



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité:
Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Le soliton, les équations de Kortweg-de-vries

Présenté par

Mr. Madini Nassim

Soutenu le: 30.06.2018 .

Devant le Jury composé de:

Nom	Prénom	Département d'affiliation	Qualité
Mr. Mohamed	Meziani	physique	Président
Abdelkader			
Mr.Chennit	Makhlouf	physique	Examineur
Mr.Meziani	Bachir	physique	Encadreur

REMERCIEMENT

Un grand remerciement à mon grand et sage dieu le tout puissant, qui m'a fourni la volonté et la patience pour la réalisation de ce travail.

Je remercié mon encadreur, **Mr.Meziani Bachir** professeur au département de physique à l'université de béjaia, pour son soutien et ses encouragements durant ce travail.

Je tiens aussi à remercie les membres du jury :

M. le président de jury ,**Mr. Mohamed Meziani Abdelkader**(M.C.A.) à l'université de béjaia.

Mr.Chennit Makhlouf, (M.A.A) à l'université de béjaia : Examineur.

Je tiens aussi à remercié toute ma famille, mes profs et tout mes camarades.

A Tous, vraiment merci.

DEDICACE

Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont aidé, conseillé et encouragé pour ma réussite et mon bonheur

Pour tous mes profs et mes collègues de la faculté de science exacte, en particulier la dynamique des fluides et énergétique.

Pour toute ma famille, et pour tout qui m'ont aidé de quelque façon.

Listes des quelques symboles utilisés

η : Amplitude.

φ, Φ : Potentielle de vitesse.

\vec{v} : Vecteur de vitesse.

P : La pression.

ρ : La densité de masse.

g : la gravité, l'accélération de pesanteur.

t : le temps.

K : vecteur d'onde.

ε : Le maximum de l'amplitude.

C : la vitesse de propagation d'onde.

μ : Le coefficient de dissipation.

$u(x, t)$: La fonction de vitesse d'onde.

H : la transformation d'Hilbert.

E : l'énergie.

m.M : la masse.

$\partial_x, \partial_t, (\cdot)'$: les operateurs de dérivation.

Sommaire

CHAPITRE I- INTRODUCTION GENERALE.

I.1-INTRODUCTION.

I.2-DEFINITION DE SOLITON.

I.3-HISTOIRE DE SOLITON ET L'EQUATION Korteweg-De Vries (KdV).

1.4-CONCLUSION.

CHAPITRE II : EQUATIONS DE KORTWEG-De-VRIES.

II.1-INTRODUCTION.

II.2- QUELQUES RAPPELS SUR LES ONDES DE SURFACE.

II.2.1-Définition de l'onde.

II.2.2- Les phénomènes dus à l'observation des vagues.

II.2.3-Ondes capillaires et Ondes de gravité.

II.2.4-Influence de la profondeur sur la vitesse de propagation de l'onde.

II.2.5-Approximation eau peu profonde ($H \ll \lambda$).

II.2.6- Approximation ondes de gravite en eau profonde ($H \gg \lambda$).

II.3-ORIGINE DES EQUATIONS DE KORTWEG-DE-VRIES (KdV).

II.3.1-Introduction.

II.3.2- Equations qui régissent le mouvement.

II.3.3-Résolution des équations des ondes linéaires forcées par gravité.

II.3.4-Développement des équations non linéaires.

II.4-LES DIFFERENTS TYPES D'EQUATIONS DE KORTWEG DE VRIES.

II.4.1 : Equation de Kortweg de Vries (kdv).

II.4.2-Equation générale de Kortweg-de-Vries, burgers.

II.4.3-Equation kortweg de vries à coefficient variables.

II.4.4-Equation de Kortweg de Vries Généralisée.

II.4.5- Equation de Kortweg-de-Vries (KdV) sphérique.

II.4.6-Equation de Benjamin-Ono.

II.4.7-Equation de Boussinesq.

II.4.8-Equations non linéaires fortement dispersives et les compactons.

II.4.9-Autres équations de Kortweg-de-Vries.

II.5-CONCLUSION.

CHAPITRE III- Approche mathématique des ondes solitaires.

III.1-Introduction.

III.2-Définitions Mathématiques.

III.3-Caractéristiques des solitons comme solutions.

III.4-Modèle Mathématique du soliton à une dimension.

III.5-Exemples.

III.5.1-La corde vibrante .

III.5.2-Equation de Klein Gordon .

III.5.3-Milieu Non Linéaire Dispersif .

III.5.4-Equation de Sine Gordon .

III.6-Conclusion .

Chapitre IV : Quelques méthodes de constructions des solutions et modélisation de l'équation de (kdv).

IV.1.1-introduction.

IV.2- L'approche Variationnelle.

IV.3-La méthode de la variable fonctionnel formulée par A. zaraka.

IV.3.1-introduction à la méthode.

IV.3.2-La résolution de l'équation de kdv.

IV.3.3-la résolution de l'équation d'onde longue régularisée.

IV.4-modélisation numérique de l'équation de KDV par la méthode Euler.

IV.5 : Conclusion.

INTRODUCTION GENERALE

Depuis longtemps, la physique joue un rôle très important dans notre vie, même on peut dire que aujourd'hui tout ce que nous voyons de développement et l'industrie c'est vraiment grâce à la science de la physique. Comme on sait tous, la physique est obsédée par la nature et par tout ce que nous voyons mais le problème que se pose c'est comment introduire un phénomène naturel sur un morceau de papier c'est pour ça qu'intervient la mathématique.

Ici comme on peut constater à l'avance que les solitons sont tout simplement des phénomènes naturels simples à détecter selon la physique, le traitement et l'étude de tels phénomènes restent vraiment très dur à éclairer sur le plan mathématique c'est à dire que le soliton en sens mathématique ne sont que des équations de KDV et précisément équations différentielles partielles non linéaires compliquées à résoudre.

Alors dans notre travail, on essaye d'expliquer les solitons en sens physique : on peut citer ici les tsunamis et les mascarades ..., à fin d'arriver à l'examinées sur le plan mathématique.

C'est pour ça qu'on a décidé de partager notre projet à quatre chapitres essentielles :

- Première chapitre : on lance sur l'histoire de soliton pour avoir compris d'abord la première astuce utilisée pour les expliquer et encore on a introduit dans ce chapitre leur compositions et même on a décrit quelque domaine de physique où ces phénomènes apparaissent ?
- Deuxième chapitre : dans ce chapitre, on a préféré de prolonger sur le domaine mathématique des équations de (KDV), c'est-à-dire, les équations différentielles partielles non linéaires, même on peut dire que on a traité encore l'équation différentielle partielle linéaire et on a aussi introduit un grand sous chapitre où on a cité les différents types des équations KDV qu'ils sont importants pour la suite ...etc.
- Troisième chapitre : on a réservé cette partie de notre travail pour avoir d'abord compris les caractères des équations des solitons c'est à dire de mettre en marche des astuces mathématiques pour avoir la résolution et détecter facilement des solitons et équations de KDV
- Quatrième chapitre : on a basé dans cette partie sur les méthodes de résolution des équations de (KDV) on utilisant quelque méthode habituelle parmi beaucoup des méthodes utilisées comme l'approche variationnelle.

A la fin : on termine avec une conclusion générale

CHAPITRE I

Généralités sur les solitons

I.1- Introduction :

Dans ce chapitre, après avoir donné quelques définitions, on essaiera de plonger dans l'histoire pour chercher le chemin historique de notre sujet. En fait, on s'intéresse à la première observation physique des solitons, les travaux de quelques chercheurs sur ce sujet, afin d'arriver à expliquer quelque domaine d'intervention des solitons dans la nature ou dans différents milieux et à la fin on termine avec une petite conclusion.

I.2- Définition d'un soliton :

Le soliton est une onde solitaire qui se propage dans un milieu non linéaire et dispersif sans perdre sa forme ou son caractère. On peut le considérer comme une particule exotique composée d'un électron entouré de phonons.

Sur le plan mathématique, le soliton est la solution classique des équations du mouvement d'un système dispersif et non linéaire qui se comportent comme des paquets d'énergie qui se propagent sans déformation.

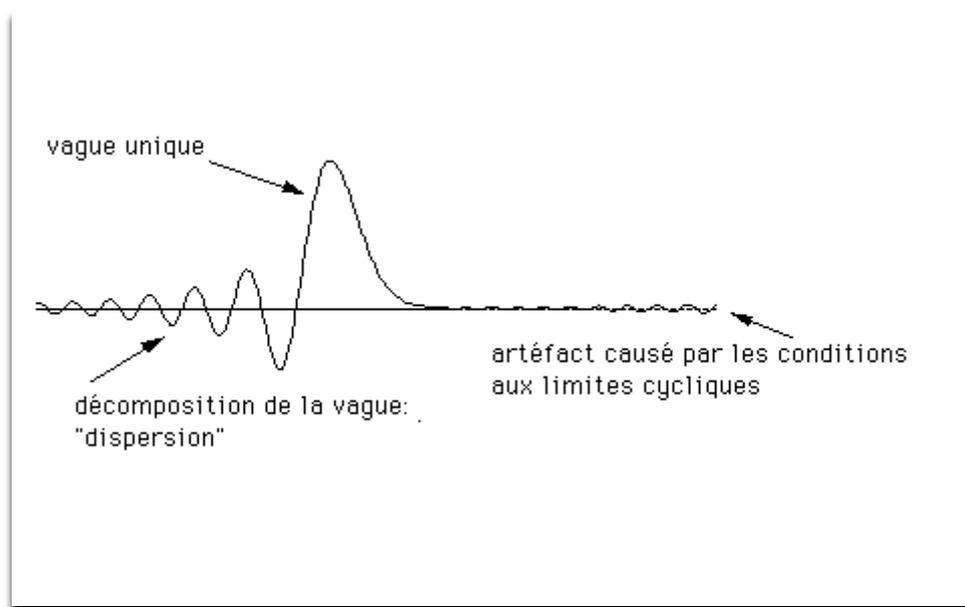


Figure 1.1 : la forme d'un soliton

I.3-l'histoire de soliton et les équations de Korteweg-De Vries (KDV):

La première observation scientifique de ce phénomène date de 1834 [1] est faite par le scientifique et l'ingénieur naval : JOHN SCOTT RUSSEL. Il resta étonné devant un phénomène étrange observé dans le canal de l'union qui relie Edimbourg à Forth Clyde. Une vague de très forte amplitude est générée par l'arrêt brutal d'une péniche tirée par deux chevaux et que lui-même l'a suivi à cheval à une vitesse de 8 à 9 km/h, pendant quelques kilomètres (environs 2 km) c'est à dire jusqu'à ce que les méandres du canal détruisant sa forme.

Russel prend ce phénomène aux sérieux, il a décidé de faire des recherches et des expériences afin de trouver une explication et des réponses aux questions qui lui-même poseès. Alors, dans son jardin dans une cuve à vagues, il commença ces recherches durant des dizaines d'années et c'était un point de départs vers la physique des solitons.

Sur le plan mathématique, la première idée pour Russell c'est d'utiliser les équations de la mécanique des fluides de Navier Stocks incompressible qui sont :

- La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.1)$$

Et comme le fluide incompressible, l'équation (1.1) devient :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (1.2)$$

- La conservation de la quantité de mouvement (Navier stokes) :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = -\nabla P + f \quad (1.3)$$

Où f représentent les forces volumiques.

Alors, il a réussi à écrire un système d'équations dont les inconnues sont la vitesse du fluide et la hauteur du niveau d'eau h et supposant que le canal est unidimensionnel :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} h = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

dont la première équation de ce système d'équations représente l'équation à la surface et la deuxième représente l'équation de mouvement générale.

Une analyse dimensionnelle du système (1.4) a été faite en introduisant des paramètres liés à l'amplitude de l'onde. Ceci conduit à un développement asymptotique dont le terme principal est une inconnue $W(x, t)$ qui vérifie le système d'équations (1.4). Cette inconnue s'écrit :

$$W(x, t) = \frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{c}(x - ct)\right)} \quad (1.5)$$

La dérivation de cette équation est faite par Kortweg et de Vries en 1895 et cette équation deviendra célèbre sous l'appellation KdV. Kortweg et de Vries observent immédiatement que l'équation (1.5) admet des solutions ondes solitaires. Mais la question qui est restée posée par ces deux chercheurs tourne autour de la stabilité du phénomène observé par John Scott Russell. Il a fallu attendre plus que 70 ans pour que ce problème soit résolu par Zabusky [2] :

(...contrairement aux documents d'histoire des mathématiques que j'ai eues l'occasion de consulter et commence en général à Pythagore pour s'arrêter au mieux à Hilbert. Je vais décrire un phénomène scientifique qui a commencé en 1834 et sur lequel travaillent actuellement un grand nombre des mathématiciens ...).

Et Miura et Kruskal en se basant sur plusieurs travaux avant, qui ils ont faites par plusieurs chercheurs, à savoir :

- Les travaux de Stokes : 1847 Stokes découvrait une série qui décrivent les ondes à la surface d'eau profonde non linéaire périodique [3].

- Les travaux de Russel et celle de Kortweg et De Vries en 1985 (Ils découvraient l'équation non linéaire décrivant les ondes à la surface d'un canal étroit et peu profond et qui est devenue une équation très célèbre avec le nom KdV).
- Les travaux de Schrodinger en 1926 sur la quantification du champ en tant que problème aux valeurs propres introduisant la fameuse équation qui changeait carrément la physique [4].
- Les travaux de Fermi, Pasta et Ulma (FPU) au cours des années 1950 sur le comportement asymptotique, d'un système couplé de 64 équations différentielles ordinaires non linéaires qui décrivaient le mouvement de 64 masses reliées par des ressort non linéaires [2].

Alors en 1965, sur une I B M 36050, Kruskal, Miura et Zabusky suite à leur travail, ils ont remarqué une grande analogie entre le système en discrétisation l'équation KdV et le système de FPU .

Mais on constate que les travaux de Kruskal, Miura et Zabusky étaient numériques et ne contenaient pas une méthode de démonstration claire. c'est pour ça qu'il fallu attendre encore jusqu'à 1968 pour obtenir une démonstration grâce aux travaux de Lax : à l'aide d'un opérateur différentiel Lax [2] a montré qu'il existe un changement de variables qui transformait l'équation KdV en une équation linéaire dont la solution pouvait être calculée explicitement.

Alors Depuis 1965, l'équation KdV est devenue un point de départ pour des grandes recherches mathématiques et physiques.

1.4- La composition d'une Onde Solitaire :

Le soliton ou l'onde solitaire apparait lorsqu'on a un équilibre entre deux effets :

- **La dispersion de l'onde :** qui dépend de la vitesse et de la longueur d'onde et les effets extérieurs.

- **Le raidissement du front de l'onde** : dû au caractère non linéaire du mouvement hydrodynamique. (la relation entre la vitesse et la profondeur).

Remarque

Pour clarifier, on constate à l'équilibre que l'écart de vitesse est du même ordre alors l'effet de la dispersion retard l'apparition du front d'onde. Cette action provoque des mouvements qui permettent à un soliton de se former.

1.5- Les différents milieux des soliton :

On observe les solitons dans d'autres milieux physiques, tels que l'optique, l'hydraulique, etc.

1.5.1- En optique :

On parle de trois types de solitons qui sont :

- les solitons temporels.
- les solitons spatiaux.
- les solitons spatio-temporels.

1.5.2- En hydrodynamique :

Sur ce milieu, plusieurs phénomènes naturels sont considérés comme des solitons.

On cite :

- les vagues scélérates** : ce sont des vagues qui peuvent atteindre 30 m de hauteur et soit 2,5 fois plus grande que la hauteur des vagues moyennes.

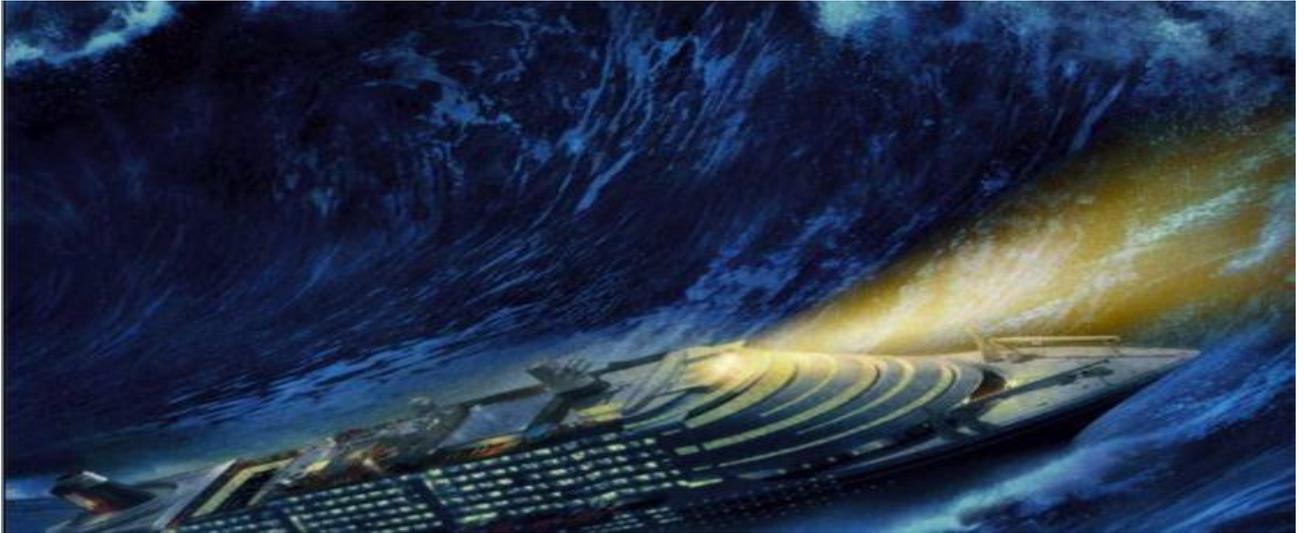


Figure I.2 : Une vague Scélérate

b) les phénomènes de mascaret : sont due à une surélévation brutale du niveau d'un fleuve, provoqué par les ondes de la marée montante, ils se produisent dans les emboucheurs d'un certains fleuves ou rivières.



Figure I.3 : Phénomène de Mascaret

c) le tsunamis: est une onde provoquée par un mouvement rapide d'un grand volume d'eau et ce mouvement est plus souvent due à un séisme ou déclanchement volcanique ou le glissement de terrain sous marin.



Figure 1.4 : le tsunamis

d) Le morning glory cloud : est une très grande onde qui peut mesurer jusqu'à 1 km de longue et 2 km de hauteur et se déplace avec une vitesse pouvant atteindre 60km.h.



Figure 1.5: Le morning glory cloud

1.6-Conclusion:

Alors, d'après l'étude historique et quelque articles des chercheurs, on constate que les solitons et les équations de (kdv) jouent un rôle très important dans la recherche scientifique, en tant que des phénomènes naturels compliqués pour les

physiciens et au tant que un problème des équations différentielles partielles non linéaires à résoudre pour les mathématiciens. En fait, dans la physique moderne les solitons et les équations de (kdv) sont un point de départ au développement explosif de compréhension totale de notre monde.

CHAPITRE II : EQUATIONS DE KORTWEG-De-VRIES

II.1-INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons apporter, dans un premier temps, quelques rappels sur les ondes de surfaces. Nous développerons ensuite l'origine de l'équation de Kortweg-de-Veries. Nous expliquerons la solution des équations régissant les ondes de gravité dans le cas linéaire. Ensuite, nous introduisons les développements non-linéaires et quelques changements de variables adéquats qui nous permettront de construire l'équation de Kortweg-de-Veries. Nous terminons ce chapitre par une liste non-exhaustive des différentes équations qui portent l'appellation d'équation de Kortweg-de-Veries et qui sont rencontrées dans plusieurs domaines scientifiques.

II.2- QUELQUES RAPPELS SUR LES ONDES DE SURFACE :

II.2.1-Définition de l'onde :

Une onde correspond au déplacement d'une perturbation contenant de l'énergie sans déplacement de matière. Elle est caractérisé par :

- Sa fréquence $f = \frac{1}{T}$
- Sa longueur d'onde λ
- Son amplitude h

Et ainsi on peut prendre la vitesse de propagation des ondes ou sa célérité $c = \frac{\lambda}{T}$

Remarque : Si c dépend de la fréquence on parle d'onde dispersive

La forme de l'onde est sensiblement sinusoïdale à condition que son amplitude ne soit pas trop grande devant la profondeur et comme son mouvement est elliptique, on conclut que l'onde n'est pas transversale

II.2.2- Les phénomènes dus à l'observation des vagues :

- La réflexion
- La diffraction
- La réfraction

II.2.3-Ondes capillaires et Ondes de gravité :

L'existence d'ondes à la surface de l'eau est due d'une part à la pesanteur qui tend à tenir l'interface air-eau horizontale (ondes de gravité) et d'autre part à la tension de surface qui tend à maintenir l'interface plane (onde capillaires). La capillarité domine pour les petites longueurs d'ondes et la gravité pour les grandes longueurs d'onde.

II.2.4-Influence de la profondeur sur la vitesse de propagation de l'onde :

Dans le cas général, on utilise la formule de Lord Kelvin :

$$c^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi A}{\rho\lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) \quad (2.1)$$

g : intensité de la pesanteur

λ : longueur d'onde

A : coefficient de tension superficielle $A = 0.072 \text{ N/m}$ à 20°C dans le cas de l'interface eau-air .

ρ : masse volumique de l'eau

H : profondeur de l'eau
 C : vitesse de propagation de l'onde

II.2.5-Approximation eau peu profonde($H \ll \lambda$)

On se place dans le cas de l'approximation ondes de gravite en eau peu profond donc $H \ll \lambda$. On trouve directement la relation suivante :

$$\tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi H}{\lambda} \quad (2.2)$$

Et grâce à cette équation, on peut conclure que :

$$c^2 = gH \quad (2.3)$$

II.2.6- Approximation ondes de gravite en eau profond ($H \gg \lambda$)

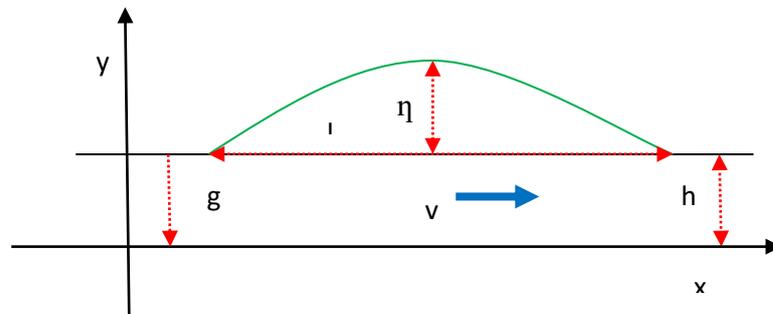
Dans ce cas, on trouve une relation différente pour la vitesse de propagation de l'onde c :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi A}{\rho\lambda}} \quad (2.4)$$

II.3-ORIGINE DES EQUATIONS DE KORTWEG-DE-VRIES (KdV) :

II.3.1-Introduction :

On se place dans le cas d'un problème unidimensionnel, irrotationnel et incompressible



On considère le cas des vagues dont la longueur d'onde est beaucoup plus longue que la

Profondeur de l'eau . La profondeur de l'eau au repos est donnée par h et la longueur caractéristique des vagues est l. Nous supposons alors que $l \gg h$.

II.3.2- Equations qui régissent le mouvement :

- Loi de conservation de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad (2.5)$$

ρ : Densité du fluide

• **la loi de Navier-Stocks :**

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla P + \vec{f} \quad (2.6)$$

\vec{f} : Forces volumique.

$$\vec{f} = -\rho g \vec{y} \quad (2.7)$$

Tenant compte du fait que le fluide considéré est incompressible, on a alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

L'équation de conservation de masse s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.9)$$

Sachant que l'écoulement est irrotationnel, considérant la relation vectorielle suivante :

$$\vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v}^2) \quad (2.10)$$

On obtient:

$$\nabla \wedge \vec{v} = 0 \quad \vec{v} = \nabla \varphi, \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.11)$$

Alors l'équation de Navier- Stokes devient :

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{P}{\rho} + gy \right) = 0 \quad (2.12)$$

Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{P}{\rho} + gy = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{P}{\rho} + gy = 0 \quad (2.13)$$

Avec

$$\vec{V} = \nabla \varphi = u_x + v_y \quad (2.14)$$

Conditions cinématiques :

✓ Aux parois rigides :

La vitesse au fond $y = -h$ s'écrit :

$$V_{\text{fond}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} (x, y = -h) = 0 \quad (2.15)$$

✓ Sur la surface libre

Soit $f = f(x, y, t)$ l'équation de la surface libre

On considère l'amplitude des ondes sous la forme :

$$\eta = \eta(x, t) \quad (2.16)$$

A la surface libre du fluide, on a :

$$f(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0 \quad (2.17)$$

Qui vérifie la relation suivante :

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot V = 0 \quad (2.19)$$

En introduisant la relation (2.17), on obtient :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot 1\right) \cdot (u, v) = 0 \quad (2.20)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} u + v = 0 \quad (2.21)$$

Avec les termes de potentiel, on peut l'écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{En } y=h \quad (2.22)$$

Dans la suite, on suppose que la pression est constante et on ignore la constante gh à la surface libre, l'équation de Navier-Stokes à la surface devienne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\text{surface}} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \Big|_{\text{surface}} + g\eta = 0 \quad (2.23)$$

II.3.3-Résolution des équations des ondes linéaires forcées par gravité :

Pour des très petites amplitudes, les termes non linéaires :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$(u^2 + v^2) = 0$$

Sont négligeables, on obtient alors :

✓ Equation de conservation de masse :

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.24)$$

✓ La vitesse au fond :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} (x, y = -h) = 0 \quad (2.25)$$

✓ Equation de la surface libre :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\text{surface}} + g\eta = 0 \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

On dérive l'équation (2.26) par rapport au temps et on introduit l'équation (2.27) pour obtenir une équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

Cette équation à une solution sous la forme:

$$\varphi = Y(y) \sin(kx - \omega t) \quad (2.29)$$

avec

$$Y(y) = A e^{+ky} + B e^{-ky} \quad (2.30)$$

Considérant les conditions aux limites, on trouve :

$$B/A = e^{-2ky} \quad (2.31)$$

L'expression finale de φ s'écrit alors:

$$\varphi = 2Ae^{-ky} \cosh(k(y+h)) \sin(kx - \omega t) \quad (2.32)$$

La relation de dispersion est donnée par :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (2.33)$$

Et l'amplitude de l'onde est donnée par :

$$\eta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A \sqrt{(2k/g) \sinh(2kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.34)$$

II.3.4-Développement des équations non linéaires :

A partir de la compréhension du problème linéaire, nous développerons les équations dans le cas non linéaire.

L'équation à la surface libre s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\text{surface}} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \Big|_{\text{surface}} + g\eta = 0 \quad (2.35)$$

Avec les composantes de la vitesse qui sont données par :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.36)$$

Alors :

En différenciant l'équation (2.35) le long du canal, c'est-à-dire par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.37)$$

On prend une approche standard pour les faibles déviations d'amplitude et on développe φ comme une série de puissance de y :

$$\varphi = \sum_0^\infty y^n \phi_n(x, t) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_1^\infty n y^{n-1} \phi_n(x, t) \quad (2.38)$$

Et on a au fond

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

Alors on peut conclure que :

$$\phi_1 = 0 \quad (2.40)$$

D'autre part, l'insertion de cette forme dans l'équation de Laplace nous donne une relation de récurrence entre les coefficients qui s'écrit :

$$\sum_0^\infty y^n \left\{ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1) \phi_{n+2} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1) \phi_{n+2} = 0 \quad (2.41)$$

Comme $\phi_1 = 0$ alors les termes impairs s'annulent et nous avons alors :

$$\phi_n(x, t) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}, \quad f = \phi_0(x, t) \quad (2.42)$$

Avec:

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{6} y^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots \end{cases} \quad (2.43)$$

où la notation $f^{(2m)}$ se réfère à la dérivée de f par rapport à x
Utilisant maintenant les variables sans dimension

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{y} = \frac{y}{l}, \bar{t} = \frac{t}{l/c_0} \quad \text{Avec } c_0 = \sqrt{gh} \quad (2.44)$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \bar{\phi} = \frac{h\phi}{alc_0} \quad \Rightarrow \frac{\phi}{\epsilon lc_0} \quad (2.45)$$

La surface libre est alors :

$$\bar{y} = 1 + \epsilon \bar{\eta} \quad (4.46)$$

Avec a est le maximum de l'amplitude et :

$$\epsilon = \frac{a}{h} \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = u/\epsilon c_0 \\ \bar{v} = (\delta/\epsilon c_0)v \\ \bar{f} = f/\epsilon lc_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Alors les formes adimensionnelles des équations (vitesse et le potentiel) sont :

$$\bar{\phi} = \bar{f} - \frac{1}{2} (1 + \epsilon \eta)^2 \delta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{x}^2} + O^2 \quad (2.49)$$

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{x}^3} + O^2 \quad (2.50)$$

$$\bar{v} = -\delta \left[(1 + \epsilon \eta) \delta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^4 \bar{f}}{\partial \bar{x}^4} + O^2 \right] \quad (2.51)$$

Avec

$$\delta = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (2.52)$$

La vitesse verticale est:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} = \delta \left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right] \quad (2.53)$$

Et après quelques calculs, on obtient l'équation:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + (1 + \varepsilon \bar{\eta}) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^4 \bar{f}}{\partial \bar{x}^4} + O^2 = 0 \quad (2.54)$$

Avec la condition à la surface :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + \bar{\eta} = 0 \quad (2.55)$$

Pour aboutir à l'équation :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \bar{\eta} + O^2 = 0 \quad (2.56)$$

On pose $w = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$ et on utilise la version adimensionnel et on dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}} + \frac{1}{2} \varepsilon w \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \varepsilon w \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} + (1 + \varepsilon \bar{\eta}) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad (2.58)$$

Si on prend $\delta = 0$ et $\varepsilon = 0$ on obtient:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.59)$$

D'où:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.60)$$

On suppose qu'il existe une solution w en termes de η telle que:

$$w = \eta + \varepsilon F + \delta G + O^2 \quad (2.61)$$

Avec F et G dependent de x et t et on remplace notre solution dans les deux équations, on obtient alors :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{\eta}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}} \right) = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (2.63)$$

Alors l'étape suivante est de soustraire ces deux équations :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} \right) = 0 \quad (2.64)$$

On trouve :

$$2 \frac{\partial F}{\partial x} = -\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.65)$$

$$2 \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (2.66)$$

Alors:

$$F = \frac{1}{4} \eta^2 \quad (2.67)$$

Et :

$$G = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.68)$$

On obtient la forme finale de w :

$$w = \eta - \frac{1}{4} \varepsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \delta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (2.69)$$

Et on la remplace dans notre équation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \varepsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (2.70)$$

Cette équation est essentiellement l'équation de KdV.

Nous redimensionnons une dernière fois les variables pour éliminer les coefficients du premier ordre. En éliminant le terme linéaire $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ et en remplaçant η par une constante.

On a:

$$\eta = \frac{1}{9\varepsilon} (\delta u - 6) \quad , \quad t = -\frac{6t^2}{\delta c_0} \quad (2.71)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \varepsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon \eta\right) = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\eta + \frac{2}{3\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial \left(\eta + \frac{2}{3\varepsilon}\right)}{\partial x} \left(\eta + \frac{2}{3\varepsilon}\right) = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sigma \end{aligned} \quad (2.72)$$

Où $\sigma = \eta + \frac{2}{3\varepsilon}$ est simplement l'amplitude de l'onde originale translatée par cette valeur constante.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{3}{2} \varepsilon \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^3} \quad (2.73)$$

Ensuite nous choisissons de redimensionner σ et t comme suit puis de diviser l'équation globale par σ :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = (\delta/\varepsilon)\rho \\ t = \tau/\delta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} = 0 \quad (2.74)$$

Pour arriver à l'équation de Kortweg-de-Vries (Kdv) exacte, on choisit de redimensionner une dernière fois telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \tau = -6t \\ \rho = u/9 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (2.75)$$

On obtient l'équation KdV simple.

II.4-Les différents types d'équations de Kortweg de Vries :

II.4.1 : Equation de Kortweg de Vries (kdv) :

La première équation qui porte le Nom d'équation KdV s'écrit :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \partial_x u = 0 \quad (2.76)$$

C'est une équation sous forme canonique, u est le champ de vitesse avec la direction x . Le terme $\partial_t u + \partial_x^3 u$ est le terme non linéaire, considéré comme l'équation d'Airy L'équation Kdv admet comme solutions des ondes solitaires sous la forme :

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (2.77)$$

Où c est la vitesse de propagation de l'onde. Nous obtenons l'équation différentielle ordinaire :

$$-cf' + f''' + 6ff' = 0 \quad (2.78)$$

Qui fournit après intégration :

$$-cf + f'' + 3f^2 = a \quad (2.79)$$

a est une constante d'intégration.

En multipliant par f' suivi d'une intégration on trouve :

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 2af + b \quad (2.80)$$

b est une constante.

Nous cherchons une solution d'onde solitaire, signifiant que loin de l'amas de l'eau, il n'y a aucune altitude et

$f, f', f'' \rightarrow 0$ Quand $x \rightarrow 0$ alors $a = b = 0$ de sorte que

$$-cf + (f')^2 + 2f^3 = 0 \quad (2.81)$$

La solution de cette Equation aux dérivées ordinaires (EDO) de premier ordre est:

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c}(x - ct + x_0) \right) \quad (2.82)$$

Avec x_0 une constante d'intégration

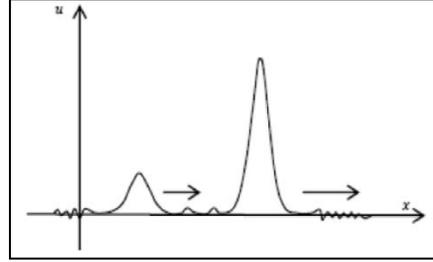


Figure : le soliton

Cette équation peut être dérivée par une réduction multi échelle asymptotique et on peut la trouver dans d'autres documents sous la forme :

$$\partial_t u + \partial_x u_x + \partial_x (u)^2 + \partial_x^3 u = 0 \quad (2.83)$$

Dans le cas général, ces deux équations fondamentales ou classiques de (KdV) décrivent un modèle de propagation unidirectionnel pour les ondes longues à la surface d'eau et en faible profondeur.

II.4.2-Equation générale de Kortweg-de-Vries, burgers :

Ce type de problèmes se produit dans la modélisation des ondes générées par un onduleur dans un canal et des vagues entrant de l'eau profonde dans les zones littorales

$$\partial_t u + \left(\delta \partial_x^2 u + \frac{\beta}{p} u^p \right)_x + \alpha \partial_x u - \mu \partial_x^2 u = 0 \quad (2.84)$$

Où u est une fonction de x et de t .

α , β et $p > 0$ sont des constantes.

μ Est le coefficient de dissipation.

δ Est le coefficient de dispersion.

On peut considérer que c'est le type le plus simple d'Equations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires.

Avec

u^p Est le terme non linéaire.

$\partial_x^2 u$ Est le terme de dissipation.

$\partial_x^3 u$ Est le terme de dissipation.

Pour $\alpha = \delta$ et $p=2$ on a :

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^2 u = 0 \quad (2.85)$$

Avec la solution :

$$u(x, t) = \frac{2K}{\alpha} + \frac{2\beta K}{\alpha} \tanh K(x - 2Kt) \quad (2.86)$$

Pour $\alpha = \mu = 0$ et $p=2$ on a :

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + s \partial_x^3 u = 0 \quad (2.87)$$

Avec comme solution la forme d'un soliton :

$$u(x, t) = \frac{12sK}{\alpha} \operatorname{sech}^2 K(x - 4sK^2t) \quad (2.88)$$

II.4.3-Equation Kortweg de Vries à coefficient variables :

L'équation de Kortweg-de-Vries à coefficients variables s'écrit :

$$\partial_t u + \gamma(t) \partial_x^3 u + \alpha(t) \partial_x u - \beta(t) u u_x = 0 \quad (2.89)$$

Avec $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sont des fonctions qui dépendent seulement du temps.

Cette équation décrit la propagation d'onde faiblement non linéaire et faiblement dispersive dans les milieux non homogènes.

II.4.4-Equation de Kortweg de Vries Généralisée :

L'équation KdV généralisée s'écrit :

$$\partial_t u + \delta \partial_x^3 u - (f(u))_x = 0 \quad \delta > 0 \quad (2.90)$$

C'est une équation liée à des ondes dispersives dans un milieu anharmonique.

$$f(u) = u^p / p \quad (p=1, 2, 3, 4 \text{ ou les valeurs impaires } \geq 5).$$

P=2 : Cas étudié par A .SJOBERG , Y .KAMETAKA , R.TEMAN.

P=3 : Cas étudié par T.MUKASA et R.LINO ,Y.KAMETAKA.

P=4 : Cas étudié par K.MASUDA.

On trouve aussi une forme différente qui s'écrit :

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + |u|^p)_x = 0 \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } t, x \in \mathcal{R} \text{ et pour } p > 0 \quad (2.91)$$

Pour $p=2$, on considère l'équation comme l'équation de Kortweg-de-Vries (KdV).

Pour $p=3$, on considère l'équation comme l'équation de Kortweg-de-Vries modifiée (mKdV).

Pour $p=5$, on considère l'équation comme l'équation de Kortweg-de-Vries critique (cKdV).

II.4.5- Equation de Kortweg-de-Vries (KdV) sphérique :

Les équations de Kortweg-de-Vries, sphérique et cylindrique, sont rencontrées dans des problèmes électriques. Elles s'écrivent sous la forme :

Cas sphérique :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + u/t = 0 \quad (2.92)$$

Cas cylindrique :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + u/2t = 0 \quad (2.93)$$

II.4.6-Equation de Benjamin-Ono :

C'est l'équation déduite de l'étude des longues ondes de gravité internes, faiblement non-linéaires. Elle est donnée par :

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^2 H(x) + \partial_x (u)^2 = 0 \quad (2.94)$$

Ou H est la transformation d'HILBERT.

II.4.7-Equation de Boussinesq :

L'équation de Boussinesq décrit les vagues non-linéaires unidimensionnelles et faiblement dispersives qui se propagent dans les directions positive et négative. Elle s'écrit :

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x^2 (3u^2) - \partial_x^3 u = 0 \quad (2.95)$$

II.4.8-Equation non linéaires fortement dispersives et les compactons :

Cette équation intervient lorsque l'onde de dispersion est purement non-linéaire et dans ce phénomène, on peut observer l'existence des compactons qui sont des solitons avec une longueur d'onde finie. Elle s'écrit :

$$\partial_t u \pm a \partial_x (u^m) + b \partial_x^3 u^n = 0 \quad (2.96)$$

Avec $m > 0$ et $1 < n \leq 3$.

Avec $k(n, m)$ représente la famille de ces solutions

La solution de $k(2,2)$ avec $a=b=1$ est donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{4C}{3} \right) \cos^2 \left[\frac{1}{2} (x - ct) \right] & \text{si } |x - ct| \leq 2\pi \\ 0 & \text{si autrement} \end{cases} \quad (2.97)$$

II.4.9-Autres équations de Kortweg-de-Vries:

on peut citer encore quelques équation de Kortweg-de-Vries qu'on retrouve aussi dans la littérature, telle que :

a-Equation modifiée de Kortweg-de-Vries:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u \pm 6u^2 \partial_x u = 0 \quad (2.98)$$

b-Super équation de Kortweg-de-Vries:

$$\partial_t u = 6u \partial_x u - \partial_x^3 u + 3w \partial_x^2 w \quad (2.99.a)$$

$$\partial_t w = 3(\partial_x u)w + 6u \partial_x w - 4 \partial_x^3 w \quad (2.99.b)$$

c-Equation modifiée de Kortweg-de-Vries:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - (\partial_x u)^3 / 8 + (\partial_x u)(Ae^{au} + B + Ce^{-au}) = 0 \quad (2.100)$$

d-Equation de Kortweg-de-Vries déformée :

$$\partial_t u + \partial_x (\partial_x^2 u - 2\eta u^3 - 3u(\partial_x u)^2) / 2(\eta + u^2) = 0 \quad (2.101)$$

e- Equation de Kortweg-de-Vries généralisée 2 :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = \partial_x^5 u \quad (2.102)$$

f-Equation de Kortweg-de-Vries du 7^{ème} ordre de Lax :

$$\partial_t u + \partial_x \{35u^5 + 70(u^2 \partial_x^2 u + u(\partial_x u)^2) + 7[2u \partial_x^4 u + 3(\partial_x^2 u)^2 + 4 \partial_x \partial_x^3 u] + \partial_x^6 u\} = 0 \quad (2.103)$$

II.5-Conclusion

Dans ce chapitre, dans la première partie, on conclut que l'astuce mathématique pour trouver les origines des équations est vraiment très délicate, mais avec intervention des lois des séries et les lois de récurrence et l'étape de demensionaliser les variables nous permet à la fin de trouver une équation qui appartient aux équations de (kdv), on peut dire que c'est l'équation classique de (kdv). Dans la deuxième parti, on conclut qu'il ya beaucoup de type ou forme qui on peuvent etre considérées comme des équations de (kdv). .

CHAPITRE III

Approche mathématiques des ondes solitaires

III.1-Introduction :

Comme on a vu dans le premier chapitre, le soliton au sens physique n'est autre qu'un phénomène naturel simple à détecter. Il peut représenter un tsunami, mascaretetc. Le problème qui reste sur la compréhension du soliton est le model mathématique ; c'est à dire comment en peut écrire ou considérer une équation simple d'une onde comme un soliton.

Dans ce chapitre, on essaye de construire sur plusieurs exemples et plusieurs cas sur des équations d'ondes et on les traite afin de répondre à cette question.

III.2-Définitions Mathématiques :

Les solitons sont les solutions classiques des équations du mouvement d'un système dispersif et non linéaire qui se comporte comme des paquets d'énergie se propageant sans déformation

Un milieu est dit linéaire si l'équation de propagation des ondes dans ce milieu est une équation différentielle linéaire.

III.3-Caractéristiques des solitons comme solutions :

- Un soliton représente une solution des équations du mouvement qui ne peut pas être obtenu par la méthode des perturbations ; c'est à dire par un développement en série
- Une solution sous forme du soliton a sa densité d'énergie concentrée autour d'un point qui se déplace à une vitesse arbitraire.
- La forme d'onde est déterminée par les équations de mouvement.
- L'énergie d'un soliton devienne infinie quand la théorie tend à devenir linéaire.

III.4-Modèle Mathématique du soliton à une dimension :

Soit l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (3.1)$$

Ce système est non dissipatif car il admet, par intégration première, une énergie E donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] \quad (3.2)$$

Si $\phi_0(x)$ est une solution de (3.1) indépendante du temps, alors on peut avoir une famille de solutions dépendantes du temps :

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (3.3)$$

Alors, on peut extraire l'état d'énergie de ce système comme suit :

$$1- \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$$2- \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (3.5)$$

ϕ est un Minimum absolu de potentiel $V(\phi)$.

En général $V(\phi)$ peut atteindre son minimum absolu V_0 pour plusieurs valeurs de $\phi = \phi_1, \phi_2 \dots \dots$

Les petites oscillations autour d'un minima ϕ_i sont étudiées en linéarisant l'équation d'onde :

$$\phi = \phi_1 + \chi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \mu^2 \chi + \dots \quad (3.7)$$

Où $\mu^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi = \phi_i}$

Cette équation décrit un milieu dispersif et on peut déduire que l'équation d'onde est une particule scalaire de masse $M = \frac{\hbar \mu}{c}$

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi = \phi_i} \quad \phi_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \phi_i \quad (3.8)$$

$$\phi_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \phi_j \quad (3.9)$$

Si on connaît une telle solution, on en déduit par (3.3) une solution $\phi(x, t)$ dépendant du temps et d'énergie finie se déplaçant à une vitesse arbitraire v et une telle solution décrit un soliton .

III.4-Exemples :

III.4.1-La corde vibrante

$$V(\phi) = 0 \quad (3.10)$$

On remarque que

Le système est linéaire non dispersif

Solution général :

$$\phi = \int dk e^{i(\omega t - kx)} g(k) \quad \text{ou } \omega^2 = c^2 k^2 \quad (3.11)$$

$$\phi = f(x - ct) + h(x + ct) \quad (3.12)$$

Comme on a remarqué, il n'y a pas de dispersion ; les ondes se propagent à la vitesse c fixe et comme les solutions d'énergie minimale constante

On déduit que la corde vibrante n'est pas un soliton.

III.4.2-Equation de Klein Gordon :

$$V(\phi) = \frac{1}{2} K^2 \phi^2 \quad (3.13)$$

La solution générale est

$$\phi = \int dk e^{i(\omega t - kx)} g(k) \quad \text{ou } \omega^2 = c^2(K + k)^2 \quad (3.14)$$

$\frac{d\omega}{dk}$ Dépend de K ; le système est dispersif. Un paquet d'ondes s'étale au cours du temps, ce que décrit une particule de masse $M = \frac{k}{hc}$

$V(\phi)$ à un seul minimum : $\phi = 0$, alors la solution représente un soliton.

III.4.3-Milieu Non Linéaire Dispersif

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{4} \left(\phi^2 - \frac{K^2}{\alpha} \right)^2 \text{ avec } \alpha > 0 \quad (3.15)$$

Le minimum de V : $\phi = \pm \frac{K}{\sqrt{\alpha}}$

Petites oscillations autour de ces minima :

$$\phi = \pm \frac{K}{\sqrt{\alpha}} + \chi \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2K^2 \chi + \dots \quad (3.17)$$

Donc on a des solutions d'énergie finie, dépendantes de temps :

$$\phi(x) = \pm \frac{K}{\sqrt{\alpha}} + h \left[\frac{K}{\sqrt{2}} \frac{x - X_0 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right] \quad (3.18)$$

Avec X_0, V sont des constantes arbitraires qui caractrisent les condition initiales

Cette solution représente une onde se déplaçant à la vitesse v sans déformation.

Comme il n'y a qu'une marche d'escalier, ce type d'onde est appelé soliton (+) ou antisoliton(-).

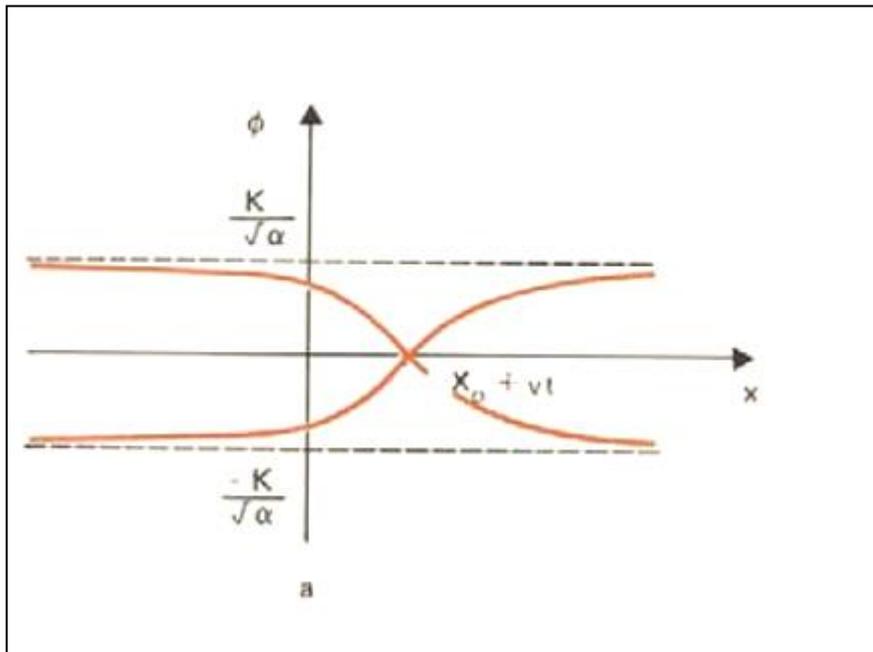


Figure. III.1. La représentation graphique des solutions d'équation d'un Milieu non linéaire dispersif (soliton et anti soliton).

III.4.4-Equation de Sine Gordon :

$$V(\phi) = \frac{1}{g^2} (1 - \text{cosg}\phi) \quad (3.19)$$

On normalise ϕ :

$V(\phi) = \frac{\phi^2}{2} - g^2 \frac{\phi^4}{4!} + \dots$ de sorte que pour les petites oscillations autour de $\phi = 0$ on a $K=1$

Les minima du potentiel sont :

$$\phi_n = \frac{2\pi n}{g}$$

$$Q = \frac{g}{2\pi} (\phi_n - \phi_m) = n * m \quad (3.20)$$

Prend tous les valeurs entiers et ce nombre quantique est interprété comme donnant le nombre de solitons moins le nombre d'anti solitons

Pour $Q=\pm 1$

On a les solutions à un soliton et un antisoliton :

$$Q_0^s(x) = \frac{4}{g} \text{Arctge}^x \quad (3.21)$$

$$Q_0^{\bar{s}}(x) = \frac{4}{g} \text{Arctge}^{-x} \quad (3.22)$$

La nouveauté est l'existence de solutions à plusieurs solitons

Par exemple

Pour $Q=2$ on a la solution :

$$Q_0^{ss}(x, t) = \frac{4}{g} \text{Arctg} \left[\frac{v \text{sh} \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}{\text{ch} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} - \ln v \right)} \right] \quad (3.23)$$

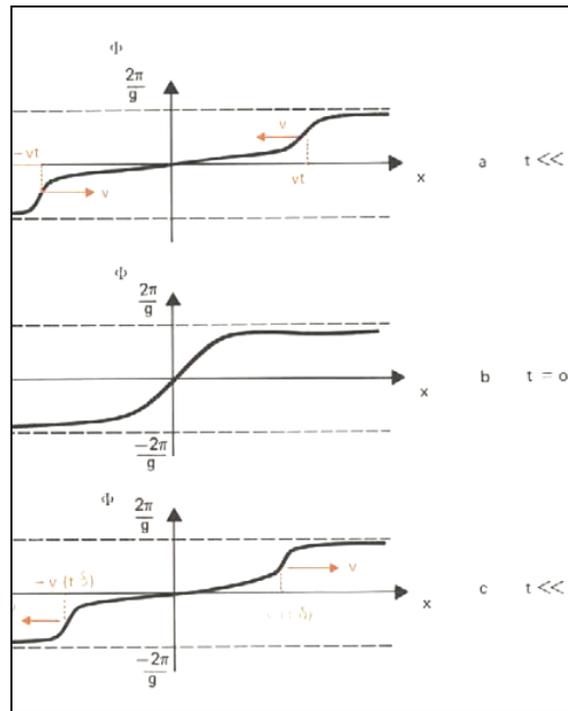


Figure (III, 2) : La diffusion de deux électrons dans l'équation de Sine-Gordon

Remarque :

Pour $t \ll 0$, les deux solitons sont séparés et se dirigent l'un vers l'autre.

Pour $t = 0$, les solitons ne peuvent être distingués lors de l'interaction.

Pour $t \gg 0$, les solitons sont à nouveau séparés et ont acquis un retard de marche.

III.5-Conclusion

On conclut que la considération d'une équation d'onde comme une équation d'un soliton, il faut suivre des étapes mathématiques due à le caractère de soliton comme des solutions c'est à dire il faut avoir une énergie fini comme par exemple , et quelque propriétés due aux milieux et la vitesse de déplacement ...etc.

Chapitre IV :

Quelque méthodes de constructions des solutions et modélisation l'équation de (kdv)

IV.1.1-introduction :

Comme on a déclaré dans les chapitres précédents, les équations de (kV) joue un rôles très importants dans la physique moderne, soit sur le plan physique tant que des problèmes naturels majores et soit sur aussi le plan mathématique tant que des problèmes (EDP).

C'est pour cette raison qu'on trouve beaucoup des chercheurs scientifiques misent la plus part de leur temps sur la recherche des solutions pour ces équations .pour meilleur précision, ils ont devloppéé et plus révéler beaucoup des méthodes de résolution de ces équations comme :

- la méthode de perturbation.
- la méthode de diffusion inverse.
- la transformation de Bcklud-Darboux.
- la méthode d'Adomain.
- la méthode bilinéaire d'Hirota.
- la méthode elliptique de Jacobi.
- la méthode d'homotopie.
- la méthode de la fonction tangente hyperbolique.
- la méthode d'itération variationnelle.
- la méthode de sinus cosinus.
- les méthodes d'ansatzetc. .

Alors dans ce chapitre, on préfère d'utiliser seulement deux méthodes : l'approche variationnelle et La méthode de la variable fonctionnelle formulée par A. zaraka .

IV.2- L'approche Variationnelle :

Cette méthode peu mené à une simple dérivation des solutions de soliton :

Considérons l'équation de kdv suivante :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0 \quad (4.1)$$

Nous cherchons les solutions comme une onde de la forme suivante :

$$u(x, t) = U(\xi) \text{ Avec } \xi = x - ct \quad (4.2)$$

La substitution de (4.2) dans l'équation (4.1) donne :

$$-cU' - 6UU' + U''' = 0 \quad (4.3)$$

Après l'intégration de (4.3) :

$$-cU - 3U^2 + U'' = 0 \quad (4.4)$$

Et par la méthode de semi-inverse, la formulation variationnelle suivante est établie :

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2c} cU^2 + U^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi \quad (4.5)$$

Par la méthode de Ritz, nous cherchons une solution d'ondes solitaires sous la forme d'un polynôme en termes de fonctions hyperbolique :

$$u = \sum_{i=0}^M p_i y^i \quad (4.6)$$

$$y = \operatorname{sech}(q_i \xi) \quad (4.7)$$

Et p_i, q_i et M sont des constantes à déterminer

Pour des mesures de simplicité on pose :

$$M = 0; p_0 = p_1 = 0; p_2 = p; q_2 = q$$

Alors la substitution de (4.7) dans (4.5) donne :

$$J = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right) cp^2 \operatorname{sech}^4(q\xi) + p^3 \operatorname{sech}^6(q\xi) + \frac{1}{2} (4p^2 q^2 \operatorname{sech}^4(q\xi) \tanh^2(q\xi)) \right] d\xi$$

$$J = \frac{cp^2}{3q} + \frac{8p^3}{15q} + \frac{4p^2 q}{15} \quad (4.8)$$

La fonction J est minimale par rapport à p et q , il résulte :

$$\frac{2cp}{3q} + \frac{24p^2}{15q} + \frac{8pq}{15} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{-cp^2}{3q^2} - \frac{8p^3}{15q^2} - \frac{4p^2}{15} = 0 \quad (4.10)$$

Après la simplification, on trouve :

$$5c + 12p + 4q^2 = 0 \quad (4.11)$$

$$-5c - 8p + 4q^2 = 0 \quad (4.12)$$

A partir des équations (4.11) et (4.12) :

$$p = -\frac{1}{2}c, q = \sqrt{\frac{c}{4}}$$

Alors on obtient la solution de l'onde solitaire suivante :

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{c}{4}}(x - ct - \xi_0) \quad (4.13)$$

Qui fournit la solution d'onde solitaire exacte de (kdv)

Pour la présentation graphique on prend : $C = 2 ; t = 2 ; \xi_0 = 0$

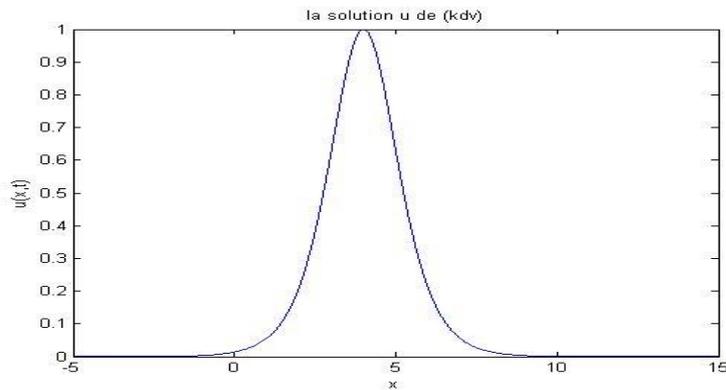


Figure 4.1 : la représentation graphique de la solution u(x,t)

IV.3-La méthode de la variable fonctionnel formulée par A. zaraka[6] :

IV.3.1-introduction à la méthode :

On exprime la nouvelle variable d'onde

$$\xi = \delta + \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i \quad (4.14)$$

Avec x_i sont les variables indépendantes, δ et α_i sont des paramètres

Quand $m=1$ alors

$$\xi = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \delta \quad (4.15)$$

Remarque

Si x_0 et x_1 sont les variables t et x respectivement, a_0 et a_1 sont identifiés comme la pulsation d'onde w et le vecteur d'onde K

Introduisant la transformation suivante pour la solution d'onde :

$$u(x_0, x_1, \dots) = U(\xi) \quad (4.16)$$

Et avec la règle de chaîne et la conversion d'EDP non-linéaire à EDO :

$$Q(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (4.17)$$

On introduit alors une transformation telle que :

$$U_\xi = F(U) \quad (4.18)$$

Et les dérivées successives de U sont

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)', U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)''\sqrt{F^2}, \dots \quad (4.19)$$

IV.3.2-La résolution de l'équation de kdv :

$$\partial_t u + \eta u \partial_x u + \alpha \partial_{xxx} u = 0 \quad (4.20)$$

Avec $\alpha = \eta = 1$

En utilisant la relation (4.14) et l'équation (4.20) prend la forme :

$$\alpha_1 U_\xi + \alpha_0 U U_\xi + \alpha_0^3 U_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.21)$$

Et après l'intégration on trouve :

$$\alpha_1 U + \frac{1}{2} \alpha_0 U^2 + \alpha_0^3 U_{\xi\xi} = 0 \quad (4.22)$$

En multipliant (4.22) par U_ξ , et en intégrant il vient :

$$\frac{\alpha_1}{2} U^2 + \frac{1}{6} \alpha_0 U^3 + \frac{1}{2} \alpha_0^3 U_\xi^2 = 0 \quad (4.23)$$

Avec l'aide de transformation (4.18), l'équation (4.23) devient :

$$\alpha_1 U^2 + \frac{1}{3} \alpha_0 U^3 + \frac{1}{2} \alpha_0^3 F(U) = 0 \quad (4.25)$$

Qui fournit l'expression de $F(U)$:

$$F(U) = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{-\alpha_1 U}{\alpha_0}} \sqrt{1 + \frac{U \alpha_0}{3}} \quad (4.26)$$

A partir de (4.18) et la formule suivant $\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} = \ln \left| \frac{-1+\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{1+y}} \right|$; nous pouvons obtenir l'équation quadratique :

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2)Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (4.27)$$

Avec

$$Z = \frac{\alpha_0}{3} U \quad \text{Et} \quad A = \frac{2 \tanh\left(\frac{c\xi}{2}\right)}{\{1 + \tanh^2\left(\frac{c\xi}{2}\right)\}}$$

$$\text{Ou } c = \frac{1}{a_0} \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}}$$

Finalement les deux solutions de l'équation (4.27) et après quelque manipulation algébrique sont :

Pour $\frac{a_1}{a_0} < 0$:

On trouve la solution exacte

$$u_1(x, t) = \frac{3}{a_1} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{-a_1}{a_0^3}} (a_0 t + a_1 x) + \beta \right) \right] \text{ Avec } \beta = \delta \sqrt{\frac{a_1}{a_0^3}} \quad (4.28)$$

Pour $\frac{a_1}{a_0} > 0$

$$u_2(x, t) = \frac{3}{a_1} \operatorname{sec}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_0^3}} (a_0 t + a_1 x) + \beta \right) \right] \text{ Avec } \beta = \delta \sqrt{\frac{a_1}{a_0^3}} \quad (4.29)$$

Alors si on on donne les valeurs à les variable :

$a_1 = 1$; $a_0 = -1$; $\delta = 0$; $t = 3$; $x = [-5 : 0.01 : 15]$ la solution $u_1(x, t)$ reseter sur la figure 4.2. et pour $u_2(x, t)$ on prend les meme valeurs sauf : $a_0=1$ et $a_1=2$

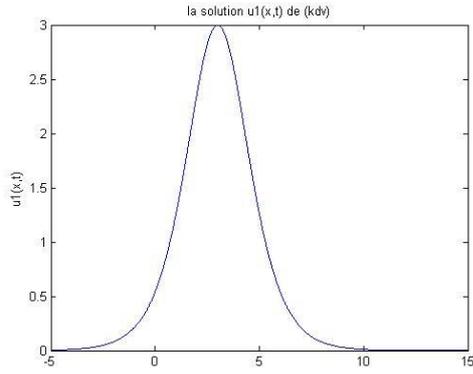


Figure 4.3 :la représentation graphique de la solution $u_2(x, t)$

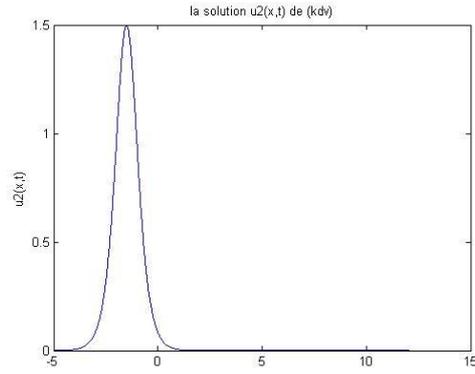


Figure 4.2:la représentation graphique de la solution $u_1(x, t)$

IV.3.3-la résolution del'équation d'onde longue régularisée :

Cette onde appartient à type des ondes longues de faible amplitude et à une équation sous forme :

$$\partial_t U + a \partial_x U - K \partial_x (U^n) + b \partial_{xxt} (U^n) = 0 \quad (4.30)$$

En utilisant la nouvelle variable d'onde(4.14) et avec les transformations(4.15)et la règle de chaine l'équation (4.30) devient :

$$(a_0 + aa_1)U(\xi) - a_1 K \partial_\xi (U^n) + a_1^2 a_0 b \partial_{\xi\xi\xi} (U^n) = 0 \quad (4.31)$$

En posant $U = V^{\frac{1}{n}}$

Et après l'intégration de l'équation (4.31) , nous obtenus l'équation suivante en termes des V :

$$(a_0 + aa_1)V^{\frac{1}{n}} - a_1 KV + a_1^2 a_0 b \partial_{\xi\xi} V = 0 \quad (4.32)$$

En déduire l'expression de la fonction $F(V)$ apartir de l'équation (4.19)et(4.32) :

$$F(V) = \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} V \sqrt{1 - \frac{2n(a_0+aa_1)V^{\frac{1-n}}{a_1k(n+1)}}} \quad (4.33)$$

On pose alors

$$Z = \frac{2n(a_0+aa_1)V^{\frac{1-n}}{a_1k(n+1)}} \quad (4.34)$$

En utilisant la relation (4.33) la solution de l'équation (4.18) est obtenue comme suit :

$$\ln \left| \frac{-1+\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-y}} \right| = c\xi \quad (4.35)$$

Avec

$$c = \frac{1-n}{n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \quad (4.36)$$

En combinant le résultat (4.35) nous obtenons la forme quadratique :

$$A^2Z^2 + 4(1 - A^2)Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (4.37)$$

Ou

$$A = \frac{2 \tanh \left[\frac{1-n}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right]}{1 + 2 \tanh^2 \left[\frac{1-n}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right]} \quad (4.38)$$

Il résulte deux solutions possibles de système (4.37) et (4.38) :

$$V_1(\xi) = \left\{ \frac{a_1 K(n+1)}{2n(a_0+a_1)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{1-n}} \quad (4.39)$$

Et

$$V_2(\xi) = \left\{ -\frac{a_1 K(n+1)}{2n(a_0+a_1)} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{1-n}} \quad (4.40)$$

Alors en déduire les solutions de problème (4.30) :

$$U_1(\xi) = \left\{ \frac{a_1 K(n+1)}{2n(a_0+aa_1)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (4.41)$$

Et

$$U_2(\xi) = \left\{ -\frac{a_1 K(n+1)}{2n(a_0+aa_1)} \operatorname{csch}^2 \left[\frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0a_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (4.42)$$

On a deux cas à discuter :

Pour

$$\frac{K}{ba_0a_1} > 0$$

Les solutions de l'équation (4.41) et (4.42) sont :

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n(a_0 + aa_1)}{a_1 K(n+1)} \cosh^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0 a_1}} (a_0 t + a_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.43)$$

Et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{2n(a_0 + aa_1)}{a_1 K(n+1)} \sinh^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{K}{ba_0 a_1}} (a_0 t + a_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.44)$$

Ces solutions sont connues comme des solutions solitaires PATTERN.

Pour

$$\frac{K}{ba_0 a_1} < 0$$

On a

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n(a_0 + aa_1)}{a_1 K(n+1)} \cos^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{K}{ba_0 a_1}} (a_0 t + a_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.45)$$

Et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2n(a_0 + aa_1)}{a_1 K(n+1)} \sin^2 \left[\frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{K}{ba_0 a_1}} (a_0 t + a_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.46)$$

avec $K=2; a_0=-1; a_1=2; a=5; b=4; \delta=0; n=2$

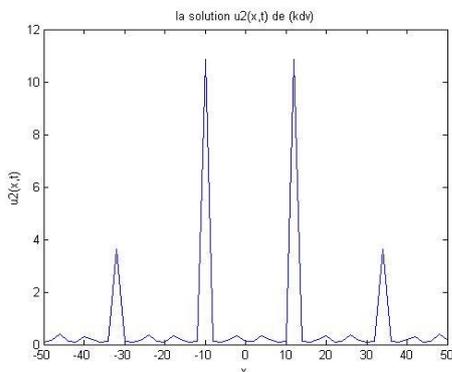


Figure 4.5: la représentation graphique de la solution $u_2(x, t)$

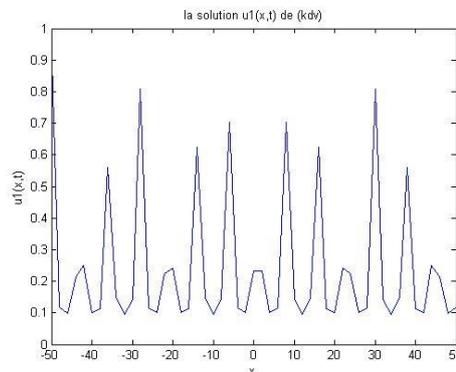


Figure 4.4 : la représentation graphique de la solution $u_1(x, t)$

IV.4-modelisation numirique de l'équation de KDV par la méthode euler :

On considérea une vague qui a une équation suivante :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \partial_x u = 0 \quad (4.47)$$

On utilise la methode euler explicite centré on trouve :

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{3\Delta t}{\Delta x} u_k^n (u_{k-1}^n - u_{k+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x^3} (-u_{k+2}^n + u_{k-2}^n + 2u_{k+1}^n - 2u_{k-1}^n) \quad (4.48)$$

$$r = \frac{3\Delta t}{\Delta x} \text{ et } R = \frac{\Delta t}{2\Delta x^3} \quad (4.49)$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n + r u_k^n (u_{k-1}^n - u_{k+1}^n) + R (-u_{k+2}^n + u_{k-2}^n + 2u_{k+1}^n - 2u_{k-1}^n) \quad (4.50)$$

On prend :

$$r=0.3 \quad R=0.8$$

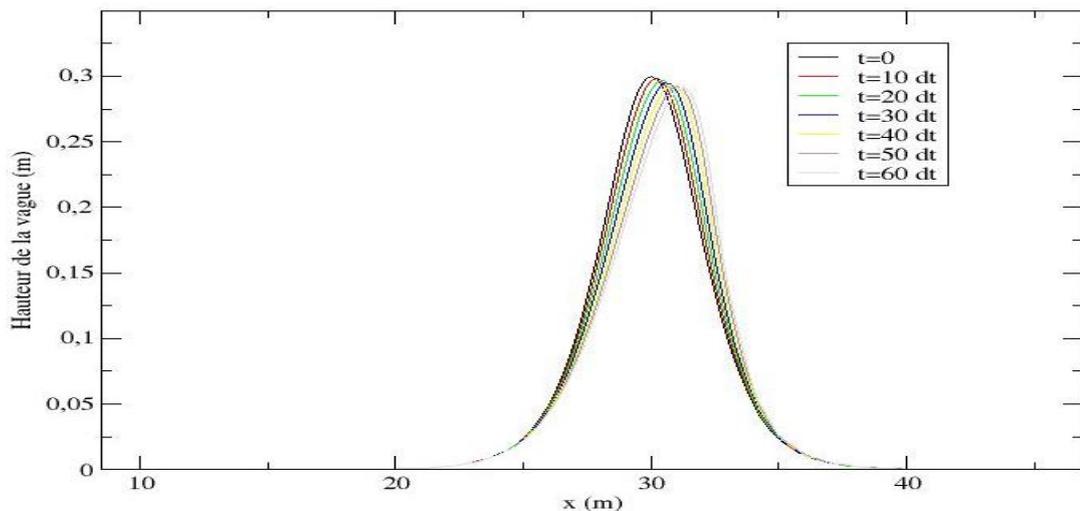


Figure 4.6 : le rapport graphique entre l'abscisse x de la vague et sa hauteur

Remarque sur les courbes :

Dans le premier instant, on voit que la vague se propage correctement. Les effets non-linéaires étant prépondérants sur l'effet de dispersion, on observe que le sommet de la vague penche vers la droite.

Mais si on prend la résolution de l'équation :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \partial_x u = 0 \quad (4.50)$$

Avec la méthode de spectre de Fourier ,et on a excuté avec le code matlab suivant :

```

% kdv.m - Solve KdV equation by Fourier spectral/ETDRK4 scheme
%       A.-K. Kassam and L. N. Trefethen 4/03
%
% This code solves the Korteweg-de Vries eq.  $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ 
% with periodic BCs on  $[-\pi, \pi]$  and initial condition given by
% a pair of solitons. The curve evolves up to  $t=0.005$  and at
% the end  $u(x=0)$  is printed to 6-digit accuracy. Changing  $N$ 
% to 384 and  $h$  to  $2.5e-7$  improves this to 10 digits but takes
% four times longer.

% Set up grid and two-soliton initial data:
N = 256; x = (2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)';
A = 25; B = 16;
u = 3*A^2*sech(.5*(A*(x+2))).^2+3*B^2*sech(.5*(B*(x+1))).^2;
p = plot(x,u,'linewidth',3);
axis([-pi pi -200 2200]), grid on

% Precompute ETDRK4 scalar quantities (Kassam-Trefethen):
h = 1e-6; % time step
k = [0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]'; % wave numbers
L = 1i*k.^3; % Fourier multipliers
E = exp(h*L); E2 = exp(h*L/2);
M = 64; % no. pts for complex means
r = exp(2i*pi*((1:M)-0.5)/M); % roots of unity
LR = h*L(:,ones(M,1))+r(ones(N,1),:);
Q = h*mean((exp(LR/2)-1)./LR,2);
f1 = h*mean((-4-LR+exp(LR)).*(4-3*LR+LR.^2))./LR.^3,2);
f2 = h*mean((4+2*LR+exp(LR)).*(-4+2*LR))./LR.^3,2);
f3 = h*mean((-4-3*LR-LR.^2+exp(LR)).*(4-LR))./LR.^3,2);
g = -.5i*k;

```

```

% Time-stepping by ETDRK4 formula (Cox-Matthews):
set(gcf,'doublebuffer','on')
disp('press <return> to begin'), pause % wait for user input
t = 0; step = 0; v = fft(u);
while t+h/2 < .005
    step = step+1;
    t = t+h;
    Nv = g.*fft(real(ifft(v)).^2);
    a = E2.*v+Q.*Nv;      Na = g.*fft(real(ifft(a)).^2);
    b = E2.*v+Q.*Na;      Nb = g.*fft(real(ifft(b)).^2);
    c = E2.*a+Q.*(2*Nb-Nv); Nc = g.*fft(real(ifft(c)).^2);
    v = E.*v+(Nv.*f1+(Na+Nb).*f2+Nc.*f3);
    if mod(step,25)==0
        u = real(ifft(v)); set(p,'ydata',u)
        title(sprintf('t = %7.5f',t),'fontsize',18), drawnow
    end
end
text(-2.4,900,sprintf('u(0) = %11.7f',u(N/2+1)),...
     'fontsize',18,'color','r')

```

On obtient la figure suivante :

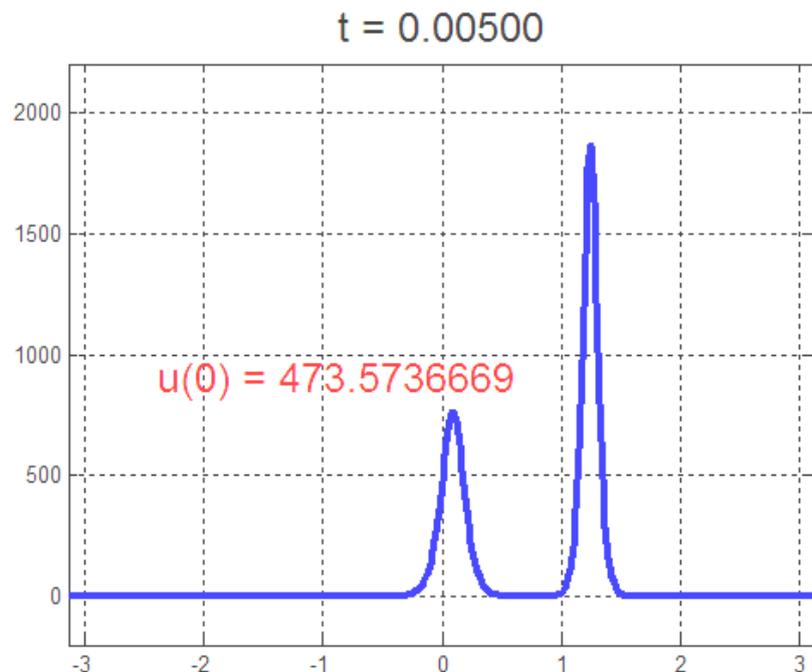


figure 4.6 : la représentation graphique des solutions de l'équation de (KDV)

Remarque :

Alors ,on remarque que l'équation de (kdv) ,(4.50) à deux solution comme soliton.

IV.5 : Conclusion :

On conclut que, après savoir que les équations de (KDV) sont très utiliser aujourd'hui dans déférent demain de la physique, les chercheurs et le mathématiciens ont développé beaucoup des méthodes pour résoudre ces équations, ainsi même ils ont amélioré des méthodes intéressantes sur l'approximation et la programmation sur déférents logiciels afin d' extraire des informations graphiques, des erreurs de calcule ...etc.

Références bibliographiques

- [1]: John Scott Russel, report on waves; report of the waves fourteenth meeting of the British association for the advancement of science, York, septembre 1844.
- [2]: Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vries. Un exemple de l'interaction entre la mathématique pure et appliquées, Claude Bardos.
- [3]: The good Boussinesq equation on half-line, Alex Himonas and Dionyssi Mantzavinos, University of Georgia 2015.
- [3]: M.J. Boussinesq, théories des ondes et des ramoux qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal. J de math pures et appl, II :55-108, 1872.
- [4]: Physique des solitons, Michel Peyrard et Thierry Dauxois : Ecole Normale supérieure de Lyon ,2007.
- [5]: P.Y. Lagée, kdv, université de Paris 06.
- [6]: Construction formelles des solutions pour une classe d'ondes non linéaire ,Atmani Bekhocha :Université Med Khider Biskra.
- [7]: les solitons Optique ,Mayache Hichem :Université Badji Mokhtar Annaba,2008.
- [8]: Construction de solutions pour les équations de (kdv) généralisées ,Raphael Cote ,2006.
- [9]: les solitons, Raphael Cote ,Université de Strasbourg.
- [10]: olympiades de physique 2011 ,des ondes sur un plan d'eau, lycée Jean-Jacques Henner-Altkirch.
- [11]: les solitons, Raphael Cote, université de Strasbourg.