

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira – Bejaïa



Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Mécanique
Option : Energétique

Réalisé par :

BELKACEMI Iyes

Thème :

*Transfert thermique en convection naturelle dans une
cavité partiellement poreuse*

Application au refroidissement des composants électroniques

Devant le jury composé de :

Mr A.DJERRADA	Président	Université A / Mira Béjaïa.
Mr M. ALLOUCHE	Rapporteur	Université A / Mira Béjaïa.
Mr D.SADAOUI	Examineur	Université A / Mira Béjaïa.
Mr F. NAIT BOUDA	Examineur	Université A / Mira Béjaïa.

Session Juin 2013

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A ma très chère mère qui ma soutenu durant toute ma vie.

A mon père qui m'a bien construit.

A mes frères et mes sœurs.

A mes neveux.

A toute ma famille.

A tous mes amis sans exception.

Belkacemi Lyes

REMERCIEMENTS

Tout d'abord,

*Je remercie Dieu le tout-puissant, de m'avoir
donné la force et la patience de pouvoir mener ce travail à
terme.*

*Je tiens à remercier mon promoteur Mr **M. ALLOUCHE**
de m'avoir encadrés tout le long de ce travail et pour
ses conseils et ses orientations.*

*Nous tenons à remercier Mr **A.DJERRADA** pour avoir accepté
de présider le jury. Qu'il trouve ici l'expression de notre
profonde gratitude.*

*Nos sincères remerciements vont également à
Mr **F.NAIT BOUDA** et Mr **D.SADAOUI**
pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce modeste travail.*

*Enfin, mes remerciements s'adressent à
toutes les personnes
Qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

Nomenclature	i
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	viii
Introduction generale.....	1

CHAPITRE I

GENERALITES ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. Généralités et définition.....	3
I.1. Transfert de chaleur.....	3
I.1.1 Convection forcée.....	3
I.1.2 Convection naturelle.....	3
I.2. milieu poreux.....	3
I.2.1 milieu poreux non consolidé.....	3
I.2.2. milieu poreux consolidé.....	4
I.3. Propriétés du milieu poreux	4
I.3.1 Porosité	4
I.4.2 Perméabilité (K)	5
I.4 Changement d'échelle en milieu poreux	5
I.5 Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.).....	6
I.6 Caractéristiques thermo-physiques des milieux poreux.....	7
I.6.1 Viscosité dynamique effective μ_{eff}	7
I.6.2 Conductivité thermique effective	8
I.7 Modèles d'écoulements dans le milieu poreux	9
I.7.1 Modèle de Darcy	9
I.7.2 Modèle de Brinkman	10
I.7.3 Modèle de Forchheimer.....	11
I.8 Revue bibliographique	11

CHAPITRE II

FORMULATION MATHEMATIQUE ET POSITION DE PROBLEME

II.1.Introduction	21
II.2.Position et description du problème considéré	21
II.2.1 Géométrie du problème.....	21
II.3. Formulation mathématique.....	21
II.3.1. Mise en équations	22
II.3.1. 1 milieu libre	22
II.3.1. 2 Milieu poreux	23
II.3.2. Conditions aux limites.....	24
II.4. Forme adimensionnelle des équations	25
II.5 Coefficients d'échange de la chaleur	28
II.5.1 Le nombre de Nusselt local	28
II.5.2 Le nombre de Nusselt moyen.....	29

CHAPITRE III

METHODES DES VOLUMES FINIS

III.1. Introduction	30
III.2. Choix de la méthode numérique.....	30
III.3. Maillage.....	30
III.4. Equation générale de transport	32
III.4.1. Intégration du flux total	34
III.4.2. Intégration du terme source	35
III.4.3. Discrétisation spatiale.....	36
III.4.3.1. Schéma aux différences centrées (SDC).....	37
III.4.3.2. Shéma Upwind (UPS).....	39

III.4.3.3. Schéma Hybride (HDS : hybrid differencing scheme)	40
III.4.3.4. Schéma à loi de puissance (PLDS)	41
III.4.3.5. Formulation générale du problème	42
III.5. Algorithme SIMPLE	43
III.6. Méthode de résolution	46

CHAPITRE IV

RESULTAT ET DISCUSSION

Introduction	49
IV-1 SENSIBILITE AU MAILLAGE	49
IV.2. Influence du nombre de Darcy (Da).....	50
IV.2.1. les isothermes et lignes de courants	50
IV.2.2. profils des vitesses et des températures	51
IV.2.3 Nombre de Nulsselt local et moyen	53
IV.2.4 Comentaires	53
IV.3 Effet du nombre de Grashof	54
IV.3.1 Ligne de courant et les isothermes	54
IV.3.2 Profils des températures et des vitesses	55
IV.3.4 Nombre de Nusselt local et moyen.....	56
IV.3.4 Comentaires	56
IV.4 Influence de la couche poreuse (δ_2)	57
IV.4.1 Lignes de courants et lignes des isothermes.....	58
IV.4.2 Profils des températures et des vitesses	58

IV.4.2 Nusselt local et moyen	59
IV.4.4 Commentaires.....	59
IV.5 Effet de rapport de forme	60
IV.5.1 Isothermes et lignes de courants.....	60
IV.5.2 Nusselt moyen	61
IV.5.4 Commentaires.....	61
IV.6 Effet de rapport des conductivités.....	61
IV.6.1 Lignes de courant et les isothermes.....	62
IV.6.2 Profil des températures et des vitesses	63
IV.6.3 Nusselt local et moyen	64
IV.6.4 Commentaires.....	64
Conclusion Generale.....	66
Référence bibliographique.....	67

NOMENCLATURE

A : la constante empirique.....	[-]
a_p, a_E, a_w, a_N, a_S : Coefficients de l'équation algébrique de transport discrétisée	[-]
A (P) : Fonction d'un schéma numérique	[-]
C_f : coefficient de FORCHHEIMER	[-]
C_p : Chaleur spécifique à pression constante	[J/kg.K]
D_a : nombre de DARCY	[-]
D_e, D_w, D_n, D_s : Flux diffusifs aux interfaces e, w, n, s de l'équation de transport discrétisée	[-]
F_e, F_w, F_n, F_s : Flux convectifs aux interfaces e, w, n, s de l'équation de transport discrétisée	[-]
g : Accélération de la pesanteur	[m/s ²]
Gr : Nombre de Grashof	[-]
H : Hauteur totale de la cavité.....	[m]
H_p : Hauteur de la couche poreuse	[m]
H_L : Hauteur de la couche libre	[m]
i, j : Coordonnées logiques des points.....	[-]
K : Perméabilité	[m ²]
L : Longueur de la cavité.....	[m]
Nu : Nombre de Nusselt local	[-]
Nu_m : Nombre de Nusselt moyen	[-]
p : Pression	[Pa]

Nomenclature

P : Pression adimensionnelle	[-]
Pr : Nombre de Prandtl	[-]
q_x : Densité volumétrique de flux de chaleur	[W/m ³]
S : Terme source de l'équation de transport discrétisée	[-]
T : Température	[K]
u, v : Composantes de la vitesse dimensionnelle	[m/s]
U, V : Composantes de la vitesse adimensionnelle	[-]
x, y : Coordonnées cartésiennes dimensionnelles	[m]
X, Y : Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	[-]

Symboles grecs

δ_1, δ_2 : rapports de forme géométrique	[-]
ε : Porosité, Erreur	[-]
β : Coefficient d'expansion thermique à pression constante	[K ⁻¹]
λ : Conductivité thermique	[W/m.K]
Φ : Variable dépendante générale	[-]
μ : Viscosité dynamique	[kg/m.s]
ν : Viscosité cinématique	[m ² /s]
θ : Température adimensionnelle	[-]
ρ : Masse volumique	[kg/m ³]
ρ_f : Masse volumique à T_{ref}	[kg/m ³]
ΔT : Ecart de température	[K]
Γ : Coefficient de diffusion (diffusivité)	[-]

Indices et exposants

air :Air

c : chaud

eff :effective

f : Fluide, froide

max Maximale

ref Référence

s Solide

* Valeur adimensionnelle ou estimé

' Corrigé

Liste des figures

Figure I.1 : milieu non consolidé	4
Figure I.2 : milieu consolidé	4
Figure I.3 : Représentation schématique du volume élémentaire représentatif	6
Figure I.4 : modèle physique et le système de coordonnées	12
Figure I.5 : configuration physique étudiée	13
Figure I.6: schéma du modèle physique et le système de coordonnées	15
Figure I.7 : Dessin de la cavité	16
Figure I.8 : Modèle physique	18
Figure I.9 : Modèle physique et système de coordonnées.....	19
Figure I.10 : modèle physique et système de coordonnées	20
Figure II.1 : Géométrie du problème considéré	21
Figure II.2: condition aux limites adimensionnelles.....	28
Figure III.1: Volume de contrôle bidimensionnel	31
Figure III.2.a : maillage décalé pour la vitesse u	32
Figure III.2.b : maillage décalé pour la vitesse v	32
Figure III.3 : Volume de contrôle.....	36
Figure III.4: organigramme de calcul	48
Figure IV.1 : lignes de courants pour différents maillages ($Da=10^{-3}$ $Gr=3.510^5$, $\delta_1=2$, $\delta_2=0.5$ $\lambda^*=4181$, $\varepsilon=0.5$ et $Pr=0.71$)	50
Figure IV.2a : lignes de courants pour $Da=10^{-6}$	51
Figure IV.2b : isothermes pour $Da=10^{-6}$	51
Figure IV.3a : lignes de courants pour $Da=10^{-3}$	51
Figure IV.3b : isothermes pour $Da=10^{-3}$	51
Figure IV.4a : lignes de courants pour $Da=1$	51
Figure IV.4b : isothermes pour $Da=1$	51

Liste des figures

Figure IV.5.b : profils des vitesses ($Da=10^{-6}$)	52
Figure IV.5.b : profils des vitesses ($Da=10^{-3}$)	52
Figure IV.5.c : profils des vitesses ($Da=1$).....	52
Figure IV.6.a : profils des températures ($Da=10^{-6}$)	52
Figure IV.6.b : profils des températures ($Da=10^{-3}$)	52
Figure IV.6.c : profils des températures ($Da=1$)	53
Figure IV.7 : Evolution du Nombre de Nusselt local pour différents nombres de Darcy.....	53
Figure IV.8.a : lignes de courants ($Gr=10^4$)	54
Figure IV.8.b : Isothermes ($Gr=10^4$)	54
Figure IV.9.a : lignes de courants ($Gr=3.5 \cdot 10^5$)	55
Figure IV.9.b : Isothermes ($Gr=3.5 \cdot 10^5$)	55
Figure IV.10.a : lignes de courants ($Gr=10^6$)	55
Figure IV.10.b : Isothermes ($Gr=10^6$)	55
Figure IV.10.a : lignes de courants ($Gr=10^7$)	55
Figure IV.11.b : Isothermes ($Gr=10^7$)	55
Figure IV.12.a: profils des températures ($Gr=10^4$)	55
Figure IV.12.b : profils des températures ($Gr=3.5 \cdot 10^5$)	55
Figure IV.13.a : profils des vitesses ($Gr=10^4$).....	56
Figure IV.13.b : profils des vitesses ($Gr=3.5 \cdot 10^5$)	56
Figure IV.14 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents nombres de Grashof....	56
Figure IV.15.a : lignes de courants ($\delta_2=0.2$)	57

Liste des figures

Figure IV.15.b : Isothermes ($\delta_2=0.2$)	57
Figure IV.16.a : lignes de courants ($\delta_2=0.3$)	58
Figure IV.16.b : Isothermes ($\delta_2=0.3$)	58
Figure IV.17.a : lignes de courants ($\delta_2=0.5$)	58
Figure IV.17.b : Isothermes ($\delta_2=0.5$)	58
Figure IV.18.a : profils des température	58
Figure IV.18.b : profils des vitesses	58
Figure IV.19 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents rapports de formes δ_2 ..	59
Figure IV.20.a : lignes de courants ($\delta_1=1$)	60
Figure IV.20.b : Isothermes ($\delta_1=1$)	60
Figure IV.21.a : lignes de courants ($\delta_1=2$)	60
Figure IV.21.b : Isothermes ($\delta_1=2$)	60
Figure IV.22.a : lignes de courants ($\delta_1=4$)	60
Figure IV.22.b : Isothermes ($\delta_1=4$)	60
Figure IV.23 : variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du facteur de forme de la cavité δ_1	61
Figure IV.24.a : lignes de courants ($\lambda^*=1$)	62
Figure IV.24.b : Isothermes ($\lambda^*=1$)	62
Figure IV.25.a : lignes de courants ($\lambda^*=100$)	62
Figure IV.25.b : Isothermes ($\lambda^*=100$)	62
Figure IV.26.a : lignes de courants ($\lambda^*=4181$).....	62
Figure IV.26.b : Isothermes ($\lambda^*=4181$)	62

Liste des figures

Figure IV.27 : profils des températures pour différents rapport des conductivités.....	63
Figure IV.28 : profils des vitesses pour différent rapport des conductivités.....	63
Figure IV.29 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents rapports de conductivités.....	64

LISTE DES TABLEAUX

I.1	Modèles de viscosité effective.....	08
II.1	conditions cinématiques.....	24
II.2	conditions thermiques.....	24
II.3	conditions cinématiques.....	28
II.4	conditions thermiques.....	28
III.1	termes de l'équation de transport dans le milieu libre	33
III.2	termes de l'équation de transport dans le milieu poreux.....	33
III.3	La fonction $A (Pe)$ pour différents schémas de discrétisation	43
IV.1	Sensibilité au maillage.....	50
IV.2	Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Da	53
IV.3	Nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Grashof.....	56
IV.4	Nombre de Nusselt moyen pour différents rapports de formes δ_2	59
IV.5	Evolution du coefficient d'échanges thermique en fonction du rapport de conductivités λ^*	64

Introduction générale

La théorie du transfert de chaleur est une science, qui étudie la façon, dont la chaleur se propage d'une région à une autre, sous l'influence d'un gradient de température. Elle a subi une étude intensive pour satisfaire les exigences des autres technologies, nucléaires, solaires... etc.

Avec le développement prodigieux des techniques modernes, il est devenu indispensable à tout ingénieur, quel que soit le domaine où il sera appelé, à posséder de bonnes connaissances des lois fondamentales de transfert technique.

Ce phénomène est très important dans les domaines des sciences technologiques, des conceptions techniques et de l'industrie, il existe dans chaque aspect de la vie et à un grand champ d'application tel que le refroidissement électronique. C'est un processus complexe, qui est réalisé sur la base des différents modes fondamentaux à savoir : la conduction, la convection, et le rayonnement.

La convection naturelle dans les milieux poreux a une importance fondamentale et trouve des applications dans de nombreux domaines (astrophysique, océanographie, géophysique, pollution de l'air, diffusion souterraine des polluants, isolation thermique, métallurgie, extractions pétrolières, exploitation géothermique, stockage de certains produits agricoles, et refroidissement des composants électronique).

C'est dans ce contexte que nous allons mener notre étude. L'objectif de ce travail consiste donc à étudier le transfert thermique en convection naturelle dans une cavité rectangulaire partiellement poreuse (contenant des composants électronique). Ainsi, on procédera à examiner l'influence de quelques paramètres sur le taux de transfert de chaleur au niveau de ces composants pour leur assurer les meilleures conditions de fonctionnement.

Le présent rapport est structuré principalement en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur la convection, et sur les milieux poreux. On trouve aussi une synthèse bibliographique concernant certains travaux antérieurs sur cette thématique.

Le second chapitre concerne la formulation mathématique du problème où les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices, et les conditions aux frontières associées seront présentées. Ensuite, nous établissons les équations adimensionnelles et nous définissons les principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le transfert de chaleur.

Introduction générale

La résolution numérique des équations de conservation font l'objet du troisième chapitre, la méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser ces équations.

Dans le quatrième chapitre, nous discutons les résultats obtenus, en se basant sur l'écoulement naturel dans une cavité partiellement poreuse. Ensuite, nous examinons l'influence des paramètres de contrôle du problème sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur.

Finalement, nous terminons avec une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus de cette étude et qui trace les perspectives et les extensions à donner à ce travail avec certaines recommandations.

I. Généralités et définition

I.1. Transfert de chaleur

La détermination du transfert de chaleur et des caractéristique des écoulements, générés par les forces d'Archimède dans les cavités est un problème, dont l'intérêt tant sur le plan fondamental qu'au niveau des applications pratiques est important. Parmi ces applications nous pouvons citer : le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation, dans les capteurs solaires et le refroidissement des équipements électroniques...etc.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Deux types de convection sont généralement distingués :

I.1.1 Convection forcée

La convection forcée dans laquelle le mouvement de fluide est provoqué par l'action des forces extérieures, par exemple (pompe, ventilateur...etc.), qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement de fluide.

I.1.2 Convection naturelle

La convection naturelle dans laquelle le mouvement du fluide est produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celle froide existant dans un fluide, situé dans un champ de force gravitationnel.

Cette différence de densité, qui est la plupart du temps provoquée par une différence de température, avec la force de gravité, génère une force de flottabilité, qui par conséquent induit une différence de quantité de mouvement.

I.2. milieu poreux

Un milieu poreux est une matrice solide rigide qui comporte des vide (pores) qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides (gaz ou liquide) pouvant s'écouler et éventuellement, échanger entre elle et /ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. Un milieu poreux peut se présenter généralement sous les deux formes suivantes :

I.2.1 milieu poreux non consolidé : dans lequel la phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, bille de verre et d'acier, matériaux divers).

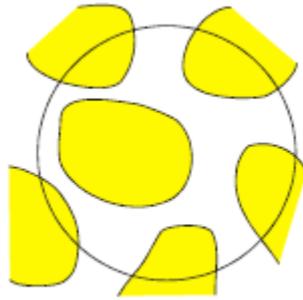


Figure I.1 : milieu non consolidé

I.2.2. milieu poreux consolidé : dans lequel la phase solide est formée de grains cimentés (roches calcaires, grès, argiles, bois, céramiques, poudres frittées, tissus).

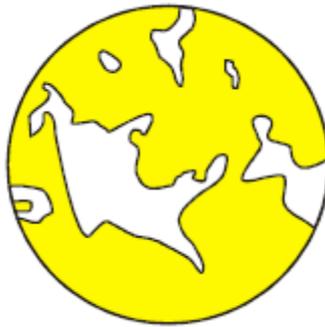


Figure I.2 : milieu consolidé

I.3. Propriétés du milieu poreux

L'étude des écoulements et du transfert de polluants en milieu poreux repose sur la détermination des propriétés du milieu : la porosité et la perméabilité ces grandeurs apparaissent dans les équations d'écoulement et du transport qui sont définies pour un milieu continu. Il faut donc les définir sur des volumes suffisamment grands, macroscopique, pour pouvoir considérer le milieu continu parce que les propriétés du milieu poreux dépendent d'échelle de description considérée.

I.3.1 Porosité

La porosité, est le paramètre principal décrivant un milieu poreux, elle est définie par le rapport entre le volume occupé par les pores (vides) et le volume total du milieu :

$\varepsilon = \text{volume des vides} / \text{volume total}$. Elle varie entre 0 (solides pleins) et 1 (volume complètement vide). En général, les vides (pores) ne sont pas uniformes dans leur distribution et leur forme à travers la matrice poreuse. Cette uniformité peut avoir un rôle significatif sur l'écoulement et le transfert de chaleur près des frontières (paroi solide ou surface libre).

I.4.2 Perméabilité (K)

La perméabilité traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. La perméabilité notée K dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La relation de Kozeny – Carmen (1937), donne une estimation de la perméabilité K pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{36C_0 (1 - \varepsilon)^2} \quad (I.1)$$

Où d désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$).

Ergun [1], établit une expression semblable à l'équation de Kozeny – Carmen en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètres d , et soumise à un gradient de pression :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150(1 - \varepsilon)^2} \text{ Ce qui correspond à une valeur de } C_0 \text{ de la loi de Kozeny – Carmen de } 4.16.$$

I.4 Changement d'échelle en milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les méthodes qui sont traditionnellement utilisées en mécanique des milieux continus pour les expressions locales des lois de conservation, ne peuvent toutefois être mise en pratique qu'après un changement d'échelle. Par opposition avec l'échelle du milieu continu classique, dite microscopique, telle qu'elle est proposée en mécanique des milieux continus, l'échelle du milieu continu fictif équivalent au milieu poreux réel est dite macroscopique. En général, l'établissement des équations, auxquelles obéissent les phénomènes à l'échelle macroscopique, est formellement obtenu à partir des équations microscopiques de la thermodynamique des milieux continus auxquelles sont appliquées des procédures spécifiques de changement d'échelle, telles que l'homogénéisation et les moyennes volumiques. Parmi ces dernières, l'une des plus classiquement utilisées consiste à obtenir la description macroscopique par prise de moyenne volumique des équations microscopiques sur un volume élémentaire représentatif (VER). Une fois établi, le système d'équations macroscopiques ne nécessite, pour sa résolution, que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières

du milieu poreux. Et, en effet, la complexité géométrique de la matrice et de l'espace se trouve incluse dans les coefficients des équations macroscopiques traduisant, au sein du *VER*, les interactions entre phases. Pour fermer le système, ces coefficients doivent être préalablement déterminés par voie expérimentale, numérique ou théorique.

I.5 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

Vu que les équations du mouvement dans les milieux poreux sont moyennées à travers des volumes, en introduisant la notion du volume élémentaire représentatif (*V.E.R*) qui consiste à associer à un point mathématique les propriétés d'un volume suffisamment représentatif pour définir ou mesurer les propriétés moyennes du milieu (Baer, 1972). Le *V.E.R* peut-être défini comme le fait de Marsily (1981) : Il est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de façon que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, et il est suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues. La taille du *VER* reste assez arbitraire. Les dimensions caractéristiques de ce volume seront grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores mais petites par rapport à l'encombrement de la matrice solide. La figure illustre la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif (*V.E.R*) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores.

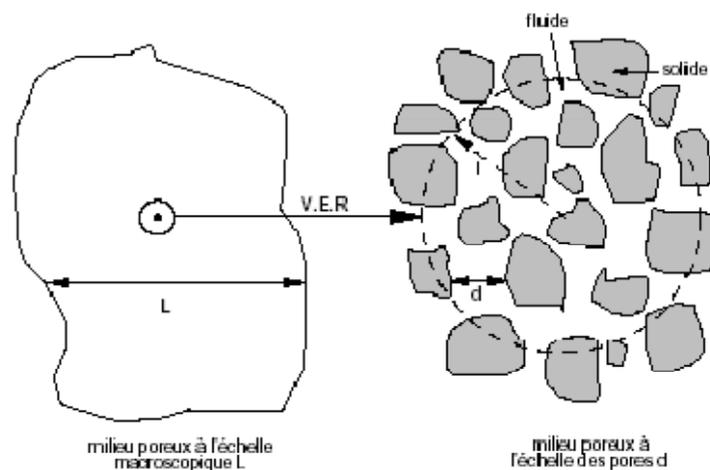


Figure I.3 : Représentation schématique du volume élémentaire représentatif

I.6 Caractéristiques thermo-physiques des milieux poreux

I.6.1 Viscosité dynamique effective μ_{eff}

Lorsque l'approche des modèles moyennés sur un VER est adoptée, il est nécessaire de définir les propriétés thermo-physiques évaluées sur le VER incluant les deux phases fluide et solide. Ainsi, la viscosité effective a été introduite par Brinkman (1947) afin de mettre en évidence la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide-poreux et d'obtenir une expression pour la perméabilité. En combinant l'écoulement de Stokes avec celui de Darcy, il a obtenu l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \vec{V} + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V} \quad (I.2)$$

Brinkman a considéré la viscosité dynamique effective égale à la viscosité du fluide considéré. Lundgren (1972) a donné des justifications à l'équation de Brinkman et a trouvé, de plus, que le rapport entre la viscosité dynamique μ_{eff} et celle du fluide n'est pas toujours égal à l'unité. Lundgren démontrera aussi que la viscosité effective est une fonction de la viscosité du fluide et de la porosité.

Le tableau (I-1) résume quelques corrélations trouvées dans la littérature. Cependant, la plupart des travaux prennent un rapport de viscosité unitaire.

Modèle	Corrélation	Limite de validité
Einstein	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 + 2.5\varepsilon$	Cas de sphères
Neale & Nader	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \alpha^2$	α déterminé expérimentalement

Guth & Simba	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \frac{1+0.5(1-\varepsilon)-0.5(1-\varepsilon)^2}{1-2(1-\varepsilon)-9.6(1-\varepsilon)^2}$	$\mu_{eff} \rightarrow \infty$ pour $\varepsilon = 0.766$
Mooney	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp\left[\frac{2.5(1-\varepsilon)}{1-K(1-\varepsilon)}\right]$	$0.75 < K < 1.5$
Frankel & Akivos	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = C \left[1 - \left(\frac{(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)_{max}} \right)^{1/3} \right]^{-1}$ $C = 9/8$ pour $(1-\varepsilon) \rightarrow (1-\varepsilon)_{max}$	Suspension concentrée
Happel	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp[4.58\varepsilon]$	Particules sphériques $\varepsilon \leq 0.5$

Tableau I-1: Modèles de viscosité effective.

I.6.2 Conductivité thermique effective

Les phases fluide et solide en présence dans le milieu poreux contribuent généralement, au mode de conduction avec des proportions différentes. De ce fait, la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective. Cette dernière est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solide et fluide de la matrice poreuse. D'une manière générale les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et parallèle basés sur l'analogie électrique.

➤ **Modèle série**

Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{(1-\varepsilon)}{k_s} \quad (I.3)$$

➤ **Modèle parallèle**

Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases fluide et solide en même temps. La conductivité thermique effective est alors la somme pondérée des taux d'occupation d'espace des conductivités phasiques

$$k_{eff} = \varepsilon k_f + (1-\varepsilon) k_s \quad (I.4)$$

I.7 Modèles d'écoulements dans le milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les équations régissant les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ou de masse ne peuvent être mises en application qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu fictif. La formulation des équations macroscopiques de conservation est obtenue à partir d'équations microscopiques auxquelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle.

Nous présenterons, dans ce qui suit, les différents modèles de régimes d'écoulements construits à partir du modèle de Darcy avec les différentes extensions tenant compte de certains effets existant dans les milieux poreux.

I.7.1 Modèle de Darcy

La dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 sur des fondements expérimentaux. Cette, loi mise en évidence à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, fait apparaître la proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques se sont basées, même pour les écoulements multidirectionnels, sur la loi de Darcy. Elle s'écrit :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (\text{I.5})$$

Où V est la vitesse de filtration, ρ et μ sont, respectivement, la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide ; K la perméabilité du milieu poreux, Δp le gradient de pression appliqué et \vec{g} le vecteur accélération de la pesanteur.

La loi de Darcy généralisée est valable pour les écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds basés sur le diamètre des pores. Cette loi, qui reste largement utilisée, se trouve cependant insuffisante. D'une part elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide saturant sur l'écoulement, notamment dans les zones pariétales ; avec ce modèle, la condition de glissement du fluide sur les parois solides est retenue quelle que soit la nature du fluide. D'autre part cette loi ne tient pas compte de l'effet des forces visqueuses dans le cas de milieux poreux fortement perméables et elle ne prend pas en compte, non plus, l'effet d'inertie dans le cas où les vitesses sont importantes. Des termes additionnels ont donc été apportés au modèle de Darcy pour remédier aux insuffisances de ce dernier.

I.7.2 Modèle de Brinkman

Brinkman (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de Stokes :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\vec{\nabla}^2\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (\text{I.6})$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman. Ce dernier, qui représente les forces visqueuses causées par le cisaillement macroscopique le long des frontières est très significatif dans les régions près des parois solides.

Poulikakos & Renken ont montré l'influence du terme de Brinkman sur le champ dynamique et sur le transfert de chaleur. Pour l'aspect dynamique, ce terme permet de mettre en évidence l'effet « channeling » près des parois solides et aussi de satisfaire la condition d'adhérence aux parois. Quant à l'aspect thermique, l'omission de ce terme influe considérablement sur la valeur du nombre de Nusselt.

La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de viscosité équivalente du milieu μ_{eff} .

Plusieurs auteurs (Lundgren (1972), Rubinstein (1986), Durlofsky & Brady (1987)) ont montré que le terme de Brinkman n'est valable que pour de faibles valeurs de porosité. Cependant ce terme est retrouvé par la méthode de prise de moyennes en milieu homogène, Whitaker (1969,1986).

I.7.3 Modèle de Forchheimer

Dans le cas d'un écoulement où les vitesses sont élevées, l'effet d'inertie non linéaire devient important et l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Un terme quadratique en vitesse a donc été apporté au modèle de Darcy, par Ward, 1964 :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \vec{V} + C_f K^{1/2} \rho |\vec{V}| \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.7})$$

I.8 Revue bibliographique

Dans cette perspective, nous présentons une synthèse bibliographique portant sur le transfert de chaleur par convection naturelle en cavité poreuse saturées par un fluide pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

L.Kalla et al en 1999 [2] ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une couche poreuse allongée dans la direction horizontale. Toutes les faces de la cavité rectangulaire sont exposées à des flux de chaleur uniforme, le chauffage et le refroidissement étant appliqués sur les parois opposées. Le problème est formulé en termes du modèle de Darcy. Ils ont montré qu'il est

possible d'utiliser l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour obtenir une solution analytique décrivant les champs de fonctions de courant et de température dans la région centrale de la cavité. Il a démontré aussi que des solutions multiples sont possibles, certaines d'entre elles étant instables. Il a employé une méthode aux différences finies pour obtenir des solutions numériques à partir des équations gouvernantes complètes. Ils ont analysé les effets des différents paramètres, notamment celui du nombre de Rayleigh Ra , et d'une constante a donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontaux et verticaux

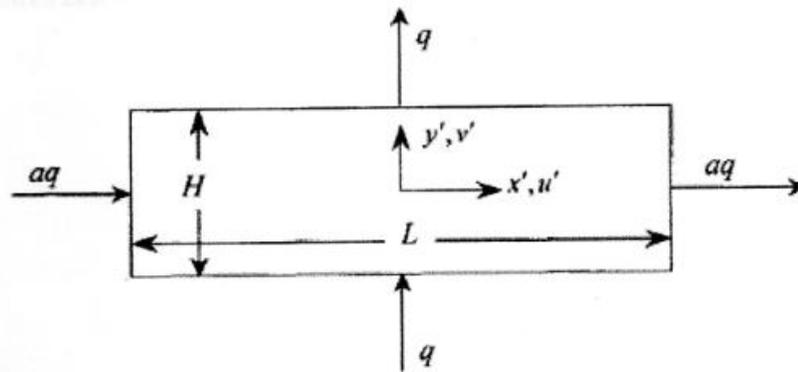


Figure I.4 : modèle physique et le système de coordonnées

A.C.Baytas en 2000 [3] a fait une analyse sur la production d'entropie dans une cavité poreuse saturée et inclinée pour un transfert de chaleur par convection naturelle laminaire en résolvant numériquement les équations de masse, de mouvement et d'énergie, il a utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq incompressible. Comme condition aux limites de la cavité, deux parois opposées sont maintenues à températures constantes mais différentes, et les deux autres sont isolés thermiquement. Les paramètres considérés sont l'angle d'inclinaison et le nombre de Darcy-Rayleigh. Il a comparé ses solutions avec les résultats des recherches précédentes connus. Il a obtenu un excellent accord entre les résultats qui valident le code de calcul utilisé. Il a montré que la distribution d'entropie locale est faisable et peut fournir des informations utiles pour le choix d'un angle approprié d'inclinaison.

En 2002, **R. Bennacer, A. Tobbal et H. Beji [4]** ont présenté une étude numérique et analytique concernant le transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux anisotrope

L'équation qui gouverne l'écoulement est celle de Darcy-Brinkman. Le système d'équations couplées est résolu par la méthode classique des volumes finis. Dans le cas d'écoulements d'origine thermique, ils ont appliqué l'analyse d'échelle pour prédire analytiquement l'évolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de l'anisotropie thermique. Les simulations numériques ont été présentées pour une cavité carrée, dans une large gamme de paramètres ont été variés. Les résultats numériques sont analysés en termes de transfert moyen de chaleur et de masse sur les parois verticales de la cavité et montre l'existence d'un maximum de transfert de masse pour un rapport d'anisotropie critique. Cette situation critique dépend de plusieurs paramètres dont le nombre de Lewis du fluide saturant. Leur résultats ont été comparés par l'analyse d'échelle, dans le cas d'un écoulement en couche limite (modèle de Darcy), et une corrélation générale est établie pour le calcul du transfert de masse et de chaleur en fonction des différents paramètres étudiés.

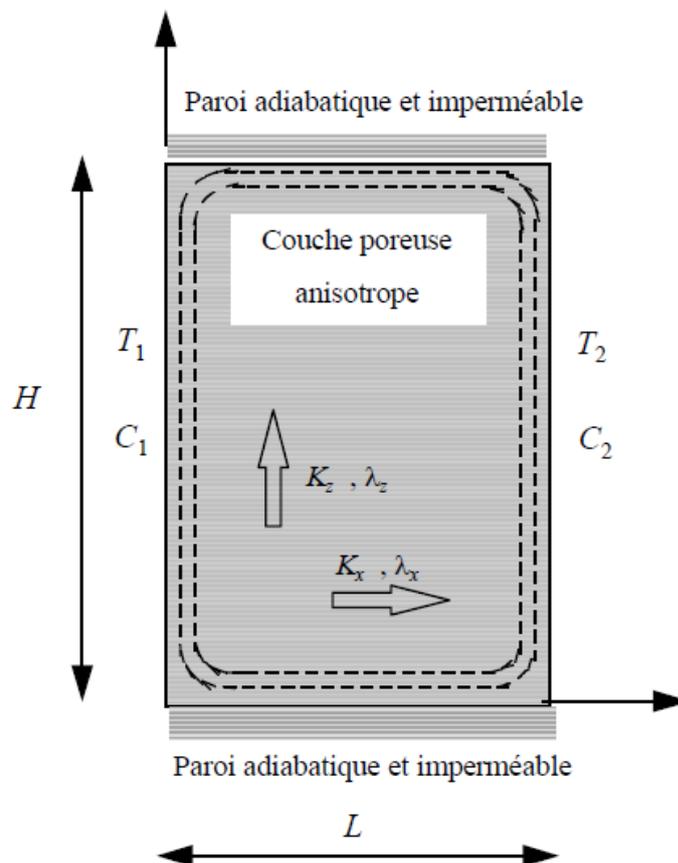


Figure I.5 : configuration physique étudiée

En 2005 **H.Nawaf et al [5]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux en régime transitoire. Ils ont utilisé le modèle de Darcy et le fluide est supposé un fluide standard de Boussinesq. La température de la paroi chaude (la paroi gauche) oscille dans le temps autour d'une valeur constante, tandis que la paroi froide (la paroi droite) est maintenue à une température constante, les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont présenté des résultats pour démontrer la variation temporelle des lignes de courant, des isothermes et du nombre de Nusselt. Lorsque la température de la paroi chaude oscille avec une forme amplitude et une forte fréquence, ils ont trouvé que le nombre de Nusselt devient négatif sur une paroi de la période du nombre de Rayleigh 103. Les valeurs négatives du nombre de Nusselt ont été trouvées parce qu'il n'y aura pas assez de temps pour transférer la chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide. La valeur maximum du nombre moyen de Nusselt est observée pour une fréquence adimensionnelle de 450 dans la gamme considérée (1-2000) pour un nombre de Rayleigh 103.

Saeid et al en 2005 [6] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité poreuse. La paroi inférieure est chauffée et la paroi supérieure est refroidie tandis que les parois verticales sont adiabatiques.

La paroi chaude est supposée avoir une température à variation spatiale et sinusoïdale sur une valeur moyenne constante, qui est supérieure à la température de la paroi supérieure froide. Les équations gouvernantes non- dimensionnelles sont dérivées sur la base du modèle de Darcy. Ils ont étudié les effets de l'amplitude de la variation de température de la paroi inférieure et la longueur de la source de la chaleur sur la convection naturelle dans la cavité pour la gamme 20-500 du nombre de Rayleigh. Ils ont constaté que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent lorsque la longueur de la source de chaleur ou de l'amplitude de la variation de la température augmente. Ils ont constaté aussi que le transfert de chaleur par unité de la surface de la source de chaleur diminue quand la longueur du segment chauffée augmente.

K.Bouhadef en 2005 [7] a fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffé par une température constante et uniforme T_p , les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante T_a . Les paramètres dont dépend la structure de la convection naturelle sont : le nombre de Rayleigh qui varie entre 103 et 5.105, le rapport d'aspect de la cavité $A_s=8$, le facteur de forme A (entre 0.10 et 0.20) et le nombre de Prandtl (celui de l'eau). Il a discrétisé les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique dans la cavité en utilisant une méthode implicite

aux différences finies et la méthode des volumes de contrôle. Il a réalisé l'adéquation entre les champs des vitesses et de pression à l'aide de l'algorithme SIMPLE. L'influence des paramètres caractéristiques de la topographie de la surface d'échange (font sinusoïdal), notamment de l'amplitude d'ondulation b et le facteur de forme de la cavité A , sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement, sont mises en évidence la variation du nombre de Rayleigh a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. Il a trouvé que les nombres de Nusselt locaux passent par des maximums aux sommets et aux creux et par des minimums entre eux.

En 2006 **A.Bahloul [8]** a fait une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide dans une cavité poreuse verticale. Une différence de température uniforme est appliquée à travers les parois verticales tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Les paramètres dont dépend la structure de l'écoulement sont : le nombre de Rayleigh Ra , qui varie entre 10 et 10000 et le facteur de forme de la cavité A qui varie entre 1 et 20. Pour un grand nombre de Rayleigh, et sur la base des résultats numériques il obtenu un modèle approximatif du régime de couche limite. Pour un chauffage élevé, il a donné un modèle simplifié pour le paramètre de stratification $\gamma = 1.22A - 0.47Ra^{0.46}$. Il a montré aussi que le coefficient stratification thermique dépend essentiellement du rapport de forme de l'enceint A , et devient presque indépendant du nombre de Rayleigh Ra , dans le régime de la couche limite. Il a utilisé la théorie de la stabilité linéaire du flux parallèle pour obtenir le nombre de Rayleigh critique pour une cavité longue ($A \gg 1$). Il a constaté que l'écoulement est stable, indépendant du coefficient de stratification.

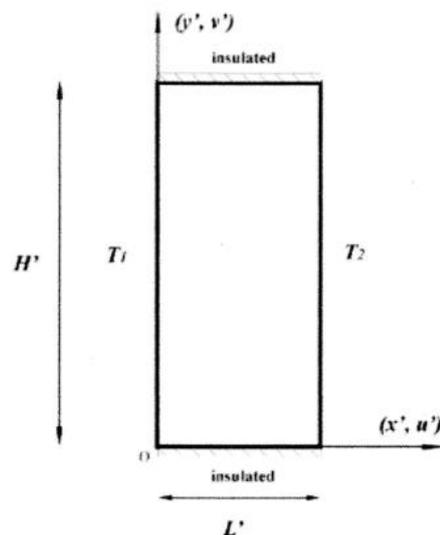


Figure I.6: schéma du modèle physique et le système de coordonnées

Barletta et al [9] en 2006 ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée verticale remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont utilisé le logiciel Famlab 3.1 i

(c COMSOL, Inc.). La cavité est chauffée par une paroi interne concentrique circulaire soumise à un flux de chaleur uniforme. Les parois de la cavité sont isothermes et l'écoulement est supposé être à deux dimensions, stationnaire et laminaire. Ils négligent l'effet de la dissipation visqueuse et aucune production d'énergie interne n'est considérée. Le milieu poreux satisfait à la loi de Darcy et la validité de l'approximation de Boussinesq est réalisée. Ils ont trouvé que la fonction de courant et la température dépendent du nombre de Rayleigh modifié Ra^* ; qui est le produit du nombre de Rayleigh Ra et du nombre de Darcy Da . Ils ont évalué les valeurs moyennes du nombre de Nusselt et de l'énergie cinétique. Ils ont fait des essais pour vérifier que la solution est indépendante du maillage et que Femlab produit généralement des résultats précis à quatre chiffres pour toutes les quantités testées.

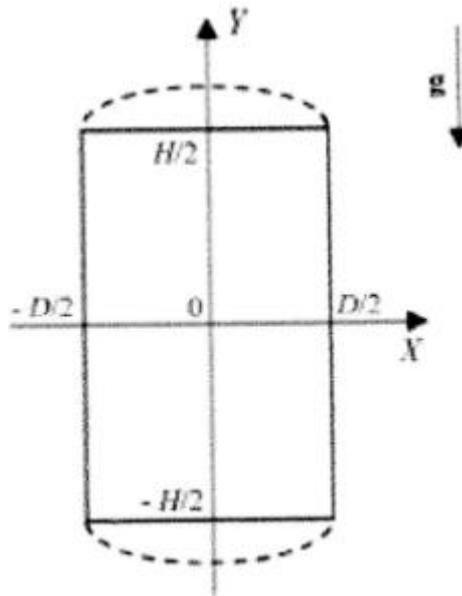


Figure I.7 : Dessin de la cavité

Basak et al [10] en 2006 ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'une matrice poreuse. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis pour un chauffage uniforme et non uniforme de la paroi inférieure, la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales sont maintenues à une température froide constante. Le milieu poreux est modélisé en utilisant les équations de Darcy-Forchheimer. Ils ont adopté la procédure numérique pour obtenir une performance constante sur une large gamme de paramètres (nombre de Rayleigh Ra , $103 \leq Ra < 10^6$, nombre de Darcy Da , $10^{-5} < Da < 10^{-3}$, et le nombre de Prandtl Pr , $0,71 < Pr < 10$) à l'égard de la continuation et la discontinuation des conditions thermiques aux

limites. Ils ont présenté les résultats numériques en termes des fonctions de courant, des isothermes et des nombres de Nusselt. Ils ont trouvé que le chauffage non uniforme de la paroi inférieure produit un plus grand taux de transfert de chaleur au centre de la paroi inférieure que le cas de chauffage uniforme pour tous les nombres de Rayleigh, mais le nombre moyen de Nusselt montre globalement un plus faible taux de transfert de chaleur pour le cas de chauffage non-uniforme. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction quand $Da_{<10-5}$ indépendamment de Ra et Pr. Ils ont trouvé aussi que le transfert de chaleur par conduction est une fonction de Ra pour $Da_{>10-4}$. Ils ont donné les nombres de Rayleigh critiques pour que la conduction domine le transfert de chaleur et ils ont présenté les corrélations du Power Law entre le nombre moyen de Nusselt et les nombres de Rayleigh quand la convection domine le transfert.

Bousri et K. Bouhadef [11] en 2007 ont étudié numériquement des transferts de chaleur et de masse simultanée dans les écoulements de certains fluides dans des milieux réactifs, en vue de leur éventuelle épuration de certaine substance soit par filtration, soit par destruction des substances indésirables. Leur analyse est basée sur le modèle de Darcy Brinkman et les équations de conservations, qui décrit l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes couplés de réaction chimique de diffusion et de transfert thermique. Ils ont fait l'approche à partir d'un modèle 2D, en convection forcée, avec une configuration géométrique cylindrique, pour un ordre de réaction ($n=1$) et pour le cas d'un flux à la paroi. Le système d'équation gouvernantes obtenu et discrétisé et traité numériquement, grâce à méthode des volumes finis. La résolution a ensuite été effectuée à partir de l'algorithme SIMPLER qui est le plus adopté à ce type de problèmes. Les résultats obtenues ont permis, entre autres, de quantifier les différents échanges de chaleur et de masse, et d'établir la variation de la concentration et de la température dans le milieu poreux réactif, ils ont validé est effectuée autant sur le champ dynamique stationnaire que sur le champ thermique instationnaire par rapport à la solution analytique.

- Pour le champ dynamique ils ont considéré le cas limite d'une convection forcée.
- Pour le champ thermique la vérification s'est effectué sur le cas limite d'une conduction instationnaire dans un cylindre rempli d'un milieu poreux.

L'erreur relative maximale obtenue des deux solutions et de l'ordre de 4% pour le champ dynamique et de 0.1% pour le champ thermique.

Y. Outalrb, K. Bouhadef & O. Rahli [12] en 2007 ont analysé la convection thermosolutale ayant lieu dans une enceinte munie d'une cloison poreuse et siège d'une injection/extraction de matière. L'exploration numérique a permis d'observer les effets paramètres thermo physique

(perméabilité, rapport de poussées, facteur d'injection) et du positionnement de l'arrivée/départ de l'injection/extraction, sur la maîtrise des échanges. L'approche effectuée, a permis aussi de dégager des valeurs critiques de certaines des propriétés caractéristiques et de mettre en évidence les positions optimales et la configuration appropriée pour l'injection/extraction, en fonction de l'application envisagée. Il apparaît, notamment, dans tous les cas considérés, que c'est le phénomène d'extraction qui permet d'accroître les transferts, l'injection étant, pour sa part, réductrice des échanges, qu'il soit thermique ou massique. Ils ont trouvé que les échanges thermiques et solutal augmentent avec l'augmentation du rapport de poussées en valeur absolue et le transfert de masse est amélioré lorsque la matrice poreuse est placée aux extrémités de la cavité.

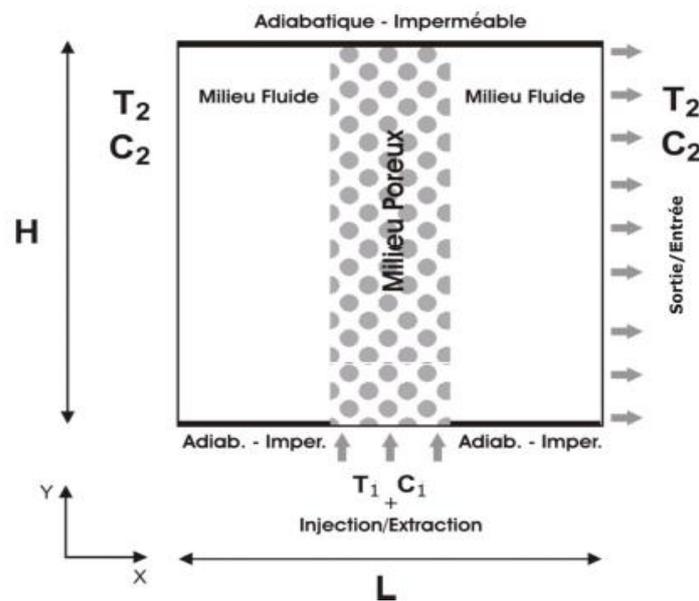


Figure I.8 : Modèle physique

La convection naturelle dans un milieu poreux multicouche est étudiée par **Y. Ould-Amer** et **S. Slama** [13] en 2007, ils ont intéressés à la convection naturelle dans une cavité poreuse multicouche. Chaque couche de milieu poreux (trois dans leur étude) est considérée homogène, isotrope et saturé par un seul fluide. L'enceinte est supposée être chauffée à des températures différentes le long des parois latérales, les deux autres sont isolés. Dans le but de généraliser les résultats, les équations gouvernantes sont mises sous forme adimensionnelle. Ils ont utilisé les nombre de Rayleigh modifié et fluide, le nombre de Darcy, le nombre de Prandtl ainsi que les rapports de perméabilités entre des différentes couches comme des paramètres de l'étude. La convection naturelle bidimensionnelle laminaire est modélisée numériquement par la méthode numérique des volumes finis.

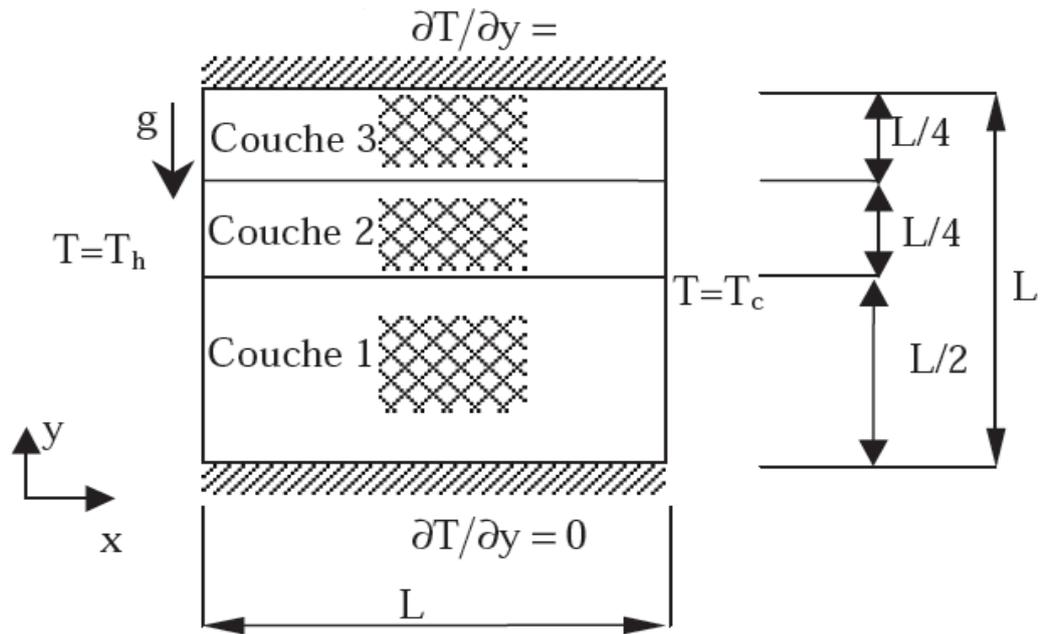


Figure I.9 : Modèle physique et système de coordonnées

Leurs résultats montrent en outre que la convection naturelle est intensive dans la première couche (de perméabilité plus élevée) pour toute la gamme des paramètres considérés. En effet, le régime est cellulaire dans celle-ci. Le taux de transfert de chaleur est une fonction croissante du nombre de Rayleigh modifié.

En 2008 **Varol et al [14]** ont fait une étude numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé de fluide dans une enceinte rectangulaire avec une variation sinusoïdale du profil de température sur la paroi inférieure. Toutes les parois de l'enceinte sont isolées, sauf la paroi inférieure qui est partiellement chauffée refroidie. Le milieu poreux est modélisé à partir des équations classiques de Darcy. Ensuite ils ont résolu numériquement ces équations en utilisant la méthode des différences finies. Ils analysé le problème pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra dans la gamme $10 < Ra < 1000$, et pour différentes valeurs du facteur de forme AR , avec $0,25 < AR < 1,0$ et aussi pour différentes valeurs de l'amplitude de la fonction sinusoïdale de la température λ dans la gamme $0,25 < \lambda < 1,0$. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude λ et diminue quand la valeur du facteur de forme AR augmente. Ils ont observé plusieurs cellules dans la cavité pour toutes les valeurs des paramètres considérés.

N. Hadidi, Y. Ould-Amer [15] en 2011 ont étudié la convection en double diffusion générée dans une cavité poreuse contenant deux couches poreuses disposées verticalement. Les deux couches poreuses sont saturées par le même fluide. Les parois latérales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables.

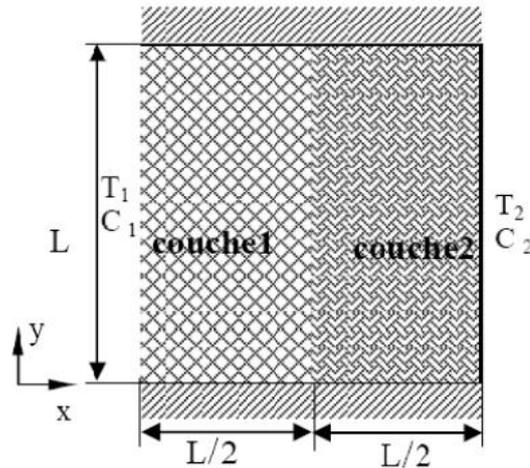


Figure I.10 : modèle physique et système de coordonnées

Dans toutes les simulations de cette étude, ils ont considéré une solution aqueuse comme fluide saturant les deux couches poreuse ($Pr=7$). La porosité des deux couches est prise égale à 0.8. Le rapport des conductivités thermiques des deux couches poreuses, le nombre de Lewis et le rapport des forces de volume sont respectivement fixés à 1,10 et 1. Par ailleurs, le rapport de la viscosité effective à la viscosité fluide (Rn) est prise égal à l'unité. Les autres paramètres varient dans la page suivante :

- Le rapport de perméabilité RK de 10^{-4} à 10^4
- Le nombre de Rayleigh modifié Ram de 1 à 10^3

II.1.Introduction

Le terme convection est habituellement connu sous le nom de transport d'énergie par gradients potentiels et mouvements du fluide. La convection est un mode de transfert de chaleur qui est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Les caractéristiques du transfert de chaleur est le transport de l'énergie par mouvement moléculaire, ce que l'on appelle par « diffusion » ; et par mouvement macroscopique du fluide, ce que l'on appelle par « advection ». Ce phénomène est formulé mathématiquement par les équations aux dérivées partielles et se passe dans la configuration considérée dans notre présente étude.

II.2.Position et description du problème considéré

II.2.1 Géométrie du problème

La géométrie du problème considéré est schématisée par la figure (II.1). Elle consiste en une zone poreuse de hauteur H_p simulant des composants électroniques et une zone libre de hauteur H_L dans une cavité rectangulaire de longueur (L) et de hauteur (H). On suppose que la température de la paroi supérieure est constante et égale à T_f , la surface inférieure est aussi constante et égale à T_c , avec $T_c > T_f$, les parois verticales sont supposées adiabatiques.

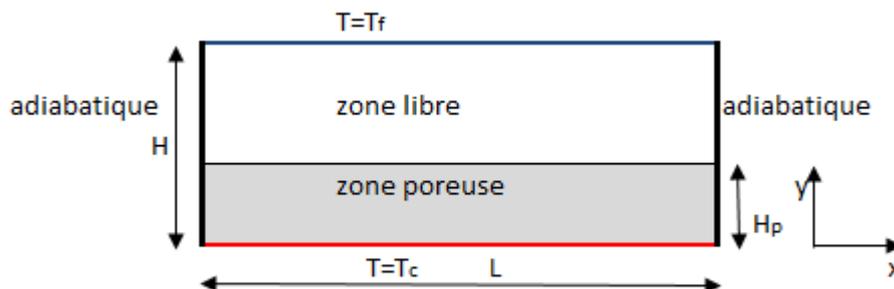


Figure II.1 : Géométrie du problème considérée

II.3. Formulation mathématique

La formulation des phénomènes de transfert dans un milieu poreux est effectuée sur une échelle macroscopique, où la taille du volume élémentaire représentatif (VER) est très grande par rapport à celle des pores.

Afin de simplifier la modélisation du problème, les équations régissant les principes de conservation sont formulés en adoptant un ensemble d'hypothèses simplificatrices issues des propriétés physiques de l'écoulement à savoir :

- On considère un fluide newtonien, incompressible ;
- On suppose les propriétés physiques du fluide constantes, hormis la masse volumique dans le terme de poussée d'Archimède pour lequel l'approximation de Boussinesq est appliquée. (les écarts de températures ne sont pas trop élevés) ; soit $\rho = \rho_f [1 - \beta (T - T_{ref})]$
- La dissipation visqueuse et le terme de compression dans l'équation d'énergie sont négligés ;
- L'écoulement est supposé laminaire et permanent ;
- Le milieu poreux est isotrope et homogène ;
- L'équilibre thermique et dynamique entre le fluide et la matrice poreuse ;
- Le mouvement du fluide dans la cloison poreuse est régi par le modèle de Darcy-brinkman-Forscheimer, alors que dans les compartiments fluides le mouvement est décrit par les équations de Navier-Stokes ;

II.3.1. Mise en équations

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, les équations régissant le phénomène s'écrivent :

II.3.1. 1 Milieu libre

Le mouvement est décrit par les équations de Navier-Stokes sous forme dimensionnelles comme suit

a-Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{II-1}$$

b-Equation de quantité de mouvement suivant x

$$\rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{II-2}$$

c- Equation de quantité de mouvement suivant y

$$\rho_f \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_f \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta [(T - T_{ref})] \rho_f g \tag{II-3}$$

d- Equation de conservation d'énergie

$$(\rho_f c_p) \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II-4})$$

II.3.1. 2 Milieu poreux

Le mouvement du fluide dans la cloison poreuse est régi par le modèle de Darcy-Forcheimer

a- Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-5})$$

b- Equation de quantité de mouvement

Dans la direction x :

$$\rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\mu_f}{K} u + \varepsilon^2 \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho_f \frac{C_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}| u \quad (\text{II-6})$$

Dans la direction y :

$$\rho_f \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{\mu_f}{K} v + \varepsilon^2 \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 [\beta (T - T_{\text{ref}})] \rho_f \cdot \mathbf{g} - \varepsilon^2 \rho_f \frac{C_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}| v \quad (\text{II.7})$$

c- Equation d'énergie

$$(\rho c_p)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_{\text{eff}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

Où :

ρ_f : La masse volumique du fluide considéré ;

ε : La porosité du milieu poreux ;

μ_f : La viscosité dynamique ;

K : la perméabilité du milieu poreux ;

λ : conductivité thermique ;

$(Cp)_f$: capacité calorifique du fluide ;

Les indices

f : représente le fluide ;

eff : représente les variables effectives.

II.3.2. Conditions aux limites

Les conditions cinématiques et thermiques sont dressées dans les tableaux qui suivent :

	x [0, L]	y [0, H]	Condition
Paroi gauche	0	$0 \leq y \leq H$	$u = v = 0$
Paroi droite	L	$0 \leq y \leq H$	$u = v = 0$
Paroi inf	$0 \leq x \leq L$	0	$u = v = 0$
Paroi sup	$0 \leq x \leq L$	H	$u = v = 0$

Tab II.1 conditions cinématiques

	x [0,L]	y [0, H]	Condition
Paroi gauche	0	$0 < y < H$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Paroi droite	L	$0 < y < H$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Paroi sup	$0 < x < L$	H	$T = T_f$
Paroi inf	$0 < x < L$	0	$T = T_c$

Tab II.2 conditions thermiques

II.4. Forme adimensionnelle des équations

La forme adimensionnelle est utilisée afin de trouver des solutions générales aux problèmes physiques indépendamment des systèmes de mesure. Elle permet aussi la simplification de la résolution des systèmes d'équations et la réduction des paramètres physiques. Pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire des grandeurs de référence.

- **Grandeurs caractéristiques**

Les grandeurs caractéristiques sont choisies comme suit :

H : hauteur de la cavité.

V_0 : vitesse induite. Avec $V_0 = \sqrt{Hg\beta\Delta T}$

$P_0 = \rho V_0^2$: Pression de référence.

ΔT : écart de température ; $\Delta T = T_c - T_f$

La température de référence est prise : $T_{ref} = T_f$, avec T_f : Température froide

- **Variables adimensionnelles**

on définit les variables adimensionnelles sous la forme :

$$X = \frac{x}{H} \quad Y = \frac{y}{H} \quad (\text{II.9})$$

$$U = \frac{u}{V_0} \quad V = \frac{v}{V_0} \quad (\text{II.10})$$

$$P = \frac{p}{\rho V_0^2} \quad (\text{II.11})$$

$$\theta = \frac{(T - T_{ref})}{\Delta T} \quad (\text{II.12})$$

Après substitution des variables adimensionnelles dans les équations du modèle mathématique et dans les conditions aux limites on obtient le système d'équations adimensionnel suivant :

➤ Milieu libre

i) Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.13})$$

ii) Equation de la quantité de mouvement suivant X

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

Où : Gr est le nombre de Grashof

iii) Equation de la quantité de mouvement suivant Y

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \theta \quad (\text{II.15})$$

iii) Equation d'énergie

$$\left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

Où : $Pr = \frac{(\mu c_p)_f}{\lambda_f}$ est le nombre de Prandtl

➤ Milieu poreux

a- Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.17})$$

b- Equation de quantité de mouvement

Dans la direction x :

$$\Rightarrow U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{1}{Da} \frac{1}{\sqrt{Gr}} U + \varepsilon^2 \mu^* \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \varepsilon^2 \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} \cdot U \quad (\text{II.18})$$

Dans la direction y :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{1}{Da} \frac{1}{\sqrt{Gr}} V - \varepsilon^2 \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} V + \varepsilon^2 \mu^* \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \theta \quad (\text{II.19})$$

c- Equation d'énergie

$$\left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \lambda^* \frac{1}{Pr} \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques du problème. Ces paramètres sont :

Nombre de Prandtl : $Pr = \nu / \alpha$

Nombre de Grashof : $Gr = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr}$

Nombre de Darcy: $Da = K / H^2$ (K Perméabilité)

Rapport de conductivité : $\lambda^* = \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_f}$

Rapport de viscosité : $\mu^* = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f}$

Où : λ_{eff} est donnée par l'équation (I.4), et μ_{eff} est dressée dans le tableau (I.1)

Les conditions aux limite adimensionnelles

Les conditions cinématiques et thermiques adimensionnelle sont dressées dans les tableaux qui suivent :

	X [0, δ_1]	Y [0,1]	Condition
Paroi gauche	0	$0 \leq Y \leq 1$	$U=V=0$
Paroi droite	δ_1	$0 \leq Y \leq 1$	$U=V=0$
Paroi inf	$0 \leq X \leq \delta_1$	0	$U=V=0$
Paroi sup	$0 \leq X \leq \delta_1$	1	$U=V=0$

Tab II.3 : conditions cinématiques

Où : $\delta_1=L/H$ est le rapport de forme

	X [0, δ_1]	Y [0,1]	Condition
Paroi gauche	0	$0 < Y < 1$	$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$
Paroi droite	δ_1	$0 < Y < 1$	$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$
Paroi sup	$0 < X < \delta_1$	1	$\theta = 0$
Paroi inf	$0 < X < \delta_1$	0	$\theta = 1$

Tab II.4 : conditions thermiques

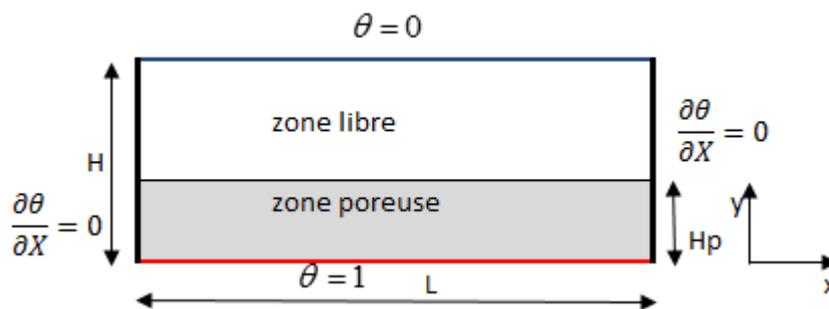


Figure II.2: condition aux limites adimensionnelles

II.5 Coefficients d'échange de la chaleur

II.5.1 Le nombre de Nusselt local

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité, nécessite la détermination des taux de transfert, donnés par le biais du nombre de Nusselt défini comme suit :

$$Nu_x = h_x \frac{H}{\lambda} \quad (\text{II.21})$$

Où : H est la longueur caractéristique

$$\text{Comme : } h_x = \frac{q_x}{T_c - T_f} \quad \text{et} \quad q_x = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Avec (q_x) est la densité du flux de chaleur et (h_x) le coefficient d'échange thermique superficiel.

En tenant compte des variables adimensionnelles définies précédemment à savoir :

$$\theta = \frac{(T - T_{ref})}{\Delta T} \quad Y = \frac{y}{H}$$

$$\text{Il vient que } Nu_x = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (\text{II.22})$$

II.5.2 Le nombre de Nusselt moyen

La valeur moyenne de nombres du Nusselt le long de cette paroi est calculée par l'intégrale

$$\text{suivante : } Nu_m = - \frac{1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} \left. \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right|_{Y=0} dX \quad (\text{II.23})$$

Conclusion

Une fois les équations régissant le problème posé, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique, en utilisant le code Fluent. L'explication de la méthode des volumes finis, utilisée par Fluent, fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III

Méthode des volumes finis

III.1. Introduction

Dans la pratique, tous les phénomènes physiques des écoulements de fluide en régime laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P) non linéaires. Qu'il convient de résoudre pour obtenir et connaître les caractéristiques de l'écoulement (champs d'écoulements, champs thermiques).

La résolution de système d'équations (est formé par l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie) analytiquement est pratiquement impossible de fait de la non- linéarité d'une part, et couplées d'autre part comme notre cas (la convection naturelle). Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode numérique adéquate pour trouver les meilleures approximations.

Pour obtenir cette solution numérique, on doit transformer les équations différentielles en système d'équations algébriques au moyen d'une méthode de discrétisation la plus fréquemment utilisée dans les problèmes d'écoulement et de transfert thermique, telle que la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, et la méthode des éléments finis.

III.2. Choix de la méthode numérique

Pour notre présente étude, nous avons choisi le code Fluent, utilisant la méthode des volumes finis, pour résoudre les équations résultantes. Cette méthode intègre les équations de transport sur un volume fini « appelé Volume de Contrôle » couvrant le domaine physique. Le résultat de discrétisation en un point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable aux valeurs des variables des points voisins. La discrétisation des équations de transport par cette méthode présente certains avantages du fait qu'elle permet un traitement plus facile des milieux hétérogènes et garantit la conservation de masse et de quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle, et dans tout le domaine de calcul. Aussi, elle facilite la linéarisation des termes sources s'ils ne le sont pas.

III.3. Maillage

C'est la subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection représente un nœud, où on trouve la variable P et les composantes u et v du vecteur

vitesse qui se trouvent au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents. la discrétisation du domaine est obtenue par un maillage constitué d'un réseau de points (nœuds).

Ainsi, un élément de volume de contrôle est défini autour de chaque nœud. Les grandeurs scalaires pression et température sont stockées dans le nœud P du maillage (figure III.1), tandis que les grandeurs vectorielles u et v sont stockés aux milieux des segments reliant les nœuds. L'équation générale du transport est intégrée sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantité de mouvement sont intégrées sur le volume de contrôle associé aux composantes de vitesse.

Le volume de contrôle de la composante longitudinale u est décalé suivant la direction x par rapport au volume de contrôle (figure III.2.a), celui de la composante transversale v est décalé suivant la direction y (figure III.2.b). Ce type de maillage dit « maillage décalée » permet une bonne approximation des flux convectifs et une meilleure évaluation des gradients de pression ainsi qu'une stabilisation numérique de la solution.

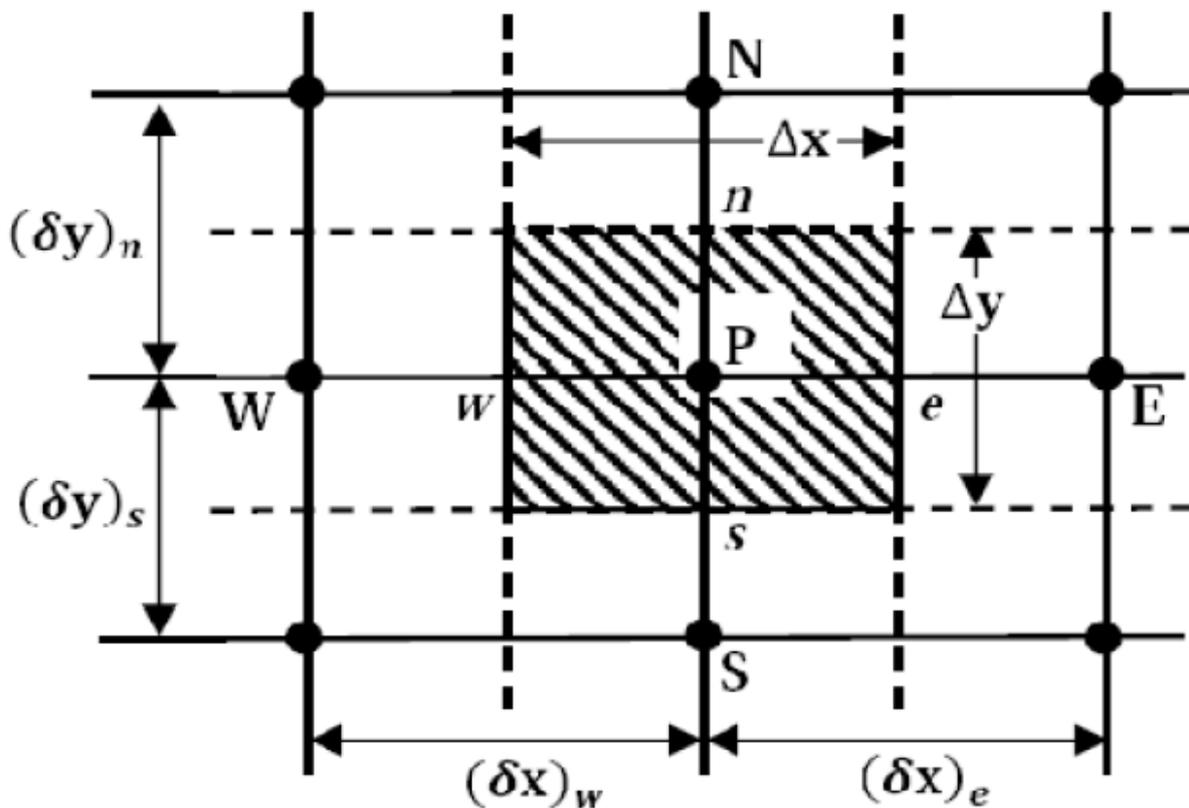


Figure III.1: Volume de contrôle bidimensionnel

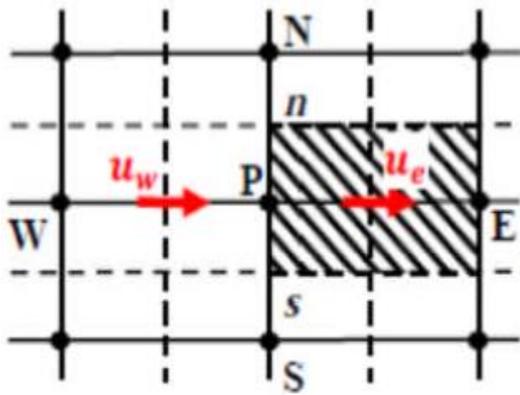


Figure III.2.a : maillage décalé pour la vitesse u

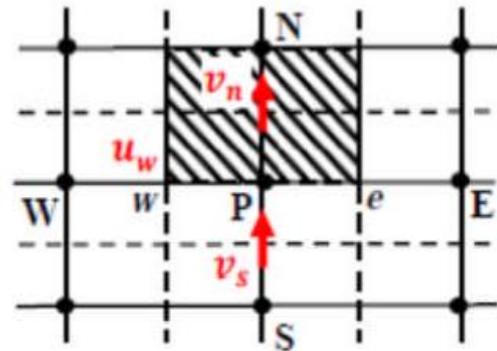


Figure III.2.b : maillage décalé pour la vitesse v

III.4. Equation générale de transport

L'équation générale de transport d'une variable Φ pour un écoulement bidimensionnel et incompressible, s'écrit dans le

systeme cartésien comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + S_\Phi \quad (\text{III. 1})$$

(j : indice de sommation ; j = 1, 2 dans le cas bidimensionnel.

$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \Phi)$: Terme convectif (transport par convection de Φ)

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)$: Terme diffusif (transport par diffusion de Φ)

S_Φ : Terme source.

Pour chaque variable, l'équation de transport s'écrit dans le cas stationnaire, bidimensionnel :

$$\frac{\partial(\rho u \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_\Phi \quad (\text{III. 2})$$

Où, Φ est la propriété transportée, Γ indique le coefficient de diffusion.

Dans le cas des équations de la convection naturelle dans un milieu libre, le tableau suivant résume les valeurs que prennent les variables Φ , Γ et S_Φ dans les différentes équations :

Equation	Φ	Γ	$S_\Phi = S_C + S_P \Phi_P$	
			S_c	S_P
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	$\frac{1}{\sqrt{Gr}}$	$-\frac{\partial P}{\partial X}$	0
Quantité de mouvement suivant Y	V	$\frac{1}{\sqrt{Gr}}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + \theta$	0
Energie	θ	$\frac{1}{Pr\sqrt{Gr}}$	0	0

Tableau III.1 : termes de l'équation de transport dans le milieu libre.

Dans le cas des équations de la convection naturelle dans le milieu poreux, le tableau suivant résume les valeurs que prennent les variables Φ , Γ et S_Φ dans les différentes équations :

Equation	Φ	Γ	$S_\Phi = S_C + S_P \Phi_P$	
			S_c	S_P
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	$\varepsilon^2 \mu^* \frac{1}{\sqrt{Gr}}$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X}$	$-\varepsilon^2 \left(\frac{C_f}{Da \sqrt{Gr} Da} \right)$
Quantité de mouvement suivant Y	V	$\varepsilon^2 \mu^* \frac{1}{\sqrt{Gr}}$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial Y} + \theta$	$-\varepsilon^2 \left(\frac{C_f}{Da \sqrt{Gr} Da} \right)$
Energie	θ	$\frac{\lambda^*}{Pr\sqrt{Gr}}$	0	0

Tableau III.2: termes de l'équation de transport dans le milieu poreux.

L'équation (III.2) est discrétisée et le système d'équation aux dérivées partielles est résolu pour chaque valeur successive de Φ . Le système prend alors la forme d'une équation très condensée.

L'équation (III.2) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}(j_x) + \frac{\partial}{\partial y}(j_y) = S_\Phi \quad (III.3)$$

Avec :

$$\begin{cases} j_x = \rho u \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ j_y = \rho v \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases} \quad (III.4)$$

j_x et j_y , sont les flux totaux (convection et diffusion) par unité de surface dans les directions x et y .

La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un système algébrique. L'équation (III.3) est d'abord intégrée sur le volume de contrôle de la figure (III.1).

$$\underbrace{\int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) dx dy}_I = \underbrace{\int_s^n \int_w^e S_\Phi dx dy}_{II} \quad (III.5)$$

Pour pouvoir mettre l'équation sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes :

- La variable généralisée varie linéairement entre les nœuds principaux dans les deux directions.
- Les termes convectifs et diffusifs sont uniformes à travers les faces correspondantes.
- Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle.

III.4.1. Intégration du flux total

L'intégration du terme convectif et diffusif (I) de l'équation (III.5) sur tout le volume de contrôle est :

$$I = \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (III.6)$$

$$I = \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (j_x) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (j_y) dx dy \quad (\text{III. 7})$$

$$I = ((j_x)_e - (j_x)_w) \int_s^n dy + ((j_y)_n - (j_y)_s) \int_w^e dx \quad (\text{III. 8})$$

$$I = (j_x)_e \Delta y - (j_x)_w \Delta y + (j_y)_n \Delta x - (j_y)_s \Delta x \quad (\text{III. 9})$$

Si on pose :

$$j_e = (j_x)_e \Delta y \quad j_n = (j_y)_n \Delta x$$

$$j_w = (j_x)_w \Delta y \quad j_s = (j_y)_s \Delta x$$

Donc l'expression de terme (I) devient :

$$I = j_e - j_w + j_n - j_s \quad (\text{III. 10})$$

III.4.2. Intégration du terme source

L'intégration du terme source (terme (II) de l'équation (III.5)) sur tout le volume de contrôle est :

$$\text{II} = \int_s^n \int_w^e S_\phi dx dy = \int_s^n \left(\int_w^e S_\phi dx \right) dy \quad (\text{III. 11})$$

Donc :

$$\text{II} = \overline{S_\phi} \Delta x \Delta y \quad (\text{III. 12})$$

Où $\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne du terme source sur le volume de contrôle. Quand le terme source dépend de la variable dépendante. Cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ceci permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

La linéarisation est l'évolution de la valeur moyenne $\overline{S_\phi}$ qui peut être fonction de la variable dépendante, leur valeur est donc calculée à chaque itération à partir des nouvelles des variables dépendantes.

Suite à la résolution des équations algébriques adoptées, le terme source sera linéarisé de façon à forcer la convergence, de sorte que :

$$\overline{S_\Phi} = S_c + S_p \Phi_p \tag{III.13}$$

Où S_c , S_p peuvent être ou ne pas être fonction des variables indépendantes du problème. On note ici que le taux de convergence et la stabilité des calculs sont étroitement liés à la manière de définir les deux constantes de linéarisation ci-dessus. La principale condition à respecter est que S_p doit être négative pour que la solution soit numériquement stable et que la convergence soit plus rapide.

III.4.3. Discrétisation spatiale

L'approximation de la variable généralisée Φ aux interfaces du volume de contrôle se fera donc avec le choix du schéma de discrétisation approprié. Le rôle du schéma intervient pour expliquer comment évaluer les flux de diffusion et de convection sur les faces du volume de contrôle (figure III.3) après intégration.

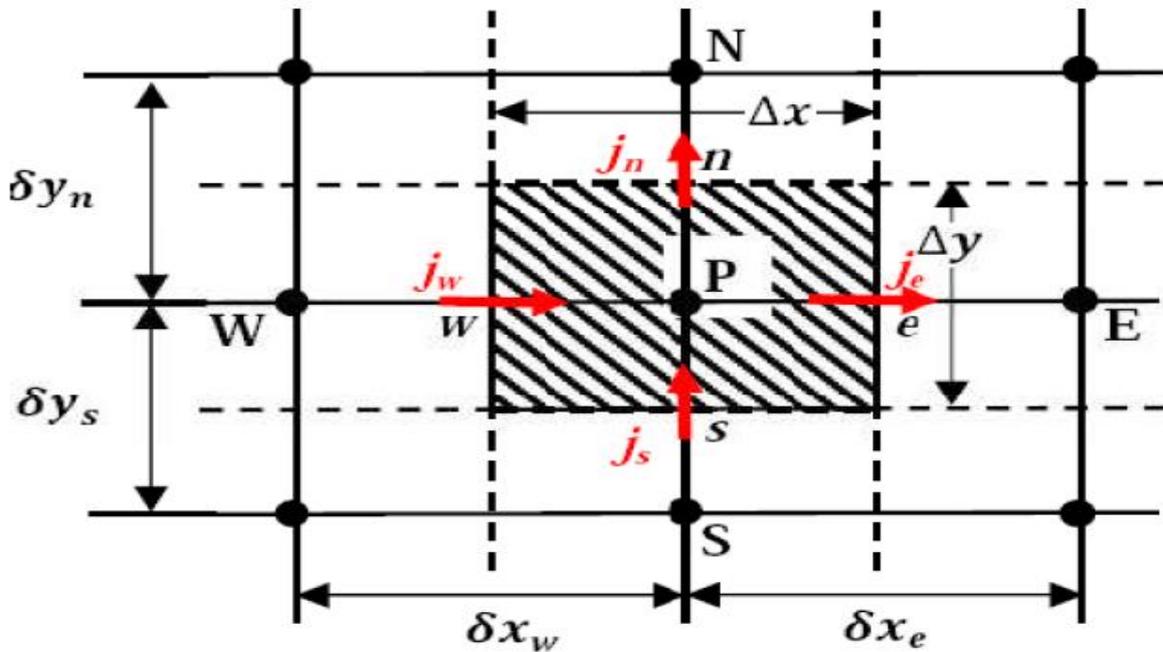


Figure III.3 : Volume de contrôle

D'après (III.10) et (III.13) l'équation (III.5) devient :

$$(j_e - j_w + j_n - j_s) = (S_c + S_p \Phi_p) \Delta x \Delta y \tag{III.14}$$

Après substitution des valeurs de j_i ($i = e, w, n, s$) dans l'équation (III.14), on obtient la forme discrétisée suivante :

$$(F_e \Phi_e - F_w \Phi_w) + (F_n \Phi_n - F_s \Phi_s) = [D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W)]$$

$$\begin{aligned}
 &+ [D_n(\Phi_N - \Phi_P) - D_s(\Phi_P - \Phi_S)] \\
 &+ (S_c + S_P \Phi_P) \Delta x \Delta y.
 \end{aligned}
 \tag{III. 15}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y, \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y, \quad D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} \Delta x, \quad D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} \Delta x. \\
 F_e = \rho u_e \Delta y, \quad F_w = \rho u_w \Delta y, \quad F_n = \rho u_n \Delta x, \quad F_s = \rho u_s \Delta x.
 \end{aligned}$$

D_i : sont les conductances de diffusion, toujours positives.

F_i : sont les flux convectifs à travers les faces respectives du volume de contrôle, peuvent être positives ou négatives selon le sens de l'écoulement.

Afin d'évaluer la variable Φ_i ($i = e, w, n, s$) à l'interface du volume de contrôle, on peut utiliser un des schémas suivants :

III.4.3.1. Schéma aux différences centrées (CDS)

Pour évaluer le flux convectif à l'interface, la variation de la variable Φ entre deux nœuds adjacents doit être exprimée par un profil linéaire. On suppose que les faces (e, w, n, s) se trouvent au milieu des nœuds (E, W, N, S) respectivement, les termes convectifs des variables généralisées Φ se présente par une interpolation comme suite :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} (\Phi_E + \Phi_P) \\
 \Phi_w &= \frac{1}{2} (\Phi_P + \Phi_W) \\
 \Phi_n &= \frac{1}{2} (\Phi_N + \Phi_P) \\
 \Phi_s &= \frac{1}{2} (\Phi_P + \Phi_S)
 \end{aligned} \right.
 \tag{III. 16}$$

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par les différences, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{(\delta x)_e} \\
 \Gamma_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w &= \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{(\delta x)_w}
 \end{aligned}
 \tag{III. 17}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n = \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{(\delta y)_n} \\ \Gamma_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{(\delta y)_s} \end{array} \right.$$

Remplaçons les formules (III.16) dans l'équation (III.15), on obtient :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (\text{III. 18})$$

Ou : $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_N = D_N - \frac{F_N}{2} \\ a_S = D_S - \frac{F_S}{2} \end{array} \right. \quad (\text{III. 19})$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y.$$

Les coefficients de discrétisation a_i ($i = E, W, N, S$) rassemblent les flux convectifs et diffusifs.

La deuxième règle de base de la méthode des volumes finis, qui exige que les coefficients soient tous positifs peut ne peut être vérifié d'après (III.19), pour cela on l'écrit en terme du nombre de Peclet (Pe) afin d'en déduire une condition d'application de ce schéma.

$$\begin{aligned} a_E &= D_e \left(1 - \frac{Pe_e}{2} \right) \\ a_w &= D_w \left(1 + \frac{Pe_w}{2} \right) \\ a_N &= D_N \left(1 - \frac{Pe_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

$$\left\{ a_s = D_s \left(1 + \frac{Pe_s}{2} \right) \right.$$

Avec : $Pe_i = \frac{F_i}{D_i} = \frac{(\rho u_i)(\delta x_i)}{\Gamma_i}$: nombre de Peclet qui caractérise le rapport de la convection à la diffusion.

D’après l’équation (III.20) pour que les coefficients a_i soit positifs. Le nombre de Pe doit être dans l’intervalle $[-2,2]$ ($|Pe| \leq 2$).

III.4.3.2. Schéma Upwind (UPS)

On l’appelle aussi le schéma amont.

Dans ce schéma, la valeur de la variable à l’interface n’est pas interpolée, mais elle est directement assignée à la valeur du nœud en amont au sens de l’écoulement, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_e = \Phi_P & \text{si } Fe > 0 \\ \Phi_e = \Phi_E & \text{si } Fe < 0 \\ \Phi_w = \Phi_W & \text{si } Fw > 0 \\ \Phi_n = \Phi_P & \text{si } Fw < 0 \\ \Phi_n = \Phi_N & \text{si } Fn > 0 \\ \Phi_s = \Phi_S & \text{si } Fs > 0 \\ \Phi_s = \Phi_P & \text{si } Fs < 0 \end{array} \right. \quad \text{(III.21)}$$

Cette condition peut être exprimée par l’opérateur :

$$\|A, B\| = \max(A, B).$$

Le schéma Upwind s’écrit donc :

$$\begin{cases} F_e \Phi_e = \Phi_P \|F_{e,0}\| - \Phi_E \| -F_{e,0} \| \\ F_w \Phi_w = \Phi_P \|F_{w,0}\| - \Phi_P \| -F_{w,0} \| \\ F_n \Phi_n = \Phi_P \|F_{n,0}\| - \Phi_N \| -F_{e,0} \| \\ F_s \Phi_s = \Phi_S \|F_{s,0}\| - \Phi_P \| -F_{n,0} \| \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

En substituant les expressions (III.22) dans l'équation (III.15), l'équation de discrétisation devient :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y.$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e + \| -F_{e,0} \| \\ a_W = D_w + \| F_{w,0} \| \\ a_N = D_n + \| -F_{n,0} \| \\ a_S = D_s + \| F_{s,0} \| \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Ce schéma est conseillé pour les écoulements à dominance convective.

III.4.3.3. Schéma Hybride (HDS : hybrid differencing scheme)

Le schéma HDS est la combinaison des deux schémas (centré et Upwind).

En appliquant ce schéma, la variable généralisée aux différentes interfaces du volume de contrôle prendra la forme suivante :

$$\begin{cases} \Phi_e = a_e \Phi_P + (1 - a_e) \Phi_E \\ \Phi_w = a_w \Phi_W + (1 - a_w) \Phi_P \\ \Phi_n = a_n \Phi_P + (1 - a_n) \Phi_N \\ \Phi_s = a_s \Phi_S + (1 - a_s) \Phi_P \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Où les coefficients a_i ($i=e, w, n, s$) sont définis par :

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Pe < -2 \rightarrow \text{schéma upwind} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |Pe| \leq 2 \rightarrow \text{schéma centré} \\ 1 & \text{si } Pe > 2 \rightarrow \text{schéma upwind} \end{cases} \quad (\text{III. 25})$$

En substituant les valeurs prises par la variable Φ dans l'équation (III.15), on aura :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y.$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \\ a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \\ a_N = \left\| -F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right\| \\ a_S = \left\| F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0 \right\| \end{cases} \quad (\text{III. 26})$$

III.4.3.4. Schéma à loi de puissance (PLDS)

Une bonne approximation polynomiale de la solution exacte est donnée par le schéma PLDS (Power law Differencing Scheme) développé par Patankar (1980)[15], qui s'écrit pour le coefficient a_E par exemple comme suit :

$$\begin{cases} a_E = -Pe_e D_e & \text{si } Pe_e < -10 \\ a_E = ((1 + 0.1Pe_e)^5 - Pe_e) D_e & \text{si } -10 \leq Pe_e < 0 \\ a_E = (1 - 0.1Pe_e)^5 D_e & \text{si } 0 \leq Pe_e \leq 10 \\ \frac{a_E}{D_e} = 0 & \text{si } Pe_e \geq 10 \end{cases} \quad (\text{III. 27})$$

L'équation de discrétisation de ce schéma s'écrit :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y.$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e \|0, (1 - 0.1|Pe_e|)^5\| + \|0, -F_e\| \\ a_W = D_w \|0, (1 - 0.1|Pe_w|)^5\| + \|0, -F_w\| \\ a_N = D_n \|0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5\| + \|0, -F_n\| \\ a_S = D_s \|0, (1 - 0.1|Pe_s|)^5\| + \|0, -F_s\| \end{cases} \quad (III.28)$$

On peut distinguer que le nombre de Peclet est l'élément essentiel pour caractériser le comportement d'un schéma numérique. La limitation des schémas précédents se situe alors comme suit:

- Schéma centré : par les valeurs $|Pe| \leq 2$;
- Schéma Upwind : surestime la diffusion pour les grands nombres de Peclet ;
- Schéma Hybride : son inconvénient est l'erreur maximale lorsque $|Pe| = 2$;
- Schéma PLDS : stable et donne une bonne approximation de la solution exacte.

III.4.3.5. Formulation générale du problème

L'intégration de l'équation de transport(III.2) donne :

$$j_e - j_w + j_n - j_s = (S_c + S_P \Phi_P) \Delta x \Delta y \quad (III.29)$$

$$j_i = (\rho u_j) \Phi_i - \Gamma_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right), \text{ avec}$$

$$: \begin{cases} \text{Si } i = e, w \text{ alors } u_j = u \text{ et } x_j = x \\ \text{Si } i = n, s \text{ alors } u_j = v \text{ et } x_j = y \end{cases} \quad (III.30)$$

L'intégration de l'équation de continuité sur le volume de contrôle donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (III.31)$$

Où : F_i ($i = e, w, n, s$) sont les débits massiques à travers les faces du volume de contrôle.

Si on multiplie l'équation (III.31) par Φ_P et on la retranche de l'équation (III.29), on obtient :

$$(j_e - F_e \Phi_P) - (j_w - F_w \Phi_P) + (j_n - F_n \Phi_P) + (j_s - F_s \Phi_P) = (S_C + S_P \Phi_P) \Delta x \Delta y \quad (\text{III.32})$$

On peut écrire les termes entre parenthèses de l'équation (III.32) comme suit :

$$\begin{cases} j_e - F_e \Phi_P = a_E (\Phi_P - \Phi_E) \\ j_w - F_w \Phi_P = a_W (\Phi_W - \Phi_P) \\ j_n - F_n \Phi_P = a_N (\Phi_P - \Phi_N) \\ j_s - F_s \Phi_P = a_S (\Phi_S - \Phi_P) \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w A(|Pe_w|) + \|F_w, 0\| \\ a_N = D_n A(|Pe_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s A(|Pe_s|) + \|F_s, 0\| \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

L'équation de discrétisation s'écrit sous la forme :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y.$$

La fonction $A(|Pe|)$ est choisie d'après le tableau suivant :

Schéma	La fonction $A(Pe)$
Différences centrées	$1 - 0.5 Pe $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0.5 Pe)\ $
Loi de puissance	$\ 0, (1 - 0.5 Pe)^5\ $

Tableau III.3 : La fonction $A(|Pe|)$ pour différents schémas de discrétisation.

III.5. Algorithme SIMPLE

Normalement, si le champ de pression est connu, la résolution de l'équation de quantité de mouvement donne un champ de vitesse qui vérifie automatiquement l'équation de continuité. Mais

comme aucune information sur la pression ne peut être obtenue de l'équation de continuité on est amené à résoudre ce problème par un algorithme itératif, c'est-à-dire on utilise une distribution quelconque de la pression pour résoudre l'équation de mouvement, le champ de vitesse obtenu ne vérifie pas l'équation de continuité, puisqu'il a été déduit d'un champ de pression quelconque. L'idée est de déduire de l'équation de continuité une équation pour corriger la pression, alors cette nouvelle pression est réutilisée pour calculer un nouveau le champ de vitesse et ainsi de suite jusqu'à convergence de toutes les variables du problème. Patankar et Spalding [16] (1972) désignèrent cet algorithme "SIMPLE" (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations).

Récapitulatif des étapes que suit l'algorithme SIMPLE :

- 1) Estimer le champ de pression P.
- 2) Résoudre les équations de quantité de mouvement pour ce champ de pression P et déduire le champ de vitesse correspondant (U, V) :

$$\begin{cases} a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{\text{voisins}}u_{\text{voisins}}^* + (P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_u \\ a_{i,j}v_{i,j}^* = \sum a_{\text{voisins}}v_{\text{voisins}}^* + (P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j} + b_v \end{cases} \quad (\text{III. 35})$$

Avec $i = e, w$ et $j = n, s$: pour les valeurs vectorielles (vitesses u et v)

$i = E, W$ et $j = N, S$: pour les valeurs scalaires (pression)

$(P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j}$: Force de pression agissant sur la face verticale du volume de contrôle de la composante vitesse u^* .

$(P_{i-1,j}^* - P_{i,j}^*)A_{i,j}$: Force de pression agissant sur la face horizontale du volume de contrôle de la composante vitesse v^* .

$A_{i,j}$: Surface sur les quelles agissent les force ($A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$).

- 3) Corriger la pression P^* et les vitesses u^* et v^* d'une quantité P' pour la pression et u' et v' pour les vitesses, ainsi les nouveaux champs s'écrivent :

$$\begin{cases} p = P^* + P' \\ u = u^* + u' \\ v = v^* + v' \end{cases} \quad (\text{III. 36})$$

- 4) Déduire une équation de correction de la pression pour cela :

- Soustraire les équations de quantité de mouvement écrite en valeur corrigée de celle en valeurs estimées on aura :

$$\begin{cases} a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{\text{voisins}}(u_{\text{voisins}} - u_{\text{voisins}}^*) + ((P_{i-1,j} - P_{i-1,j}^*) - (P_{i,j} - P_{i,j}^*))A_{i,j} \\ a_{i,j}(v_{i,j} - v_{i,j}^*) = \sum a_{\text{voisins}}(v_{\text{voisins}} - v_{\text{voisins}}^*) + ((P_{i,j-1} - P_{i,j-1}^*) - (P_{i,j} - P_{i,j}^*))A_{i,j} \end{cases}$$

D'après (III.36) nous aurons alors :

$$\begin{cases} a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{\text{voisins}}u'_{\text{voisins}} + (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})A_{i,j} \\ a_{i,j}v'_{i,j} = \sum a_{\text{voisins}}v'_{\text{voisins}} + (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})A_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III. 37})$$

L'algorithme SIMPLE suppose que les termes $(a_{\text{voisins}}u'_{\text{voisins}})$ et $(a_{\text{voisins}}v'_{\text{voisins}})$ peuvent être négligés, alors :

$$\begin{cases} a_{i,j}u'_{i,j} = (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})A_{i,j} \\ a_{i,j}v'_{i,j} = (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})A_{i,j} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} u'_{i,j} = (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})d_{i,j} \\ v'_{i,j} = (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})d_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III. 38})$$

Avec :

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$$

D'après (III.36) et (III.38) le champ de vitesse exact s'écrira :

$$\begin{cases} u_{i,j} = u_{i,j}^* + (P'_{i-1,j} - P'_{i,j})d_{i,j} \\ v_{i,j} = v_{i,j}^* + (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})d_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III. 39})$$

De façon similaire

$$\begin{cases} u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + (P'_{i-1,j} - P'_{i+1,j})d_{i+1,j} \\ v_{i,j+1} = v_{i,j+1}^* + (P'_{i,j} - P'_{i,j+1})d_{i,j+1} \end{cases} \quad (\text{III. 40})$$

Avec :

$$d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}}$$

- Introduire les expressions (III.39) et (III.40) dans l'équation de continuité suivante :

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j}] = 0$$

Nous obtenons l'équation de correction de la pression qui s'écrit comme suit :

$$a'_p P'_p = a'_E P'_E + a'_W P'_W + a'_N P'_N + a'_S P'_S + b \quad (\text{III. 41})$$

Avec :

$$\begin{cases} a'_E = (\rho Ad)_e & \text{et} & a'_W = (\rho Ad)_w \\ a'_N = (\rho Ad)_n & \text{et} & a'_S = (\rho Ad)_s \end{cases}$$

$$a'_p = a'_E + a'_W + a'_N + a'_S \quad \text{et} \quad b = (\rho u^* A)_e + (\rho u^* A)_w + (\rho v^* A)_n + (\rho v^* A)_s$$

5) Résoudre les autres équations de transport relatives aux autres scalaires du problème à savoir la Température.

6) Si les critères de convergences sont vérifiés, les champs ainsi déterminés sont les champs solution du problème. Si ce n'est pas le cas, le processus est réitéré à partir de la deuxième étape.

Toute fois, il se peut que la correction P' soit surestimé par cet algorithme et les calculs auront tendances à diverger, et le remède pour stabiliser ces calculs et d'utiliser un coefficient de sous relaxation aussi bien pour les équations de quantité de mouvement que celle de la pression ainsi l'expression (III.36) devient :

$$\begin{cases} P = P^* + a_p P' \\ u = u^* + a_u u' \\ v = v^* + a_v v' \end{cases} \quad (\text{III. 36})$$

On note aussi que pour stabiliser l'algorithme, il est nécessaire pour le coefficient de sous relaxation a_p est une valeur inférieur à a_u et a_v .

III.6. Méthode de résolution

Les équations (III.2) sont discrétisées avec la méthode des volumes finies elles donnent un système d'équations algébriques linéaire, qui prend la forme matricielle suivante :

$$\{A\}[\Phi] = \{b\} \quad (\text{III. 37})$$

Et pour la résoudre on peut utiliser une des deux méthodes de résolutions des équations algébriques linéaires : les méthodes directes et les méthodes indirectes (ou itératives).

Parmi les méthodes directes on citera l'inversion, diagonalisation et triangularisation de matrice.

Les méthodes itératives sont basées sur l'application répétée d'un algorithme relativement simple menant à la convergence. Certaines après un grand nombre de répétitions (itérations), comme les méthodes d'itératives de Jacobi et de Gauss Seidel.

III.7. Critère de convergence

A chaque pas du temps, la mise à jour des nouvelles variables physiques est faite jusqu'à ce que le critère de convergence $R^\Phi = \left| \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Phi^n} \right| < \varepsilon$, soit satisfait comme le montre l'organigramme suivant :

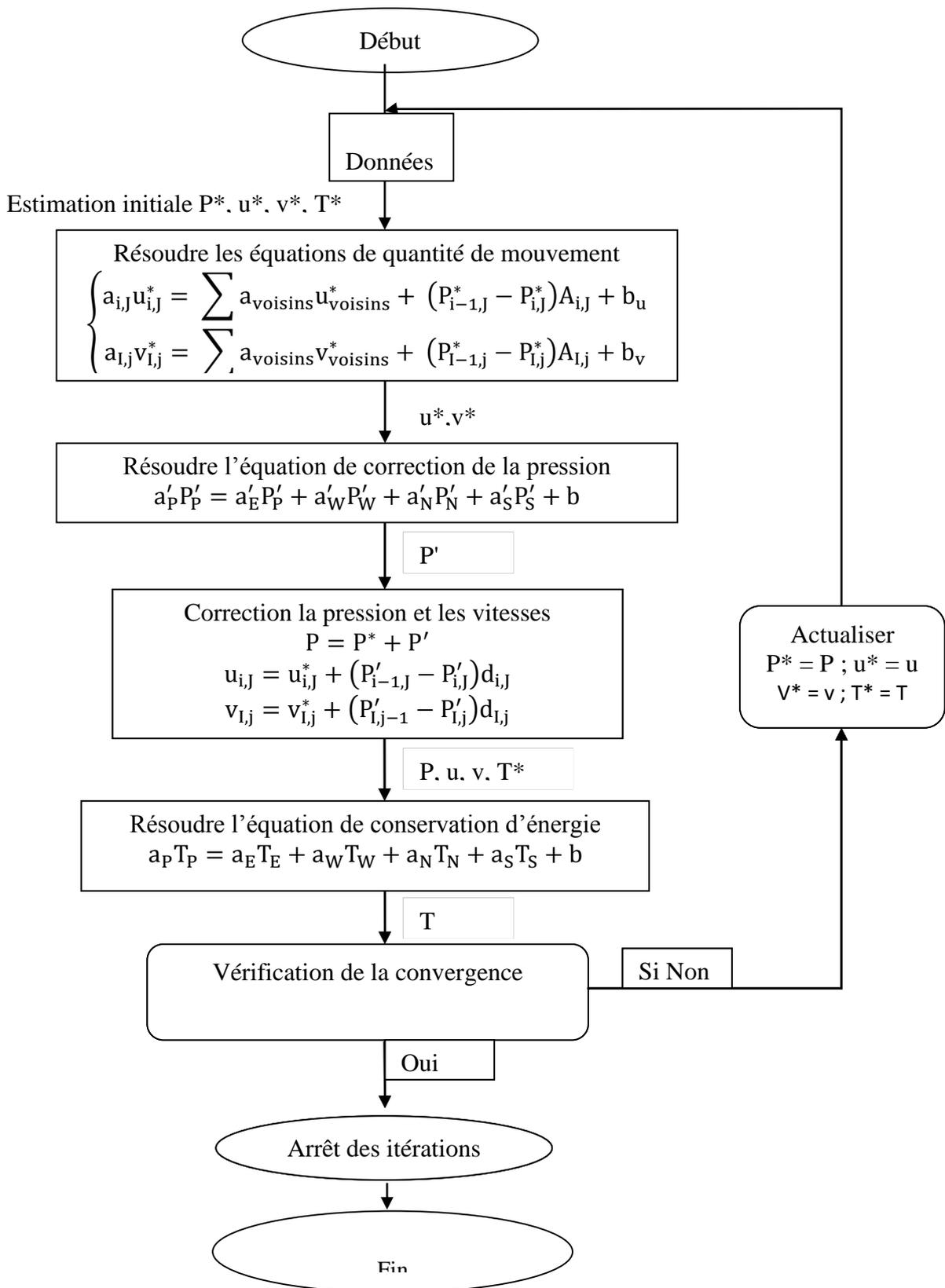


Figure III.4 : Organigramme de calcul

Chapitre IV

Résultats et discussions

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre tous les résultats obtenus des simulations concernant l'étude du refroidissement par convection naturelle dans une cavité partiellement poreuse.

Parmi les paramètres gouvernant le système d'équation, outre les rapports de forme de la cavité (δ_1) et (δ_2), nous distinguons le nombre de Darcy (Da) qui caractérise la perméabilité du milieu, le nombre de Grashof (Gr) qui caractérise l'écart de la température, le nombre de Prandtl caractérisant la nature du fluide, et le rapport de conductivité (λ^*).

La gamme de variation des paramètres est :

$$10^4 \leq Gr \leq 10^6, 10^{-6} \leq Da \leq 1, \text{ et } 0 \leq \delta_2 \leq 1, 1 \leq \delta_1 \leq 4. \text{ Tel que } \delta_1 = \frac{L}{H} \text{ et } \delta_2 = \frac{H_p}{H}, Pr=0.71$$

$$1 \leq (\lambda^*) \leq 4181$$

La porosité du milieu poreux $\varepsilon=0.5$

Les résultats obtenus des simulations numériques sont présentés par la visualisation des contours de la fonction de courant, des isothermes, des profils de vitesse d'ascension V, et de température adimensionnelle θ dans différentes sections de la cavité (différentes abscisses X).

IV-1 SENSIBILITE AU MAILLAGE

Le maillage utilisé dans la présente étude est un maillage uniforme dans les deux directions X et Y.

Afin d'illustrer l'influence du maillage sur les profils des lignes de courants, nous avons exécuté le code de calcul pour différents nombres de nœuds, variant de 41x41 à 81x81. La figure IV-1, montre que ce n'est qu'à partir d'un maillage de 51x51 que la structure d'écoulement est obtenue dans sa forme définitive et elle ne subit aucun changement pour un maillage plus fin.

D'autre part, la valeur du coefficient moyen d'échange thermique obtenue pour différents cas de nombre de nœuds, montrent que les variations sur le nombre de Nusselt sont minimales à partir d'un maillage de 51x51 (Tableau IV-1).

De ce fait, le nombre de nœuds adopté dans la présente étude est pris égal à 51x51.

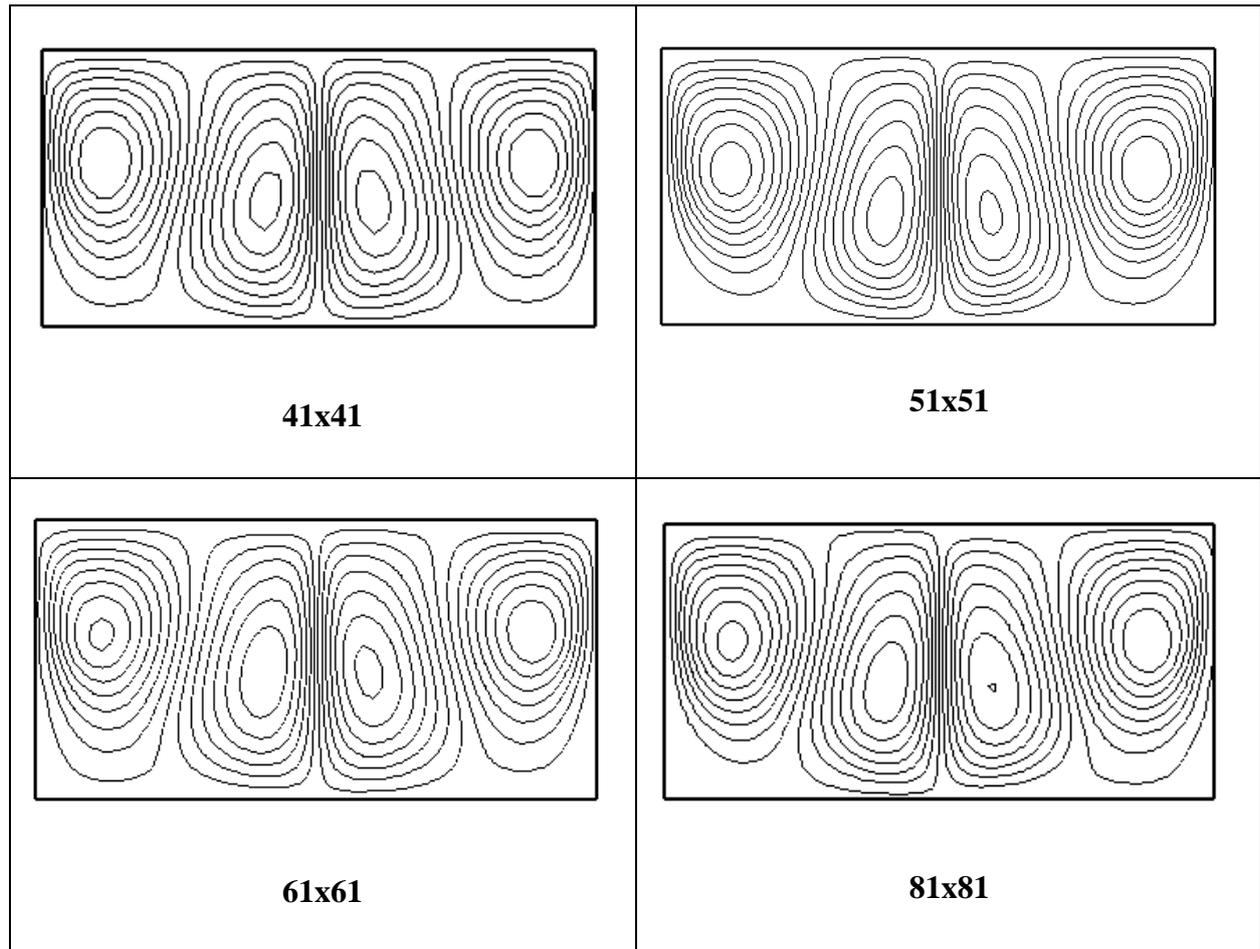


Figure IV.1 : lignes de courants pour différents maillages ($Da=10^{-3} Gr=3.510^5$, $\delta_1=2$, $\delta_2=0.5$
 $\lambda^* = 4181$, $\varepsilon=0.5$ et $Pr=0.71$)

maillage	41x41	51x51	61x61	81x81
Num	11.7131	11.43327	11.42925	11.43012

Tableau IV.1 Sensibilité au maillage

IV.2. Influence du nombre de Darcy (Da)

Nous portons dans cette section notre attention sur les conséquences de la pénétration de l'écoulement dans la couche poreuse ainsi que sur les transferts thermique. Nous nous sommes placés dans le cas d'une épaisseur de la couche $\delta_2=0.5$ et nous avons fait varier le nombre de Darcy. Les simulations sont réalisées sur une gamme du nombre de Darcy $[10^{-6}, 10^{-3}, 1]$ pour $Gr=3.5 \cdot 10^5$ et $\delta_1=0.5$ et $\lambda^* = 4181$ avec $\varepsilon=0.5$ et $Pr=0.71$.

IV.2.1. les isothermes et lignes de courants

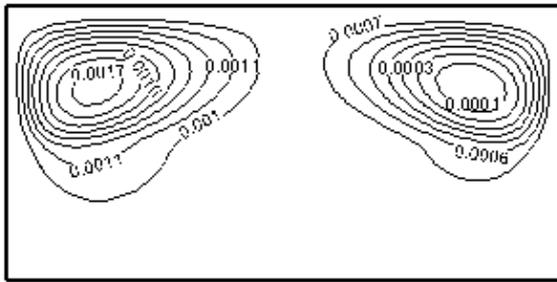


Figure IV.2a : lignes de courants pour $Da=10^{-6}$

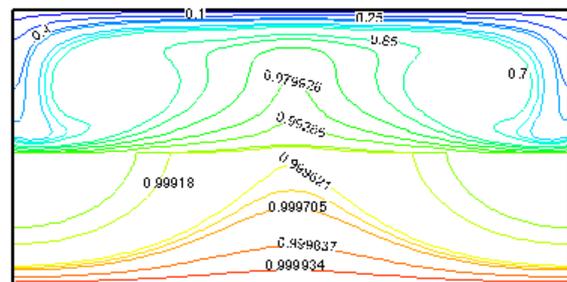


Figure IV.2b : isothermes pour $Da=10^{-6}$

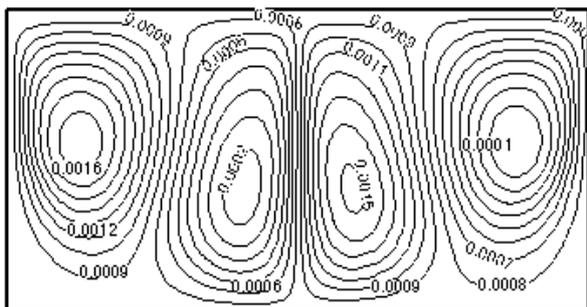


Figure IV.3a : lignes de courants pour $Da=10^{-3}$

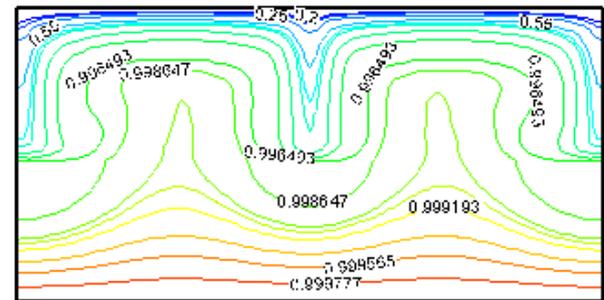


Figure IV.3b : isothermes pour $Da=10^{-3}$

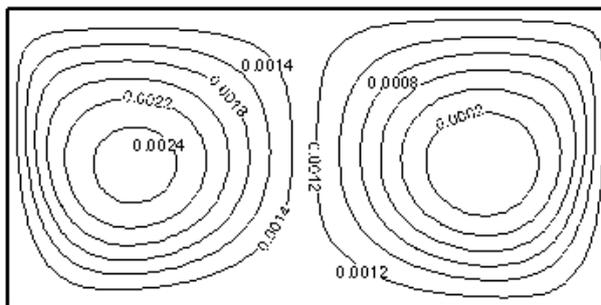


Figure IV.4a : lignes de courants pour $Da=1$

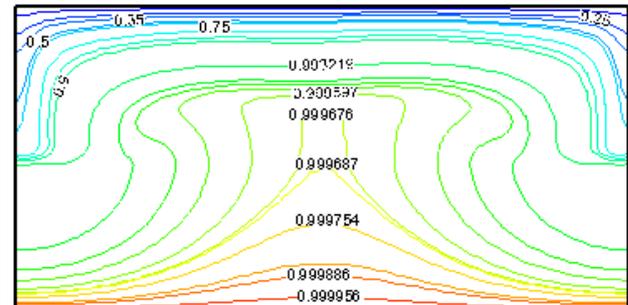


Figure IV.4b : isothermes pour $Da=1$

IV.2.2 profils des vitesses et des températures

Sur les figure (IV.5.a) ,(IV.5.b), (IV.5.c),(IV.6.a),(IV.6.b),(IV.6.c) on représente les profils des vitesses et des températures dans les différentes section de la cavité ($X=0.5$, $X=1$, $X=1.5$) pour les différents nombre de Da .

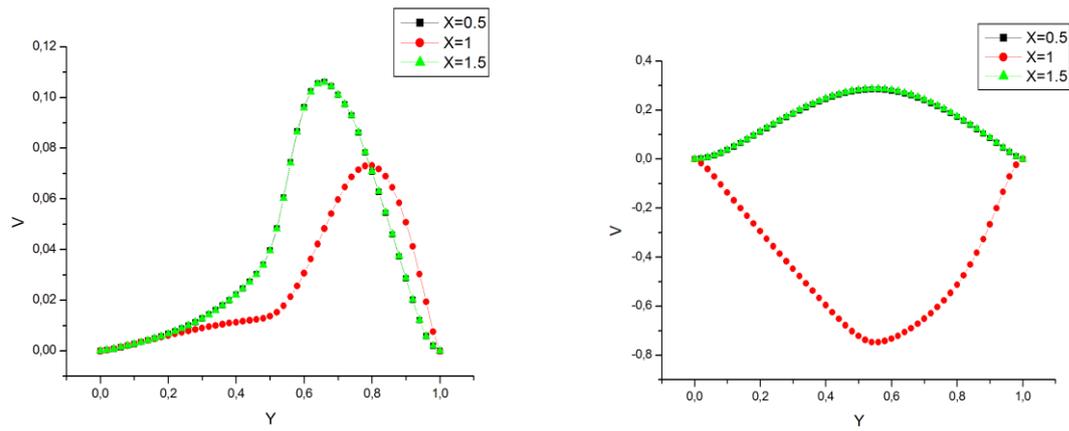


Figure IV.5.a : profils des vitesses ($Da=10^{-6}$) Figure IV.5.b : profils des vitesses ($Da=10^{-3}$)

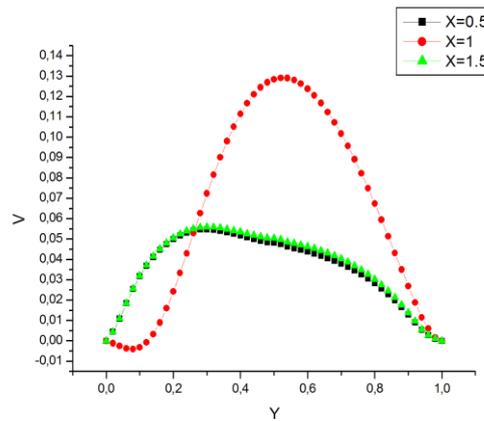


Figure IV.5.c : profils des vitesses ($Da=1$)

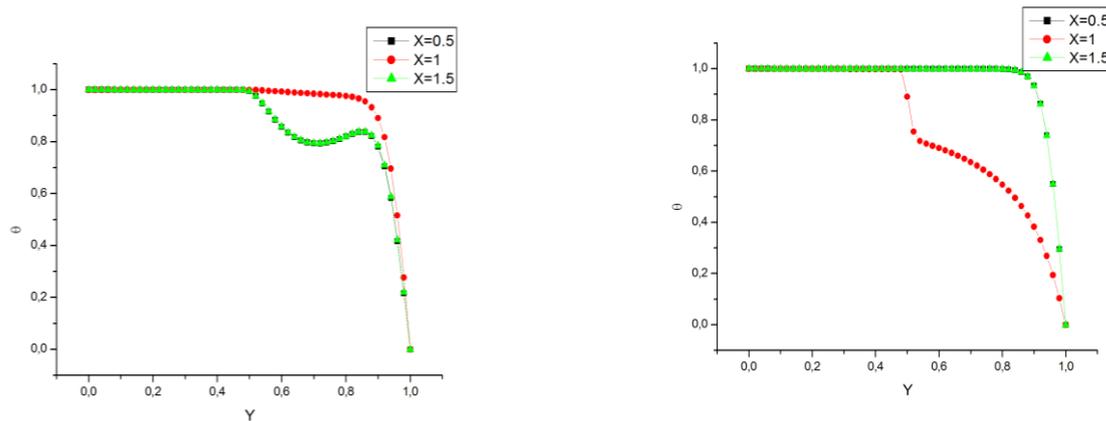


Figure IV.6.a : profils des températures ($Da=10^{-6}$) Figure IV.6.b : profils des température ($Da=10^{-3}$)

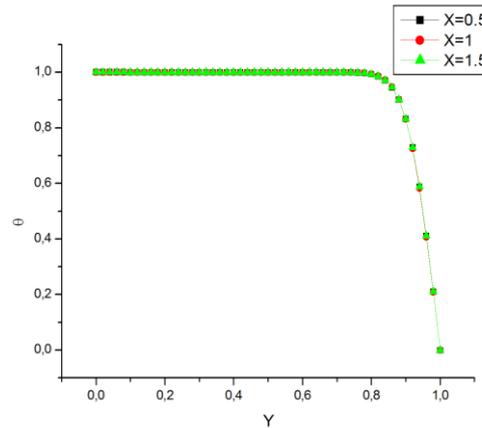


Figure IV.6.c : profils des températures (Da=1)

IV.2.3 Nombre de Nusselt local et moyen

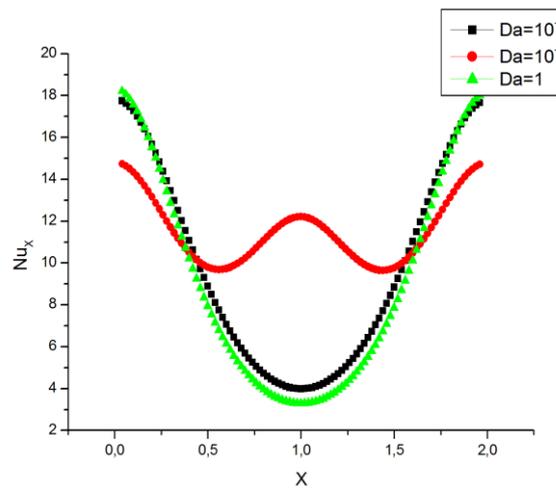


Figure IV.7 : Evolution du Nombre de Nusselt local pour différents nombres de Darcy

Da	10^{-6}	10^{-3}	1
Nu _m	9.69494	11.43327	11.5024

Tableau IV.2 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Da

IV.2.4 Commentaires

Les figures (IV.2a), (IV.2b) (IV.3a), (IV.3b), (IV.4a), (IV.4b) montrent les linges de courants et les isothermes pour les différentes valeurs du nombre de Darcy, elles indiquent une forte influence sur la structure de l'écoulement. Pour $Da=10^{-6}$ on voit l'apparition des cellules qui ne pénètrent pas dans la zone poreuse, ceci est due à l'importance des résistances inertielles. Par contre pour des valeurs de $Da=10^{-3}$ et $Da=1$ un écoulement s'installe dans la couche poreuse et la

pénétration de l'écoulement est presque totale (l'écoulement dans la couche poreuse et fluide se confond) on tend vers le cas d'un écoulement dans une cavité entièrement fluide.

Les figures (IV.5.a), (IV.5.b), (IV.5.c), (IV.6.a), (IV.6.b), (IV.5.c) montrent respectivement les profils de vitesses et de températures pour différents nombres de Darcy dans des stations ($X=0.5$, $X=1$ et $X=1.5$). On remarque que pour les faibles valeurs de Da ($Da=10^{-6}$), la vitesse dans la couche poreuse est presque nulle, l'interface fluide / poreux se comporte comme une paroi solide sur laquelle se développe une couche limite alors que dans la couche fluide la vitesse présente un maximum. On constate que l'augmentation du nombre de Darcy favorise l'écoulement dans la couche poreuse ce qui favorise l'augmentation de l'effet des forces thermiques.

La figure IV.7 et le tableau IV.2 montrent respectivement la variation du nombre de Nusselt local et moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Darcy, le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Darcy, donc le transfert de chaleur devient plus intense avec l'accroissement du nombre de Darcy

IV.3 Effet du nombre de Grashof

Les résultats représentés ci-dessous illustrent les isothermes, les lignes de courant, les profils de vitesses et de températures, ainsi que l'évolution du coefficient d'échange thermique local et moyen en fonction du nombre de Grashof. Nous avons maintenu $Da=10^{-3}$, $\delta_1=2$ $\delta_2=0.5$, $\lambda^*=4181$, $\varepsilon=0.5$ et $Pr=0.71$

IV.3.1 Lignes de courant et isothermes

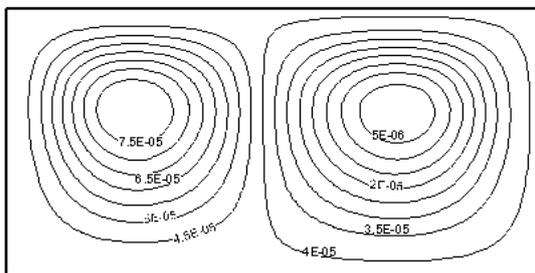


Figure IV.8.a : lignes de courants ($Gr=10^4$)

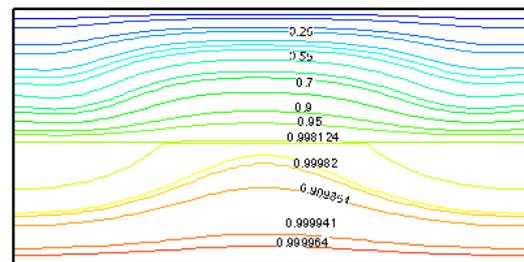


Figure IV.8.b : Isothermes ($Gr=10^4$)

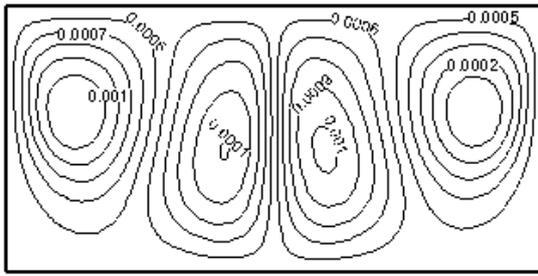


Figure IV.9.a : lignes de courants ($Gr=3.510^5$)

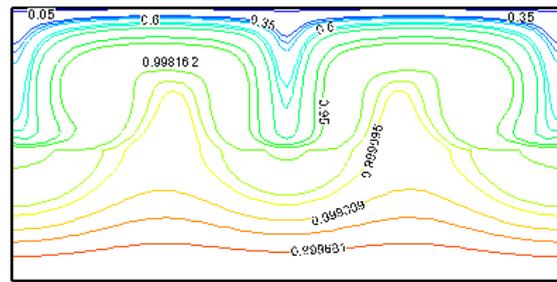


Figure IV.9.b : Isothermes ($Gr=3.510^5$)

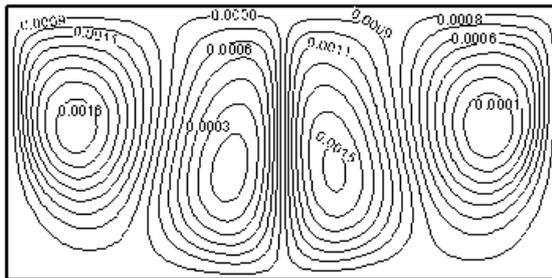


Figure IV.10.a : lignes de courants ($Gr=10^6$)

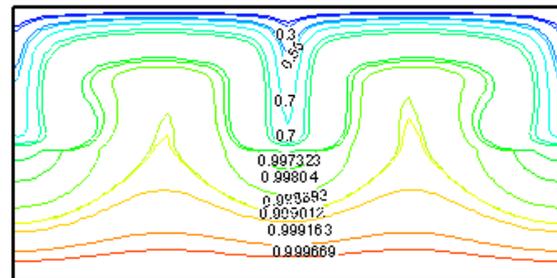


Figure IV.10.b : Isothermes ($Gr=10^6$)

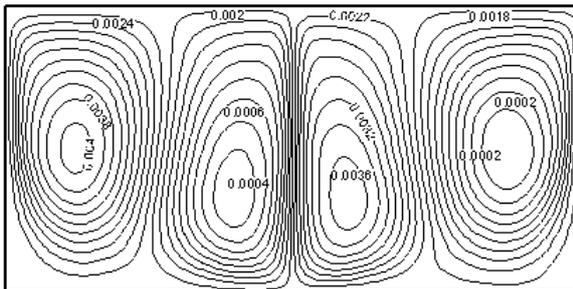


Figure IV.11.a : lignes de courants ($Gr=10^7$)

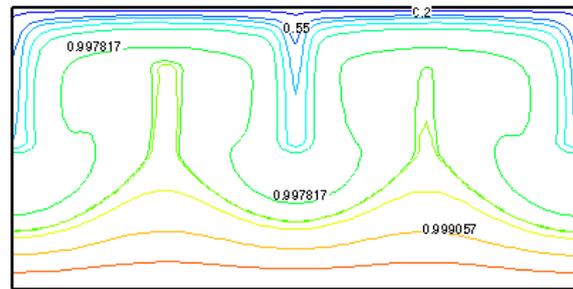


Figure IV.11.b : Isothermes ($Gr=10^7$)

IV.3.2 Profils des températures et des vitesses

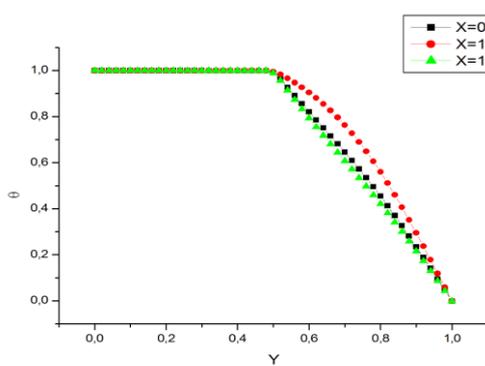


Figure IV.12.a : profils des températures ($Gr=10^4$)

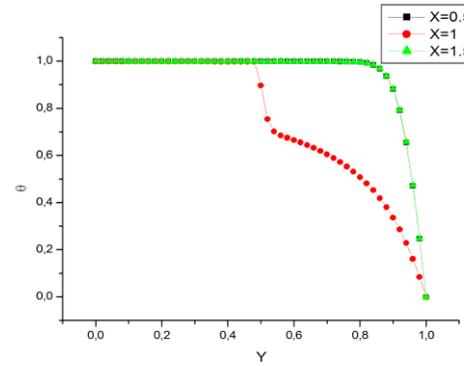


Figure IV.12.b : profils des températures ($Gr=3.5 10^5$)

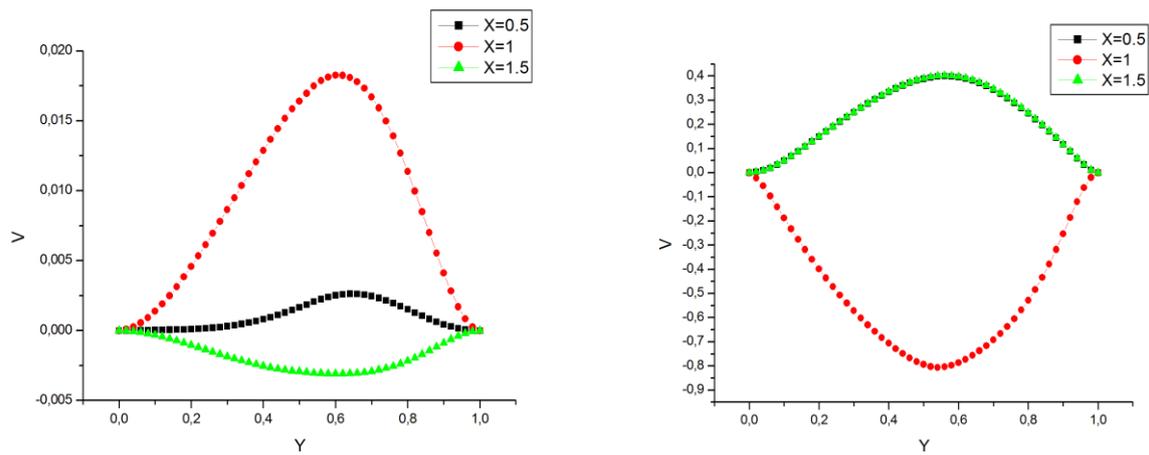


Figure IV.13.a : profils des vitesses ($Gr=10^4$) Figure IV.13.b : profils des vitesses ($Gr=3.510^5$)

IV.3.3 Nombre de Nusselt local et moyen

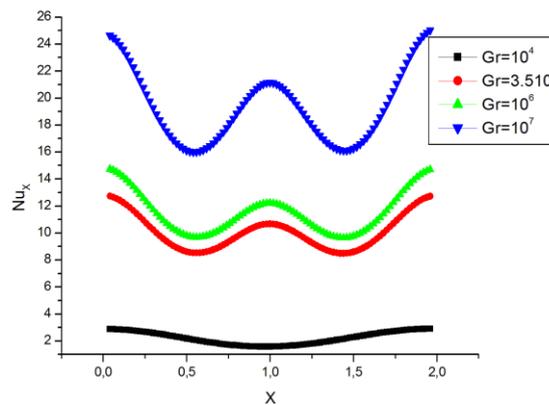


Figure IV.14 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents nombres de Grashof

Gr	10^4	$3.5 \cdot 10^5$	10^6	10^7
Nu_m	2.208723	9.307614	11.43327	19.21711

Tableau IV.3 : Nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Grashof

IV.3.5 Commentaires

Les figures (IV.8.a), (IV.8.b), (IV.9.a), (IV.9.b), (IV.10.a), (IV.10.b), (IV.11.a), (IV.11.b) illustrées ci-dessus montrent que la structure de l'écoulement est multicellulaire. Les lignes de courants montrent que pour les faibles valeurs de Gr , l'écoulement est plus concentré dans la zone

fluide. La structure des isothermes est presque stratifié, ce qui signifie que la diffusion est prédominante, dans la zone fluide et amorçage de de la cloche dans la zone poreuse.

Nous remarquons que pour des Grashof très important l'écoulement dans la couche poreuse est plus prononcé, les isothermes sont plus incurvées, indiquant des gradients de température plus importants. Pour $Gr=3.5 \cdot 10^5$, $Gr=10^6$ et $Gr=10^7$ les figures représentent une symétrie par rapport à l'axe vertical de la cavité. La structure d'écoulement est formée par quatre cellules symétriques tournant en sens inverse, et un champ de température sous forme de panache vertical.

Le tableau (IV.3) dressé ci-dessus montre les variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Grashof,.Ce nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Gr, par conséquent le transfert de chaleur devient plus intense.

Les observations faites précédemment peuvent être corroborées à partir des figures (IV.12.a),(IV.12.b),(IV.13.a), (IV.13.b),où nous avons rapportés les profils de vitesses et de températures sur différentes sections ($X=0.5,X=1,X=1.5$).

Les variations des nombres de Nusselt locaux le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres.

IV.4 Influence du l'épaisseur de la couche poreuse (δ_2)

Sur les figures ci-dessous, les lignes de courants, les isothermes, les profils de vitesses et de températures, ainsi que l'évolution du coefficient d'échange thermique local et moyen en fonction du δ_2 sont représentées en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse δ_2 , pour $Gr=3.5 \cdot 10^5$ et $Da=10^{-3}$, $\delta_1=2$, $\lambda^* = 4181$, $\epsilon=0.5$ et $Pr=0.71$.

IV.4.1 Lignes de courants et lignes des isothermes

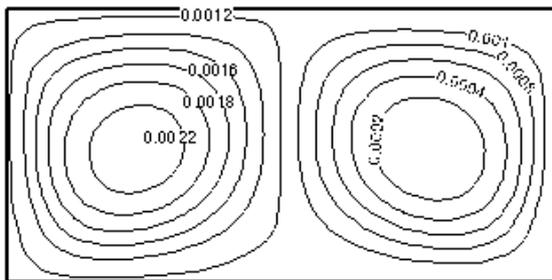


Figure IV.15.a : lignes de courants ($\delta_2=0.2$)

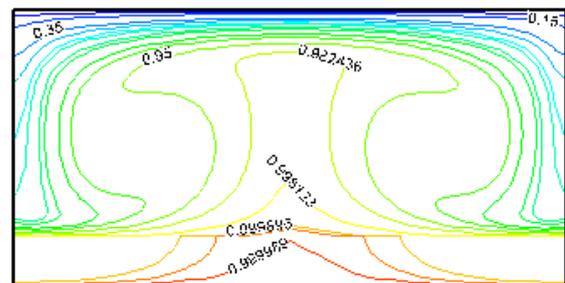


Figure IV.15.b : Isothermes ($\delta_2=0.2$)

IV.4.2 Nusselt local et moyen

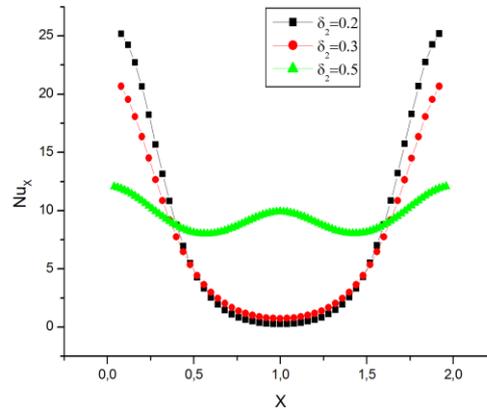


Figure IV.19 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents rapports de formes δ_2

δ_2	0.2	0.3	0.5
Nu_m	8.794722	8.90674	9.422658

Tableau IV.4 : Nombre de Nusselt moyen pour différents rapports de formes δ_2

IV.4.5 Commentaires

Les figures ci-dessus (IV.15.a),(IV.15.b),(IV.16.a),(IV.16.b),(IV.17.a),(IV.17.b) permettent d’observer que la structure de l’écoulement est affectée par le rapport de forme δ_2 , pour $\delta_2=0.2$ et $\delta_2=0.3$ on voit apparaître deux cellules contrarotatives et une cloche. Pour $\delta_2=0.5$ le nombre de cellules a doublé et le nombre de cloche aussi. Ceci peut s’expliquer par le fait que la zone libre se confine. Sachant que c’est dans cette zone que la convection est prédominante.

Le tableau (IV.4) dressé ci-dessus montre les variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du rapport de forme δ_2 . Ce nombre de Nusselt moyen augmente légèrement avec l’augmentation du δ_2 , par conséquent le transfert de chaleur devient plus intense.

IV.5 Effet du rapport de forme

les figures ci-dessous, représentent les lignes de courants, les isothermes et l'évolution du coefficient d'échange thermique moyen en fonction du δ_1 pour, $Gr=3.5 \cdot 10^5$, $Da=10^{-2}$, $\delta_2=0.5$, $\lambda^*=4181$, $\varepsilon=0.5$ et $Pr=0.71$

IV.5.1 Isothermes et lignes de courants

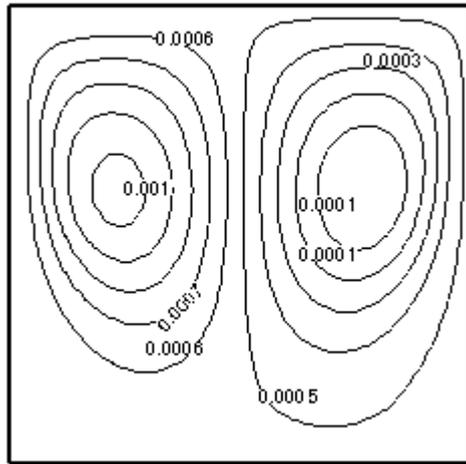


Figure IV.20.a : lignes de courants ($\delta_1=1$)

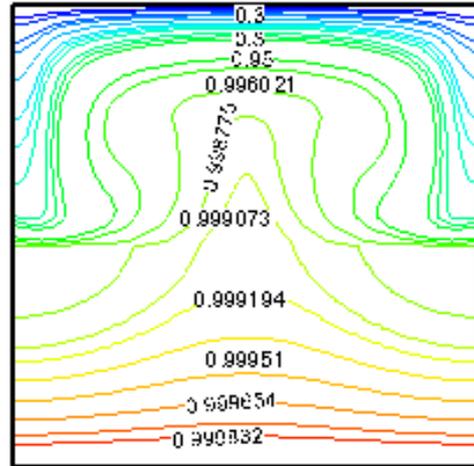


Figure IV.20.b : Isothermes ($\delta_1=1$)

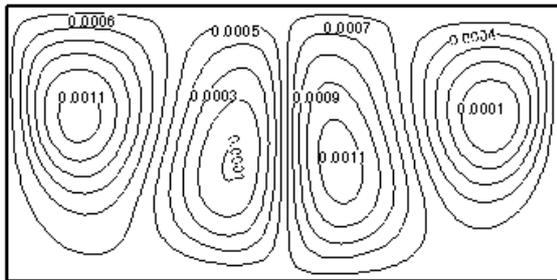


Figure IV.21.a : lignes de courants ($\delta_1=2$)

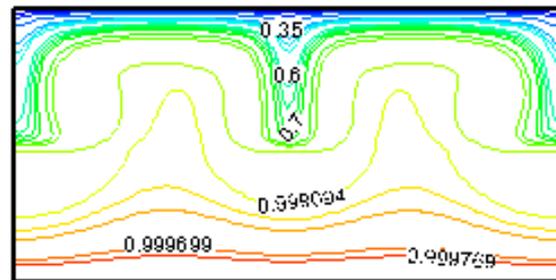


Figure IV.21.b : Isothermes ($\delta_1=2$)

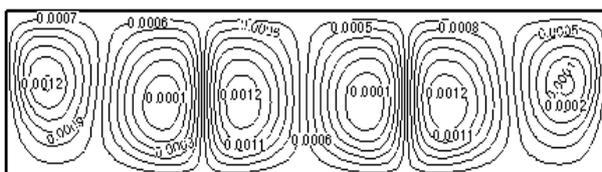


Figure IV.22.a : lignes de courants ($\delta_1=4$)

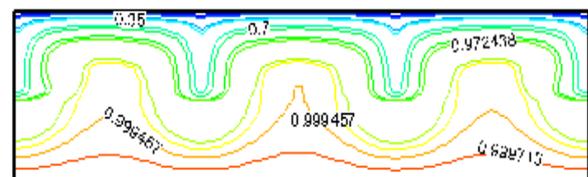


Figure IV.22.b : Isothermes ($\delta_1=4$)

IV.5.2 Nusselt moyen

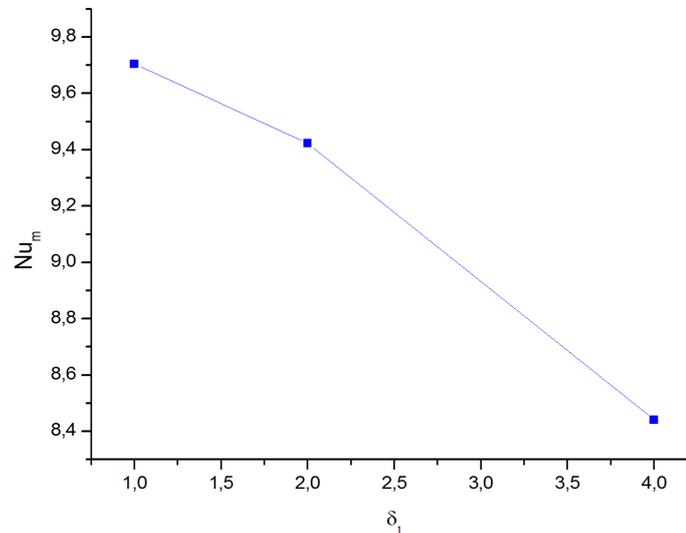


Figure IV.23 : variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du facteur de forme de la cavité δ_1

IV.5.3 Commentaires

Les figures (IV.20.a), (IV.20.b), (IV.21.a), (IV.21.b), (IV.22.a), (IV.22.b) montrent comment le rapport de forme influe sur la structure de l'écoulement. Le nombre de cellules est linéairement proportionnel au rapport de forme δ_1 .

On constate sur la figure (IV.23) que le nombre de Nusselt moyen diminue lorsque δ_1 augmente. Cela s'explique par l'augmentation du nombre de panache thermique et par conséquent la diminution des zones froides dans la cavité. Donc une augmentation de la température moyenne du fluide.

IV.6 Effet du rapport des conductivités

En fixant les nombre de Darcy et de Grashof ainsi que les rapports de formes de la cavité et en fait varier le rapport des conductivités (la conductivité effective sur la conductivité de fluide) Les figures ci-dessous nous montrent l'influence de ce rapport pour $Gr= 10^6$, $Da=10^{-3}$, $\delta_2=0.5$, $\varepsilon=0.5$, $Pr=0.71$ et $\delta_1=2$

IV.6.2 Profils des températures et des vitesses

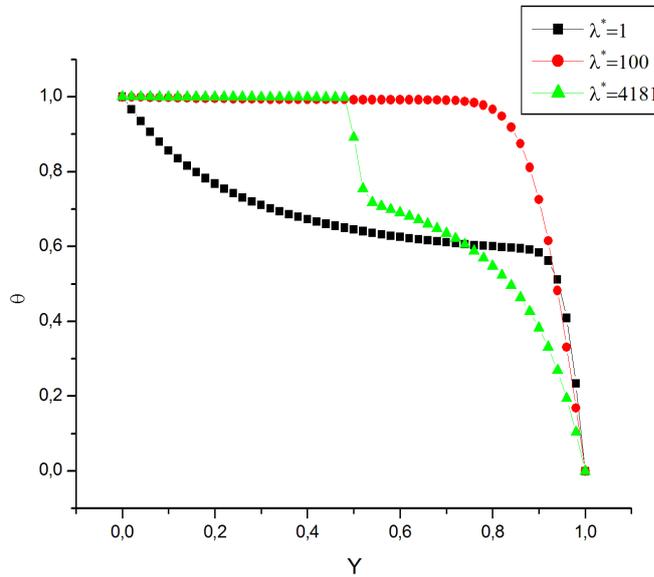


Figure IV.27 : profils des températures pour différents rapports des conductivités

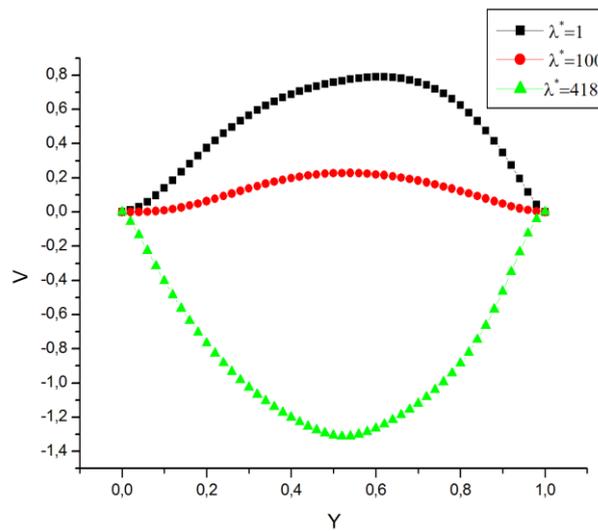


Figure IV.28 : profils des vitesses pour différents rapports des conductivités

IV.6.3 Nusselt local et moyen

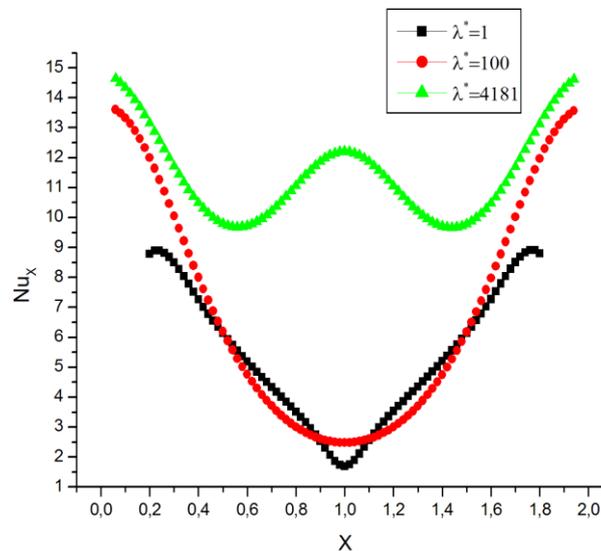


Figure IV.29 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents rapports de conductivités.

λ^*	1	100	4181
Nu_m	5.478759	7.035444	11.43428

Tableau IV.5 : Evolution du coefficient d'échanges thermique en fonction du rapport de conductivités λ^*

IV.6.4 Commentaires

Les figures (IV.24.a) (IV.24.b) (IV.25.a) (IV.25.b) (IV.26.a) (IV.26.b) illustrées ci-dessus montrent l'influence du rapport de conductivité sur la structure de l'écoulement. Lorsque la conductivité est faible on voit que le régime convectif prédomine, en augmentant le rapport de conductivité le transfert par conduction dans la couche poreuse apparaît.

On remarque sur la figure (IV.27) que la conductivité influe sur les profils de température, lorsque $\lambda^*=1$ la température de la couche poreuse diminue par contre lorsque $\lambda^*=4181$ la température dans la couche poreuse est constante. Pour cela on constate que pour des faibles rapports de conductivité la matrice poreuse est considérée comme étant un milieu fluide et dans ce cas, le régime de convection prédomine. Pour les rapports de conductivité élevée on constate que les profils de température restent constants dans la couche poreuse.

La figure (IV.29) montre que l'augmentation du rapport des conductivités favorise l'augmentation du nombre de Nusselt locale. Le tableau (IV.4) dressé ci-dessus montre les variations du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du rapport des conductivités. Ce nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du λ^* , par conséquent le transfert de chaleur devient plus important.

Conclusion

Nous nous sommes intéressées dans ce chapitre aux écoulements et aux transferts dans les milieux fluides et poreux. Dans nos simulations, nous avons fait varier l'épaisseur de la couche poreuse δ_2 le rapport de forme de la cavité δ_1 et les autres paramètres essentiels à savoir le nombre de Darcy (Da), le nombre de Graschof (Gr), La dépendance des écoulements avec les différents paramètres du problème a été mise en évidence.

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire consiste en l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire partiellement poreuse formée par deux parois horizontales : inférieure chaude et supérieure froide, et deux parois verticales adiabatiques. L'objectif de notre travail était d'étudier l'influence des paramètres intervenants sur la structure de l'écoulement et le champ thermique dans le but d'assurer un meilleur refroidissement des composants électroniques.

La méthode des volumes finis utilisée par le code FLUENT a été considérée pour la discrétisation des équations gouvernantes et l'algorithme SIMPLE pour la résolution de ces équations

En premier lieu, nous avons examiné l'effet du nombre de Darcy ($1 \geq Da \geq 10^{-6}$) sur la structure de l'écoulement et le champ thermique, les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Darcy améliore le transfert de chaleur et donc un bon refroidissement pour les composants électroniques est assuré.

D'autre part, l'effet du nombre de Grashof a été examiné. On a constaté que le coefficient d'échange thermique augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof favorisant ainsi, un bon refroidissement

De plus, les effets de l'épaisseur de la couche poreuse et le rapport de forme de la cavité ont été étudiés, on constate que le transfert de chaleur est favorisé lorsque l'épaisseur de la couche poreuse augmente légèrement et lorsque le rapport de forme égal à l'unité.

Enfin, nous avons étudié l'influence du rapport des conductivités thermiques λ^* , on a constaté que l'échange thermique est important lorsque les valeurs du rapport des conductivités sont grands.

Finalement et en vue d'une approche plus réaliste, on s'intéressera dans l'avenir à des simulations tridimensionnelles en régime instationnaire.

Référence bibliographique

- [1] **S. Ergun**, Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Progr.*, Vol. **48**, pp. 88-94 (1988).
- [2] **Kalla, M.Mamou, P. Vasseur, L. Robillard**, Multiple steady states for Natural convection in a shallow porous cavity subject to Uniform Heat fluxes, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol 26, Issue 6, pp. 461-770. (1999).
- [3] **A.C Baytas**, Entropy generation for Natural convection in a inclined porous cavity, *Int. J.Heat Mass Transfer*, vol 43, pp. 2089-2099. (2000).
- [4] **R. Bennacer, A. Tobbal et H. Beji**, Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse Anisotrope : Formulation de Darcy-Brinkman, *Rev. Energ. Rev.* Vol. 5(2002)1-21
- [5] **H. Nawaf, A. Saeid, A. Mohamad**, Natural convection in a square porous cavity with anoscillating wall temperature, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol 15, Issue 6, pp. 555-566. (2005)
- [6] **A. Saeid, H. Nawaf**, Natural convection in porous cavity with sinusoidal bottom walltemperature variation, *International Communication in Heat and Mass Transfer*, vol. 32, pp.454-463. (2005).
- [7] **K. Bouhadef**, Simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité à fond sinusoidal, 12èmes Journées Internationales de Thermique. Tanger, Maroc du 15 au 17 November 2005.
- [8] **A. Bahloul**, Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45, no 7, pp. 635-648. (2006).
- [9] **A. Barletta, S. Lazzari**, 2D free convection in a porous cavity heated by an internal circular boundary, *International Journal of Thermal Sciences*, vol 45, pp. 917-922. (2006).
- [10] **T. Basak, S. Roy, T. Paul, I. Pop**, Natural convection in a square cavity filled with a porous medium : Effects of various thermal boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol49, pp. 1430-1441. (2006).
- [11] **A. Bousri, K. Bouhadef**, Study of the heat and mass transfer in a channel filled with a reactive porous medium, Eurotherm Seminar N°81 Reactive Heat Transfer in Porous Media, Ecole des Mines d'Albi, France June 4-6, 2007.

Référence bibliographique

[12] **Y. Outaleb, K. Bouhadeb et O. Rahli**, Effet du positionnement d'une injection/extraction sur la convection thermosolutale dans une enceinte partiellement poreuse, 18^{ème} Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 Août 2007.

[13] **Y. Ould-Amer et S. Slama**, convection naturelle dans un milieu poreux multicouches, 13^{èmes} Journées Internationales de Thermique, "JITH 2007, Albi : France (2007)

[14] **Y. Varol, F. Oztop et E. Avci**, Estimation of thermal and flow fields due to natural convection using support vector machines (SVM) in a porous cavity with discrete heat sources, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol 35, pp. 928-936. (2008).

[15] **N. Hadidi, Y. Ould-Amer**, Convection thermosolutale bidimensionnelle dans une cavité poreuse renfermant deux couches poreuses disposées verticalement, Revue de Mécanique Appliquée et Théorique, vol.2, 4. (2011), 10^{èmes} congrès de mécanique SMSM

Oujda Avril 2011.

[16] **Patankar** (1980) numerical heat transfer and fluid mechanics Mc Graw hill new york.