

République algérienne et démocratique et populaire
Ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université A. MIRA de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire

Présenté par Mlle. HAMMOUM Hadjar

En vue de l'obtention du master en physique

Option : dynamique des fluides et énergétique

Thème

Analyse non linéaire de l'écoulement dans un canal de deux fluides viscoélastiques

Soutenue le 11/07/2019

Devant le jury composé de :

Mme. ZIANI Lynda	M.C.B à U.A.M Béjaia	Président
Mme. AMATOUSSE Nawel	Professeur à U.A.M Béjaia	Promoteur
Mr. Djama Amar	M.C.B à U.A.M Béjaia	Examineur

À ma chère maman

Remerciements

Tout d'abord, mes plus sincères remerciements vont à mes chers parents pour leurs soutiens et leurs encouragements. De plus je remercie mes chers frangins pour leurs motivations.

Je voudrais remercier en premier mon enseignante et encadrant madame Amatousse Nawel, professeur à l'université de Béjaia, pour son encouragement, sa compréhension, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à valoriser mon travail.

C'est un véritable honneur pour moi que madame Ziani Lynda, M.C.B à l'université de Béjaia préside le jury de ma soutenance, je la remercie fortement.

Je remercie également monsieur Djama Amar, M.C.B à l'université de Béjaia d'avoir accepté de juger mon travail. Je lui adresse toute ma gratitude.

Résumé :

L'écoulement bidimensionnel de deux couches minces de fluides viscoélastiques le long d'un canal incliné est le siège d'une suite d'irrégularités interfaciales, traduisant la formation d'une surface ondulée. L'objet de ce travail de recherche est de développer un modèle théorique basé sur la combinaison de la méthode des résidus pondérés avec l'hypothèse d'ondes longues. Cette méthode conduit à un système de deux équations différentielles partielles décrivant l'évolution spatio-temporelle de l'interface et le débit local. Le passage aux ondes stationnaires bidimensionnelles et l'utilisation de la théorie des systèmes dynamiques ont permis d'aboutir à un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 décrivant l'évolution de l'interface. Le système dynamique ainsi obtenu présente des scénarios de bifurcations tels que des bifurcations hétéroclines, de Hopf et des dédoublements de périodes qui mènent le système à un état chaotique. L'influence des paramètres viscoélastiques sur le lieu des bifurcations de Hopf et sur les ondes stationnaires est examinée.

Mots clés : **Fluides viscoélastiques – Instabilité - Méthode des résidus pondérés – Interface - Bifurcations.**

Abstract:

The two-dimensional flow of two thin layers of viscoelastic fluids running down an inclined channel is the seat of a succession of irregularities, reflecting the formation of a corrugated interface. The purpose of this research is to develop a theoretical model based on the combination of the weighted residuals method with a long wave expansion. This method leads to a system of two equations describing the spatial and temporal evolution of the interface and the local flow rate. The transition to stationary waves and the use of dynamic systems theory have led to a system of first-order ordinary differential equations. The resulting system exhibit some bifurcations such as heteroclinic bifurcations, Hopf bifurcations and periods doubling bifurcations. The influence of viscoelastic parameters on Hopf bifurcations threshold and the stationary waves are investigated.

Key words: **Viscoelastic fluids - Instability – Weighted residual approach – Interface – bifurcations**

Table des matières

Remerciement.....	2
Résumé.....	3
Table des matières	4
Notations.....	5
Table des illustrations	7
Introduction générale.....	8
Introduction générale	8
1 Formulation mathématique du problème considéré.....	10
1.1 Introduction	10
1.2 Position du problème	10
1.2.1 Équations gouvernant l'écoulement.....	11
1.2.2 Conditions aux limites.....	14
1.3 Écoulement de base	17
1.4 Equations adimensionnées	19
2 Modèle d'étude relatif au problème considéré.....	23
2.1 Introduction	23
2.2 Approche ondes longues	23
2.3 Equations de couches limites.....	25
2.4 Méthode des résidus pondérés.....	26
3 Analyse non linéaire de stabilité.....	29
3.1 Introduction	29
3.2 Passage aux ondes stationnaires.....	29
3.3 Transformation en un système dynamique	30
3.3.1 Points fixes du système dynamique.....	31
3.3.2 Etude de stabilité du point fixe principal :	31
3.4 Ondes périodiques :.....	32
3.4.1 Bifurcations de Hopf	34
3.4.2 Influence des paramètres du problème (Γ_1, Γ_2 et W) sur la courbe de Hopf	35
3.4.2.1 Influence de Γ_1 et Γ_2 sur la courbe de Hopf.....	35
3.4.2.2 Influence du nombre de Weber sur la courbe de Hopf	37
3.5 Résolution de l'équation aux dérivées ordinaires.....	38
Conclusion générale.....	41
References.....	42

Notations

Grandeurs	Notations et expressions
<ul style="list-style-type: none"> • Angle d'inclinaison • Coordonnées spatiales • Coordonnée temporelle • Vecteur vitesse du fluide k • Composantes du Vecteur vitesse du fluide k • Débit local • Epaisseur du canal • Epaisseur de la couche du fluide 1 • Epaisseur de la couche du fluide 2 • Epaisseur de l'interface • Tension superficielle • Masse volumique du fluide k • Viscosité dynamique du fluide k • Paramètre viscoélastique du fluide k • Vecteur accélération de la pesanteur • Longueur d'onde de la perturbation • Vitesse moyenne • Composantes du vecteur vitesse adimensionnelle du fluide k 	<ul style="list-style-type: none"> • θ • x, y • t • \mathbf{v}_k • u_k, v_k • q • d • h_1 • $h_2 = d - h_1$ • $h(x, t)$ • σ • ρ_k • μ_k • γ_{0k} • \mathbf{g} • λ • u_m • u_k, v_k
<ul style="list-style-type: none"> • Coordonnées spatiales adimensionnelle • Coordonnée temporelle adimensionnelle • Nombre de Reynolds 	<ul style="list-style-type: none"> • x, y • t • $R = \frac{u_m * d}{\lambda}$
<ul style="list-style-type: none"> • Nombre de Weber 	<ul style="list-style-type: none"> • $W = \frac{\sigma}{u_m * \mu_1}$
<ul style="list-style-type: none"> • Paramètres viscoélastiques 	<ul style="list-style-type: none"> • $\Gamma_k = \frac{\gamma_{0k}}{\rho_k * d^2}$
<ul style="list-style-type: none"> • Rapport des épaisseurs 	<ul style="list-style-type: none"> • $r = \frac{h_2}{h_1}$
<ul style="list-style-type: none"> • Rapport des viscosités 	<ul style="list-style-type: none"> • $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$
<ul style="list-style-type: none"> • Rapport des masses volumiques 	<ul style="list-style-type: none"> • $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$
<ul style="list-style-type: none"> • Paramètre qui tient compte de l'hypothèse d'ondes longues 	<ul style="list-style-type: none"> • $\varepsilon = \frac{d}{\lambda}$

Table des illustrations

Figure 1 : schéma représentatif d'un écoulement de deux fluides viscoélastiques à travers un canal incliné.....	11
Figure 2 : influence du paramètre viscoélastique du fluide 1 sur la courbe de Hopf dans le cas où le fluide 2 est newtonien.	36
Figure 3: influence du paramètre viscoélastique du fluide2 sur la courbe de Hopf dans le cas où le fluide1 est newtonien.	37
Figure 4 : influence du nombre de Weber sur la courbe de Hopf.	38
Figure 5 : cascade de doublement de période subit par le système dynamique ; (a1) $C = 1.116$, (a2) $C = 1.064$, (a3) $C = 1.040$, (a4) $C = 1.035$	39

Introduction générale

Les films minces multicouches sont une combinaison de plusieurs couches minces de fluides de nature différentes (polypropylène, polyéthylène...). Cette combinaison permet d'améliorer et accorder des propriétés caractéristiques que chaque couche prise indépendamment ne permet pas d'atteindre [1]. Les films multicouches trouvent leurs applications dans divers secteurs industriels tels que :

- L'industrie de l'emballage qui est le secteur qui utilise le plus les films multicouches en particulier dans la fabrication des emballages alimentaires et médicaux pour répondre aux exigences spécifiques de manière rentable.
- L'industrie de fabrication des isolants thermiques et phoniques.
- L'industrie pétrolière lors du transport des hydrocarbures par pipelines.

Les fluides viscoélastiques sont les plus répondus dans de nombreux domaines industriels. Leurs comportements sont complexes et difficiles à identifier puisqu'ils sont à la fois solides élastiques et fluides visqueux. Des instabilités liées à la stratification de la viscosité et à une différence d'élasticité peuvent être causées et c'est pour toutes ces raisons que les ingénieurs se sont intéressés à l'études de ces films multicouches afin de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités présentes au niveau des interfaces dans le but de les empêcher de nuire à la qualité du produit résultant.

Dans le cadre du travail présenté dans ce mémoire, on se limite à l'étude de la stabilité interfaciale de deux fluides faiblement viscoélastiques en écoulement par gravité le long d'un canal incliné. Ce travail fait suite à l'étude réalisée par (N. Amatousse) [2] dans le cas d'un écoulement d'un seul fluide faiblement viscoélastique le long d'un canal incliné et étendue au cas de deux couches de fluides faiblement viscoélastiques [3]. La procédure adoptée pour la réalisation de ce travail est quasi similaire à celle proposée par (C. Ruyer-Quil) [4] dans le cas d'un film liquide tombant. En combinant l'hypothèse d'ondes longues, l'approximation de la couche limite et la méthode des résidus pondérés et avec un choix approprié des fonctions poids, le problème qui est régit par les équations de Navier-Stokes est réduit à un modèle de couches limites à deux équations. Le modèle est ensuite utilisé pour l'étude non linéaire de stabilité.

Ce manuscrite s'articule en trois chapitres.

Au chapitre 1 on s'intéresse, dans un premier temps à la formulation du problème étudié en explicitant les équations régissant l'écoulement par gravité de deux fluides viscoélastiques à travers un canal incliné et les conditions aux limites qui leur sont associées. Dans l'étape suivante, on tient à déterminer la solution stationnaire (i.e. écoulement de base) de ces équations en utilisant les conditions adjointes. Pour finir, en utilisant des échelles appropriées, on parvient à adimensionner les équations du mouvement et les conditions aux limites.

Au chapitres 2, nous allons développer un modèle théorique permettant de simplifier les équations du mouvement adimensionnelles et les conditions aux limites appropriées. Cela a été possible en commençant par appliquer l'hypothèse d'ondes longues aux équations puis l'approche de couche limite et enfin la méthode des résidus pondérés pour simplifier davantage les équations.

Au chapitre 3 enfin, on propose une étude non linéaire de stabilité de deux fluides faiblement viscoélastiques en écoulement dans un canal incliné en se mettant dans le cas particulier des ondes stationnaires. On examine ensuite l'effet des paramètres viscoélastiques des deux fluides sur ces ondes stationnaires.

1 Formulation mathématique du problème considéré

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on porte un intérêt particulier à présenter les équations décrivant la dynamique de l'écoulement de deux fluides viscoélastiques dans un canal incliné en explicitant dans un premier temps les équations régissant le mouvement et les conditions aux limites qui leur sont associées, puis, dans un second temps, on envisage d'adimensionner ces équations afin d'aboutir à un système d'équations où n'apparaissent que des paramètres adimensionnels, qui permettront par la suite de déterminer les effets prépondérants dans ce problème et de bien choisir le modèle d'étude à adopter.

1.2 Position du problème

On s'intéresse à l'écoulement bidimensionnel de deux fluides viscoélastiques incompressibles, non miscibles, superposés et entraînés par l'effet de gravité le long d'un canal plan, incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontal. Les deux fluides sont d'épaisseurs très fines h_1 et $h_2 = d - h_1$ relativement à la longueur du canal, de viscosités dynamiques μ_1 et μ_2 , de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , et de paramètres viscoélastiques γ_{01} et γ_{02} . Les deux fluides s'écoulent avec des vitesses $\mathbf{v}_1 (u_1(x, y, t), v_1(x, y, t))$ et $\mathbf{v}_2 (u_2(x, y, t), v_2(x, y, t))$ comme présenté sur la figure 1. L'interface séparant les deux fluides est caractérisée par une surface représentée par l'équation cartésienne $f(x, y, t) = y - h(x, t) = 0$ et une tension superficielle notée σ .

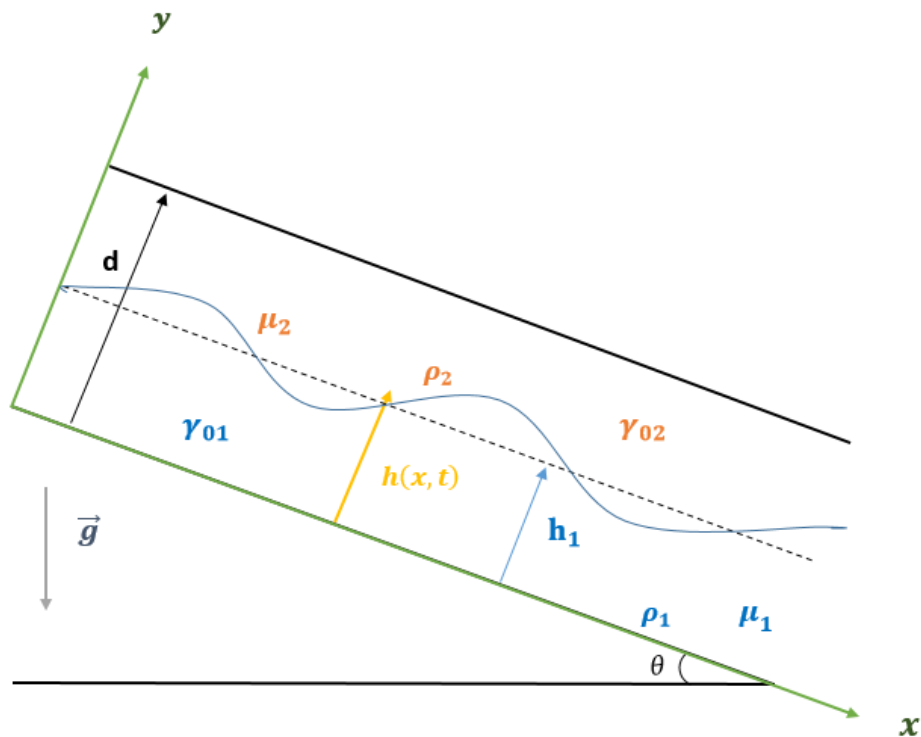


Figure 1 : schéma représentatif d'un écoulement de deux fluides viscoélastiques à travers un canal incliné.

1.2.1 Équations gouvernant l'écoulement

L'écoulement de deux fluides viscoélastiques est régi par l'équation de conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes.

Les hypothèses prises en compte en plus de l'incompressibilité des deux fluides sont les suivantes :

- La géométrie du problème étudié est supposée infinie dans la direction de l'écoulement.
- Les parois du canal considéré sont rigides et fixes.
- L'écoulement est isotherme, pas d'échange thermique.
- Le fluide 1 est plus dense que le fluide 2.

Les équations du mouvement sont données dans ce cas de figure par :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho_k \left(\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k \right) = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_k + \rho_k \mathbf{g} \quad (1.2)$$

Avec :

\mathbf{v}_k : vecteur vitesse du fluide viscoélastique k qui a pour composantes $(u_k(x, y, t), v_k(x, y, t))$.

$\bar{\boldsymbol{\tau}}_k$: tenseur de contraintes du fluide viscoélastique k qui obéisse à la loi de comportement de type ¹Walters B'' . Les composantes de ce tenseur sont données par :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\gamma_0 \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \mathbf{v}_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} e_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} e_{kj} \right)$$

Avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right)$$

\mathbf{g} : vecteur accélération de la pesanteur, de composantes $(g \sin(\theta), -g \cos(\theta))$.

La projection des équations (1.1) et (1.2) sur les axes des x et des y donne le système d'équations suivant :

$$u_{kx} + v_{ky} = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho_k (v_{kt} + u_k v_{kx} + v_k v_{ky}) = {}^2\tau_{kyx,x} + {}^3\tau_{kyy,y} - \rho_k g \cos(\theta) \quad (1.4)$$

¹ Walter a établi une loi de comportement modélisant un fluide viscoélastique [5] en utilisant le modèle proposé par Oldroyd [6]

² $\frac{\partial \tau_{kyx}}{\partial x}$

³ $\frac{\partial \tau_{kyy}}{\partial y}$

$$\rho_k(v_{kt} + u_k v_{kx} + v_k v_{ky}) = {}^4\tau_{kyx,x} + {}^5\tau_{kyy,y} - \rho g \cos(\theta) \quad (1.5)$$

Or:

$$\begin{aligned} \tau_{kxx,x} &= -p_{kx} + 2\mu_k u_{xx} \\ &\quad - \gamma_{0k} \left(2u_{kxt} + 2u_k u_{kxx} + 2v_k u_{kxy} - 4u_{kx}^2 - 2u_{ky}(u_{ky} + v_{kx}) \right)_{,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{kxy,y} &= \mu_k (u_{ky} + v_{kx})_{,y} \\ &\quad - \gamma_{0k} (u_{kyt} + v_{kxt} + u_k u_{kyx} + u_k v_{kxx} + v u_{kyy} + v_k v_{kxy} - 2u_{kx} v_{kx} \\ &\quad - 2u_{ky} v_{ky})_{,y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{kyx,x} &= 2\mu_k (u_{ky} + v_{kx})_{,x} \\ &\quad - \gamma_{0k} (u_{kyt} + v_{kxt} + u_k u_{kyx} + u_k v_{kxx} + v u_{kyy} + v_k v_{kxy} - 2u_{kx} v_{kx} \\ &\quad - 2u_{ky} v_{ky})_{,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{kyy,y} &= -p_{ky} + 2\mu_k v_{kyy} \\ &\quad - \gamma_{0k} \left(2v_{kyt} + 2u_k v_{kxy} + 2v_k v_{kyy} - 4v_{ky}^2 - 2v_{kx}(u_{ky} + v_{kx}) \right)_{,y} \end{aligned}$$

En substituant les expressions de $\tau_{kxx,x}$, $\tau_{kxy,y}$, $\tau_{kyx,x}$ et $\tau_{kyy,y}$ dans (1.4) et (1.5), on aboutit au système d'équations ci-après :

$$u_{kx} + v_{ky} = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \rho_k (u_{kt} + u_k u_{kx} + v_k u_{ky}) &= -p_{kx} + \mu_k u_{kxx} + \mu_k u_{kyy} \\ &\quad - \gamma_{0k} \left(2u_{kxt} + 2u_k u_{kxx} + 2v_k u_{kxy} - 4u_{kx}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2u_{ky}(u_{ky} + v_{kx}) \right)_{,x} \\ &\quad - \gamma_{0k} (u_{kyt} + v_{kxt} + u_k u_{kyx} + u_k v_{kxx} + v u_{kyy} + v_k v_{kxy} \\ &\quad - 2u_{kx} v_{kx} - 2u_{ky} v_{ky})_{,y} + \rho g \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

⁴ $\frac{\partial \tau_{kyx}}{\partial x}$
⁵ $\frac{\partial \tau_{kyy}}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
& \rho_k (v_{kt} + u_k v_{kx} + v_k v_{ky}) \\
& = -p_{ky} + \mu_k v_{kxx} + \mu_k v_{kyy} \\
& - \gamma_{0k} (u_{kyt} + v_{kxt} + u_k u_{kyx} + u_k v_{kxx} + v_k u_{ky} + v_k v_{kxy} \\
& - 2u_{kx} v_{kx} - 2u_{ky} v_{ky})_{,x} \\
& - \gamma_{0k} (2v_{kyt} + 2u_k v_{kyx} + 2v_k v_{kyy} - 4v_{ky}^2 \\
& - 2v_{kx} (u_{ky} + v_{kx}))_{,y} - \rho g \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

L'écoulement de deux fluides viscoélastiques dans un canal incliné est décrit par 6 équations aux dérivées partielles non linéaires dont 6 inconnues.

$$u_1(x, y, t), v_1(x, y, t), u_2(x, y, t), v_2(x, y, t), p_1(x, y, t) \text{ et } p_2(x, y, t).$$

1.2.2 Conditions aux limites

Afin de pouvoir résoudre les équations (1.6), (1.7) et (1.8), il faut leur adjoindre des conditions aux limites. Dans notre problème, les conditions considérées sont ceux aux parois inférieure et supérieure du canal, ainsi qu'à l'interface séparant les deux fluides.

Conditions aux parois

- Conditions d'adhérence aux parois : les particules fluides très proches des parois ont la vitesse de ces parois. Comme les parois du canal considéré dans ce problème sont fixes, la vitesse tangentielle des particules fluides est nulle au niveau des deux parois du canal.

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{1.9}$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = d \tag{1.10}$$

- Conditions d'imperméabilité aux parois : étant donné que les parois du canal sont imperméables, la vitesse normale des particules fluides très proches des parois est nulle.

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{1.11}$$

$$v_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = d \tag{1.12}$$

Conditions à l'interface

- Condition cinématique : les particules fluides situées au niveau de l'interface séparant les deux fluides doivent y rester. En d'autres termes, il n'y a aucun transfert de masse entre les deux fluides.

$$\frac{Df(x, y, t)}{Dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow h_t + u_k h_x = v_k \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \quad (1.13)$$

- Condition dynamique : cette condition est écrite comme deux conditions scalaires distinctes en écrivant les parties tangentielle et normale séparément. Dans ce cas, les deux conditions sont appelées :
 - « Continuité de la contrainte tangentielle » et « saut de la contrainte normale »
 - Continuité de la contrainte tangentielle : la contrainte tangentielle est continue à travers l'interface car le saut est nul.

Ce qui permet d'écrire :

$$(\bar{\bar{t}}_1 \cdot {}^6\mathbf{n}) \cdot {}^7\mathbf{t} = (\bar{\bar{t}}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} \quad (1.14)$$

$$\text{Or :} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{(1+h_x^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -h_x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \frac{1}{(1+h_x^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ h_x \end{pmatrix}$$

En explicitant l'équation (1.14), on aboutit à la condition dynamique tangentielle :

$$\begin{aligned} & \mu_1 \left((1 + h_x^2)(u_{1y} + v_{1x}) - 4h_x u_{1x} \right) - \gamma_{01} (1 + h_x^2)(u_{1yt} + v_{1xt} + u_1 u_{1yx} + \\ & u_1 v_{1xx} + v_1 u_{1yy} + v_1 v_{1xx} - 2v_{1x} u_{1x} - 2v_{1y} u_{1y}) + \gamma_{01} h_x (2u_{1xt} - 2v_{1yt} + \\ & 2u_1 u_{1xx} - 2u_1 v_{1xy} + 2v_1 u_{1xy} - 2v_1 v_{1yy} - 4u_{1x}^2 + 2v_{1x}(u_{1y} + v_{1x}) - \\ & 2u_{1y}(u_{1y} + v_{1x}) + 4v_{1y}^2) - \mu_2 \left((1 + h_x^2)(u_{2y} + v_{2x}) - 4h_x u_{2x} \right) + \\ & \gamma_{02} (1 + h_x^2)(u_{2yt} + v_{2xt} + u_2 u_{2yx} + u_2 v_{2xx} + v_2 u_{2yy} + v_2 v_{2xx} - \\ & 2v_{2x} u_{2x} - 2v_{2y} u_{2y}) - \gamma_{02} h_x (2u_{2xt} - 2v_{2yt} + 2u_2 u_{2xx} - 2u_2 v_{2xy} + \\ & 2v_2 u_{2xy} - 2v_2 v_{2yy} - 4u_{2x}^2 + 2v_{2x}(u_{2y} + v_{2x}) - 2u_{2y}(u_{2y} + v_{2x}) + \\ & 4v_{2y}^2) = 0 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

⁶ Vecteur normal à l'interface.

⁷ Vecteur tangent à l'interface.

- Saut de la contrainte normale : la tension superficielle entre deux fluides est responsable du saut de la contrainte normale. Cette condition se traduit mathématiquement par l'équation suivante :

$$(\bar{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - (\bar{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \sigma \operatorname{div}(\mathbf{n}) \quad (1.16)$$

Or :

$$\operatorname{div}(\mathbf{n}) = -\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}$$

En explicitant l'équation (1.16), on trouve la forme de la condition sur les contraintes normales.

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = & -\sigma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} + \frac{2\mu_1}{1+h_x^2} (u_{1x} h_x^2 - h_x (u_{1y} + v_{1x}) + v_{1y}) - \\ & \frac{2\gamma_{01} h_x^2}{1+h_x^2} (u_{1xt} + v_1 u_{1xy} + u_1 u_{1xx} - 2u_{1x}^2 - u_{1y} (u_{1y} + v_{1x})) + \frac{2\gamma_{01} h_x}{1+h_x^2} (u_{1yt} + \\ & v_{1xt} + u_1 u_{1yx} + u_1 v_{1xx} - v_1 u_{1yy} + v_1 v_{1xy} - 2u_{1x} v_{1x} - 2u_{1yy}) - \\ & \frac{2\gamma_{01}}{1+h_x^2} (v_{1yt} + u_1 v_{1yx} + v_1 v_{1yy} - v_{1x} (u_{1y} + v_{1x}) - 2v_{1y}^2) - \frac{2\mu_2}{1+h_x^2} (u_{2x} h_x^2 - \\ & h_x (u_{2y} + v_{2x}) + v_{2y}) + \frac{2\gamma_{02} h_x^2}{1+h_x^2} (u_{2xt} + v_2 u_{2xy} + u_2 u_{2xx} - 2u_{2x}^2 - \\ & u_{2y} (u_{2y} + v_{2x})) - \frac{2\gamma_{02} h_x}{1+h_x^2} (u_{2yt} + v_{2xt} + u_2 u_{2yx} + u_2 v_{2xx} - v_2 u_{2yy} + v_2 v_{2xy} - \\ & 2u_{2x} v_{2x} - 2u_{2yy}) + \frac{2\gamma_{02}}{1+h_x^2} (v_{2yt} + u_2 v_{2yx} + v_2 v_{2yy} - v_{2x} (u_{2y} + v_{2x}) - \\ & 2v_{2y}^2) \quad \text{en } y = h(x, t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

- Continuité des vitesses : les vitesses des deux fluides sont égales au niveau de l'interface. Cette condition est assurée par la viscosité.

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (1.18)$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (1.19)$$

1.3 Écoulement de base

L'écoulement de base est ce qu'on appelle solution triviale des équations du mouvement et les conditions aux limites qui leur sont adjointes dans le régime stationnaire. Dans ce cas l'écoulement est uniforme, la vitesse de chaque fluide se restreint à sa composante longitudinale (u_k), et l'interface séparant les deux fluides est plane ($h(x, t) = h_1$).

D'après l'équation (1.6), la vitesse longitudinale des deux fluides ne dépend que de y . la vitesse des deux fluides s'écrit alors :

$$\mathbf{v}_{0k} = (u_{0k}(y), 0), \quad k = 1, 2$$

Les équations (1.7) et (1.8) s'écrivent :

$$0 = \mu_k u_{0k,yy} + \rho_k g \sin(\theta) \quad k = 1, 2 \quad (1.20)$$

$$0 = -p_{0k,y} - \rho_k g \cos(\theta) \quad k = 1, 2 \quad (1.21)$$

Les conditions (1.9), (1.10), (1.15), (1.17) et (1.18) s'écrivent :

$$u_{01}(y) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (1.22)$$

$$u_{02}(y) = 0 \quad \text{en } y = d \quad (1.23)$$

$$\mu_1 u_{01,y} - \mu_2 u_{02,y} = 0 \quad \text{en } y = h_1 \quad (1.24)$$

$$p_{01} - p_{02} = 0 \quad \text{en } y = h_1 \quad (1.25)$$

$$u_{01}(y) = u_{02}(y) \quad \text{en } y = h_1 \quad (1.26)$$

En résolvant le système d'équations (1.20) - (1.21) et en utilisant les conditions (1.22), (1.23), (1.24), (1.25) et (1.26), on aboutit aux paramètres décrivant l'écoulement à l'état de base :

$$u_{01}(y) = \frac{g\rho_1 \sin(\theta)}{2\mu_1} h_1^2 \left[\left(1 + \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1}}{\frac{h_2}{h_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1}} \right) \right) \left(\frac{y}{h_1} \right) - \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \right] \quad (1.27)$$

$$u_{02}(y) = \frac{g\rho_1 \sin(\theta)}{2\mu_1} h_1^2 \frac{\rho_2 h_2^2 \mu_1}{\rho_1 h_1^2 \mu_2} \left[\left(1 + \frac{\rho_1 \mu_2 h_1}{\rho_2 \mu_1 h_2} \left(\frac{1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1}}{\frac{h_2 + \mu_2}{h_1 \mu_1}} \right) \right) \left(\frac{d-y}{d-h_1} \right) - \left(\frac{d-y}{d-h_1} \right)^2 \right] \quad (1.28)$$

Pour la différence de pression à l'état de base, on trouve :

$$p_{01}(y) - p_{02}(y) = (\rho_1 - \rho_2) g \cos(\theta) (y - h_1) \quad (1.29)$$

Le débit total à l'état de base est donné par :

$$q_0 = \frac{g\rho_1 \sin \theta}{4\mu_1} h_1^3 \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{1 + \rho \frac{h_2}{h_1}}{\frac{h_2}{h_1} + \mu} / \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\rho}{\mu} \right) \right) \quad (1.30)$$

Afin de simplifier l'écriture des équations (1.27), (1.28) et (1.30), on pose :

$$r = \frac{h_1}{h_2}, \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \alpha = \frac{g\rho_1 \sin(\theta)}{2\mu_1} h_1^2 \text{ et } \beta = \frac{1 + \rho r}{r + \mu}$$

Ce qui donne :

$$u_{01}(y) = \alpha \left[(1 + \beta r) \left(\frac{y}{h_1} \right) - \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \right] \quad (1.31)$$

$$u_{02}(y) = \alpha r^2 \frac{\rho}{\mu} \left[\left(1 + \frac{\mu}{\rho r} \beta \right) \left(\frac{d-y}{d-h_1} \right) - \left(\frac{d-y}{d-h_1} \right)^2 \right] \quad (1.32)$$

On remarque que les vitesses à l'état de base ont une forme parabolique dont les coefficients dépendent du rapport des viscosités, du rapport des masses volumiques et le rapport des épaisseurs.

Le débit est ainsi écrit :

$$q_0 = \frac{\alpha h_1}{2} \left(r\beta(1+r) + \frac{1}{3} \left(1 + r^3 \frac{\rho}{\mu} \right) \right) \quad (1.33)$$

1.4 Equations adimensionnées

On a adopté la technique d'adimensionnalisation qui consiste à faire apparaître des groupements de paramètres sans dimension dans les équations décrivant le mouvement. Cette technique a pour but de simplifier les équations du mouvement en rendant possible le passage d'un phénomène physique à un problème mathématique qui sera traité par la suite et résolu à l'aide du numérique.

Le passage aux équations adimensionnées se fait par le choix des échelles caractéristiques suivantes :

- $u = \frac{u}{u_m}$
- $v = \frac{v\lambda}{u_m d}$
- $x = \frac{x}{\lambda}$
- $y = \frac{y}{d}$
- $t = \frac{t u_m}{\lambda}$
- $p = \frac{p d^2}{u_m \lambda \mu_1}$

Où u_m est la vitesse moyenne de l'écoulement et λ , la longueur d'onde de la perturbation suivant la direction de l'écoulement.

Une fois que toutes les échelles caractéristiques précédentes ont été substituées dans les équations (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.15), (1.17), (1.18), et (1.19) et après avoir fait quelques arrangements dans ces équations, on voit apparaître des groupements adimensionnels qui sont :

- Le nombre de Reynolds : $R = \frac{u_m d \rho_1}{\mu_1}$
- Le nombre de Weber : $W = \frac{\sigma}{u_m \mu_1}$
- Le paramètre viscoélastique du fluide k : $\Gamma_k = \frac{\gamma_0 k}{\rho_k d^2}$
- La paramètre qui tient compte de l'hypothèse d'ondes longues : $\varepsilon = \frac{d}{\lambda} \ll 1$. Ce paramètre permet de simplifier les équations et de faire des développements de la solution.
- La rapport des masses volumiques : $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

- Le rapport des viscosité : $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

Les équations du mouvement adimensionnées s'écrivent comme suit :

$$u_{1x} + v_{1y} = 0 \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon(u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) & \\ &= -p_{1x} + \varepsilon^2 u_{1xx} + u_{1yy} \\ &\quad - 2\Gamma_1 R\varepsilon^3 (u_{1xt} + u_1 u_{1xx} + v_1 u_{1xy} - 2u_1^2 - u_{1y} v_{1x})_{,x} \\ &\quad - \Gamma_1 R\varepsilon^3 (v_{1xt} + u_1 v_{1xx} + v_1 v_{1xy} - 2v_{1x} u_{1x})_{,y} \\ &\quad - \Gamma_1 R\varepsilon (u_{1yt} + u_1 u_{1yx} + v_1 u_{1yy} - 2u_{1y} v_{1y})_{,y} + 4\Gamma_1 R\varepsilon u_{1y} u_{1xy} \\ &\quad + 3 \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon^3(v_{1t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y}) & \\ &= -p_{1y} + \varepsilon^4 v_{1xx} + \varepsilon^2 v_{1yy} - 3\varepsilon \cot(\theta) + 4\Gamma_1 R\varepsilon^5 v_{1xy} v_{1x} \\ &\quad - \Gamma_1 R\varepsilon^3 (u_{1yt} + u_1 u_{1yx} + v_1 u_{1yy} - 2u_{1y} v_{1y})_{,x} \\ &\quad - 2\Gamma_1 R\varepsilon^3 (v_{1yt} + u_1 v_{1yx} + v_1 v_{1yy} - 2v_{1y}^2 - v_{1x} u_{1y})_{,y} \\ &\quad - \Gamma_1 R\varepsilon^5 (v_{1xt} + u_1 v_{1xx} + v_1 v_{1xy} - 2v_{1x} u_{1x})_{,x} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$u_{2x} + v_{2y} = 0 \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon\rho(u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) & \\ &= -p_{2x} + \mu\varepsilon^2 u_{2xx} + \mu u_{1yy} \\ &\quad - 2\Gamma_2 R\rho\varepsilon^3 (u_{2xt} + u_2 u_{2xx} + v_2 u_{2xy} - 2u_2^2 - u_{2y} v_{2x})_{,x} \\ &\quad - \Gamma_2 R\rho\varepsilon^3 (v_{2xt} + u_2 v_{2xx} + v_2 v_{2xy} - 2v_{2x} u_{2x})_{,y} \\ &\quad - \Gamma_2 R\rho\varepsilon (u_{2yt} + u_2 u_{2yx} + v_2 u_{2yy} - 2u_{2y} v_{2y})_{,y} \\ &\quad + 4\Gamma_2 R\rho\varepsilon u_{2y} u_{2xy} + 3\rho \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
& R\rho\varepsilon^3(v_{2t} + u_2v_{2x} + v_2v_{2y}) \\
& = -p_{2y} + \mu\varepsilon^4v_{2xx} + \mu\varepsilon^2v_{2yy} - 3\rho\varepsilon \cot(\theta) + 4\Gamma_2R\rho\varepsilon^5v_{2xy}v_{2x} \\
& - \Gamma_2R\rho\varepsilon^3(u_{2yt} + u_2u_{2yx} + v_2u_{2yy} - 2u_{2y}v_{2y})_{,x} \\
& - 2\Gamma_2R\rho\varepsilon^3(v_{2yt} + u_2v_{2yx} + v_2v_{2yy} - 2v_{2y}^2 - v_{2x}u_{2y})_{,y} \\
& - \Gamma_2R\rho\varepsilon^5(v_{2xt} + u_2v_{2xx} + v_2v_{2xy} - 2v_{2x}u_{2x})_{,x}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Les conditions aux limites adimensionnées s'écrivent comme suit :

- Conditions d'adhérence aux parois :

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{1.40}$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = 1 \tag{1.41}$$

- Conditions d'imperméabilité aux parois

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{1.42}$$

$$v_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = 1 \tag{1.43}$$

- Conditions cinématiques

$$h_t + u_1h_x = v_1 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \tag{1.44}$$

$$h_t + u_2h_x = v_2 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \tag{1.45}$$

- Continuité des vitesses

$$u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \tag{1.46}$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \tag{1.47}$$

- Continuité de la contrainte tangentielle :

$$\begin{aligned}
& (1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_{1y} + \varepsilon^2 v_{1x}) - 4\varepsilon^2 u_{1x} h_x - \Gamma_1 R \left((1 - \varepsilon^2 h_x^2)(\varepsilon u_{1yt} + \varepsilon^3 v_{1xt} + \varepsilon u_1 u_{1yx} + \varepsilon^3 u_1 v_{1xx} + \varepsilon v_1 u_{1yy} + \varepsilon^3 v_1 v_{1xy} - 2\varepsilon^3 v_{1x} u_{1x} - 2\varepsilon u_{1y} v_{1y}) \right) + \Gamma_1 R h_x \varepsilon (2\varepsilon^2 u_{1xt} - 2\varepsilon^2 v_{1yt} + 2\varepsilon^2 u_1 u_{1xx} - 2\varepsilon^2 v_1 u_{1y} - 2\varepsilon^2 v_1 v_{1yy} - 4\varepsilon^2 u_{1x}^2 + 2\varepsilon^2 v_{1x} u_{1y} + 2v_{1x}(\varepsilon^2 u_{1y} + \varepsilon^4 v_{1x}) - 2u_{1y}(u_{1y} + \varepsilon^2 v_{1x}) + 4\varepsilon^2 v_{1y}^2) - \mu \left((1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_{2y} + \varepsilon^2 v_{2x}) - 4\varepsilon^2 u_{2x} h_x \right) + \Gamma_2 R \rho \left((1 - \varepsilon^2 h_x^2)(\varepsilon u_{2yt} + \varepsilon^3 v_{2xt} + \varepsilon u_2 u_{2yx} + \varepsilon^3 u_2 v_{2xx} + \varepsilon v_2 u_{2yy} + \varepsilon^3 v_2 v_{2xy} - 2\varepsilon^3 v_{2x} u_{2x} - 2\varepsilon u_{2y} v_{2y}) \right) - \Gamma_2 R h_x \varepsilon \rho (2\varepsilon^2 u_{2xt} - 2\varepsilon^2 v_{2yt} + 2\varepsilon^2 u_2 u_{2xx} - 2\varepsilon^2 v_2 u_{2xy} - 2\varepsilon^2 v_2 v_{2yy} - 4\varepsilon^2 u_{2x}^2 + 2\varepsilon^2 v_{2x} u_{2y} + 2v_{2x}(\varepsilon^2 u_{2y} + \varepsilon^4 v_{2x}) - 2u_{2y}(u_{2y} + \varepsilon^2 v_{2x}) + 4\varepsilon^2 v_{2y}^2) = 0 \quad \text{en } y = h(x, t)
\end{aligned} \tag{1.48}$$

- Saut de la contrainte normale :

$$\begin{aligned}
p_1 - p_2 = & -WR h_{xx} \varepsilon^3 (1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-3/2} + 2(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-1} \varepsilon^2 (\varepsilon^2 u_{1x} h_x^2 - h_x (u_{1y} + \varepsilon^2 v_{1x}) + v_{1y}) - \\
& 2\Gamma_1 R h_x^2 \varepsilon^5 (u_{1xt} + v_1 u_{1xy} + u_1 u_{1xx} - 2u_{1x}^2 - u_{1y} v_{1x}) - \\
& 2\Gamma_1 R h_x^2 \varepsilon^3 u_{1y}^2 + 2\Gamma_1 R h_x \varepsilon^3 (u_{1yt} + \varepsilon^2 v_{1xt} + u_1 u_{1yx} + \varepsilon^2 u_1 v_{1xx} + v_1 u_{1yy} + \varepsilon^2 v_1 v_{1xy} - \varepsilon^2 u_{1x} v_{1x} - 2u_{1y} v_{1y}) - \\
& 2\Gamma_1 R \varepsilon^3 (v_{1yt} + u_1 v_{1yx} + v_1 v_{1yy} - v_{1x} u_{1y} - \varepsilon^2 v_{1x}^2 - 2v_{1y}^2) - \\
& 2\mu (1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-1} \varepsilon^2 (\varepsilon^2 u_{2x} h_x^2 - h_x (u_{2y} + \varepsilon^2 v_{2x}) + v_{2y}) + \\
& 2\Gamma_2 R h_x^2 \rho \varepsilon^5 (u_{2xt} + v_2 u_{2xy} + u_2 u_{2xx} - 2u_{2x}^2 - u_{2y} v_{2x}) + \\
& 2\Gamma_2 R h_x^2 \rho \varepsilon^3 u_{1y}^2 - 2\Gamma_2 R h_x \rho \varepsilon^3 (u_{2yt} + \varepsilon^2 v_{2xt} + u_2 u_{2yx} + \varepsilon^2 u_2 v_{2xx} + v_2 u_{2yy} + \varepsilon^2 v_2 v_{2xy} - \varepsilon^2 u_{2x} v_{2x} - 2u_{2y} v_{2y}) + \\
& 2\Gamma_2 R \rho \varepsilon^3 (v_{2yt} + u_2 v_{2yx} + v_2 v_{2yy} - v_{2x} u_{2y} - \varepsilon^2 v_{2x}^2 - 2v_{2y}^2) \quad \text{en } y = h(x, t)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

2 Modèle d'étude relatif au problème considéré

2.1 Introduction

Le système d'équations adimensionnées régissant le mouvement de deux fluides viscoélastiques dans un canal plan incliné et les conditions aux limites qui leur sont associées sont assez difficiles à résoudre et afin de les simplifier, on a adopté un modèle théorique qui est une généralisation du modèle de fluide newtonien mince s'écoulant le long d'un plan incliné développé par (C. Ruyer Quil) [3]. Le modèle repose sur la combinaison de l'hypothèse d'ondes longues, des approximations de couches limites et la méthode des résidus pondérés. Cette combinaison permet de pallier les failles des modèles de la littérature tels que les modèles asymptotiques qui donnent des bons résultats au seuil de l'instabilité mais non pas ailleurs et les modèles intégraux de couches limites [7] qui donnent des résultats très réalistes au-delà du seuil de l'instabilité mais non pas au seuil. Le modèle adopté permet de ramener les équations complexes décrivant le problème à un système de deux équations décrivant l'évolution de l'interface $h(x, t)$ et le débit local $q(x, t)$.

2.2 Approche ondes longues

En vue de simplifier les équations décrivant le problème considéré, une première approche consiste à éliminer tous les termes d'ordre supérieur à ε^2 qui apparaissent dans les équations régissant le mouvement et les conditions aux limites adjointes, sauf le terme où apparaît le nombre de Weber qui implique la tension superficielle qu'on suppose assez grande. Cette exception est due au fait que la tension superficielle tend à stabiliser l'interface, elle garantit de ce fait l'hypothèse d'ondes longues et toutes les approximations qui en découlent.

Dans cette approche, les équations du mouvement s'écrivent :

$$u_{1x} + v_{1y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon(u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) \\ = -p_{1x} + \varepsilon^2 u_{1xx} + u_{1yy} \\ - \Gamma_1 R\varepsilon(u_{1yt} + u_1 u_{1yx} + v_1 u_{1yy} - 2u_{1y}v_{1y})_{,y} + 4\Gamma_1 R\varepsilon u_{1y}u_{1xy} \\ + 3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$0 = -p_{1y} + \varepsilon^2 v_{1yy} - 3\varepsilon \cot(\theta) \quad (2.3)$$

$$u_{2x} + v_{2y} = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon\rho(u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) \\ = -p_{2x} + \mu\varepsilon^2 u_{2xx} + \mu u_{1yy} \\ - \Gamma_2 R\rho\varepsilon(u_{2yt} + u_2 u_{2yx} + v_2 u_{2yy} - 2u_{2y}v_{2y})_{,y} \\ + 4\Gamma_2 R\rho\varepsilon u_{2y}u_{2xy} + 3\rho \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$0 = -p_{2y} + \mu\varepsilon^2 v_{2yy} - 3\rho\varepsilon \cot(\theta) \quad (2.6)$$

Les conditions aux limites associées aux équations du mouvement sont :

- Conditions d'adhérence aux parois :

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (2.7)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = 1 \quad (2.8)$$

- Conditions d'imperméabilité aux parois :

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (2.9)$$

$$v_2 = 0 \quad \text{en} \quad y = 1 \quad (2.10)$$

- Conditions cinématiques

$$h_t + u_1 h_x = v_1 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \quad (2.11)$$

$$h_t + u_2 h_x = v_2 \quad \text{en} \quad y = h(x, t) \quad (2.12)$$

- Continuité des vitesses :

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (2.13)$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (2.14)$$

- Continuité de la contrainte tangentielle :

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon^2 h_x^2) u_{1y} + \varepsilon^2 v_{1x} - 4\varepsilon^2 u_{1x} h_x \\ & - \Gamma_1 R \varepsilon (u_{1yt} + u_1 u_{1yx} + v_1 u_{1yy} - 2u_{1y} v_{1y} \\ & + 2u_{1y}^2 h_x) \\ & - \mu (u_{2y} (1 - \varepsilon^2 h_x^2) + \varepsilon^2 v_{2x} - 4\varepsilon^2 u_{2x} h_x) \\ & + \Gamma_2 R \rho \varepsilon \left((u_{2yt} + u_2 u_{2yx} + v_2 u_{2yy} - 2u_{2y} v_{2y} \right. \\ & \left. + 2h_x u_{2y}^2) \right) = 0 \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (2.15) \end{aligned}$$

- Saut de la contrainte normale :

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = & -WRh_{xx}\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2(-h_x u_{1y} + v_{1y}) \\ & - 2\mu\varepsilon^2(-h_x u_{2y} + v_{2y}) \quad \text{en } y = h(x, t) \quad (2.16) \end{aligned}$$

Cette approche est rendue possible grâce à l'hypothèse d'ondes longues. Cette hypothèse n'est valable que dans le cas des fluides minces.

2.3 Equations de couches limites

Une deuxième approche repose sur l'élimination de la pression des équations de Navier-Stokes adimensionnées afin d'aboutir aux équations de couches limites relatives au problème étudié, et pour ce faire, on intègre les équations (2.3) d'une position y jusqu'à l'interface h et (2.6) de l'interface h jusqu'à 1 et en utilisant les conditions de la continuité de la contrainte tangentielle et du saut de la contrainte normale à l'interface, on trouve $p_1(x, y, t)$ et $p_2(x, y, t)$. La substitution des pressions $p_1(x, y, t)$ et $p_2(x, y, t)$ dans les équations (2.2) et (2.5) respectivement donne les équations de couches limites :

$$\begin{aligned}
& -R\varepsilon(u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) + \varepsilon^2(2u_{1xx} + u_{1x}h_x - \mu u_{2x}h_x) + \varepsilon^3 Wh_{xxx} \\
& + G(1 - \varepsilon \cot(\theta) h_x)(1 - \rho) - \mu u_{2yy}|_{y=1} \\
& - \Gamma_1 R\varepsilon(u_{1yyt} + u_1 u_{1yyx} + v_1 u_{1yyy} - u_{1y}u_{1yx} - v_{1y}u_{1yy}) \\
& + \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt}|_{y=1} + u_{2y}|_{y=1}u_{2xy}|_{y=1}) = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& -R\varepsilon\rho(u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) + \mu u_{2yy} - \mu u_{2yy}|_{y=1} + 2\varepsilon^2 \mu u_{2xx} \\
& - \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt} + u_2 u_{2yyx} + v_2 u_{2yyy} - u_{2y}u_{2yx} - v_{2y}u_{2yy}) \\
& + \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt}|_{y=1} - u_{2y}u_{2xy}|_{y=1}) = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\text{Avec : } G = \frac{g\rho_1 \sin \theta}{\mu_1} h_1^3 \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)^3 / q_0$$

On intègre l'équation de continuité de la couche de fluide 1 (2.1) de 0 à $h(x, t)$ et en utilisant la condition cinématique (2.11) et la définition du débit $q(x, t) = \int_0^{h(x,t)} u_1(x, y, t) dy$ de la couche inférieure, on trouve la condition cinématique sous sa forme intégrale :

$$q_x + h_t = 0 \tag{2.19}$$

2.4 Méthode des résidus pondérés

Les équations de couches limites obtenues au paragraphe précédent restent toujours complexes et pour palier à ce problème, on utilise la méthode des résidus pondérés [3] qui consiste à projeter le champ de vitesse de chaque couche de fluide sur des fonctions tests généralisant celles décrivant l'écoulement de base et satisfaisant les conditions d'adhérence et d'imperméabilité aux parois :

$$u_1(x, y, t) = a_0(x, t)\eta + \sum_{i=1}^i a_i(x, t) f_{i-1}(\eta) \tag{2.20}$$

$$u_2(x, y, t) = b_0(x, t)\zeta + \sum_{i=1}^i b_i(x, t) f_{i-1}(\zeta) \tag{2.21}$$

$$\text{Où : } \eta = \frac{y}{h(x,t)}, \zeta = \frac{1-y}{1-h(x,t)}, f_{i-1}(\eta) = \eta^i - \frac{i}{i+1} \eta^{i+1} \text{ et } f_{i-1}(\zeta) = \zeta^i - \frac{i}{i+1} \zeta^{i+1}$$

Le développement de la composante longitudinale de la vitesse de chaque couche de fluide peut s'écrire comme suit :

$$u_1(x, y, t) = u_1^{(0)} + \varepsilon u_1^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad (2.22)$$

$$u_2(x, y, t) = u_2^{(0)} + \varepsilon u_2^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad (2.23)$$

$u_k^{(0)}$ est un polynôme de degré 2 en y (les vitesses de l'écoulement de base ont une forme parabolique) et $u_k^{(1)}$ est une correction de degré 6.

On peut toutefois tronquer les corrections d'ordre supérieur à ε et aboutir tout de même à une formulation cohérente à l'ordre 1. Cela n'est possible que si l'on choisit convenablement les fonctions de pondérations g_1 et g_2 , qui s'écrivent comme suit :

$$g_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^2 - \frac{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 - 2\mu h(x, t) + 2h(x, t) - 1)}{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 - 4\mu h(x, t) + 2h(x, t) - 1)} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \frac{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 - 2h(x, t) + 3)}{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 - 4\mu h(x, t) + 2h(x, t) - 1)} \left(\frac{1-y}{1-h(x, t)} \right)^2 - \frac{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 + 1)}{(-h(x, t)^2 + \mu h(x, t)^2 - 4\mu h(x, t) + 2h(x, t) - 1)} \left(\frac{1-y}{1-h(x, t)} \right)$$

Les champs de vitesses s'écrivent alors comme suit :

$$u_1(x, y, t) = a_0(x, t) \frac{y}{h(x, t)} + a_1(x, t) \left(\frac{y}{h(x, t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^2 \right) \quad (2.24)$$

$$u_2(x, y, t) = b_0(x, t) \left(\frac{1-y}{1-h(x, t)} \right) + b_1(x, t) \left(\frac{1-y}{1-h(x, t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-y}{1-h(x, t)} \right)^2 \right) \quad (2.25)$$

La projection des couches limites sur les fonctions de pondérations g_1 et g_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{h(x,t)} \left[-R\varepsilon(u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) + \varepsilon^2(2u_{1xx} + u_{1x} h_x - \mu u_{2x} h_x) + \varepsilon^3 W h_{xxx} \right. \\
& \quad + G(1 - \varepsilon \tan^{-1}(\theta) h_x) (1 - \rho) - \mu u_{2yy}|_{y=1} \\
& \quad - \Gamma_1 R\varepsilon(u_{1yyt} + u_1 u_{1yyx} + v_1 u_{1yyy} - u_{1y} u_{1yx} - v_{1y} u_{1yy}) \\
& \quad \left. + \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt}|_{y=1} + u_{2y}|_{y=1} u_{2xy}|_{y=1}) \right] g_1 \\
& \quad + \int_{h(x,t)}^1 \left[-R\varepsilon\rho(u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) + \mu u_{2yy} - \mu u_{2yy}|_{y=1} \right. \\
& \quad + 2\varepsilon^2 \mu u_{2xx} \\
& \quad - \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt} + u_2 u_{2yyx} + v_2 u_{2yyy} - u_{2y} u_{2yx} - v_{2y} u_{2yy}) \\
& \quad \left. + \Gamma_2 R\varepsilon(u_{2yyt}|_{y=1} - u_{2y} u_{2xy}|_{y=1}) \right] g_2 = 0 \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Un choix approprié des fonctions de pondérations a permis d'éliminer les corrections $u_1^{(1)}$ et $u_2^{(1)}$ et ne conserver que $u_1^{(0)}$ et $u_2^{(0)}$ dans les équations (2.19) et (2.24).

Dans ce cas l'équation (2.26) s'écrit sous la forme formel suivante :

$$\begin{aligned}
& F_0(q, h) + \varepsilon F_1(\partial_x, \partial_t, q, h) + \varepsilon^2 F_2(\partial_{xx}, \partial_{tt}, \partial_x, \partial_t, q, h) \\
& \quad + \varepsilon^3 F_3(\partial_{xxx}, \partial_{ttt}, \partial_{xx}, \partial_{tt}, \partial_x, \partial_t, q, h) = 0 \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Le modèle développé décrivant les instabilités au niveau de l'interface séparant les deux couches de fluides viscoélastique en écoulement par gravité dans un canal incliné est le suivant :

$$\begin{aligned}
& F_0(q, h) + \varepsilon R F_1(\partial_x, \partial_t, q, h) + \varepsilon^2 F_2(\partial_{xx}, \partial_{tt}, \partial_x, \partial_t, q, h) \\
& \quad + \varepsilon^3 W F_3(\partial_{xxx}, \partial_{ttt}, \partial_{xx}, \partial_{tt}, \partial_x, \partial_t, q, h) = 0 \\
& \quad q_x + h_t = 0
\end{aligned}$$

3 Analyse non linéaire de stabilité

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse non linéaire d'un écoulement de deux fluides viscoélastiques. Cette analyse permet de prédire l'évolution de perturbations de grandes amplitudes. Il s'agit d'abord de trouver le lieu des bifurcations de type Hopf, ces bifurcations dans l'espace physique sont synonymes d'ondes périodiques, premier palier au passage du système à un état chaotique par dédoublements de périodes puis d'examiner l'influence des paramètres viscoélastiques des deux fluides sur le lieu des bifurcations de Hopf. Il s'agit également de mettre en évidence les zones où des bifurcations hétéroclines peuvent apparaître.

3.2 Passage aux ondes stationnaires

En se plaçant dans un référentiel lié aux ondes qui se déplacent avec une célérité constante notée c , le temps t cesse d'être une variable du problème. On introduit alors une nouvelle variable spatiale ξ tel que : $\xi = x - ct$. Ce passage simplifie d'avantage le modèle décrit par les équations (2.19) et (2.27) en diminuant le nombre de degrés de libertés.

L'équation (2.19) devient alors :

$$q_{\xi} - ch_{\xi} = 0 \quad (3.1)$$

En intégrant l'équation (3.1) et en se ramenant à l'écoulement de base, on trouve :

$$q = c(h - h_1) + q_0 \quad (3.2)$$

En introduisant la nouvelle variable ξ dans l'équation (2.27) et en utilisant l'équation (3.2), on trouve une équation différentielle ordinaire du troisième ordre qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_0(h) + \varepsilon R F_1(\partial_\xi, h) + \varepsilon^2 F_2(\partial_{\xi\xi}, \partial_\xi, h) + \varepsilon^3 F_3(\partial_{\xi\xi\xi}, \partial_{\xi\xi}, \partial_\xi, h) W = 0 \quad (3.3)$$

on tire $h_{\xi\xi\xi}$ de (3.3) tout en posant $\varepsilon = 1$, on aboutit à une équation qui se présente comme suit :

$$h_{\xi\xi\xi} = F_0(h) + F_1(\partial_\xi, h) + F_2(\partial_{\xi\xi}, \partial_\xi, h) \quad (3.4)$$

3.3 Transformation en un système dynamique

L'équation (3.4) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 3. Il est plus judicieux de la transformer en remplaçant $h \in \mathbb{R}$ par $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$, ce qui la ramène de l'ordre 3 à l'ordre 1. Pour ce faire, on pose :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h_{\xi\xi} \\ h_{\xi\xi\xi} \end{pmatrix}$$

Cela donne

$$U_\xi = \begin{pmatrix} U_{1\xi} \\ U_{2\xi} \\ U_{3\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_\xi \\ h_{\xi\xi} \\ h_{\xi\xi\xi} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

On a abouti à un système dynamique autonome et non linéaire de dimension 3 qui s'écrit :

$$\frac{dU_i}{d\xi} = g(U_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

3.3.1 Points fixes du système dynamique

Les points fixes sont des points de l'espace des phases⁸ correspondant à des états indépendants du temps. Elles sont obtenues en résolvant le système : $\frac{dU_i}{d\xi} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Pour trouver ces points fixes, on substitue : $h_\xi = h_{\xi\xi} = h_{\xi\xi\xi} = 0$ dans l'équation (3.4).

Dans ce mémoire, l'étude est faite seulement autour du point fixe principal ($U_p = (h_1, 0, 0)$) correspondant à l'état de base, qui est un point fixe parmi plusieurs autres.

3.3.2 Etude de stabilité du point fixe principal :

Dans ce qui suit, on procède à l'étude de stabilité du point fixe principal, sachant que cette étude est similaire à l'analyse de stabilité linéaire autour de l'état de base. Pour ce faire, on perturbe légèrement le point fixe principale : $U_i = U_p + \tilde{U}_i$.

Puis on substitue la nouvelle expression de U_i dans le système (3.6) :

$$\frac{d}{d\xi}(U_p + \tilde{U}_i) = g(U_p + \tilde{U}_i) \quad (3.7)$$

Etant donné que le point fixe principal est indépendant de ξ et en faisant un développement de Taylor au voisinage de U_p du second membre de (3.7), on trouve :

$$\frac{d\tilde{U}_i}{d\xi} = \frac{d(g(U_p + \tilde{U}_i))}{d\tilde{U}_i} \Big|_{U_p} \tilde{U}_i \quad (3.8)$$

Le système (3.8) admet des solutions sous la forme exponentielle suivante : $e^{-\lambda(x-ct)}$, λ est équivalent à (ik) dans l'analyse de stabilité linéaire ou k est le nombre d'onde. Par la suite, on sera amené à résoudre un problème aux valeurs propres qui admet des solutions non triviales que lorsque le déterminant caractérisant ce système est nul.

⁸ L'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système. Dans notre cas les variables sont : h, h_ξ et $h_{\xi\xi}$.

La stabilité du point fixe dépend directement du signe des valeurs propres λ et c'est pour cela qu'on distingue trois cas différents :

Premier cas :

Si toutes les valeurs propres sont réelles ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) et toutes de mêmes signes ($\lambda_i > 0$ ou $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3$), le point fixe est appelé nœud. Ce nœud est stable si toutes les valeurs propres sont négatives, sinon il est instable.

Deuxième cas :

Si toutes les valeurs propres sont réelles et au moins une de ces valeurs est positive, le point fixe est appelé col. Un col est toujours instable.

Troisième cas :

Si une paire de valeurs propres sont complexes conjuguées ($\lambda = \lambda_r \pm i\lambda_i$) et l'autre valeur propre est réelle et négative, le point fixe est appelé point spiral. Ce point spiral est stable lorsque la partie réelle de λ est négative ($\lambda_r < 0$), sinon il est instable.

3.4 Ondes périodiques :

Une onde périodique est une perturbation qui se reproduit à l'identique à intervalles égaux. Pour trouver ces ondes, on commence par perturber les fonctions $q(x, t)$ et $h(x, t)$ autour de la solution de base (h_1, q_0) :

$$q(x, t) = q_0 + nQ(x, t) \quad (3.9)$$

$$h(x, t) = h_1 + nH(x, t) \quad (3.10)$$

Où n est un petit coefficient.

Après cela, on substitue (3.9) et (3.10) dans (2.19) et (2.27), puis on élimine les termes d'ordre n^2 et plus.

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.11)$$

$$F_0(Q, H) + \varepsilon \{RF_1(\partial_t, \partial_x, Q, H) + \check{F}(\partial_x, H)\} + \varepsilon^2 F_2(\partial_{xx}, Q, H) + \varepsilon^3 F_3(\partial_{xx}, H)W = 0 \quad (3.12)$$

Le système (3.11) - (3.12) est formé de deux équations linéaire à coefficients indépendants du temps et de l'espace, ce qui permet d'écrire ces solutions sous forme de modes normaux :

$$H(x, t) = Ae^{\lambda(x-ct)} \quad (3.13)$$

$$Q(x, t) = Ee^{\lambda(x-ct)} \quad (3.14)$$

Où A et E sont des constantes.

En substituant (3.13) et (3.14) dans (3.11) et (3.12), on aboutit au système algébrique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda(Ac - E) = 0 \quad (3.15) \\ F_0(A, E) + \lambda F_1\left(A, E, R, c, \Gamma_1, \Gamma_2, \frac{\cot(\theta)}{R}\right) + \lambda^2 F_2(A, E) + \lambda^3 F_3(E)W = 0 \quad (3.16) \end{array} \right.$$

L'équation (3.16) est obtenue pour un ε égale à 1.

Pour que le système (3.15) - (3.16) admette des solutions non triviales, il faut que le déterminant de la matrice caractéristique du système soit nul.

Après avoir égalé le déterminant à zéro, on trouve le polynôme caractéristique suivant :

$$D_1 \lambda^3 + \frac{B_1}{R} \lambda^2 + B_2 \lambda + \frac{B_3}{R} = 0 \quad (3.17)$$

Avec :

$$D_1 = F_0(W), B_1 = F_1(c), B_2 = F_2\left(c, \Gamma_1, \Gamma_2, \frac{\cot(\theta)}{R}\right) \text{ et } B_3 = F_3(c)$$

3.4.1 Bifurcations de Hopf

La bifurcation de Hopf est un changement local d'un point fixe en un ⁹cycle limite dans l'espace des phases lorsque la célérité des ondes atteint une valeur critique correspondant à la célérité des ondes au début de l'instabilité (i.e. Le système dynamique converge d'un état stationnaire à un régime périodique) [8].

On obtient les bifurcations de Hopf en posant $\lambda_r = 0$, cela vaut dire qu'on passe d'un point spiral stable à un point spiral instable et vice versa. La paire de valeurs propres deviennent ainsi purement imaginaires : $\lambda = \pm i\lambda_i$ et c'est cette condition qui permet au système non linéaire d'osciller.

L'équation (3.17) s'écrit :

$$-\frac{B_1}{R}\lambda_i^2 + \frac{B_3}{R} + i(-D_1\lambda_i^3 + B_2\lambda_i) = 0 \quad (3.18)$$

En annulant la partie réelle de (3.18), on trouve :

$$\lambda_i^2 = \frac{B_3}{B_1} > 0 \quad (3.19)$$

En annulant aussi la partie imaginaire de (3.18), on trouve :

$$\lambda_i^2 = \frac{B_2}{D_1} > 0 \quad (3.20)$$

L'égalité de (3.19) et (3.20) donne la condition dite de Hopf :

$$B_1B_2 = B_3D_1 \quad (3.21)$$

La condition de Hopf donne la célérité de départ des séries de dédoublement de période.

⁹ Un cycle limite est une trajectoire périodique, fermée et isolée.

3.4.2 Influence des paramètres du problème (Γ_1 , Γ_2 et W) sur la courbe de Hopf

La célérité des ondes au début de l'instabilité est calculée en posant : $B_3 = 0$. Pour une valeur fixe de l'angle d'inclinaison du canal (θ), le point fixe subit une bifurcation de Hopf lorsque la valeur du paramètre de contrôle (la célérité) croise la courbe donnant le lieu des bifurcations de Hopf dont l'équation mathématique est : $B_1 B_2 - B_3 D_1 = 0$.

Afin d'examiner l'influence des paramètres Γ_1 , Γ_2 et W sur la courbe de Hopf, on fixe d'abord les paramètres du système :

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 0.1 \\ \rho = 0.1 \\ h_1 = 0.3 \\ R = 10 \\ r = \frac{1}{h_1} - 1 \\ y = \frac{\cot(\theta)}{R} \end{array} \right\}$$

La célérité à la criticalité est alors donc ($C_c = 1.573$).

3.4.2.1 Influence de Γ_1 et Γ_2 sur la courbe de Hopf

Pour un nombre de Weber égal à 10, on a fait varier les paramètres viscoélastiques Γ_1 et Γ_2 dans le but de voir leurs influences sur la courbe de Hopf dans un écoulement de deux fluides viscoélastiques.

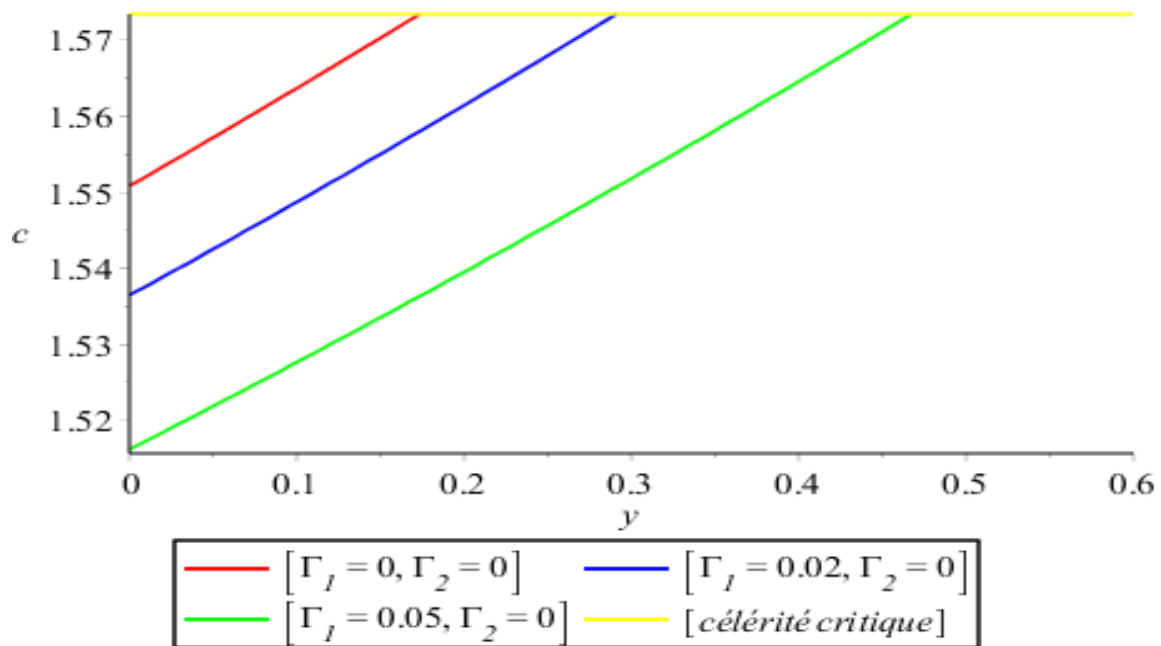


Figure 2 : influence du paramètre viscoélastique du fluide 1 sur la courbe de Hopf dans le cas où le fluide 2 est newtonien.

Tout d'abord, on remarque d'après la figure 2 que les courbes de Hopf sont situées au-dessous de la courbe donnant la célérité critique ($C_c = 1.573$).

En se mettant dans le cas où le fluide 2 est newtonien et en faisant varier le paramètre viscoélastique du fluide 1, on remarque que la courbe de Hopf s'éloigne de la courbe donnant la célérité critique lorsque que le paramètre viscoélastique du fluide 1 augmente ce qui fait élargir la zone où des ¹⁰bifurcations hétéroclines sont probables. Ces bifurcations sont synonymes d'ondes sous forme de ressauts hydrauliques dans l'espace réel.

¹⁰ Les bifurcations dites hétéroclines sont des bifurcations qui se produisent lorsqu'un point fixe perd sa stabilité au profit de l'autre.

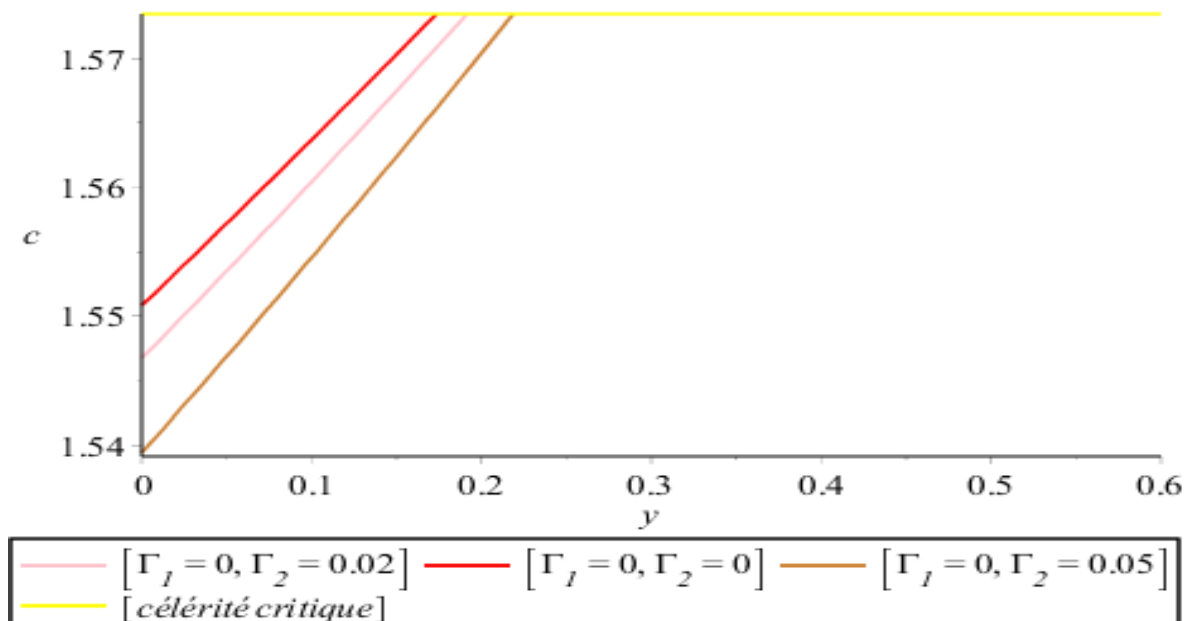


Figure 3: influence du paramètre viscoélastique du fluide2 sur la courbe de Hopf dans le cas où le fluide1 est newtonien.

La comparaison des figures 2 et 3 permet de constater que la zone où des bifurcations hétéroclines sont possibles est plus large dans le cas d'un écoulement de deux fluides dont le fluide 1 est viscoélastique et le fluide 2 est newtonien que dans le cas inverse.

L'étude de l'influence des paramètres viscoélastiques a permis de conclure que la viscoélasticité favorise le développement des bifurcations hétéroclines, des ondes donc sous forme de ressauts hydrauliques.

3.4.2.2 Influence du nombre de Weber sur la courbe de Hopf

Pour examiner l'effet du nombre de Weber sur la courbe de Hopf, on substitue d'abord les paramètres viscoélastiques $\Gamma_1 = 0.05$ et $\Gamma_2 = 0.02$ dans l'équation : $(B_1 B_2 - B_3 D_1 = 0)$ puis on trace dans le plan (c, y) la courbe de Hopf pour des différentes valeurs du nombre de Weber.

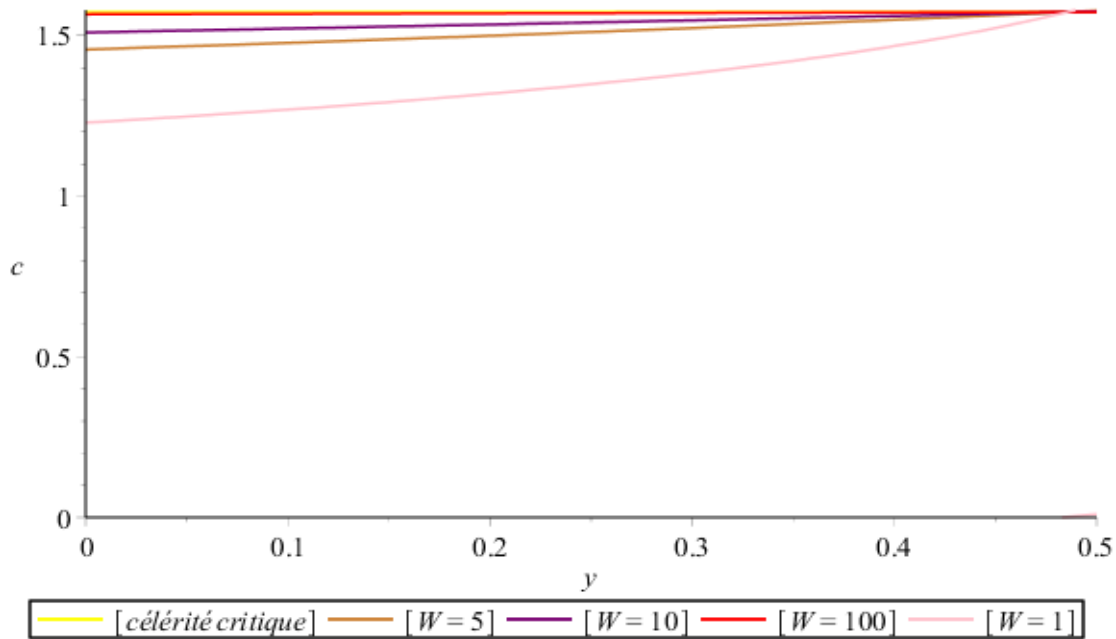


Figure 4 : influence du nombre de Weber sur la courbe de Hopf.

D'après la figure 4, on remarque que la diminution du nombre de Weber fait éloigner les courbes de Hopf de celle donnant la célérité critique. Lorsque le nombre de Weber tend vers zéro, la courbe obtenue marquera la limite d'obtention des ondes périodiques. Nous remarquerons de plus que ces courbes se rejoignent toutes au point correspondant au Reynolds critique.

3.5 Résolution de l'équation aux dérivées ordinaires

Dans cette dernière partie de l'étude nous présentons les résultats obtenus par intégration numérique du système dynamique (3.6) pour les conditions initiales suivantes :

$$U_1 = h = 0.3001$$

$$U_2 = h_\xi = 0.0010$$

$$U_3 = h_{\xi\xi} = 0.0010$$

En considérant le cas d'un écoulement de deux fluides de paramètres viscoélastique $\Gamma_1 = 0.05$ et $\Gamma_2 = 0.02$ dans un canal vertical puis en diminuant la célérité des ondes de 1.116 à 1.035, le système subit une cascade de dédoublement de période. Les points fixes (attracteurs) dans l'espace des phases et le profil de l'onde dans l'espace réel sont représentés sur la figure 5.

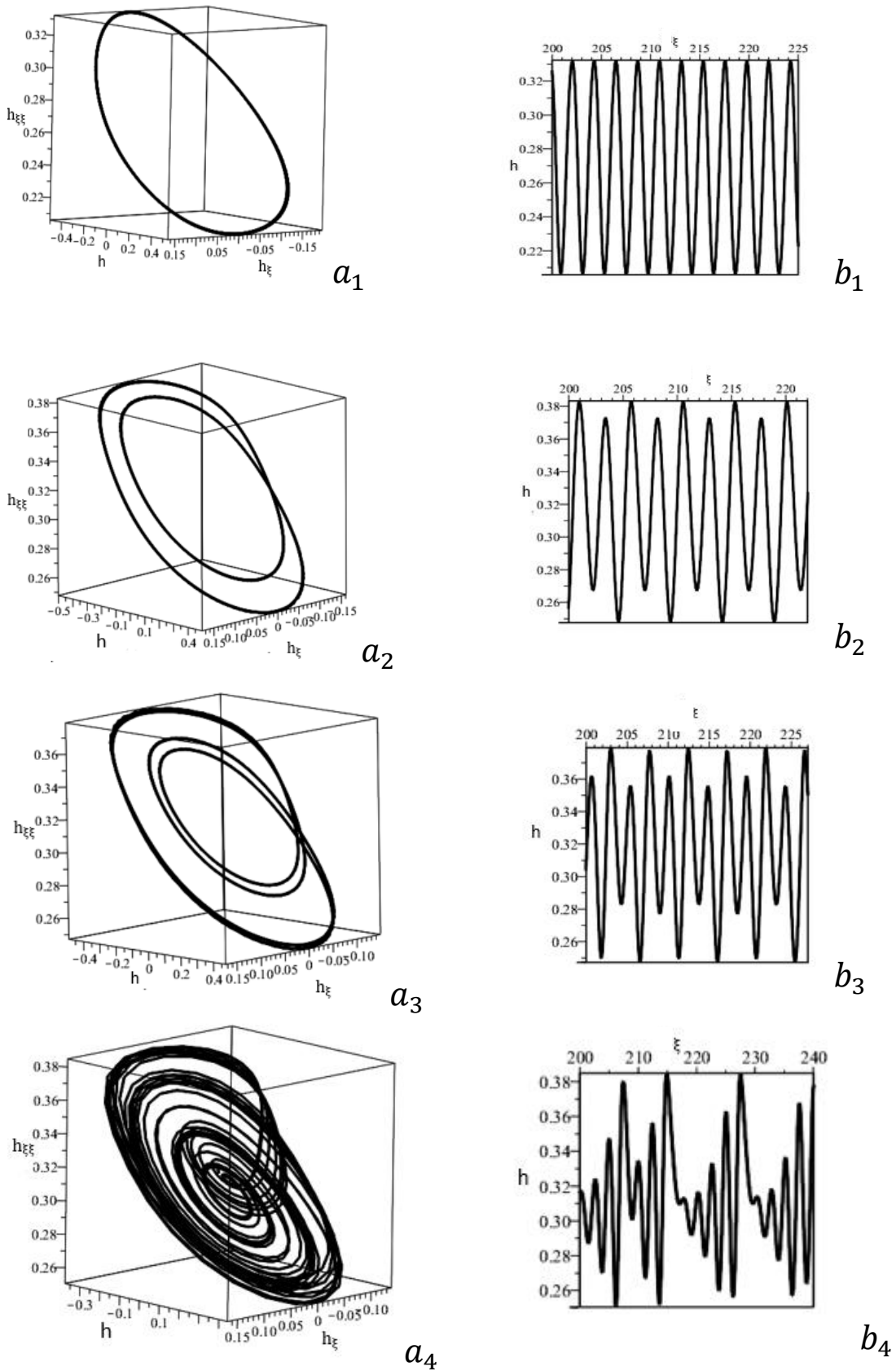


Figure 5 : cascade de doublement de période subit par le système dynamique ; $(a_1) C = 1.116, (a_2) C = 1.064, (a_3) C = 1.040, (a_4) C = 1.035$.

D'après la figure 5, on remarque que l'amplitude des cycles limites augmentent avec la diminution de la célérité des ondes.

A mesure que la célérité diminue, la période est multipliée par deux puis par quatre puis huit et ainsi de suite. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés et mènent le système à un état chaotique.

Conclusion générale

Dans ce travail de recherche nous nous sommes intéressés à l'étude non linéaire de stabilité d'un écoulement de deux fluides viscoélastiques dans un canal incliné.

Au chapitre 1, nous avons établi les équations régissant l'écoulement d'un film mince de deux couches de fluides viscoélastiques et les conditions aux limites qui leur sont adjointes puis on les a adimensionnées. L'écriture des équations du mouvement sous forme adimensionnelle a fait apparaître des groupements adimensionnels tels que le nombre de Reynolds et le nombre de Weber. Ces nombres nous ont permis de mettre en évidence les effets pertinents du problème.

Au chapitre 2, nous avons pu obtenir un modèle décrivant l'évolution spatio-temporelle de l'interface et le débit locale grâce à l'application de la méthode des résidus pondérés combinée à l'hypothèse d'ondes longues.

Au chapitre 3, nous nous sommes mises dans le cas particulier des ondes stationnaires et en utilisant la théorie des systèmes dynamiques, on a pu transformer le modèle à un système dynamique. L'étude de la stabilité du point fixe principale de ce système nous a permis de trouver le lieu des bifurcations de Hopf. L'étude de l'influence des paramètres viscoélastiques sur la courbe donnant le lieu des bifurcations de Hopf a permis de conclure que la viscoélasticité favorise le développement des bifurcations hétéroclines, des ondes donc sous forme de ressauts hydrauliques. Enfin, un scénario de transition vers le chaos par dédoublement de période a été identifié dans le cas d'un écoulement dans un canal vertical.

Reference

- [1] N. El Kissi, J-M. Piau, R. Chaigneau, *Stabilité Interfaciale en Coextrusion*, Vol.4, 1-17 (2003).
- [2] Amatousse N., Ait abderrahmane H., Mehidi N., *Traveling waves on a falling weakly viscoelastic fluid film*, IJES, 54, 27-41, (2012).
- [3] Ruyer-Quil C., & Manneville P., *Improved modeling of flows inclined planes*, Eur. Phys. J.B., 15, 357- 369, (2000).
- [4] Nadia Mehidi, Nawel Amatousse, Abdelmalek Bedhouche, *Interfacial instabilities of two-layer plane Poiseuille flows of viscoelastic fluids*, C. R. Mécanique 343 354–359 (2015).
- [5] Oldroyd, J.G. *On the formation of rheological equations of state*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A 200 p. 523–541, (1950).
- [6] Walters, K. *Non-Newtonian effects in some elastico-viscous liquids whose behaviour at small rates of shear is characterized by a general linear equation of state*. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 15 p. 63–76, (1962).
- [7] Shkadov, V. Ya., *Linear Theory of wave flow of thin layer of viscous liquid*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Mekh. Zhidk. Gaza, 2, 20, (1968).
- [8] Steven H strogatz, *nonlinear dynamics and chaos*, p. 241-283, 1994.