-y) &= -(\square + m^2)^{-1} \delta^4(x-y) \end{aligned}$$

3.3.2 Évaluation numérique des intégrales de chemins :

Une autre alternative pour évaluer les intégrales de chemins , c'est la méthode numérique.

La fonction génératrice est généralement donnée par :

$$\begin{aligned} W[J] &= \langle 0 | \exp^{-i(\hat{H}+J)(t_f-t_i)} | 0 \rangle & (3.38) \\ \text{pour } t_i &\rightarrow -\infty, \text{ et } t_f \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Après la rotation de wick, ceci devient

$$W[J] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \langle 0 | \exp^{-\beta(\hat{H}+J)} | 0 \rangle \quad (3.39)$$

où β est le temps dans l'espace Euclidien .

Si on identifie β à l'inverse de la température , ie $\beta = \frac{1}{T}$, on retrouve la valeur moyenne dans le vide de l'opérateur statistique.

On discrétise la fonction génératrice $W[J]$, en écrivant :

$$\begin{aligned} W[J] &= \lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty} \langle 0, t_f | 0, t_i \rangle \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi\hbar i\eta} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_k \prod_{j=1}^n dx_{kj} \exp i\eta \sum_{i=0}^n [L_i + J_k x_{ke}] \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec

$$L_l = L(x_l, \dot{x}_l) = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{x}_{kl}^2 - w_k^2 x_{kl}^2) \quad (3.41)$$

4

Théorie perturbative ϕ^4

Dans ce chapitre on va appliquer les méthodes développées dans les chapitres précédent à la théorie ϕ^4 dont le lagrangien est donné par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - V(\phi) \\ &= \mathcal{L}_0 - \frac{g}{4!}\phi^4\end{aligned}\tag{4.1}$$

g est la constante de couplage. La théorie ϕ^4 est un exemple de théorie self interactive.

4.1 Développement perturbatif de la fonction génératrice

On commence par la fonction génératrice de fonctions de green connectées :

$$iS[J] = \ln Z_0 + iS_0[J] + iS_1[J] - \frac{1}{2}(iS_1[J])^2 + 0(V^3)\tag{4.2}$$

On insert l'interaction dans les expressions des S_0, S_1 et S_2

$$iS_0[J] = -\frac{i}{2} \int d^4z d^4y J(z) D_F(z-y) J(y) ,\tag{4.3}$$

$$iS_1[J] = -i \frac{g}{4!} e^{-iS_0[J]} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} e^{iS_0[J]} ,\tag{4.4}$$

$$iS_2[J] = \frac{1}{2!} \left(\frac{-ig}{4!}\right)^2 e^{-iS_0[J]} \int d^4(x) d^4(y) \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} \frac{\delta^4}{\delta J^4(y)} e^{iS_0[J]} .\tag{4.5}$$

Pour une notation convéniente, on introduits de nouvelles quantités définis par

$$iS_1[J] = -i\frac{g}{4!}\tilde{S}_1[J] , \quad (4.6)$$

$$iS_2[J] = \left(\frac{-ig}{4!}\right)^2\tilde{S}_2[J] . \quad (4.7)$$

donc :

$$iS[J] = \ln Z_0 + iS_0[J] + -i\frac{g}{4!}\tilde{S}_1[J] + \left(\frac{-ig}{4!}\right)^2\tilde{S}_2[J] - \frac{1}{2}\left(\frac{-ig}{4!}\tilde{S}_1[J]\right)^2 + \dots \quad (4.8)$$

Premièrement, on calcule le terme linéaire en g :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1[J] &= e^{-iS_0[J]} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} e^{iS_0[J]} \\ &= e^{-iS_0[J]} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4z d^4y J(z) D_F(z-y) J(y)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Après les différentes dérivations, on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1[J] &= -3 \int D_F(x-x) D_F(x-x) d^4x + 6i \int D_F(y-x) D_F(x-x) D_F(x-z) J(y) J(z) d^4x d^4y d^4z \\ &+ \int D_F(x-y) D_F(x-z) D_F(x-v) D_F(x-w) J(y) J(z) J(v) J(w) d^4x d^4y d^4z d^4w . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le premier terme n'a pas de source, donc il ne va contribuer à aucune fonction de Green. Le second terme est quadratique en J et donc il contribue à la fonction de Green à 2 - points a Le dernier terme contribue à la fonction de Green à 4 - points.

4.2 Règles de Feynman

On peut représenter les résultats en prenant les règles suivantes :

1. Le propagateur : $iD_F(x - y) \equiv x \text{---} y$
2. La source : $iJ(x) \equiv \begin{matrix} \times \\ | \\ x \text{---} \end{matrix}$
3. Intégrer à travers l'espace-temps la source J
4. Facteur de symétrie pour chaque diagramme.
5. Chaque interaction est représentée par un point : $\frac{-ig}{4!} \equiv \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{matrix}$
6. Intégrer $\int d^4x$ pour chaque boucle.

Si on représente la fonction génératrice "Connectée" par une ligne double :

$$iS[J] \equiv \begin{matrix} \times & \text{---} & \times \\ \text{---} & & \text{---} \end{matrix}$$

on peut dessiner les diagrammes pour :

$$iS[J] = \ln Z_0 + iS_0[J] + \frac{-ig}{4!} \hat{S}[J] + O(g^2) \quad (4.11)$$

Comme :

$$\begin{matrix} \times & \text{---} & \times \\ \text{---} & & \text{---} \end{matrix} = \ln Z_0 + \begin{matrix} \times & \text{---} & \times \\ \text{---} & & \text{---} \end{matrix} + \left[\begin{matrix} \circ & \circ \\ \times & \times \end{matrix} + \begin{matrix} \circ \\ \times & \text{---} & \times \\ y & & z \end{matrix} + \begin{matrix} w & & z \\ & \times & \\ y & & k \end{matrix} \right] + O(g^2)$$

Le premier graphe est le terme à l'ordre zéro.

Les graphes entre parenthèses représentent tous les termes du 1^{er} ordre de l'interaction. Le premier graphe décrit un processus sans lignes externe, c'est un processus du vide qui a lieu indépendamment de la présence de particules physiques. Il constitue un back gronde pour tous les processus physiques. Le second graphe avec une boucle décrit un changement de masse dû à la self-interaction. Le troisième diagramme décrit le processus physique réel.

4.2.1 Contributions du vide

On va maintenant considérer le terme de normalisation $\ln Z_0$.

$$\begin{aligned} Z_0^{-1} &= \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 - V + i\frac{\epsilon}{2}\phi^2)} \\ &= e^{-i \int d^4x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)})} e^{\frac{-i}{2} \int J(x) D_F(x-y) J(y) d^4x d^4y} \Big|_{J=0} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

On peut traiter cette expression de la même manière que $Z[J]$:

$$\ln Z_0 = -iS[0] = -iS_0[0] - \frac{(-ig)}{4!} \tilde{S}[0] + O(g^2) \quad (4.13)$$

Dans la représentation graphique, on utilise $S_0[0] = 0$ et $S_1[0] = -3 D_F^2(0) \int d^4x$

$$\ln Z_0 \equiv \ln N \equiv - \text{diagramme à deux boucles}$$

Donc le dénominateur de la fonction génératrice ou bien la constante de normalisation, contient uniquement les graphes du vide. Insérant l'expression ci-dessus dans celle de $is_0[J]$, on obtient les graphes du vide, donnant finalement pour $Z[J]$ au 1^{er} ordre.

$$\text{diagramme à double ligne} = \text{diagramme à ligne simple} + \text{diagramme à ligne simple avec une boucle} + \text{diagramme à croisement}$$

Nous avons montré, au 1^{er} ordre, que le dénominateur dans $Z[J]$ neutralise la contribution du vide. Ceci est un résultat général qui est valable à tous les autres ordres de la théorie des perturbations.

4.3 Fonction de Green à 2-points

Les fonctions de Green à n-points connectées peuvent être déterminées de leur définition :

$$G_c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n S}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (4.14)$$

4.3.1 Termes en $O(g^0)$

Il n'y a qu'un seul terme dans le cas de champs libres, qui est donné par le propagateur libre de Feynman :

$$G_c(x_1, x_2) = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 S_0}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = iD_F(x_1 - x_2) \quad (4.15)$$

Nous allons maintenant évaluer $G_c(x_1, x_2)$ dans la représentation d'impulsion. On prend la transformée de Fourier de la fonction de Green à 2-points :

$$\begin{aligned} & \int e^{(-ip_1x_1+p_2x_2)} G_c(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2 = \\ & = \int [e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)} \left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right) \int d^4q \frac{e^{-iq(x_1-x_2)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}] d^4x_1 d^4x_2 . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le propagateur de Feynman obéit à l'équation suivante :

$$[\square + (m^2 - i\varepsilon)]D_F(x) = -\delta^4(x) , \quad (4.17)$$

or

$$\delta^4(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4K e^{-ikx} , \quad (4.18)$$

d'où :

$$D_F(x - y) = -\frac{\delta^4(x - y)}{K^2 - (m^2 - i\varepsilon)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} d^4K . \quad (4.19)$$

Nous avons par définition :

$$\begin{aligned} & \int e^{-i(p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n)} G(x_1, x_2, \dots, x_n) d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n = \\ & = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) G(p_1, p_2, \dots, p_n) . \end{aligned} \quad (4.20)$$

La fonction δ traduit la conservation de l'impulsion . Donc la relation :

$$\int e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)} G(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2 =$$

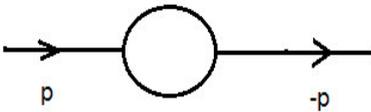
$$= \int [e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right) \int d^4 q \frac{e^{-iq(x_1 - x_2)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}] d^4 x_1 d^4 x_2 \quad (4.21)$$

Le terme de gauche (vue la définition ci-dessus) :

$$(2\pi)^4 G_c(p_1, p_2) \delta^4(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.22)$$

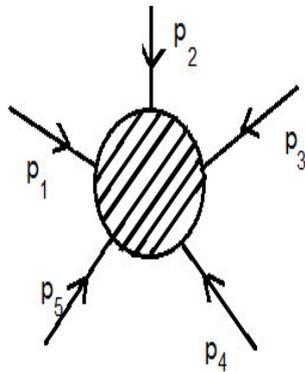
d'où :

$$G_c(p, p' = -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.23)$$



Remarque :

dans la représentation en impulsion de $G(x_1, \dots, x_n)$, toutes les impulsion rentrent dans le vertex .



4.3.2 Termes jusqu'à $O(g)$

Les termes linéaires en (g) sont obtenus tel que

$$\begin{aligned} G_c(x_1, x_2) &= -i \frac{\delta^2 S}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= -i \frac{\delta^2 S_0}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \frac{(-ig)}{4!} \frac{\delta^2 S_1}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} + O(g^2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$G_c(x_1, x_2) = iD_F(x_1 - x_2) - \left(\frac{-ig}{4!}\right) 12i \int d^4x D_F(x-x) D_F(x-x_1) D_F(x-x_2) + O(g^2) \quad (4.25)$$

$$G_c(x_1, x_2) = iD_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2} \int d^4x D_F(x_2 - x) D_F(x - x) D_F(x - x_1) + O(g^2) \quad (4.26)$$

On peut représenter cette équation sous la forme graphique suivante :

4.4 Représentation d'impulsion

Prenant la transformée de Fourier de l'expression de la fonction de Green à 2-points jusqu'aux termes proportionnels à g .

$$\begin{aligned} &\int e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} G_e(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2 = \\ &= \int [e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right) \int d^4q \frac{e^{-iq(x_1 - x_2)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}] d^4x_1 d^4x_2 - \frac{g}{2} \int [e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \times \\ &\int d^4x \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\right)^3 \int d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 \frac{e^{-iq_2(x_2 - x)}}{(q_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-iq_1(x - x_1)}}{(q_1^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-iq_3(x - x_1)}}{(q_3^2 - m^2 + i\varepsilon)}] d^4x_1 d^4x_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En intégrant suivant x_1, x_2 et x_3 on obtient,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) G_c(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{g}{2} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\right)^3 \times$$

$$\int d^4q_1 d^4q_2 d^4q d^4x_1 d^4x_2 d^4x \left[\frac{e^{-ix_1(p_1 - q_1)}}{(q_1^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-ix_2(p_2 + q_2)}}{(q_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-ix(q_1 - q_2)}}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right] \quad (4.28)$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) G_c(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{g}{2} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\right)^3 d^4q_1 d^4q_2 d^4q$$

$$\times (2\pi)^4 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1) \delta^4(p_2 + q_2) \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q_1 - q_2)}{(q_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(q_2^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.29)$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) G_c(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$- \frac{g}{2} (2\pi)^4 \frac{1}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.30)$$

$$\times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (4.31)$$

On a finalement

$$G_c(p, p' = -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + S \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(\frac{-ig}{4!} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} , \quad (4.32)$$

où est le facteur de symétrie égal à 12

4.5 Règles de Feynman

Dans la représentation d'impulsion, les règles de Feynman sont données comme suit :

1. Chaque ligne donne un facteur $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}$

2. Chaque vertex donne un facteur $\frac{-ig}{4!}$
3. Il ya conservation des quadrivecteurs impulsions pénétrant dans un vertex.
4. Chaque ligne interne donne une intégrale $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$
5. Chaque diagramme possède un facteur de symétrie qu'il faut multiplier.

Conclusion générale

Dans ce présent travail nous avons calculé la fonction génératrice à l'ordre 2 de la constante de couplage de la self interaction. Ensuite, nous avons calculé la fonction de Green à 2-points. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus par le biais de la théorie quantique des champs. Nous pouvons ainsi dire que le formalisme de l'intégrale de chemins est une autre alternative pour obtenir des informations sur un système physique. Elle ne fournit pas plus d'informations que les autres formalismes. Ceci dit, le formalisme est plus simple et direct. La philosophie de la méthode consiste à écrire la fonction génératrice une fois que le processus connu, donc le lagrangien bien défini. Après cela, les fonctions de corrélation sont obtenues en calculant les dérivées fonctionnelles de la fonction génératrice par rapport aux sources.

Appendice

Intégrales de Gauss

Soit l'intégrale de gauss suivant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}ax^2\right\} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (a > 0), \quad (4.33)$$

le produit de telles intégrales est donné par

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k x_k^2\right] = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{a_k}}. \quad (4.34)$$

On suppose que les n nombres a_k sont tous positifs et sont les éléments d'une matrice diagonale A , telle que

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_k \quad (4.35)$$

et

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k A_{kk} x_k = X^T A X \quad (4.36)$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne

et $X^T = (x_1 \ x_2 \dots \ x_n)$ est un vecteur ligne.

Ainsi :

$$\int d^n x \exp\left\{-\frac{1}{2}X^T A X\right\} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}} \quad (4.37)$$

Cette relation est valable pour n'importe quelle matrice.

Pour chaque matrice symétrique réelle B , il existe une matrice réelle orthogonale qui diagonalise B en A .

$O^T B O = A$ où O est une matrice réelle et orthogonale

ou $B = O A O^+$ et B est une matrice réelle et symétrique, $B^T = B$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int \exp\left\{-\frac{1}{2}Y^T B Y\right\} d^n y &= \int d^n y \exp\left\{-\frac{1}{2}Y^T O A O^+ Y\right\} = \int d^n x \exp\left\{-\frac{1}{2}X^T A X\right\} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{\det(A)})} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{\det(B)})} \end{aligned} \quad (4.38)$$

où on a substitué $Y = O X$ et $\det(O) = 1$ (orthogonale).

On peut généraliser l'intégrale à une dimension ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-ap^2 + bp + c\} dp \quad (4.39)$$

en l'intégrale à n-dimensions suivante

$$F(A, \omega) = \int d^n x \exp\{-X^T A X + \omega^T X\}. \quad (4.40)$$

.

On réécrit l'exponentielle telle que :

$$X^T A X - \omega^T X = \left(X - \frac{1}{2}A^{-1}\omega\right)^T A \left(X - \frac{1}{2}A^{-1}\omega\right) - \frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega \quad (4.41)$$

En posant :

$$X' = X - \frac{1}{2}A^{-1}\omega, \text{ on a } dX' = dX,$$

alors :

$$\begin{aligned} F(A, \omega) &= \exp\left(-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega\right) \int dX'^n \exp(-X'^T A X') \\ &= (\pi)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega^T A^{-1}\omega\right) (\det A)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

A une dimension, on a.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp^{-ap^2 + bp + C} = \exp\{C\} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\{-ap^2 + bp + \} = \exp\{C\} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\{-a(p^2 + \frac{b}{a}p)\} \quad (4.43)$$

On a :

$$p^2 + \frac{b}{a}p = \left(p + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} , \quad (4.44)$$

alors

$$p' = p + \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad dp' = dp$$

L'expression (4.43) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \exp(C) \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-a\left(p^2 + \frac{b}{a}p\right)\right) &= \quad (4.45) \\ \left[\exp(C) \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \exp(-ap'^2)\right] \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + C\right) \end{aligned}$$

Dans le cas général on a

$$\exp\{-F(x)\} = \exp\{-(X^T A X + B^T X + C)\} \quad (4.46)$$

où A est une matrice réelle et symétrique, B est un vecteur et C est une constante.

On réécrit $F(x)$ sous la forme quadratique suivante :

$$F(x) = (X - X_0)^T A (X - X_0) + F(X_0) \quad (4.47)$$

où X_0 est donné par :

$$X_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}B \quad (4.48)$$

et

$$F(X_0) = F_0 = C - \frac{1}{4}B^T A^{-1}B \quad (4.49)$$

Intégrales complexes

On peut généraliser ces formules à l'intégration complexe

$$\int dx \exp(-ax^2) \int dy \exp\{-ay^2\} = \int dx dy \exp(-a(x^2 + y^2)) = \frac{\pi}{a} \quad (4.50)$$

en introduisant la variable complexe : $\mathcal{Z} = x + iy$

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z}^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad (4.51)$$

Le résidu d'une fonction $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ à variable complexe, $\mathcal{R}es(\mathcal{F}, a)$, au point singulier a est égal au coefficient de la première négatif dans le développement en série de Laurent de $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ au voisinage de a .

$$\mathcal{R}es(\mathcal{F}, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mathcal{F}(\mathcal{Z}) d\mathcal{Z} = C_{-1} \quad (4.52)$$

d'où

$$\int_{\gamma} \mathcal{F}(\mathcal{Z}) d\mathcal{Z} = 2\pi i \mathcal{R}es(\mathcal{F}, a) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \exp \{ i\lambda [(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (b - x_n)^2] \} \\ & = \left(\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{i\lambda}{n+1} (b-a)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

On a aussi la relation suivante,

$$\ln \det A = \text{tr} \ln A. \quad (4.55)$$

En introduisant la variable complexe $\mathcal{Z} = x + iy$

$$\frac{\pi}{a} = \frac{1}{2i} \int \exp^{-a\mathcal{Z}^*\mathcal{Z}} d\mathcal{Z}^* d\mathcal{Z}. \quad (4.56)$$

En généralisant, elle devient,

$$\int \exp\{-\mathcal{Z}^+ A \mathcal{Z}\} d^n \mathcal{Z}^* d^n \mathcal{Z} = \int \exp\{-\mathcal{Z}^*_i A_{ij} \mathcal{Z}_j\} d^n \mathcal{Z}^* d^n \mathcal{Z} = \frac{(2\pi i)^n}{\det(A)} \quad (4.57)$$

Or

$$\det A = \exp\{\text{tr} \ln A\}$$

d'où

$$\int \exp\{-\mathcal{Z}^+ A \mathcal{Z}\} d^n \mathcal{Z}^* d^n \mathcal{Z} = (2\pi i)^n \exp\{-\text{tr} \ln A\} \quad (4.58)$$

Bibliographie

- [1] Zinn-Justin J., Quantum Field Theory and Critical Phenomen, Claredon Press, Oxford 1996.
- [2] M, Chaichian and A. Demichev, Path Integrals in physics. Quantum field theory, statistical physics and another modern applications, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, IOP Publishing Ltd 2001.
- [3] C. Itzykson and J-B Zuber, Quantum Field Theory, McGraw- Hill, New York, 1982.
- [4] R.P. Feynmann and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integral, McGraw-Hill, New York 1965.
- [5] U. Mosel, Introduction to path integrals in field theories. Notes de cours données à l'institut de physique théorique de l'université de Gissen, Allemagne 2002.
- [6] M. Veltman, Path integrals, Feynman Rules, Gauge Theories, Cours donné à " International school of elementary particle physics, Basko-Polje 1974.