

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Bejaïa
Faculté des Science exactes
Département de Physique

Réf :



Mémoire de Fin de Cycle
En vue de l'obtention du diplôme
MASTER

Option : Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Effet de la modulation de phase des conditions aux limites sur la température dans la stabilité de la convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles

Présenté par :
AMIR Rima

Soutenu le 08/07/ 2019 devant le jury d'examen :

AMATOUSSE	Nawel	Professeur	Présidente
SAHI	Adel	MCB	Examineur
ADNANI	Massinissa	Docteur	Invité
MEZIANI	Bachir	Professeur	Directeur du mémoire

Promotion : juillet 2019

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédis ce modeste travail à :

- Mes très chers parents*
- Mes très chers grands parents*
- Mes très chers frères (Djazil, Amazigh et Brahim)*
- Ma sœur Kahina*
- Mon fiancé Younes et à ma belle famille*
- Tous les membres de ma famille maternelle et paternelle*
- Mes chers et fideles amis*
- Toute la promotion dynamique des fluides et énergétique*

Remercîments

Je tiens tout d'abord à remercier le Bon Dieu qui m'a donnée la santé et le courage d'accomplir ce modeste travail.

*Je remercie vivement mon directeur de mémoire fin d'étude Mr :
B .MEZIANI pour son assistance, encouragement et conseils qu'il ma réservé
pour réaliser cet humble travail.*

*Je remercie vivement les examinateurs Mr SAHI Adel et ADNANI Massinissa
et la présidente Mme AMATOUSSE Nawel pour l'acceptation d'examiner
mon mémoire de fin d'étude.*

*Je remercie également mes professeurs pour la qualité de l'enseignement
qu'ils m'ont prodigué au cours de ces cinq années passées a l'université de
Bejaia.*

*Enfin, je tiens a exprimer ma profonde gratitude a ma famille qui ma
toujours soutenue et a tout ce qui ont participé a la réalisation de ce mémoire.
Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué a ma formation.*

TABLES DES MATIERES

Dédicaces

Remerciement

Tables des matières

Listes des figures

Nomenclatures

Introduction Générale

CHAPITRE I: Généralités sur les instabilités convectives de Rayleigh Bénard

I.1 Introduction

I.2 Dynamique du fluide

I.3 Transfert thermique

I.3.1 Conduction

I.3.2 Rayonnement

I.3.3 Convection

I.3.3.1 Convection naturelle

I.3.3.2 Convection forcée

I.3.3.3 Convection mixte

I.4 Loi fondamentale de la convection

I.5 Convection dans les enceintes

I.5.1 Enceinte avec gradient horizontal de température

I.5.2 Enceinte avec gradient vertical de température

I.6 Convection de Rayleigh-Bénard

I.7 Nombre sans dimension

I.7.1 Dimension d'une grandeur

I.7.1 Nombre de Prandtl

- I.7.2** Nombre de Grashof
- I.7.3** Nombre de Rayleigh
- I.7.4** Nombre de Nusselt
- I.7.5** Nombre de Péclet
- I.7.6** Nombre de Richardson
- I.7.7** Nombre de Reynolds
- I.8** Régimes d'écoulement
 - I.8.1** Régime laminaire
 - I.8.2** Régime turbulent
- I.9** Aproximation de Boussinesq
- I.10** Conclusion

CHAPITRE II : Formulation Mathématique

- II.1** Positon de problème
- II.2** Equations générales régissant l'évolution d'un fluide incompressible
 - II.2.1** Equation de conservation de masse
 - II.2.2** Equation de quantité de mouvement
 - II.2.3** Equation d'énergie
- II.3** Approximation de Boussinesq
- II.4** Equations Perturbées
 - II.4.1** Equations de Navier-Stokes
 - II.4.2** Equation d'énergie
- II.5** Formulation du problème
 - II.5.1** Introduction
 - II.5.2** Equations du problème
 - II.5.3** Equations adimensionnelles
- II.6** Analyse de la stabilité bidimensionnelle

II.6.1 Stabilité linéaire : méthode des modes normaux

II.6.2 Elimination de la pression dans les équations

II.6.3 Linéarisation

II.6.4 Fonction du courant

II.6.5 Problèmes aux valeurs propres

CHAPITRE III : Résultats Numériques et Discussion

III.1 Introduction

III.2 Analyse des graphes

III.3 Conclusion

Conclusion Générale

Références Bibliographiques

LISTES DES FIGURES :

Figure I-1: Transfert thermique

Figure I-2 : les trois modes de transfert thermique

Figure I-3 : Exemple de convection (chauffage d'eau dans une casserole)

Figure I-4 : Convection dont le gradient de température est horizontal

**Figure I-5 : Convection dont le gradient de température est vertical
(Convection de Rayleigh-Bénard)**

Figure I-6 : Mécanisme physique de la convection de Rayleigh-Bénard

Figure I-7 : Rouleaux convectifs de Bénard

Figure I-8 : Les régimes d'écoulement laminaire et turbulent

Figure II-1 : Position du problème d'instabilité de Rayleigh-Bénard

Figure III-1: Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=10000$ et k variant de 1 à 8

Figure III-2 : Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=15000$ et k variant de 1 à 8

Figure III-3 : Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=20000$ et k variant de 1 à 8

Figure III-4 : Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=25000$ et k variant de 1 à 8

NOMENCLATURES :**Les nombres adimensionnels :**

Ra : Nombre de Rayleigh

Pr : Nombre de Prandtl

Nu : Nombre de Nusselt

Ri : Nombre de Richardson

Pe : Nombre de Peclet

Gr : Nombre de Grashof

Re : Nombre de Reynolds

Symbole	Définition	Unité
C_p	Capacité thermique isobare	$(J\ kg^{-1}\ K^{-1})$
C_v	Capacité thermique isochore	$(J\ kg^{-1}\ K^{-1})$
e	Densité d'énergie thermique	
G	Accélération de la pesanteur	m/s^2
H	Hauteur caractéristique	m
h	Coefficient d'échange superficiel	$(w/m^2.k)$
K	Vecteur d'onde	
L_c	Longueur caractéristique	M
P	Pression	(Pa)
Q	Flux thermique	$J.s^{-1}$
q	Constante	
t	Temps	S
T	Température	$^{\circ}K$
ΔT	Différence de température	$^{\circ}K$
T_p	Température de la paroi	$^{\circ}K$
T_f	Température du fluide	$^{\circ}K$
U	Vitesse du fluide	m/s

Symbole	Définition	Unité
ν	Viscosité cinématique	$(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \text{m}^2/\text{s})$
μ	Viscosité dynamique	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
α :	Diffusivité thermique	m^2/s
β	Coefficient de dilatation thermique	(K^{-1})
τ_{ij}	Tenseur de contraintes	
ε_{ij}	Tenseur des déformations	
σ	Constante de Stefan-Boltzman	
λ	Conductivité thermique	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
ρ	Masse volumique	kg/m^3
φ	Taux de dissipation par viscosité	
∂	Dérivée partielle	
∇	Opérateur nabla	

INTRODUCTION GENERALE

Le transfert de chaleur est une science qui étudie comment la chaleur se propage d'une région à une autre, sous l'influence d'une différence de température. Le transfert de chaleur peut jouer un rôle important dans divers processus industriels. Il résulte d'une interaction complexe au sein d'un milieu ou entre milieux dès qu'il y a un gradient de température. Cette interaction est responsable de la diversité des écoulements qui en résultent.

Il excite trois modes de transfert (conduction, convection et rayonnement), parmi ces trois modes, c'est la convection qui a une importance aussi bien dans le domaine fondamental que dans les domaines des applications telles que : le refroidissement des composants électroniques, la climatisation, les échangeurs de chaleur, les centrales nucléaires, les capteurs solaires...etc. [1]

Dans notre travail, on s'intéresse à la convection naturelle. La convection naturelle dans un fluide fascine encore les scientifiques. Ici, il s'agit d'étudier un phénomène dit « dissipatif ». En transportant de la chaleur par le mouvement lui-même du fluide entre deux milieux, ce mode de transfert permet d'échanger la chaleur de manière plus importante que ne le permet la conduction. [2]

Un cas particulier de convection thermique est la convection de Rayleigh-Bénard. La convection de type Rayleigh-Bénard, se réfère à la convection entre deux plaques parallèles, la plaque inférieure est portée à une température chaude et la plaque supérieure est portée à une température froide. C'est une convection induite par la poussée d'Archimède, qui s'oppose à deux effets exercés sur les particules fluides ; les effets de dissipation visqueuse et de diffusion thermique qui freinent le mouvement. Le paramètre de contrôle qui gouverne le système est le nombre de Rayleigh. Il représente le rapport entre le terme moteur qu'est la poussée d'Archimède et les effets visqueux et diffusif qui limitent l'apparition du mouvement. [3]

$$Ra = \frac{\text{poussée d'archimède}}{\text{force de traînée visqueuse} \times \text{taux de diffusion de chaleur}}$$

Historiquement, la première étude sur la convection est liée au travail de « Henri Bénard », physicien français, qui rédige en 1901 sa thèse nommée « Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection en régime permanent ». [4]. Celui-ci a observé le comportement d'une fine couche d'huile de baleine maintenue dans un récipient suspendu au-dessus d'un bain d'eau bouillante à une température approximative de 100°C. L'extension horizontale du récipient était beaucoup plus grande que sa profondeur et Bénard observa la formation, loin des bords du récipient, de cellules de convection de forme hexagonale. Il remarqua également que le fluide chaud montait au centre des cellules et descendait le long des contours hexagonaux et attribua la formation de ces structures aux variations de densité avec la température. En 1916, « Lord Rayleigh », physicien anglais, appuie cette interprétation par l'analyse d'une couche fluide horizontale infinie placée entre deux surfaces rigides maintenues à des températures différentes [5]. Lord

Rayleigh (1842–1912) et Henri Bénard (1874–1939) sont les deux physiciens à l'origine de la découverte et de l'analyse des cellules de convections. Le premier s'est occupé de la partie théorique et le second de la partie expérimentale de l'expérience. Cette convection naturelle, appelée instabilité de Rayleigh-Bénard, est une instabilité thermo-convective susceptible de se développer dans un milieu fluide soumis à un gradient de température déstabilisant. Elle se traduit par la formation de structures convectives appelées cellules de Bénard. Nous retrouvons ce phénomène dans notre quotidien sans nous en rendre compte parfois. En effet, l'exemple le plus récurrent est l'observation des cellules de Bénard lors de chauffage de l'eau dans une casserole. Il existe bien évidemment d'autres cas non perceptibles dans la vie de tous les jours comme les convections ayant lieu dans le noyau terrestre ou dans l'atmosphère terrestre par exemple.

Dans le présent mémoire, nous étudions numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle (convection de Rayleigh-Bénard), dans un fluide confiné entre deux plaques horizontales parallèles et soumises à un gradient de température sinusoïdale.

Les simulations numériques sont réalisées pour prédire les seuils d'instabilité.

Le manuscrit de ce mémoire se devise en trois parties :

Après une introduction générale, on consacre le premier chapitre de ce mémoire aux généralités sur les instabilités convectives de Rayleigh Bénard, Après une introduction à la dynamique du fluide et au modes de transfert thermique, conduction, convection et rayonnement avec un développement des différents modes de convection à savoir ; la convection naturelle, la convection forcée et la convection mixte. Nous rappelons la loi fondamentale de la convection, la convection dans les enceintes avec gradient horizontal et/ou vertical de température. On introduit, ensuite, la convection de Rayleigh-Bénard et on définit les nombres adimensionnels qui sont les nombres de Prandtl, de Grashof, de Rayleigh, de Nusselt, de Péclet, de Richardson et de Reynolds. On termine ce paragraphe par un aperçu sur les différents régimes d'écoulement et l'approximation de Boussinesque.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à la formulation mathématique du problème de l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles en présence de température de parois sinusoïdales. On introduit, dans un premier temps les équations générales régissant l'évolution d'un fluide incompressible. Il s'agit de l'équation de conservation de masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et enfin l'équation de conservation de l'énergie. L'introduction des approximations de Boussinesque nous permet d'avoir le système régissant l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard. L'introduction des perturbations dans les équations de base nous permet d'avoir le système d'équations perturbées. On introduit les grandeurs de référence pour avoir le système d'équations adimensionnel. L'analyse de la stabilité bidimensionnelle est faite. Il s'agit d'étudier la stabilité linéaire du système en utilisant la méthode des modes normaux, qui est exposée dans ce chapitre. Après élimination de la pression dans le système d'équations et sa linéarisation et en introduisant la fonction du courant dans ce dernier système d'équation, on obtient un système algébrique linéaires qui sera résolu numériquement dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude numérique du système algébrique linéaire obtenu en linéarisant le système d'équations régissant l'instabilité de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles soumis à un gradient de température vertical.

Une conclusion générale clôture ce mémoire. Dans cette dernière, les différentes étapes du travail ainsi que les résultats sont synthétisées. Les perspectives à ce travail sont énumérées.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES INSTABILITES CONVECTIVES DE RAYLEIGH-BENARD

I.1-Introduction

La convection de Rayleigh Bénard ou instabilité de Rayleigh Bénard a été découverte en 1916 par Rayleigh c'est un phénomène physique très impressionnant qui a attiré l'intention de plusieurs chercheurs et qui a fait l'objet de nombreux travaux tant d'un point de vue expérimental que sur un plan théorique et notamment numériques. Ce phénomène intervient aussi bien dans la dynamique des océans que dans l'atmosphère en passant par l'intérieur des étoiles et des planètes. [6]

L'instabilité de Rayleigh-Bénard se manifeste lorsqu'un fluide est entre deux plaques de températures différentes. Cette différence de température est un paramètre essentiel de cette instabilité. Lorsque cette différence soit assez importante les rouleaux de convection commencent à se former. [7]

I.2-Dynamique des fluides

La dynamique des fluides ou l'hydrodynamique consiste à étudier les fluides en mouvement, c'est une partie de la mécanique des fluides les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe exemple : les jets d'eau. [8]

En dynamique des fluides incompressibles, on se base sur trois équations fondamentales :

- Equation de continuité.
- Equation de conservation de la quantité de mouvement.
- Equation de la conservation d'énergie.

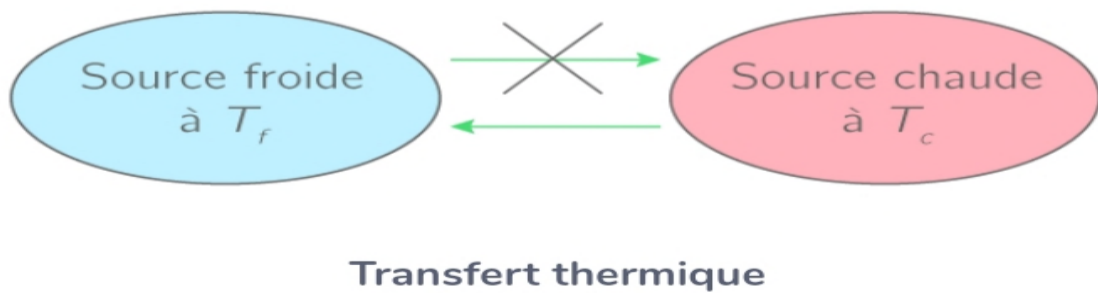
I.3-Transfert thermique

Quand deux systèmes en contact sont à des températures différentes, il y a systématiquement échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. [9]

On distingue trois modes de transmission de la chaleur :

- la conduction (transfert par contact)
- la convection (transfert par mouvement de fluide)
- le rayonnement (transfert par ondes électromagnétiques)

Le transfert thermique est un échange d'énergie microscopique désordonné irréversible et pas instantané. Pour évaluer la vitesse de ce transfert, on utilise la notion de flux thermique noté(q), exprimé en watt. C'est une puissance qui traduit la vitesse du transport énergétique. [10]



FigureI-1 : Transfert thermique [9]

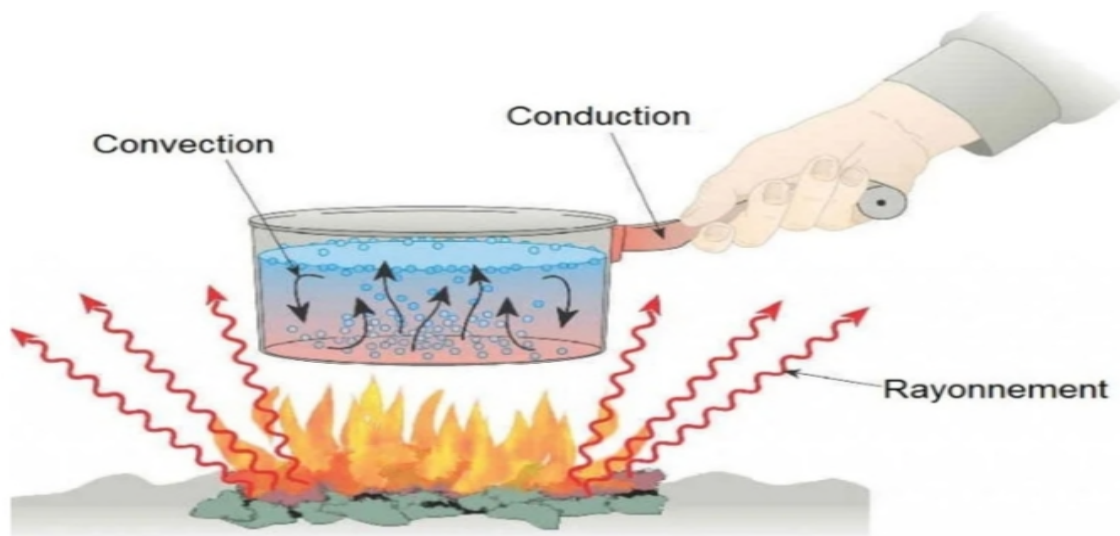


Figure 1-2 : Les trois mode du transfert thermique [9]

I.3.1-Conduction

La conduction est un transfert thermique spontané, elle est provoquée par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, c'est un déplacement d'énergie thermique du corps chaud vers le corps froid sans déplacement global de matière. [11]

Ce mode de transfert obéit à la loi dite de Fourier :

$$\vec{\Phi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

Φ = Densité du flux thermique (W.m^{-2})

λ = conductivité thermique du milieu ($\text{Wm}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

T = Température (K)

I.3.2-Rayonnement

C'est le transfert de l'énergie émise par une source radioactive sous forme d'ondes électromagnétiques se déplaçant à une grande vitesse. [12]

$$\Phi = \epsilon \sigma T^4 \quad (\text{I.2})$$

Avec :

σ : Constante de Stefan-Boltzmann ($5,6703 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)

ϵ : Émissivité, indice valant 1 pour un corps noir et qui est compris entre 0 et 1 selon l'état de surface du matériau (sans dimension)

T : température du corps (K).

I.3.3-Convection

Ce genre de transfert est rencontré dans les fluides (liquides ou gaz), elle se produit quand une paroi et un fluide en mouvement sont à des températures différentes. Il se fait avec transfert de matière. Ce mode de transfert est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie. [13]

Trois types de convection sont généralement distingués :

- La convection naturelle ou libre.
- La convection forcée
- La convection mixte

1.3.3.1-Convection naturelle ou libre

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensives telles que la température, la concentration ou la tension superficielle. [14]

Exemple : les phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma).

1.3.3.2-Convection forcée

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine, ventilateur) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. [14]

Exemple : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie, chauffe-eau. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

1.3.3.3-Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (Convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre de grandeur. [14]

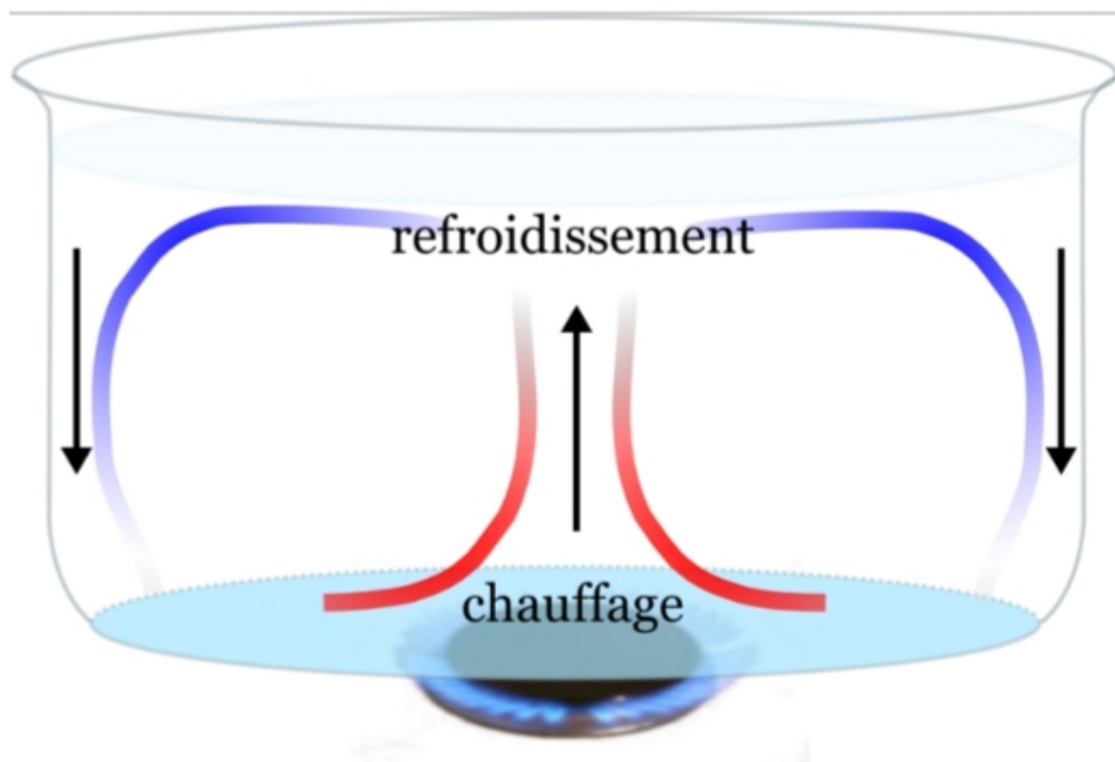


Figure 1-3 : Exemple de convection (chauffage d'eau dans une casserole) [13]

1.3.4-Loi fondamentale de convection

La convection est donnée par la loi de Newton :

$$\Phi = H (T_p - T_f) \quad (1.3)$$

Avec :

T_p = Température de la paroi (K)

T_f = Température du fluide. (K)

Φ = Densité du flux thermique ($W \cdot M^{-2}$)

H = Coefficient d'échange superficiel ($W/m^2/K$, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$)

1.3.5-Convection dans les enceintes

Le but d'étudier la convection naturelle dans les enceintes réside dans son implication dans de nombreuses applications industrielles telles que le refroidissement des composants électroniques, la thermique des bâtiments, l'industrie métallurgique...etc. Elle a fait objet d'un grand nombre de travaux dans le plan théorique et expérimental. L'enceinte rectangulaire continue à être la géométrie qui présente le plus d'intérêt. Dans ce type d'enceinte, généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes tandis que les autres sont isolées. [15]

On distingue deux configurations :

1.3.5.1-Enceinte avec gradient horizontal de température :

Dans cette configuration, l'une des parois verticales est chauffée tandis que l'autre est refroidie, les parois horizontales étant considérées adiabatique. Pour cette configuration, il n'y a pas de gradient critique de température et le fluide est alors ascendant le long de la paroi chaude et descendante le long de la paroi froide. [15]

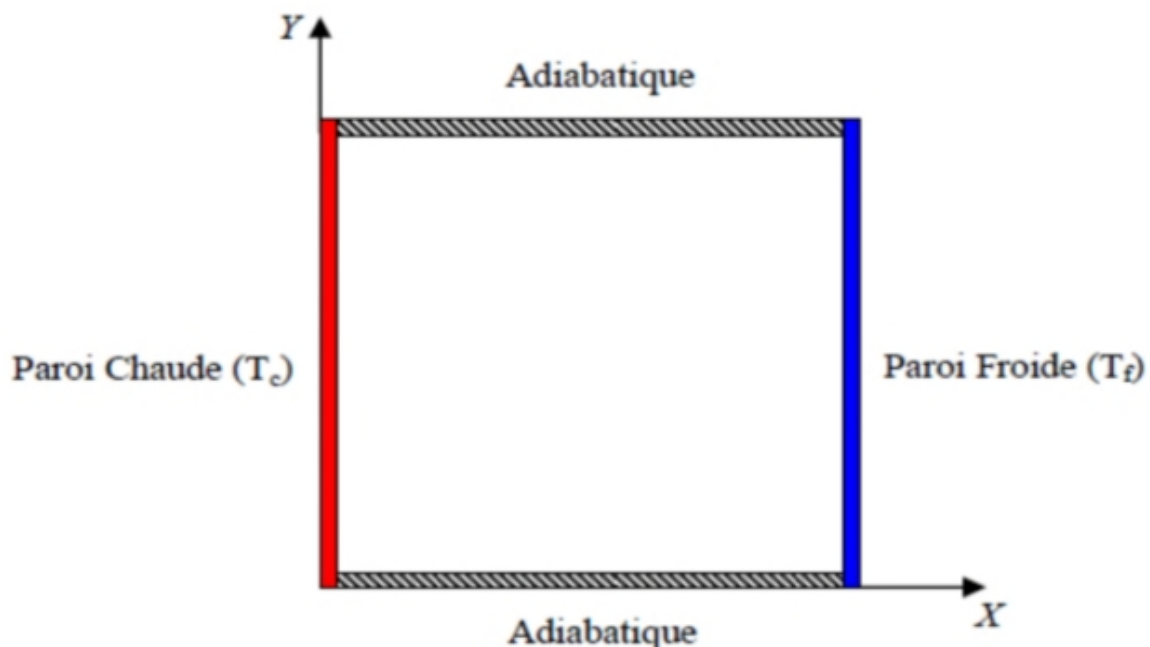
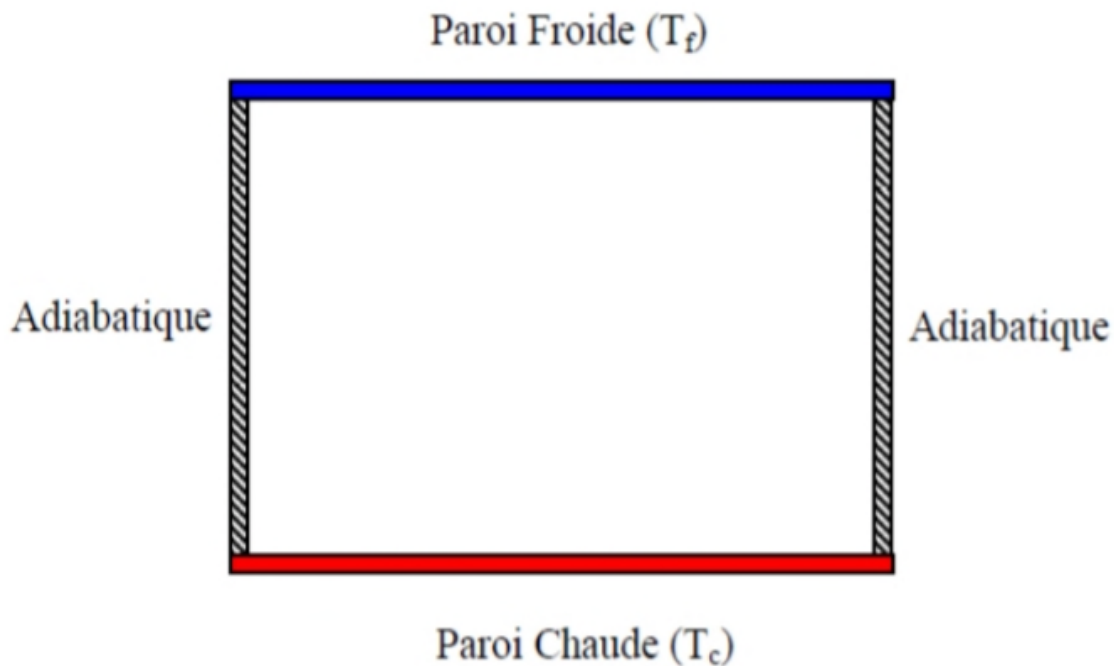


Figure 1-4 : Convection dont le gradient de température est horizontal [15]

1.3.5.2-Enceinte avec gradient verticale de température :

Dans ce type de configuration, l'enceinte est chauffée par le bas et refroidie par le haut, elle correspond à la configuration de la convection de Rayleigh-Bénard et étudie la stabilité et le mouvement d'un fluide confiné entre deux plaques qui sont maintenues à des températures uniformes et distinctes. [15]



**Figure 1-5 : Convection dont le gradient de température est vertical [15]
(Convection de Rayleigh-Bénard)**

1.4-Convection de Rayleigh Bénard

L'expérience de Rayleigh-Bénard correspond à l'état instable dans lequel se trouve une couche de fluide dilatable, couche confinée entre deux plans rigides horizontaux, d'épaisseur H et soumise à un écart de température ΔT . Au repos, le fluide est stable, lorsque ΔT dépasse la valeur critique ΔT_c la structure devient instable et des mouvements naissent à l'intérieur du fluide. Ces mouvements augmentent l'échange de la chaleur bien au-delà de l'échange thermique par simple conduction. C'est-à-dire qu'à la conduction vient s'ajouter un flux thermique convectif : les particules du fluide en mouvement transportent de la chaleur en l'évacuant autour d'elles vers d'autres particules plus froides, puis vers l'extérieur du fluide. L'exemple le plus simple de ce phénomène est celui de l'eau que l'on fait bouillir dans une casserole sur une plaque chauffante : au voisinage de celle-ci, le fluide se réchauffe, devient plus léger et se met à monter sous l'effet des forces d'Archimède, tandis qu'à la surface, au contact de l'air, il se refroidit, devient plus lourd et se met à descendre. [2]

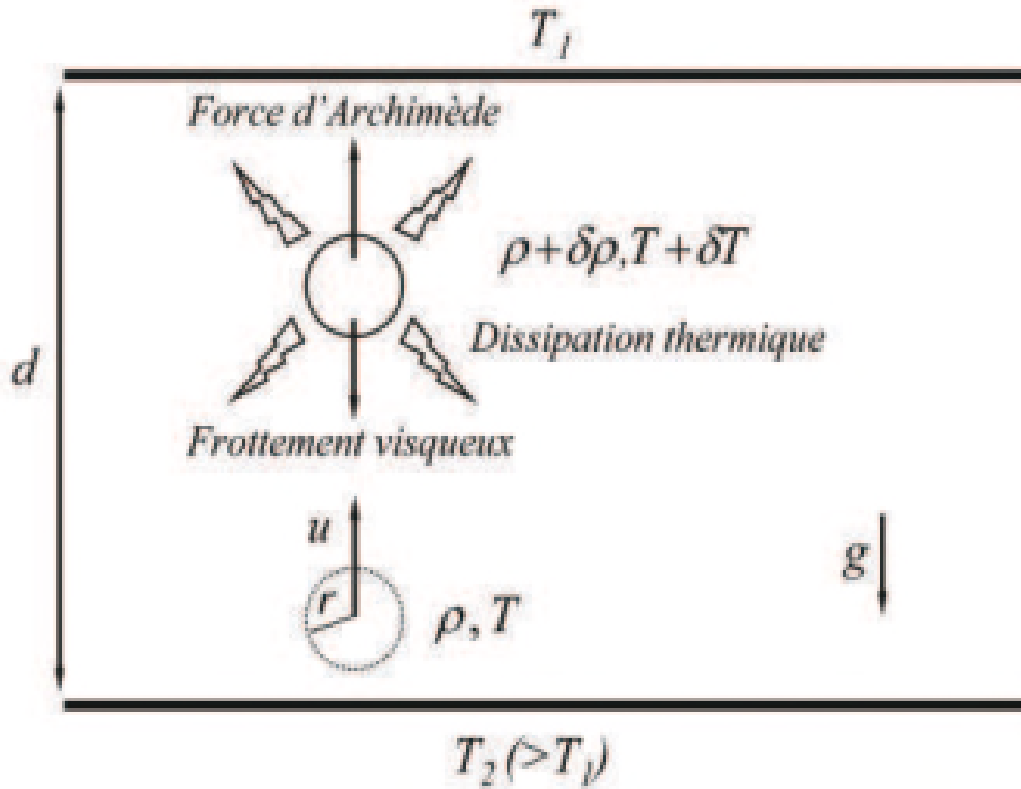
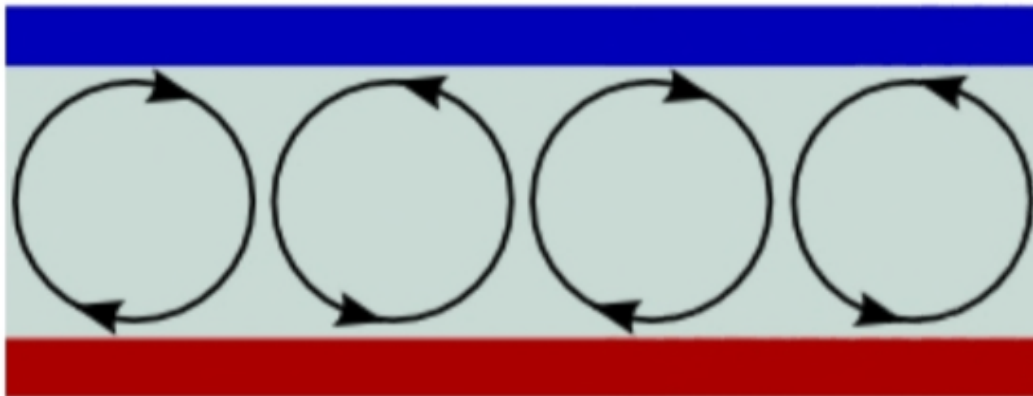


Figure 1-6 : Mécanisme physique de la convection de Rayleigh-Bénard [2]

T (froid)



T (chaud)

Figure 1-7 : Rouleaux convectifs de Bénard [13]

1.5-Nombres sans dimensions

Les nombres sans dimension sont obtenus par le rapport de grandeurs ayant une même dimension. Ainsi la densité d'une substance, étant le rapport de la masse volumique de cette substance sur la masse volumique de l'eau, est un nombre sans dimension. Ils sont d'un usage très courant dans la description des phénomènes thermiques ou hydrauliques. Le plus emblématique d'entre eux est sans doute le nombre de Reynolds. Ils sont utilisés pour caractériser un état physique indépendamment de la taille de l'espace sur lequel il est observé. Ceci est particulièrement utile pour extrapoler les observations faites sur maquettes.

Les nombres sans dimension ne doivent pas être confondus avec des constantes.

Etant sans dimension, ils sont par conséquent aussi sans unité, ce qui fait que leur valeur reste inchangée quel que soit le système d'unité utilisé. Attention cependant il est important que numérateur et dénominateur de l'expression du nombre sans dimension soient dans le même système d'unité. [16]

1.6-Dimension d'une grandeur

Une grandeur physique peut être une longueur, une masse, un temps, une vitesse, une pression. La dimension d'une grandeur physique exprime le type d'information à laquelle il se rapporte. La grandeur physique est, elle-même, constituée d'une valeur et d'une unité. [16]

Certaines dimensions sont la combinaison d'autres dimensions ; une vitesse est une longueur divisée par un temps.

Il existe sept dimensions de base à partir desquelles on peut définir toutes les dimensions des grandeurs physiques :

- longueur (L)
- masse (M)
- temps, durée (T)
- intensité électrique (I)
- température (θ)
- quantité de matière (N)
- intensité lumineuse (J)

La dimension d'une grandeur peut toujours être exprimée sous la forme :

$$\text{Dim} = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d \cdot \theta^e \cdot N^f \cdot J^g$$

1.6.1-Nombre de Prandtl

C'est le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et celle de la chaleur (diffusivité thermique). Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes diffusion thermique et de diffusion visqueuse dans un fluide et s'écrit :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.4})$$

Avec :

ν : La viscosité cinématique du fluide.

α : La diffusivité thermique.

Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible indique que conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'influence sur le profil de température.[1]

1.6.2-Nombre de Grashof

Ce nombre adimensionnel correspond au rapport des forces de gravité (poussée d'Archimède (force motrice)) sur les forces visqueuses (forces résistives). Il est utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. [1]

On définit le nombre de Grashof de la manière suivante :

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T h^3}{\nu^2} \quad (I.5)$$

g: L'accélération de la pesanteur.

β : Le coefficient de dilatation thermique isobare ($\beta = 1/T$ pour les gaz parfait).

ΔT : La différence de température ($T_c - T_f$)

h: Longueur caractéristique.

1.6.3-Nombre de Rayleigh

C'est le produit du nombre de Grashof et du nombre de Prandtl. Caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 1708, le transfert s'effectue essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle. Le nombre de Rayleigh « Ra » est le paramètre de contrôle de la convection thermique. Plus le nombre de Rayleigh est grand, plus la convection est intense. [1]

On le définit de la manière suivante :

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \beta \Delta T h^3}{\alpha \nu} \quad (I.6)$$

1.6.4-Nombre de Nusselt

C'est le rapport entre le flux convectif et le flux conductif à travers une interface. Si le nombre de Nusselt tendra vers 1 la conduction est le mode de transfert dominant et si le nombre de Nusselt tendra vers $+\infty$ l'influence de la convection est importante. [1]

Le nombre de Nusselt s'écrit comme :

$$Nu = \frac{Hh}{\lambda} \quad (I.7)$$

H : Coefficient de transfert thermique.

λ : Conductivité thermique.

h: Longueur caractéristique.

Aussi, on peut l'écrire : $Nu = f(Gr, Pr)$ ou $Nu = f(Ra, Pr)$

1.6.5-Nombre de Péclet

Le nombre de Péclet est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique, il représente le rapport du transfert par convection et du transport par diffusion thermique, il est équivalent au produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl. [17]

$$Pe = Ra \times Pr \quad (I.8)$$

1.6.6-Nombre de Richardson

Le nombre de Richardson est un nombre sans dimension utilisé notamment en thermodynamique, il a été développé par Lewis Fry Richardson, physicien et mathématicien anglais. Il s'agit du rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle de fluide et son énergie cinétique. [18]

$$Ri = \frac{\text{energie potentielle}}{\text{energie cinétique}}$$

1.6.7-Nombre de Reynolds

C'est un nombre adimensionnel utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent). Ce nombre représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. [19]

On le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{u h}{\nu} \quad (I.9)$$

Avec :

- u : vitesse caractéristique du fluide [m/s]
- h : dimension caractéristique [m]
- ν : viscosité cinématique du fluide [m²/s]

$$\text{Avec : } \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ρ : Masse volumique [kg/m³]

μ : viscosité dynamique du fluide [pa.s] ou [kg/m.s]

1.7-Régimes d'écoulements

Tous les fluides ne s'écoulent pas de la même manière. On distingue deux régimes d'écoulement, le régime laminaire et le régime turbulent.

1.7.1-Régime laminaire

Pour la convection naturelle verticale, le régime laminaire existe dès qu'il y a un écart de température. En revanche, pour la convection naturelle horizontale, le régime laminaire est déclenché par un écart de température ou une hauteur de fluide suffisant, correspondant à un nombre de Rayleigh critique égal à 1708. En dessous de cette valeur critique, le fluide n'est pas en mouvement, le transfert de chaleur est conductif et le nombre de Nusselt est égal à 1. Les lignes de courant restent côte à côte. Le transfert de quantité de mouvement et de chaleur entre deux lignes de courant adjacentes est uniquement contrôlé par l'effet de viscosité et de diffusivité du fluide. [1]

1.7.2-Régime Turbulent

Etat d'écoulement d'un fluide, il se caractérise par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles, les lignes de courant s'entrelacent de manière irrégulière. Les particules de fluide adoptent des mouvements fluctuants autour d'un mouvement moyen dans une direction irrégulière. Il coexiste des structures turbulentes de tailles variables et constamment évolutives. Pour un écoulement donné, les dimensions de ces tourbillons sont comprises entre deux bornes : au-delà d'une certaine taille, un tourbillon perd son individualité et se trouve noyé dans l'écoulement général en delà d'une taille minimale, sa quantité de mouvement devient insuffisante pour assurer sa survie, face aux effets de la viscosité, qui tendent à homogénéiser l'écoulement. Chaque tourbillon franchit successivement divers échelons de la plus grande à la plus petite taille, en se scindant à chaque étape en plusieurs tourbillons plus petits et en leur partageant son énergie cinétique. La diffusion moléculaire est ainsi supplantée par la diffusion turbulente. [1]

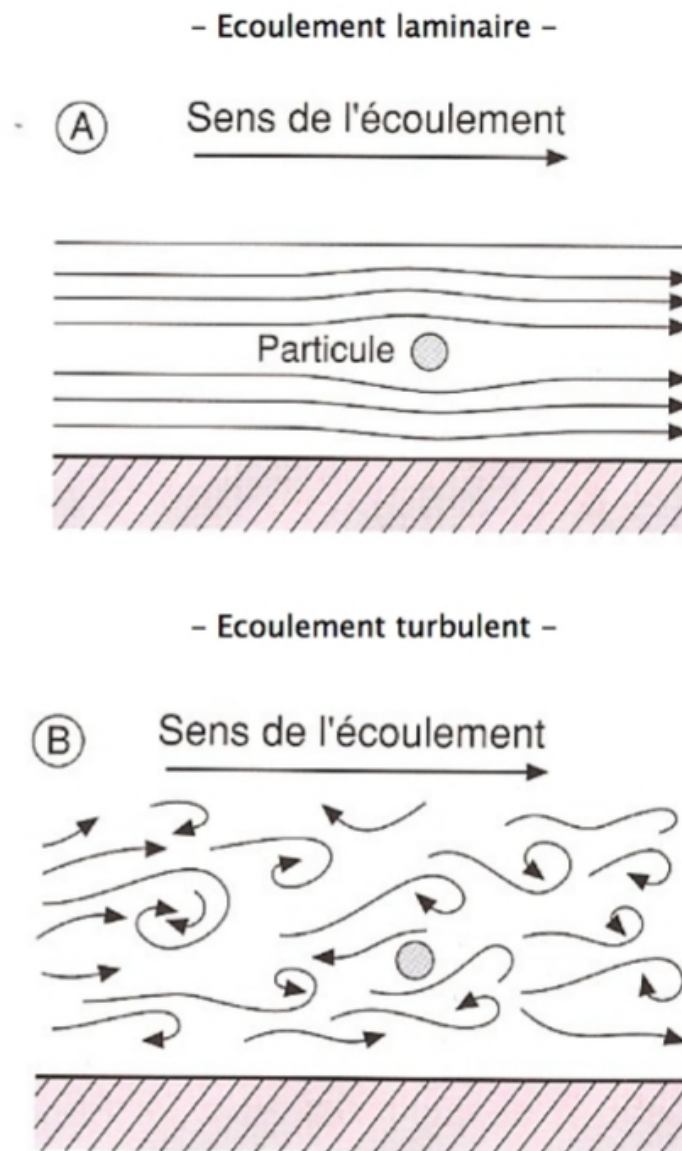


Figure 1-8 : Les régimes d'écoulement laminaire et turbulent [1]

1.8-Approximation de Boussinesq

L'approximation s'énonce comme suit : « ... Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser.

De là, résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci ... » [20]

L'approximation de Boussinesq revient en fait à traiter la densité comme constante partout sauf dans le terme de gravité. Depuis Cette hypothèse est utilisée dans les travaux traitant la convection naturelle dans les fluides.

La modélisation de la convection naturelle est effectuée en considérant valide l'approximation de Boussinesq. Cette approximation est faite sous les hypothèses suivantes . La masse volumique du fluide est constante, sauf dans le terme de la poussée d'Archimède et ne dépend que des variations de température (l'influence des variations de pression sur la masse volumique est négligée).

- . Les autres propriétés thermo physiques du fluide sont constantes.
- . La dissipation visqueuse du fluide est supposée négligeable. [1]

De cette manière, le terme relatif à la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{I.10})$$

Où :

ρ_0 : La masse volumique de référence ;

T_0 : La température de référence

β : le coefficient de dilatation thermique isobare

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les fondements de la dynamique des fluides qui se base sur trois équations qui sont : équations de conservation de masse, conservation de quantité de mouvement et conservation de l'énergie.

Nous avons ensuite défini le transfert thermique et son utilisation dans de nombreux domaines et qu'il y a trois modes de transfert : la conduction, le rayonnement et la convection. Dans notre travail on s'intéresse à la convection qui est le mécanisme le plus important dans le transfert d'énergie, il ya trois types de convection : convection naturelle, forcée et mixte. On a aussi montré que la convection de Rayleigh Bénard apparait quand une couche de fluide est soumise à un gradient de température quand ce dernier dépasse un certain seuil, le mouvement des particules induit une déstabilisation du fluide sous forme de rouleaux thermoconvectifs appelé aussi cellules de Bénard, ces mouvements sont donnés par des équations et pour les simplifier, on utilise l'approximation de Boussinesq.

On a aussi vu l'utilité de dimensionner les équations dans la mécanique des fluides et on a cité quelques nombres adimensionnés (Prandtl, Nusselt, Reynolds...).

CHAPITRE 2 : FORMULATION MATHÉMATIQUE

II.1- Position du problème

On considère un fluide newtonien et incompressible, maintenu entre deux plaques parallèles. Les parois sont soumises à des températures, chaude pour la plaque inférieure et froide pour la plaque supérieure. Ces températures sont de type sinusoïdal.

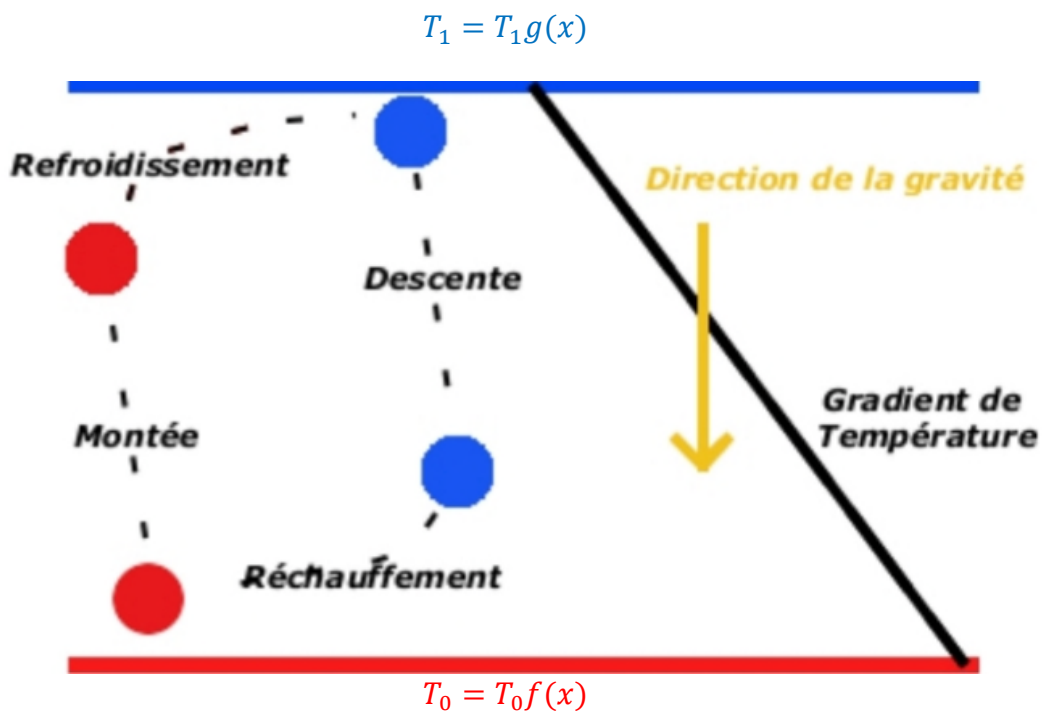


Figure II-1 : Convection Naturelle [9]

Les particules en contact avec la paroi inférieure seront chauffées, elles se dilatent, deviennent moins denses et donc elles se mettent en mouvement spontané vers le haut par effet de la poussée d'Archimède, une fois que ces particules sont en contact avec la paroi supérieure, la gravité rendra le fluide plus froid et plus lourd au niveau de la plaque supérieure mais la force visqueuse dans le fluide s'y oppose. C'est l'équilibre entre ces deux forces qui détermine si la convection se produira ou non. Le caractère de l'écoulement résultant dépendra de type de conditions aux limites imposées. Si le gradient de température et donc le gradient de densité est suffisamment grand pour que les forces gravitationnelles vont dominer et l'instabilité va se produire. L'instabilité de l'écoulement qui se produit sera examinée dans cette étude par des méthodes analytiques et numériques.

II.2- Equations générales régissant l'évolution d'un fluide incompressible

Chaque phénomène physique est souvent formulé par des équations mathématiques (Équations différentielles ordinaires ou équations aux dérivées partielles) qui représentent une

modélisation de ce phénomène. Une modélisation doit obligatoirement exprimer le comportement du phénomène dans l'espace et dans le temps.

La convection naturelle engendrée par des transferts de chaleur au voisinage des surfaces chauffées a été largement étudiée tant au niveau théorique qu'expérimental. En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continu, on peut utiliser les lois classiques de conservation qui sont :

Loi de conservation de la masse ou l'équation de continuité

Loi de conservation de la quantité de mouvement, deuxième loi de Newton

Loi de conservation d'énergie, premier principe de la thermodynamique

II.2.1- Equation de continuité

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Avec :

u : Le vecteur de vitesse.

ρ : Masse volumique.

Pour un fluide incompressible, $\rho = \text{constante} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

L'équation (II.1) s'écrit alors :

$$\nabla u = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.2.1- Equation de conservation de quantité de mouvement

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide lors de son mouvement et les causes qui le produisent. Il indique que le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Avec:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{u \text{ grad. } u}$$

τ_{ij} : Tenseur des contraintes :

- Contraintes visqueuses : $\mu \nabla^2 u$

- Contraintes normales de pression : $-\nabla P$

Pour un fluide incompressible, on a :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P_i + \rho g + \mu \nabla^2 u \quad (\text{II.3})$$

Avec :

P : pression

μ : viscosité dynamique

II.2.3- Equation de conservation d'énergie

L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla Q - P\nabla u + \varphi \quad (\text{II.4})$$

Avec :

φ : Taux de dissipation par viscosité

e : densité d'énergie thermique

Q : flux thermique

Pour un fluide incompressible on a : $\varphi = 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$

ε_{ij} : Tenseur des déformations : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$

Les équations (2),(3) et (4) décrit le comportement et les propriétés d'un fluide incompressible et ce sont les points de départ pour l'analyse de ce mémoire, dans ce qui suit les divers approximations seront appliquer pour simplifier ces équations

II.3- Approximation de Boussinesq

L'idée essentielle dans l'approximation de Boussinesq est de simplifier l'équation de Navier-Stokes en posant la masse volumique constante partout sauf dans le terme de gravité, l'approximation sert aussi à simplifier l'équation d'énergie en négligeant le taux de dissipation thermique

II.4- Introduire des perturbations

II.4.1- Equations de Navier-Stokes

On suppose que les variations de la densité dans le fluide sont faibles par rapport aux gradients des vitesses

$$\text{On a } \nabla u = 0 \quad (\text{II.5})$$

La pression et la densité sont décomposées à un champ d'équilibre hydrostatique plus une perturbation :

$$P = P_0(y) + P'(x, t)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, t)$$

P_0, ρ_0 : sont les champs de référence dans le cas hydrostatique $U=0$.

L'équation de Navier Stokes (II.3) donne :

$$\nabla P_0 = \rho_0 g \quad (\text{II.6})$$

En appliquant l'approximation de Boussinesq et en introduisant les perturbations l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 u \quad (\text{II.7})$$

Avec : $\nu = \mu/\rho_0$

Pour des valeurs faibles de $\frac{\rho'}{\rho_0}$, on a $\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{Du}{Dt} \approx \frac{Du}{Dt}$

L'équation (II.7) s'écrit finalement :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 u \quad (\text{II.8})$$

II.4.2 : Equation d'énergie

On a $\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla Q - P \nabla u + \varphi \quad (\text{II.9})$

Lorsque l'approximation de Boussinesq est valide, le taux de dissipation par viscosité φ est négligeable dans l'équation d'énergie. L'hypothèse qu'on a utilisé pour de faibles variations de densité n'est pas applicable dans l'équation d'énergie.

En multipliant l'équation de conservation de masse par P on obtient :

On a $-\rho \nabla u = \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$

Et $\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{II.10})$

Avec $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$ et $P = \rho R T$ où $R = c_p - c_v$

On considère que les particules fluides n'interagissent pas entre elles, pour cela on utilise l'approximation des gaz parfaits.

L'équation (II.9) s'écrit alors :

$$-P \nabla u \approx \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \frac{DT}{Dt} = -\frac{P}{T} \frac{DT}{Dt} = -\rho (c_p - c_v) \frac{DT}{Dt}$$

Sachant que, pour un gaz parfait on a : $e = c_v T$

Et $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla Q$

En utilisant la loi de fourrier : $Q = -\lambda \nabla T$

On obtient finalement :

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \text{ Avec : } \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{II.11})$$

II.5- Formulation du problème

On considère un fluide incompressible de masse volumique (ρ), viscosité cinématique (μ), diffusivité thermique (α) et coefficient de dilatation thermique (β) maintenu entre deux plaques horizontales parallèles d'épaisseur (H) imposées a des températures de type

sinusoïdales $T_c=T_0f(x)$ sur la plaque inferieure et $T_f=T_1g(x)$ sur la plaque supérieure, la différence de température entre ces deux plaques va produire une instabilité.

II.5.1- Introduction

L’objectif de la théorie de la stabilité est d’examiner comment les instabilités peuvent être identifiées puis éventuellement suivis et contrôlés

II.5.2- Equations du problème

Les équations qui régissent le problème sont :

Equation de continuité :

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{II.12}$$

Equation de Navier-Stockes :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 u \tag{II.13}$$

(Equation d’énergie :

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \tag{II.14}$$

Avec l’approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T-T_0)) \tag{II.15}$$

Conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{lll} T(x, t)|_{y=0}=T_0 f(x) & -\infty < x \leq +\infty & t>0 \\ T(x,t)|_{y=h}=T_1g(x) & -\infty < x < +\infty & t>0 \\ u(x,t)|_{y=0}=u(x,t)|_{y=h}=0 & -\infty < x \leq +\infty & t>0 \end{array} \right. \tag{II.16}$$

Condition initiale :

L’état de base la formule de température est :

$$T(y)=\frac{T_1g(x)-T_0f(x)}{H} y + T_0f(x)$$

Et la formule de la vitesse:

$$u(x,t)|_{t=0}=0$$

II.5.3- Equations adimensionnelles

Cette technique consiste à faire apparaître des groupements de nombres qui n’ont pas de dimension dans les équations. Elle est très utilisée en mécanique des fluides, car les équations à résoudre sont complexes (dérivées partielles, non-linéarité, ...). Selon la valeur des groupements, il est possible de déterminer les effets prépondérants dans le phénomène traité et ainsi de ne résoudre que les parties correspondantes dans les équations.

Les variables adimensionnelles sont :

$$\tilde{P} = \frac{P}{U^2 \rho_0 \alpha} \quad \tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \tilde{x} = \frac{x}{h} \quad \tilde{t} = t \frac{U}{h} \quad \text{et} \quad \tilde{T} = \frac{T - T_0}{T_0 - T_1}$$

On a :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Ri} = \frac{gh}{U^2} \quad \text{Re} = \frac{Uh}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{Uh}{\alpha}$$

Pr, Ri, Re et Pe sont respectivement les nombre sans dimension : Prandtl, Richardson, Reynolds et Péclet, utilisé pour calculer et analyser la stabilité.

En posant $U_\alpha = \frac{\alpha}{h}$

Les équations (II.14) et (II.15) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} &= -\tilde{\nabla}^2 \tilde{P} + \text{Ra} \tilde{T} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} \\ \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} &= \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \end{aligned} \right. \quad (\text{II.18})$$

Avec : $\text{Ra} = \frac{\beta \Delta T g h^3}{\alpha \nu}$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=0} &= \frac{T_0}{T_1 - T_0} [f(x) - 1] \\ \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=1} &= \frac{T_1 g(x) - T_0}{T_1 - T_0} \quad (\text{II.19}) \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=0} &= \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=1} = 0 \end{aligned} \right.$$

II.6- Analyse de la stabilité bidimensionnelle

II.6.1- Analyse de la stabilité linéaire méthode des modes normaux

L'idée est d'introduire une perturbation infinitésimale aux équations de base afin d'examiner comment l'amplitude croît ou décroît avec le temps. Sachant que la perturbation est faible, les équations peuvent être linéaires pour faciliter l'analyse.

Dans la méthode des modes normaux, la perturbation est supposée sinusoïdale et est donnée sous la forme

$$f = \tilde{f}(y) e^{ikx + \sigma t}$$

f est une perturbation arbitraire avec une amplitude complexe \tilde{f} , le nombre d'onde k dans la direction x est un taux de croissance σ . L'évolution dans le temps de la solution dépendra seulement du signe de la partie réelle de σ noté σ_r .

- Lorsque $\sigma_r > 0$, la perturbation croît dans le temps et la solution est instable
- Pour $\sigma_r < 0$, la perturbation décroît dans le temps et on aboutit à une solution stable

- Lorsque $\sigma_r=0$, Nous obtenons la courbe de marginale qui est la frontière entre les domaines stable et instable.

La linéarité des équations permet d'exprimer toutes les perturbations possibles comme une superposition de ces perturbations.

Pour obtenir les équations de stabilité, nous allons introduire la fonction de courant et la vorticité dans le système d'équations (II.18) On élimine, dans un premier temps, la pression en introduisant la vorticité. Après la linéarisation des équations obtenues, on introduit la fonction du courant.

II.6.2- Elimination de la pression dans les équations

Nous n'avons pas d'information sur la distribution de la pression dans le fluide. On élimine alors le gradient de la pression dans l'équation (II.18)

Utilisant l'identité vectorielle :

$$u \cdot \nabla u = \nabla \left(\frac{u \cdot u}{2} \right) + \omega \times u$$

où $\omega = \nabla \times u$ est le vecteur vorticité

L'équation (II.18) est réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u \cdot u}{2} \right) + \omega \times u \right] = -\nabla p + Ra T_{ey} + \nabla^2 u \quad (II.20)$$

En prenant le rotationnel et sachant que $\nabla \times (\nabla u) = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times u) + \nabla \times \omega \times u \right] = \nabla \times Ra T_{ey} + \nabla^2 (\nabla \times u) \quad (II.21)$$

Sachant que :

$$\nabla \times \omega \times u = u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u \text{ et } \omega = \nabla \times u$$

D'où

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u \right] = \nabla \times Ra T_{ey} + \nabla^2 \omega \quad (II.22)$$

Dans le cas bidimensionnel, on a :

$$T = T(x, y, t) \text{ et } u = u_x(x, y, t)e_x + u_y(x, y, t)e_y$$

D'où

$$\omega = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) e_z = \omega e_z$$

Sachant que :

$$\omega \cdot \nabla u = 0 \text{ et } \nabla \times T e_y = \frac{\partial T}{\partial x} e_z$$

On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega \right] = Ra \frac{\partial T}{\partial x} + \nabla^2 \omega \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \nabla^2 T \end{array} \right. \quad (\text{II.23})$$

II.6.3- Linéarisation

On considère une distribution infinitésimale u' , T' et ω' à partir de l'état d'équilibre

$$\tilde{u} = 0, \tilde{T} = \tilde{T}(y) \text{ et } \tilde{\omega} = 0.$$

Le champ de température à l'équilibre $\tilde{T}(y)$ est obtenu de (II.23) avec $u=0$ et $\omega = 0$, ce qui donne :

$$\nabla^2 \tilde{T}(y) = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Sachant que $T(0)=T_0$ et $T(1)=T_1$, on aura :

$$\tilde{T}(y) = \frac{T(y)-T_0}{T_1-T_0} \quad (\text{II.25})$$

En posant $T = \tilde{T}(y) + T'$, $u = u'$ et $\omega = \omega'$ dans (II.23) et en faisant la linéarisation, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, les équations de perturbation sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \omega'}{\partial t} = Ra \frac{\partial T'}{\partial x} + \nabla^2 \omega' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + u' \cdot \nabla T = \nabla^2 T' \end{array} \right. \quad (\text{II.26})$$

II.6.4- Fonction du courant

Nous avons trois inconnues (ω' , u' et T') pour trois équations (II.26).

L'équation de continuité $\nabla u' = 0$ permet de réduire le nombre d'inconnues en introduisant la fonction du courant Ψ' définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \\ u'_y = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

Qui remplace l'équation de continuité

La vorticité s'écrit alors : $\omega = -\nabla^2\Psi$

Le système d'équations (II.26) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2\Psi' = -Ra \frac{\partial T'}{\partial x} + \nabla^2(\nabla^2\Psi') \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \nabla^2 T' \end{cases} \quad (II.28)$$

Les conditions aux limites sont transformées sous la forme :

$$\begin{cases} u_x(0) = u_y(0) = \frac{\partial u_y}{\partial y}(0) \text{ Implique que } \frac{\partial \Psi}{\partial y}(0)=0 \\ u_x(1) = u_y(1) = \frac{\partial u_y}{\partial y}(1)=0 \quad \text{ Implique que } \frac{\partial \Psi}{\partial y}(1)=0 \\ T(0)=T_0f(x), T(1)=T_1g(x), T'=T-\tilde{T} \text{ Implique que } T'(0)=T'(1)=0 \end{cases}$$

II.6.5- Problèmes aux valeurs propres

Les  quations (II.28) sont linéaires et les coefficients sont indépendants de x et t. On pose T' et Ψ' sous la forme :

$$\Psi' = \tilde{\Psi}(y)e^{ikx+\sigma t}$$

$$T' = \tilde{T}(y)e^{ikx+\sigma t}$$

$\tilde{\Psi}$ et \tilde{T} sont les amplitudes complexes de Ψ' et T'.

Le système d'équations (II.28) est r ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \sigma \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{\Psi} = -Raik\tilde{T} + \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \\ \sigma\tilde{T} - ik\tilde{\Psi} = \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{T} \end{cases} \quad (II.29)$$

O  σ et k sont réels.

On considère le cas limite σ = 0. Ce cas correspond aux équations :

$$\begin{cases} 0 = -Raik\tilde{T} + \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \end{cases} \quad (II.30)$$

$$-ik\tilde{\Psi} = \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{T}$$

On extrait la fonction \tilde{T} de la première équation de (II.29) et on la remplace dans la deuxième:

$$-ik\tilde{\Psi} = \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \frac{1}{Raik} \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \tag{II.31}$$

Donc

$$k^2\tilde{\Psi} = \frac{1}{Ra} \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^3 \Psi \tag{II.32}$$

C'est un problème aux valeurs propres dont la fonction propre est $\tilde{\Psi}$. Les valeurs propres pour un k donné dépendent de nombre de Rayleigh Ra.

Pour avoir la solution, les conditions aux limites sont transformées tel que :

$$T'(0) = T'(1) = 0 \quad \text{Implique que} \quad \tilde{T}(0) = \tilde{T}(1) = 0 \tag{II.33}$$

$$\frac{d\Psi}{dy}(0) = \frac{d\Psi}{dy}(1) = 0 \quad \text{Implique que} \quad \frac{d\tilde{\Psi}}{dy}(0) = \frac{d\tilde{\Psi}}{dy}(1) = 0 \tag{II.34}$$

Les deux dernières conditions aux limites sont trouvées en considérant le système d'équation (II.30) et en utilisant l'équation (II.33), ce qui donne :

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \Psi(0) = \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \Psi(1) = 0 \tag{II.35}$$

II.6.6- Solution du problème aux valeurs propres

L'équation (II.32) est une EDO linéaire et homogène avec des coefficients constants.

On pose : $\tilde{\Psi}(y) = e^{qy}$

Avec : q=constante

L'équation (II.32) s'écrit alors :

$$k^2 + \frac{1}{Ra} [q^2 - k^2]^3 = 0 \tag{II.36}$$

Qui admet six (06) racines :

$$\left\{ \begin{array}{l} iq_0 = \pm ik \left(-1 + \left(\frac{Ra}{k^4} \right)^{1/3} \right)^{1/2} \\ q_1 = \pm k \left(1 + \left(\frac{Ra}{k^4} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^{1/2} \\ q_2 = \pm k \left(1 + \left(\frac{Ra}{k^4} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^{1/2} \end{array} \right. \tag{II.37}$$

La solution est s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\Psi}(y) = Ae^{yq_0} + Be^{-yq_0} + Ce^{yq_1} + De^{-yq_1} + Ee^{yq_2} + Fe^{-yq_2} \quad (\text{II.38})$$

Où A B C D E et F sont des constantes

Les conditions aux limites (II.33) et (II.35) implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}(0) = A + B + C + D + E + F = 0 \\ \tilde{\Psi}(1) = Ae^{q_0} + Be^{-q_0} + Ce^{q_1} + De^{-q_1} + Ee^{q_2} + Fe^{-q_2} = 0 \\ \tilde{\Psi}'(0) = Aq_0 - Bq_0 + Cq_1 - Dq_1 + Eq_2 - Fq_2 = 0 \\ \tilde{\Psi}'(1) = Aq_0e^{q_0} - Bq_0e^{-q_0} + Cq_1e^{q_1} - Dq_1e^{-q_1} + Eq_2e^{q_2} - Fq_2e^{-q_2} = 0 \\ \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi}(0) = 0 \\ \left[\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi}(1) = 0 \end{array} \right.$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle suivant : $[M] \cdot \{b\} = \{0\}$

D'où $M^T =$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & e^{q_0} & q_0 & q_0 e^{q_0} & (q_0^2 - k^2)^2 & (q_0^2 - k^2)^2 e^{q_0} \\ 1 & e^{-q_0} & -q_0 & -q_0 e^{-q_0} & (q_0^2 - k^2)^2 & (q_0^2 - k^2)^2 e^{-q_0} \\ 1 & e^{q_1} & q_1 & q_1 e^{q_1} & (q_1^2 - k^2)^2 & (q_1^2 - k^2)^2 e^{q_1} \\ 1 & e^{-q_1} & -q_1 & -q_1 e^{-q_1} & (q_1^2 - k^2)^2 & (q_1^2 - k^2)^2 e^{-q_1} \\ 1 & e^{q_2} & & q_2 q_2 e^{q_2} & (q_2^2 - k^2)^2 (q_2^2 - k^2)^2 e^{q_2} & \\ 1 & e^{-q_2} & & -q_2 - q_2 e^{-q_2} & (q_2^2 - k^2)^2 (q_2^2 - k^2)^2 e^{-q_2} & \end{array} \right)$$

Et

$$b = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

E

F

Pour que ce système algébrique, linéaire et homogène, admette une solution non nulle, il faut et il suffit d'avoir $\text{Det}(M)=0$, ce qui permet d'avoir les valeurs propres et les modes propres du système. Lorsque k est fixe, la matrice M dépend uniquement de Ra

$$\text{Det}(M(Ra))|_k=0$$

II.7- Conclusion

Dans ce chapitre on a montré qu'un fluide en mouvement est donné par un système d'équations que nous avons simplifié en appliquant des hypothèses simplificatrices (approximation de Boussinesq et fluide incompressible) ensuite on a donné les conditions aux limites et on a défini l'état de base.

On a aussi utilisé les variables adimensionnelles obtenues à l'aide des grandeurs de références que nous avons choisies.

Puis on a perturbé l'état de base, on a écrit les équations aux perturbations, on a linéarisé le problème en éliminant le produit de deux perturbations, une fois que le problème est linéaire on a cherché les solutions sous forme de modes normaux

CHAPITRE III : MODELISATION NUMERIQUE

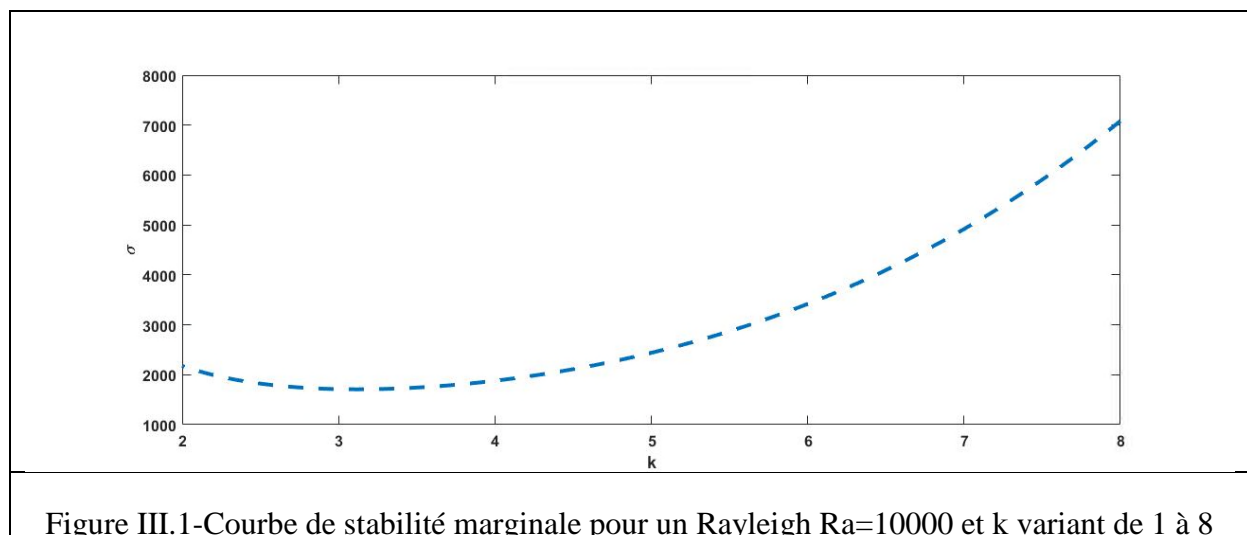
III.1 : Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé les équations qui régissent les instabilités de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles en présence d'un gradient de température de type sinusoïdale. Après élimination de la variable pression, nous avons introduit la fonction vorticité et la fonction du courant. Le système d'équations final est constitué de deux équations différentielles ordinaires dont la température et la fonction du courant sont couplées. Ce système d'équations complété avec les conditions aux limites s'écrit sous forme d'un système algébrique linéaire homogène. L'application des méthodes mathématiques destinées aux calculs des valeurs et vecteurs propres, nous ont permis d'avoir les courbes de stabilité marginale.

Les valeurs propres de notre système sont fonction du nombre d'onde k et de nombre de Rayleigh Ra . Ce dernier est relié au gradient de température entre les deux plaques (ΔT) ainsi qu'à la distance qui sépare ces dernières (H).

Dans ce qui suit, nous allons analyser les résultats obtenus numériquement

III.2 Analyse des résultats



Dans la figure III.1 on remarque la valeur minimale de σ dans la limite de stabilité est $\sigma=17020$ et k variant de 1 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tous les K avec $\sigma < 17020$

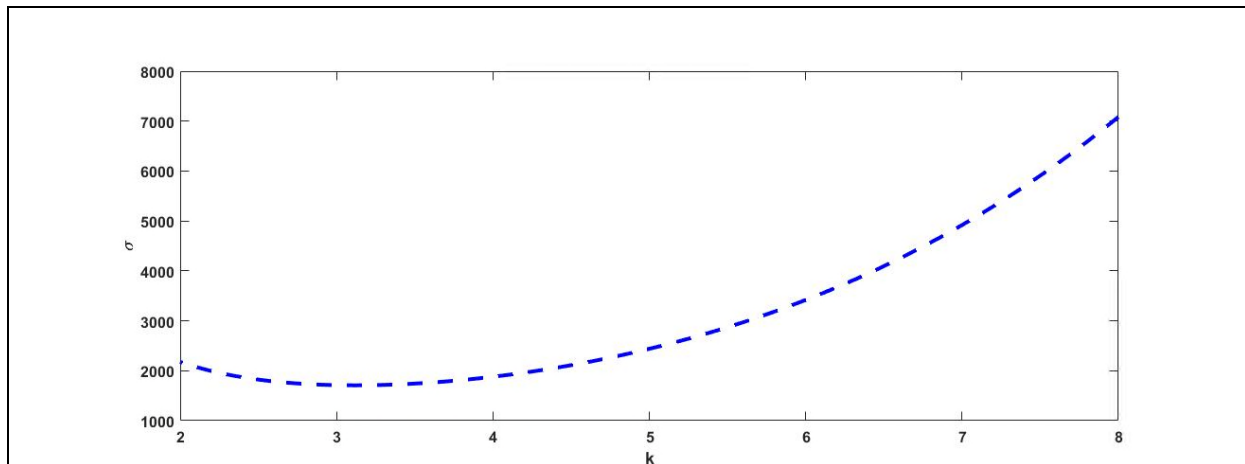


Figure III.2-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=15000$ et k variant de 1 à 8

Dans la figure III.2 on remarque que la zone de stabilité reste quasi constante, la valeur minimale de σ dans la limite de stabilité est $\sigma = 17020$ et k de 1 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tous les K avec $\sigma < 17020$

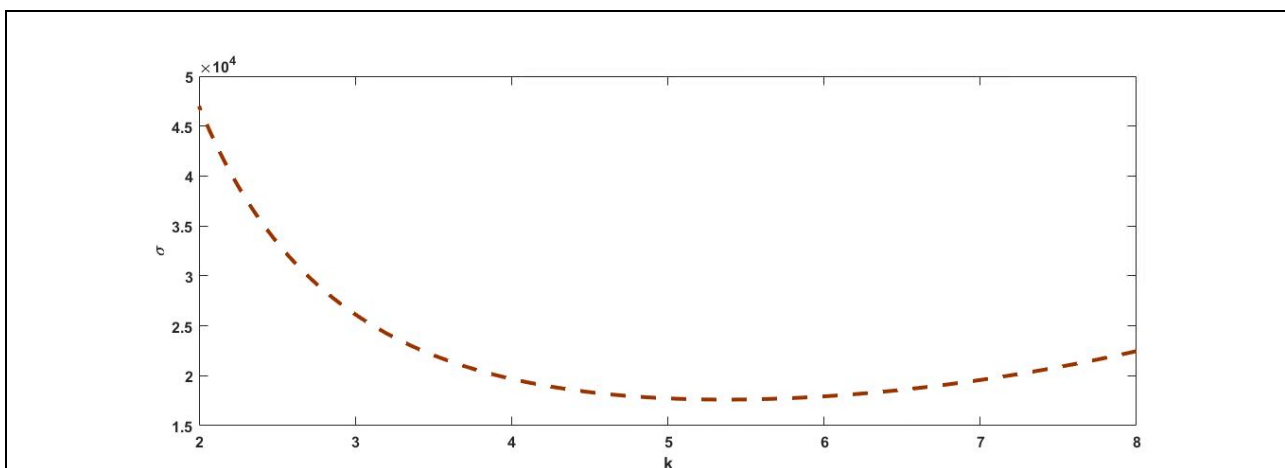


Figure III.3-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=20000$ et k variant de 1 à 8

Dans la figure III.3 on remarque la valeur minimale de σ dans la limite de stabilité est $\sigma = 20000$ et k variant de 1 à 8. Dans ce cas la zone de stabilité se réduit.

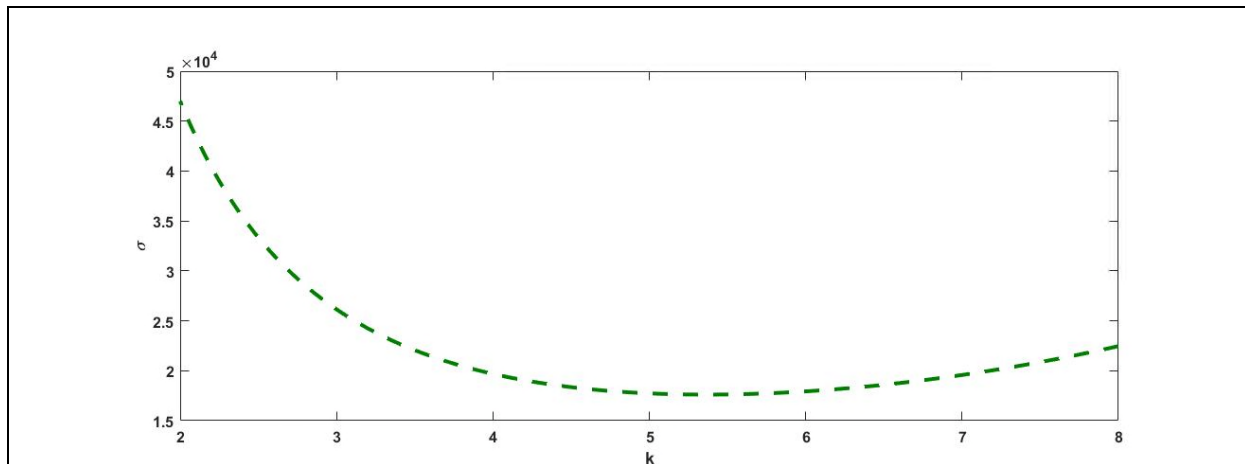


Figure III.4-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh $Ra=25000$ et k variant de 1 à 8

Dans la figure III.4 les zones de stabilité restent similaires à celles trouvées dans le cas de

$$\sigma = 20000$$

III.3 : Commentaire sur les courbes

A partir des 4 courbes on remarque qu'à chaque fois qu'on augmente le nombre de Rayleigh, la zone de l'instabilité augmente et la zone de la stabilité diminue.

$$\text{On a } Ra = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\alpha \nu}$$

On a $g = \text{constante}$ et $\alpha, \beta, \text{ et } \nu$ sont des propriétés d'un fluide quelconque cela veut dire que $Ra = \text{constante} \cdot \Delta T H^3$

Ce qui implique que le nombre de Rayleigh est proportionnel au gradient de température (ΔT) et à l'épaisseur entre les deux plaques (H)

III.4: Conclusion

Le comportement d'un fluide en générale dans le concept de Rayleigh Bénard est seulement gouverné par le nombre adimensionnel Rayleigh. Dans le cas de deux plaques plane différenciellement chauffée (gradient de température verticale), l'instabilité est indépendante des conditions aux limites imposées au champ de base (vitesse-température). Dans notre étude, le fait d'imposer des conditions aux limites dépendante de la variable transversale n'influent pas sur les instabilités développées. Ces instabilités dépendent essentiellement du nombre de Rayleigh. Ce dernier est lié à la différence de températures imposées aux frontières inférieure et supérieure. La zone stable se réduit lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh pour des nombres d'ondes élevés. Ceci implique une croissance d'instabilité pour des grands nombres d'ondes, ce qui est vérifié expérimentalement.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a mené une étude théorique et numérique de la convection de Rayleigh-Bénard d'où un fluide est compris entre deux plaques horizontales et parallèles d'épaisseur H , ce fluide est soumis à des températures de type sinusoïdales. Lorsque cette différence de température soit assez importante, les particules fluides situées à proximité de la paroi inférieure seront chauffées leurs masse volumique décroît et remonte vers la paroi supérieure sous l'effet de la poussée d'Archimède et redescend sous l'effet de la gravité, le mouvement de ces particules induit une déstabilisation sous forme de rouleaux thermo-convectifs appelés cellules de Bénard.

Un fluide en mouvement est généralement basé sur trois équations plus des conditions aux limites :

Equation de continuité

Equation de conservation de quantité de mouvement

Equation de conservation d'énergie

Ces équations seront simplifiées en utilisant certaine hypothèses (fluide incompressible et approximation de Boussinesq)

Une fois que l'état de base est définit, une perturbation doit être rajouté a fin de réécrire un nouveau système d'équations aux perturbations, puis linéariser le système en éliminant la pression et le produit de deux perturbations, introduire la fonction de vorticité et fonction du courant, enfin chercher les solutions sous forme de mode normaux.

On a un système algébrique, linéaire et homogène, afin de calculer le valeurs et les vecteurs propres on utilise des méthodes numérique a fin d'avoir les courbes de stabilité marginale.

Les courbes obtenues en fonctions du nombre de Rayleigh (Ra) et du nombre d'onde (k), la zone d'instabilité augmente avec le nombre de Rayleigh ce qui conclu que ce dernier est le moteur de l'instabilité et que les conditions aux limites imposés aux champs de base n'influent pas sur les instabilités développées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : BENYOUCEF Djamilia, études de la convection naturelle dans les enceintes à gradient de température pariétal horizontal et vertical, thèse de doctorat, Batna.
- [2] : ABDELALI Ahmed, (études expérimental des instabilités thermo convectives de Rayleigh-bénard dans les fluides viscoélastiques) thèse de doctorat
- [3] : projet de physique dans l'institut national des sciences appliquées Rouen «conception et réalisation de l'expérience de Rayleigh-Bénard-Marangoni »
- [4] : <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00240502/document> en 1 jan 1901
- [5] : le magazine philosophique et le journal des sciences de Londres, Edimbourg et Dublin sixième série 1916
- [6] : <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/projnum/content/2011-g4/la-convection-de-rayleigh-benard>
- [7] : <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/projnum/content/g21-2012/application-aux-instabilites-de-rayleigh-benard>
- [8] :Notion de mecanique des fluides (riadh ben hamouda)
- [9] : <http://ilm-perso.univ-lyon1.fr/~asmiguel/teaching/Thermodynamique/thermo10.pdf>
- [10] : <https://www.kartable.fr/ressources/physique-chimie/cours/les-transferts-thermiques-denergie/22746>
- [11] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique
- [12] : <https://cna.ca/fr/enjeux-et-politique/rayonnement/quest-ce-que-le-rayonnement/>
- [13] : <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/bei/beiep/content/g21/i-phenomene-convection>
- [14] : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Convection>
- [15] : LEBBIHI Saci, (refroidissement par convection naturelle d'une source de chaleur localisé au fond d'une enceinte remplie de nano fluide) thème fin d'étude master.
- [16] : <http://processs.free.fr/Pages/VersionMobile.php?page=3001>
- [17] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_P%C3%A9clet
- [18] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Richardson
- [19] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Reynolds
- [20] : <http://www.meteolafleche.com/boussinesqapproximation.html>

Résumé

Ce mémoire étudie la convection de Rayleigh Bénard, c'est-à-dire l'écoulement entre deux plaques horizontales parallèles où la plaque inférieure est chauffée et la plaque supérieure est refroidie. Les températures imposées sont de types sinusoïdaux, la variation de la densité due aux variations de la température donne naissance à un écoulement généré par la flottabilité. Ce mouvement est opposé par les forces visqueuses dans le fluide. L'équilibre entre ces forces détermine la nature de l'écoulement stable ou instable et le but de ce mémoire est de trouver une condition donnant cette limite ainsi qu'analyser d'autres aspects de l'écoulement.

L'analyse commence par les équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible et l'équation d'énergie dont l'approximation de Boussinesq est appliquée. En utilisant la linéarisation on obtient une condition de stabilité et uniquement avec un paramètre adimensionnel, appelé nombre de Rayleigh, pour un nombre d'onde k . ce résultat est confirmé pour être précis après une comparaison avec une simulation numérique. plus loin non linéaire bidimensionnel simulation est aussi performé pour analyser différents aspects de l'écoulement pour de différentes valeurs de nombre de Rayleigh.

Abstract

This report studies Rayleigh-Bénard convection, i.e. the flow between two horizontal parallel plates where the lower one is heated and the superior one is cooled. Imposed temperatures are sinusoidal the change in density due to temperature variations gives rise to a flow generated by buoyancy. This motion is opposed by the viscous forces in the fluid. The balance between these forces determines whether the flow is stable or not and the goal of this report is to find a condition giving this limit as well as analyzing other aspects of the flow. The starting point of the analysis is the incompressible Navier-Stokes equations and the thermal energy equation upon which the Boussinesq approximation is applied. Using linear stability analysis a condition for the stability is obtained depending solely on a no dimensional parameter, called the Rayleigh number, for a given wave number k . This result is confirmed to be accurate after comparison with numerical simulations using a spectral technique. Further non-linear two- and three-dimensional simulations are also performed to analyze different aspects of the flow for various values of the Rayleigh number.