



Faculté Des Sciences Exactes  
Département de Physique

## Mémoire de Master

Filière : Physique  
Option : Physique théorique

Thème

# ***INTERACTION MATIERE-LUMIERE QUANTIFIEE***

Présenté par

***MAZA Thine-Hinane***

Projet soutenu le : 06/10/2021

Devant le Jury composé de

<b>GHARBI</b>	<b>Abdelhakim</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>
<b>BELABBAS</b>	<b>Abdelmoumene</b>	<b>MCA</b>	<b>Examineur</b>
<b>BELHADI</b>	<b>Zahir</b>	<b>MCA</b>	<b>Encadrant</b>

Année universitaire : 2020/2021

# DEDICACES

Je dédie cet évènement marquant de ma vie

A mes PARENTS, source de vie, d'amour et d'affection

A mes BRAVES FRERES, à ma TRES CHERE SŒUR et à ma BELLE SŒUR

A mes amis, tout particulièrement, KARIMA et DYHIA

A toutes les personnes qui m'ont toujours aidé et soutenu

THINE-HINANE

# REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné la force et la patience pour terminer ce travail, car sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être.

Ensuite, je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon encadrant Monsieur **BELHADI Zahir** (Maitre de conférences à l'université de Bejaïa), qui a fourni énormément d'efforts pour m'orienter, m'aider, me soutenir avec patience et m'encourager durant la période de recherche et d'élaboration de ce mémoire.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance aux membres de jury :

- Monsieur **GHARBI Abdelhakim** (Professeur à l'université de Bejaïa) ;
- Monsieur **BELABBAS Abdelmoumene** (Maitre de conférences à l'université de Bejaïa), de m'avoir fait l'honneur de bien vouloir présider et examiner ce mémoire.

Je remercie aussi tous les enseignants qui m'ont suivi durant ma formation, ainsi que toute ma famille.

Enfin, je tiens à adresser également ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont aidé et encouragé de près ou de loin dans la réalisation de ce modeste travail de fin d'études.

MAZA THINE-HINANE

---

# Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. Quantification de la lumière dans une cavité</b> .....	3
1.1. L'oscillateur harmonique quantique.....	3
1.2. Principe d'incertitude et l'oscillateur harmonique.....	7
1.3. Quantification du champ électromagnétique.....	8
1.4. Etats de Fock et les états cohérents de la lumière.....	14
<b>2. Approximation semi-classique Interaction atome-lumière classique</b> .....	19
2.1. L'hamiltonien d'interaction atome-lumière.....	19
2.2. Approximation dipôle dans la jauge de Goeppert-Mayer.....	22
2.3. Etat de Rydberg comme un atome à deux niveaux.....	23
2.4. Interaction atome à deux niveaux avec un champ électrique.....	24
2.5. Evolution semi-classique du système atome-lumière.....	27
2.6. Oscillation de Rabi semi-classique.....	31
<b>3. Interaction atome-lumière quantifiée</b> .....	35
3.1. Modèle de Jaynes-Cummings.....	35
3.2. Les valeurs et les états propres du $H_{JC}$ .....	38
3.3. Interaction d'un atome avec un état de Fock.....	43
3.4. Interaction d'un atome avec un état cohérent.....	46
<b>Conclusion générale</b> .....	50
<b>Bibliographie</b> .....	52

---

# Introduction Générale

Pendant longtemps, la nature de la lumière a été un mystère au centre des débats controversés au sein de la communauté scientifique. Newton par exemple, croyait que la lumière était un flux de particules minuscules, tandis que Huygens, Fresnel et Young ont préféré l'aspect ondulatoire, expliquant ainsi la plus belle expérience de la physique " les fentes de Young " au début du dix-neuvième siècle.

Selon Maxwell, l'entité physique qui se propage en onde n'est rien d'autre que les composantes en chaque point dans l'espace d'un champ électrique et d'un champ magnétique couplés. Mais pour expliquer les caractéristiques de l'effet photoélectrique, Einstein introduit la notion du photon comme étant un grain de lumière en s'appuyant sur les travaux ultérieurs de Planck. Einstein a aussi étudié le mécanisme de l'interaction entre les photons et la matière, en particulier, les phénomènes d'absorption et d'émission.

Le photon est un corpuscule dont l'énergie est une fonction de la fréquence de l'onde qui lui est associée, ce qui est le début de la dualité onde-particule. En effet, Louis de Broglie a prédit dans sa dynamique ondulatoire que toutes les particules de matière devraient se comporter comme des ondes (onde de matière) lors de leur propagation, exactement comme les photons, ce qui constitue l'acte de naissance de la mécanique quantique que nous connaissons aujourd'hui.

Pour rendre compte des phénomènes d'interaction entre la lumière et la matière, sujet de ce mémoire, il est nécessaire d'utiliser le formalisme de la mécanique quantique. En effet, la mécanique quantique constitue la base de toutes les disciplines fondamentales de la physique désirant une description du monde physique à des échelles microscopiques. Elle n'a jamais été remise en cause jusqu'à présent, ce qui fait d'elle sans doute, l'une des théories les mieux vérifiées par les résultats expérimentaux avec un champ d'application très immense.

L'optique quantique [1-6,17], qui est l'union de la théorie quantique des champs et de l'optique physique, est un domaine majeur de la physique moderne, dédié à l'étude de l'interaction entre la lumière et la matière dans un contexte purement quantique, afin d'expliquer l'ensemble des expériences dans lesquelles la lumière ou bien l'interaction entre

la lumière et la matière doivent être quantifiées. C'est un domaine de recherche en plein essor qui s'est imposé il y'a quelques décennies, à la frontière entre la théorie et l'expérience.

En effet, les développements récents de l'optique quantique permettent de réaliser des expériences interprétables dans le cadre des postulats de la mécanique quantique, proches des expériences de pensée imaginées dans le cadre du débat qui a divisé les physiciens fondateurs de la théorie quantique (Bohr, Schrödinger, Einstein).

D'une autre part, l'optique quantique ouvre sur les problématiques de l'information quantique en matière d'élaboration de protocoles de cryptographie, de télécommunication et du calcul quantiques, en servant des états non classiques de la lumière. Ces applications constituent un domaine de recherche très actif vu les intérêts scientifiques, technologiques, militaires et économiques que cela représente.

Ce travail est une brève introduction à l'étude l'interaction d'un atome à deux niveaux avec une onde électromagnétique quantifiée dans une cavité afin d'observer les échanges d'énergie entre les deux systèmes. Pour atteindre les objectifs fixés, nous organiserons ce mémoire de fin d'étude en trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré à de l'étude de l'oscillateur harmonique quantique, où nous allons rappeler certaines de ses propriétés quantiques, à savoir, ses valeurs et ses vecteurs propres ainsi que ses opérateurs d'annihilation et de création. Dans la deuxième partie, nous allons procéder à la quantification du champ électromagnétique dans une cavité [1] en tenant compte de l'analogie entre un mode du champ classique et un oscillateur harmonique.

Nous commencerons le deuxième chapitre par introduire le hamiltonien d'interaction lumière-matière en adoptant les transformations de jauge nécessaires, dans le cadre de l'approximation dipôle électrique [1,6]. Ensuite, nous ferons un traitement semi-classique de l'interaction de la lumière vue comme une onde électromagnétique classique avec un atome quantifié ayant deux niveaux d'énergie.

Nous nous intéresserons dans le troisième chapitre à l'interaction matière-lumière avec un traitement purement quantique de la matière et du rayonnement en se servant du modèle de Jaynes-Cummings [8,9,11,15,16]. Notre objectif est de déterminer la probabilité de transition entre les deux niveaux de l'atome suite à son interaction avec une onde électromagnétique quantifiée.

---

# Quantification de la Lumière dans une cavité

Dans ce chapitre, nous allons d'abord rappeler certains aspects quantiques d'un oscillateur harmonique, à savoir, les valeurs propres, les vecteurs propres, les valeurs moyennes et les différentes propriétés des opérateurs de création et d'annihilation. Ensuite, nous allons voir comment quantifier un champ électromagnétique monomodal dans une cavité unidimensionnelle [1] en allant des équations de Maxwell qui sont des lois fondamentales de l'électromagnétisme jusqu'à l'introduction de photons qui est une notion purement quantique. Pour terminer, nous étudierons quelques états quantiques de la lumière, qui sont les états de Fock où le nombre de photons est bien connu et les états cohérents qui peuvent représenter un laser.

## 1.1. L'oscillateur harmonique quantique

L'oscillateur harmonique est le modèle le plus simple et le plus important qu'on puisse utiliser pour décrire les états de vibration d'un système physique, c'est l'un des problèmes les plus importants en physique.

En mécanique quantique, beaucoup de systèmes sont modélisés par l'oscillateur harmonique, surtout que la résolution de l'équation de Schrödinger de ce problème se fait d'une manière exacte et sans faire des approximations.

En fonction des opérateurs de position  $X$  et d'impulsion  $P_x$ , le hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit comme suite

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \quad (1.1.1)$$

où  $m$  représente la masse et  $\omega$  la pulsion propre. Le hamiltonien  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, donc on a un système conservatif (stationnaire), ce qui nous suggère de résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps afin de trouver ces valeurs et vecteurs propres. Supposons que

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.1.2)$$

où les  $|n\rangle$  sont les vecteurs propres de l'opérateur  $H$ . Pour simplifier les calculs, on peut introduire les opérateurs sans dimension

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \quad , \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P_x \quad (1.1.3)$$

et le hamiltonien devient

$$H = \hbar\omega\hat{H} \Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}_x^2 + \hat{X}^2) \quad (1.1.4)$$

Introduisons maintenant les deux opérateurs non hermétiques  $\hat{a}$  et son adjoint  $\hat{a}^+$  qui vont nous simplifier les calculs

$$\hat{a} = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \hat{a}^+ = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad (1.1.5)$$

A partir de ces expressions, on déduit après inversion que

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \hat{P} = \frac{i(-\hat{a} + \hat{a}^+)}{\sqrt{2}} \quad (1.1.6)$$

Grâce au commutateur  $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ , on aura la relation de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (1.1.7)$$

On peut alors réécrire l'expression de  $\hat{H}$  en fonction de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$

$$\hat{H} = \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \quad (1.1.8)$$

qu'on met souvent sous la forme

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (1.1.9)$$

avec  $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ . On vérifie facilement que  $\hat{N}$  est hermétique

$$\hat{N}^+ = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = \hat{a}^+(\hat{a}^+)^+ = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{N} \quad (1.1.10)$$

Donc  $\hat{N}$  est une observable qui vérifie les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (1.1.11)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (1.1.12)$$

Finalement en cherchant les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\hat{N}$ , on trouvera aussi ceux de  $\hat{H}$ . Soit donc le problème aux valeurs propres

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.1.13)$$

où  $|n\rangle$  est le vecteur propre de  $\hat{N}$  avec la valeur propre  $n$ . On en déduit que

$$\hat{H}|n\rangle = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \quad (1.1.14)$$

Effectivement,  $|n\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{H}$  avec la valeur propre  $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)$  qui est aussi le vecteur propre de  $H = \hbar\omega\hat{H}$  avec la valeur propre  $E_n = \hbar\omega\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ .

A partir des relations de commutations précédentes, on peut déterminer le spectre de  $\hat{N}$ . En effet, nous avons

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (1.1.15)$$

d'où

$$\begin{cases} \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}^+|n\rangle = (\hat{a}^+\hat{N} + \hat{a}^+)|n\rangle = (n+1)\hat{a}^+|n\rangle \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Cela fait que  $|n\rangle$ ,  $\hat{a}|n\rangle$  et  $\hat{a}^+|n\rangle$ , sont des vecteurs propres de  $\hat{N}$  avec les valeurs propres respectives  $(n)$ ,  $(n-1)$  et  $(n+1)$ . On en déduit

$$\begin{cases} \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle \\ \hat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle \end{cases} \Rightarrow \hat{a}|n\rangle = C_1|n-1\rangle \quad (1.1.17)$$

et

$$\begin{cases} \hat{N}\hat{a}^+|n\rangle = (n+1)\hat{a}^+|n\rangle \\ \hat{N}|n+1\rangle = (n+1)|n+1\rangle \end{cases} \Rightarrow \hat{a}^+|n\rangle = C_2|n+1\rangle \quad (1.1.18)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des coefficients de proportionnalité qu'on peut fixer comme suit :

$$\begin{cases} \|\hat{a}|n\rangle\|^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{N}|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n \\ \|\hat{a}^+|n\rangle\|^2 = \langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle = \langle n|(\hat{N}+1)|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = (n+1) \end{cases} \quad (1.1.19)$$

On remarque que  $n$  est positif ou nul parce que  $\|\hat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0$ . Mais d'un autre côté,

$$\|\hat{a}|n\rangle\|^2 = |C_1|^2 \quad \text{et} \quad \|\hat{a}^\dagger|n\rangle\|^2 = |C_2|^2 \quad (1.1.20)$$

d'où  $C_1 = \sqrt{n}$  et  $C_2 = \sqrt{n+1}$ , ce qui nous permet d'écrire

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.1.21)$$

L'opérateur  $\hat{a}$  est appelé l'opérateur d'annihilation tandis que  $\hat{a}^\dagger$  est appelé l'opérateur de création. En effet, avec l'analyse des résultats d'application de  $\hat{a}$  sur le ket  $|n\rangle$  on aura

$$\hat{a}^k|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1} \dots \sqrt{n-k+1}|n-k\rangle \sim |n-k\rangle \quad k : \text{entier}$$

On constate que  $\hat{a}^k|n\rangle$  est proportionnel à  $|n-k\rangle$  qui est aussi un vecteur propre de  $\hat{N}$  avec la valeur propre  $(n-k)$ . Donc mathématiquement, on peut écrire que

$$\hat{N}\hat{a}^k|n\rangle = (n-k)\hat{a}^k|n\rangle \quad (1.1.22)$$

et comme on a vu précédemment que les valeurs propres de  $\hat{N}$  sont positives ou nulles, on ne peut dire que  $(n-k)$  une valeur propre sauf dans le cas où  $n-k \geq 0$ . Supposons que  $n < k$ , dans ce cas, il faut que  $\hat{a}^k|n\rangle = 0$ , pour éviter des valeurs propres négatives de  $\hat{N}$ . Il en résulte qu'il existe un état fondamental, noté  $|0\rangle$ , tel que

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (1.1.23)$$

Afin d'éviter toutes les valeurs propres négatives. A présent, si  $n < k$ ,

$$\hat{a}^k|n\rangle = \hat{a}^{k-n}\hat{a}^n|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1} \dots \sqrt{1}\hat{a}^{k-n}|0\rangle = 0.$$

Maintenant, calculons  $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$  avec la relation  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  :

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad \dots \quad (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle \quad (1.1.24)$$

Au final, on peut dire que les vecteurs propres d'un oscillateur harmonique quantique sont les kets  $|n\rangle$  où  $n$  est entier naturel tel que :

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad , \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.1.25)$$

$$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}|0\rangle; \quad \hat{a}|0\rangle = 0, \quad n = 0,1,2,3 \dots \quad (1.1.26)$$

## 1.2. Le principe d'incertitude et l'oscillateur harmonique

L'étude quantitative des oscillations nécessite un traitement quantique, ce qui va permettre après avoir trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres d'un système d'utiliser les opérateurs  $X$  et  $P$  dans le but de vérifier le principe d'incertitude. Pour ce faire, il faut d'abord trouver les valeurs moyennes des opérateurs  $X$  et  $P$  dans le cas où le système est dans l'un de ses états propres.

En effet, pour l'opérateur  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ , nous avons

$$\langle X \rangle = \langle n | X | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle + \sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle) \quad (1.2.1)$$

On trouve que la valeur moyenne de l'opérateur  $X$  est nulle

$$\langle X \rangle = 0 \quad (1.2.2)$$

Pour la variance  $\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  avec  $\langle X \rangle = 0$ , nous avons

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle \quad (1.2.3)$$

Sachant que  $\langle n | \hat{a}^2 | n \rangle = \langle n | \hat{a}^{\dagger 2} | n \rangle = 0$ ,  $\langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle = n+1$  et  $\langle n | \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle = n$ , on aura la variance  $\Delta X^2$

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) \quad (1.2.4)$$

Pour l'opérateur  $P = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ , la valeur moyenne est

$$\langle P \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle - \sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle) \quad (1.2.5)$$

ce qui nous donne aussi une valeur moyenne nulle de l'opérateur  $P$

$$\langle P \rangle = 0 \quad (1.2.6)$$

Pour la variance

$$\langle P^2 \rangle = -\frac{\hbar m \omega}{2} \langle n | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 | n \rangle = -\frac{\hbar m \omega}{2} \langle n | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle \quad (1.2.7)$$

ce qui donne la valeur

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) \quad (1.2.8)$$

Donc, la variance de l'opérateur  $P$  est

$$\Delta P^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) \quad (1.2.9)$$

A partir des équations de la variance des opérateurs  $X$  et  $P$  on déduit que

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = \frac{\hbar^2}{4} (2n + 1)^2 \quad (1.2.10)$$

ce qui nous ramène au final à la relation d'incertitude

$$\Delta X \Delta P = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2.11)$$

Nous avons donc retrouvé le principe d'incertitude de Heisenberg, selon lequel il est impossible de mesurer avec certitude absolue de mesurer la position  $X$  et l'impulsion  $P$  simultanément. Pour l'état fondamental ( $n=0$ ), la relation d'incertitude est saturée, ce qui signifie une plus grande précision

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} \quad (1.2.12)$$

### 1.3. Quantification du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est le couplage d'un champ électrique et d'un champ magnétique dans une seule entité physique. Le champ électrique est produit par la simple des charges électriques, alors que le champ magnétique est le résultat du déplacement de ces charges. En 1864, Maxwell démontra l'existence d'un phénomène complémentaire à l'induction de Faraday de 1831 : en effet, un champ électrique variable dans le temps induit l'existence d'un champ magnétique. Il pose dès lors quatre équations qui portent son nom qui synthétisent l'ensemble des connaissances acquises au cours des siècles et unifie les phénomènes électriques et magnétiques.

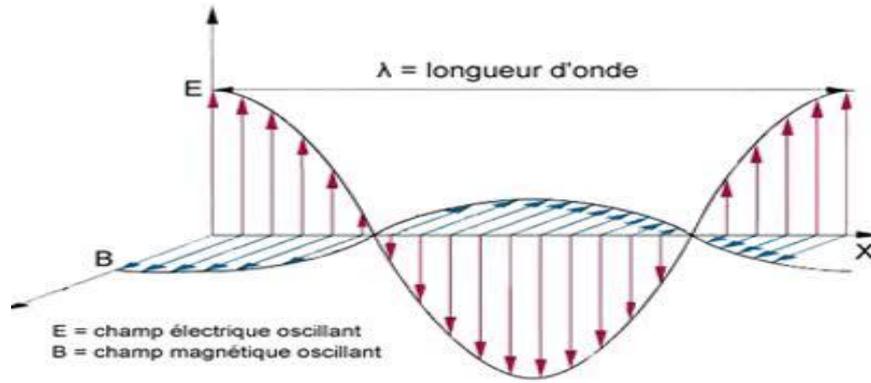


Figure 1 : champ électromagnétique

### 1.3.1. Equations de Maxwell pour le champ électromagnétique

Les équations de Maxwell sont quatre équations qui permettent de déterminer les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à partir des sources qui leur donnent naissance. Elles sont représentées par leur densité volumique de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ . En particulier, dans une cavité vide (où la distribution de charge  $\rho = 0$  et la densité du courant  $\vec{j} = \vec{0}$ ) de parois représentées par les plan  $y=0$  et  $y=L$ , la direction de propagation est portée par l'axe ( $OZ$ ), tandis que le champ électrique est de la forme  $\vec{E}(z) = \vec{E}_x = E_x \vec{i}$  et le champ magnétique est  $\vec{B}(z) = \vec{B}_y = B_y \vec{j}$  (autrement dit,  $\vec{B}_x = \vec{B}_z = \vec{0}$ ,  $\vec{E}_y = \vec{E}_z = \vec{0}$ ).

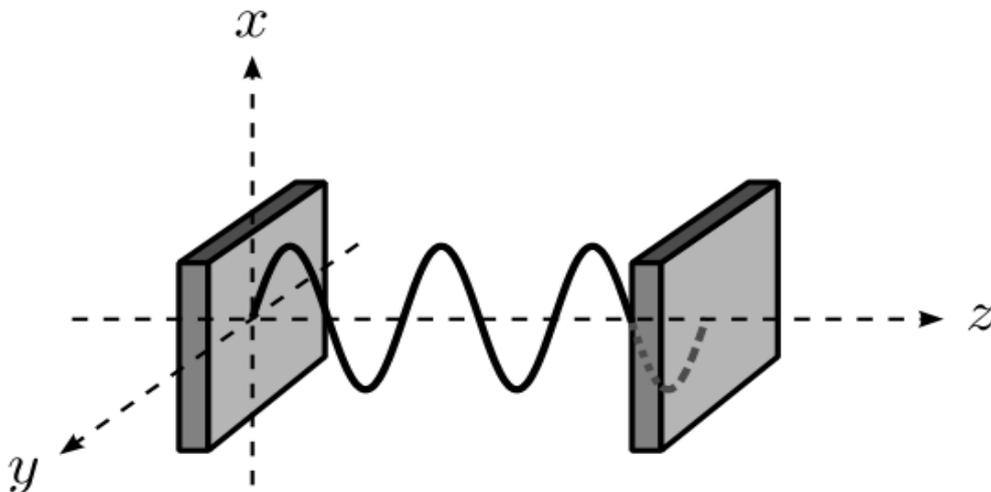


Figure 2 : Cavité avec des parois parfaitement non-conductrices. Le champ électrique est polarisé suivant la direction  $x$ .

Les équations de Maxwell dans le vide pour le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  se mettent sous la forme

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1.3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.3.4)$$

avec  $\vec{r} = (x, y, z)$  et  $t$  représentant respectivement le vecteur position et le temps,  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mu_0$  est la perméabilité du vide, et  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur nabla  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ .

Par l'application du rotationnel à l'équation (1.4.1) et avec l'utilisation des équations (1.3.2) et (1.3.3) on obtient l'équation D'Alembert pour le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1.3.5)$$

Si on utilise l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \Delta \vec{E} \quad (1.3.6)$$

on obtient l'équation

$$-\Delta \vec{E} = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\partial_t (\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (1.3.7)$$

Sachant que

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (1.3.8)$$

et

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.3.9)$$

l'équation (1.3.8) devient

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (1.3.10)$$

On a ainsi retrouvé l'équation D'Alembert relative aux composantes du champ électrique dans le vide.

Dans la suite, on va aborder seulement les champs monomodaux dans le vide. En l'absence de la charge, on montre que le champ peut être quantifié directement sans passer par le potentiel vectoriel, et sans se soucier du choix de la jauge. Avec les conditions aux limites  $\vec{E}_x(0, t) = \vec{E}_x(L, t) = \vec{0}$ , la solution monomodale de l'équation D'Alembert est de la forme

$$\vec{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} q(t) \sin(kz) \vec{i} \quad (1.3.11)$$

avec  $k = \frac{\pi m}{L}$  et  $\omega = kc$  où  $m = \{1, 2, 3, \dots\}$  et  $q(t)$  est une fonction du temps. Dans notre cas on va travailler avec une seule valeur de  $m$ . On utilise maintenant l'équation de Maxwell pour trouver le champ magnétique  $\vec{B}_y(z, t)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.3.12)$$

avec

$$\vec{B}_x = \vec{B}_z = 0 \quad (1.3.13)$$

d'où

$$-\partial_z B_y = \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz) \quad (1.3.14)$$

On en déduit facilement que

$$B_y = -\mu_0 \epsilon_0 \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} \dot{q}(t) \int \sin(kz) dz \quad (1.3.15)$$

On obtient ainsi l'expression du champ magnétique

$$\vec{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} \dot{q}(t) \cos(kz) \vec{j} \quad (1.3.16)$$

L'énergie électromagnétique est l'énergie du champ électromagnétique contenue dans un volume donné de l'espace à un instant donné qui s'obtient par l'intégration de la densité volumique sur le volume occupé par le champ. Dans le cas qu'on est en train d'étudier, on va calculer le hamiltonien qui correspond à l'énergie du champ électromagnétique qui va nous servir à effectuer à la quantification canonique.

$$H = \int_0^L dz \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \quad (1.3.17)$$

Après remplacement des champs,

$$H = \int_0^L dz \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 \frac{2\omega^2}{L\epsilon_0} q^2(t) \sin^2(kz) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right)^2 \left( \frac{2\omega^2}{L\epsilon_0} \right) \dot{q}^2(t) \cos^2(kz) \right] \quad (1.3.18)$$

Si on pose

$$p(t) = \dot{q}(t) \quad (1.3.19)$$

on aura

$$H = \int_0^L dz \frac{1}{L} [\omega^2 q^2(t) \sin^2(kz) + p^2(t) \cos^2(kz)] \quad (1.3.20)$$

A l'aide des relations  $\cos^2(kz) = \frac{1+\cos(2kz)}{2}$  et  $\sin^2(kz) = \frac{1-\cos(2kz)}{2}$ , le hamiltonien sera de la forme

$$H = \frac{1}{2L} \int_0^L dz (\omega^2 q^2(t) + p^2(t)) + \underbrace{\frac{1}{2L} \int_0^L dz (p^2(t) - \omega^2 q^2(t)) \cos(2kz)}_0 \quad (1.3.21)$$

En raison des conditions aux limites qui annulent les deux termes de cosinus, on obtient l'expression du hamiltonien du champ électromagnétique

$$H = \frac{1}{2} (p^2(t) + \omega^2 q^2(t)) \quad (1.3.22)$$

Nous remarquons que cette forme est similaire à celle de l'oscillateur harmonique classique à une seule dimension où les variables  $q(t)$  et  $p(t)$  sont respectivement analogues à la position et à l'impulsions.

### 1.3.2. Quantification du champ électromagnétique à un mode

Dans cette section, nous quantifions le champ électromagnétique monomodal. La forme du hamiltonien obtenue ci-dessus suggère de quantifier directement en introduisant les opérateurs suivants [1] :

$$q \rightarrow \hat{q} ; p \rightarrow \hat{p} \quad \text{avec} \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.3.23)$$

En effet, le champ électrique, le champ magnétique et le hamiltonien deviennent

$$\vec{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} \hat{q}(t) \sin(kz) \vec{i} \quad (1.3.24)$$

$$\vec{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \sqrt{\frac{2\omega^2}{L\epsilon_0}} \hat{p}(t) \cos(kz) \vec{j} \quad (1.3.25)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}^2(t) + \hat{p}^2(t)) \quad (1.3.26)$$

Les opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  sont hermitiens et ils correspondent à des observables toujours similaires au cas de l'oscillateur harmonique (définitivement quantique). Il est très pratique d'introduire des opérateurs d'annihilation  $\hat{a}$  et de création  $\hat{a}^+$  non hermitiens en utilisant les relations suivantes :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad , \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (1.3.27)$$

d'où

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (1.3.28)$$

avec inversion des relations précédentes on aura

$$\hat{q} = \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2\omega} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (1.3.29)$$

$$\hat{p} = -i \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2} (\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (1.3.30)$$

En remplaçant ces opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  dans les équations du champ électrique et du champ magnétique (1.3.24) et (1.3.25), on aboutit aux expressions ci-dessous.

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\epsilon_0}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) = E_0 (\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) \quad (1.3.31)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -i \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \hbar \omega^3}{L}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) = -i B_0 (\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) \quad (1.3.32)$$

où  $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\epsilon_0}}$  et  $B_0 = \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \hbar \omega^3}{L}}$ . L'opérateur hamiltonien  $\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}^2(t) + \hat{p}^2(t))$  va s'écrire aussi sous la forme réduite

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.3.33)$$

Nous constatons que ce hamiltonien est exactement le même que celui de l'oscillateur quantique, donc les vecteurs propres de  $\hat{H}$  sont des kets de la forme  $|n\rangle$  et ses valeurs propres

sont  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$  où  $n$  est un entier naturel. Dans le cas de l'oscillateur harmonique ces kets  $|n\rangle$  représentent des fonctions d'onde, mais en optique quantique, le ket  $|n\rangle$  décrit un état avec  $n$  photons d'énergie  $n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$ , ce qui fait que  $E_v = \frac{\hbar\omega}{2}$  est l'énergie du vide qui sera prise égale à zéro dans la suite. En effet, chaque photon aura donc une pulsation  $\omega$ , de telle sorte que  $n\hbar\omega$  sera l'énergie de  $n$  photons. Nous avons aussi  $k = \frac{\omega}{c}$ , avec  $k$  est le vecteur d'onde associé à ce photon, d'où l'impulsion  $p = \hbar k$  (relation de De Broglie).

## 1.4. Etats de Fock et les états cohérents de la lumière

### 1.4.1. Les états de Fock

Ces états sont les états propres du hamiltonien du champ libre avec un nombre fini et bien déterminé de photons  $n$ . Autrement dit, un état de Fock  $|n\rangle$  décrit un ensemble de  $n$  particules sans interaction, ce qui se justifie par le fait que ce dernier est l'un des états propres de l'opérateur  $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$  correspondant à la valeur propre  $n$

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.4.1)$$

Le hamiltonien d'un champ à un seul mode est donné par :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \quad (1.4.2)$$

Effectivement, les états de Fock sont aussi les vecteurs propres du hamiltonien avec les valeurs propres  $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ , ce qui veut dire que l'état de Fock  $|n\rangle$  est un état d'énergie, et non un état de champ électrique.

Avant de continuer rappelons les relations suivantes :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{et} \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.4.3)$$

Par l'application successive de l'opérateur de création  $\hat{a}^+$  sur l'état de vide  $|0\rangle$ , on obtient l'expression d'un état de Fock :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (1.4.4)$$

Nous allons à présent essayer d'évaluer la valeur moyenne du champ dans un état de Fock.

Pour ce faire, soient les relations ci-dessous.

$$\langle n|\hat{a}|n\rangle = 0 \quad (1.4.5)$$

$$\langle n|\hat{a}^+|n\rangle = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n \quad (1.4.7)$$

Comme le montre les calculs suivants, la valeur moyenne du champ électrique est nulle

$$\langle \hat{E}_x(z, t) \rangle = \langle n|\hat{E}_x(z, t)|n\rangle = E_0 \sin(kz) [\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+|n\rangle] = 0 \quad (1.4.8)$$

Par contre la moyenne du carré de champ ne l'est pas

$$\langle n|\hat{E}_x^2(z, t)|n\rangle = E_0^2 \sin^2(kz) \langle n|\hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+|n\rangle \quad (1.4.9)$$

d'où

$$\langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle = 2E_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.4.10)$$

Au final, on obtient la variance du champ électrique sous la forme :

$$(\Delta \hat{E}_x)^2 = \langle \hat{E}_x^2 \rangle - \langle \hat{E}_x \rangle^2 = 2E_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.4.11)$$

Le fait que la valeur moyenne du champ est nulle dans les états de Fock, fait de ces derniers des états purement quantiques sans équivalents classiques. Nous remarquons aussi que même si le nombre de photons est nul ( $n = 0$ ), le champ a des fluctuations  $\Delta \hat{E}_x = E_0 |\sin(kz)|$  non nulles, ce que l'on appelle les fluctuations du vide.

### 1.3.2. Les états cohérents

Les états cohérents ou les états semi-classiques, sont des états quantiques remarquables définis au départ par Schrödinger en 1926 dans le cas de l'oscillateur harmonique de telle sorte que les valeurs moyennes des opérateurs positions et impulsions dans ces états aient les propriétés des valeurs classiques de la position et de l'impulsion.

En 1963, R. Glauber [7] a réintroduit les états cohérents dans le contexte de l'optique quantique où ces états constitués un outil, à la fois nécessaire et efficace pour décrire les radiations d'une émission laser.

La théorie décrivant les états cohérents fait intervenir l'opérateur annihilation  $\hat{a}$  et l'opérateur de création  $\hat{a}^\dagger$  de la seconde quantification. Par définition, un état cohérent est état propre de l'opérateur  $\hat{a}$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.4.12)$$

Comme on l'a déjà vu que l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  n'est pas hermitien, ses valeurs propres de  $\alpha$  sont complexes. En utilisant la relation de fermeture

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (1.4.13)$$

Un état cohérent s'écrit

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (1.4.14)$$

avec

$$C_n = \langle n|\alpha\rangle ; \quad C_n \in \mathbb{C} \quad (1.4.15)$$

Maintenant, il faut déterminer les  $C_n$  en utilisant les relations suivantes :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1.4.16)$$

$$\langle n| = \langle 0| \frac{(\hat{a})^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.4.17)$$

On aura donc

$$C_n = \langle n|\alpha\rangle = \langle 0| \frac{(\hat{a})^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle \quad (1.4.18)$$

et après l'utilisation de l'équation  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , on aboutit à l'expression

$$C_n = \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.4.19)$$

Donc  $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ . En imposant la condition de normalisation  $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ , on en déduit que

$$|\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad (1.4.20)$$

d'où

$$|\langle 0|\alpha\rangle| = e^{-|\alpha|^2/2} \quad (1.4.21)$$

et

$$C_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (1.4.22)$$

Au final, on constate que l'état cohérent peut se mettre sous la forme

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.4.23)$$

A l'étude de l'état cohérent, on s'aperçu que le nombre de photons ne peut pas être bien précisé. La probabilité que le nombre de photons soit égal à  $n$  suit une distribution de Poisson.

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \quad (1.4.24)$$

Le nombre moyen de photons est

$$\bar{n} = \langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha \alpha^* \langle \alpha | \alpha \rangle \quad (1.4.25)$$

donc

$$\bar{n} = |\alpha|^2 \quad (1.4.26)$$

Pour l'écart-type, nous avons

$$\langle \hat{N}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad (1.4.27)$$

d'où la variance

$$(\Delta \hat{N})^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 \quad (1.4.28)$$

Finalement, l'écart-type, qui est aussi l'incertitude sur le nombre de photons, est

$$\Delta \hat{N} = |\alpha| \quad \Rightarrow \quad \Delta \hat{N} = \langle \hat{N} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (1.4.29)$$

Pour récapituler, dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , le nombre moyen de photons est  $|\alpha|^2$  avec l'incertitude  $|\alpha|$ .

Avant d'entamer le chapitre suivant, il serait très intéressant d'évaluer la moyenne du champ électrique dans le cas d'un état cohérent. En effet,

$$\langle \hat{E}_x(z, t) \rangle = \langle \alpha | \hat{E}_x(z, t) | \alpha \rangle = E_0 \sin(kz) [\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle]$$

Mais  $\hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$ , donc

$$\langle \hat{E}_x(z, t) \rangle = (\alpha + \alpha^*) E_0 \sin(kz) \quad (1.4.30)$$

La valeur moyenne du champ est identique à l'expression classique, ce qui fait des états cohérents des états **quasi-classiques**. Donc, le meilleur moyen de décrire des états classiques dans un contexte quantique est de faire appel à des états cohérents avec la bonne valeur du paramètre  $\alpha$ .

Pour conclure, nous pouvons dire que dans la première partie de ce chapitre, nous avons réussi à trouver les valeurs et les vecteurs propres d'un oscillateur harmonique quantique à l'aide de ses opérateurs d'annihilation et de création. Par la suite, nous avons fait appel aux équations de Maxwell à partir desquelles nous avons obtenu les équations du champ électromagnétique, qui ont permis au final de faire la quantification d'un champ électromagnétique monomodal dans une cavité. Dans la dernière partie, nous avons enrichi le contenu de notre chapitre par la détermination de quelques états quantiques de la lumière, en particulier, l'état de Fock et les états cohérents qui sont des états quasi-classiques. Nous avons également vérifié le principe d'incertitude de Heisenberg après avoir calculé les valeurs moyennes des différents opérateurs dans chacun des états indiqués.

# 2 Approximation semi-classique de l'interaction atome-lumière

L'atome à deux niveaux est l'acteur de l'interaction des atomes avec le champ électromagnétique qui se caractérise par son analogie avec à un spin 1/2 en présence d'un champ magnétique tournant. En effet, la dynamique de ces deux systèmes est relativement simple et exacte dans sa résolution, ce qui permet de bien saisir les phénomènes liés à ces interactions.

Dans ce chapitre, on vise à étudier dans le cadre semi-classique l'interaction d'un seul atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique monomodal classique, où les deux systèmes sont couplés par l'interaction dipolaire électrique que nous allons introduire avec les calculs et les détails nécessaires [1,6].

## 2.1. Le hamiltonien de l'interaction atome-lumière

Le but de cette section est d'introduire le hamiltonien décrivant l'interaction lumière-matière, dont l'élément principal est le terme d'interaction. Pour construire ce dernier, on fait appel aux équations de base de l'électrodynamique, à savoir, les équations de Maxwell, déjà vues, qui relie le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  aux densités de charge  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.4)$$

La deuxième et la troisième équation permettent de déduire l'existence d'un potentiel vectoriel  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et d'un potentiel scalaire  $U(\mathbf{r}, t)$  tel que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla U \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1.6)$$

Il existe une infinité de paires de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et  $U(\mathbf{r}, t)$  associées au même champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  liées via une transformation de jauge de la forme

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.7)$$

$$U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1.8)$$

avec  $\chi(\mathbf{r}, t)$  est fonction quelconque de  $(\mathbf{r}, t)$ .

Le hamiltonien d'interaction d'un électron de masse  $m$  et de charge électrique  $q$ , lié à un atome en présence d'un champ électromagnétique classique décrit par les potentiels vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et scalaire  $U(\mathbf{r}, t)$  s'écrit sous la forme [1]

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + qU(\mathbf{r}, t) + qU_{coul}(\mathbf{r}) \quad (2.1.9)$$

où  $U_{coul}(\mathbf{r})$  est le potentiel de Coulomb dû au noyau de l'atome. Dans ce qui va suivre, nous allons imposer une condition supplémentaire pour fixer les potentiels. En effet, on va choisir la jauge de Coulomb qui est bien adaptée aux problèmes de l'optique quantique. Cela revient à prendre la condition

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.10)$$

Dans le cadre de notre étude, plaçons-nous dans le cas où le champ électromagnétique est une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2.1.13)$$

Le potentiel vecteur correspondant en jauge de Coulomb à ce champ est de la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{E}_0}{\omega} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.14)$$

avec un potentiel scalaire nul

$$U(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.15)$$

A présent, l'équation du champ électrique d'une onde électromagnétique plane se réduit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.16)$$

Dans ces conditions, le hamiltonien ci-dessus va se réduire à l'expression

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + qU_{coul}(\mathbf{r}) \quad (2.1.17)$$

Après développement, il va être séparé en deux termes

$$H = H_{at} + H_I \quad (2.1.18)$$

avec

$$H_I = \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2 \quad (2.1.19)$$

et

$$H_{at} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + qU_{coul}(\mathbf{r}) \quad (2.1.20)$$

Pour arriver à ces expressions, nous avons utilisé le fait que dans la jauge de Coulomb,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \quad (2.1.21)$$

car

$$[\mathbf{p}, \mathbf{A}] = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.1.22)$$

Sauf en cas de champ électromagnétique intense, le deuxième terme du hamiltonien  $H_I$  est négligeable devant le premier car le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  intervenant dans les expériences est relativement faible. Finalement, le hamiltonien d'un électron d'atome en présence d'une onde électromagnétique se réduit à la forme

$$H = H_{at} + \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + qU_{coul}(\mathbf{r}) + \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \quad (2.1.23)$$

## 2.2. Approximation dipôle dans la jauge de Goeppert-Mayer

Dans le cas d'un rayonnement à grandes longueurs d'onde, on peut souvent faire une simplification supplémentaire qui est l'approximation dipôle, appelée aussi approximation des grandes longueurs d'onde. En effet, on se retrouve généralement dans la situation où la longueur d'onde est très grande par rapport à la taille de l'atome, comme c'est le cas pour l'atome d'hydrogène, où les raies d'émission ou d'absorption ont des longueurs d'ondes de l'ordre 100 nm ou plus, tandis que les dimensions atomiques sont de l'ordre du rayon de Bohr ( $a_0 = 0.053$  nm), ce qui fait un rapport de presque 1/500. Donc la variation dans l'espace de l'onde électromagnétique vue par l'atome est pratiquement nulle, ce qui peut être exprimé en écrivant que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.2.1)$$

où  $\mathbf{r}_0$  représente la position de l'atome. Maintenant le hamiltonien de l'interaction atome lumière sera

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + qU_{coul}(\mathbf{r}) + \frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.2.2)$$

A ce stade, une autre représentation un peu plus intuitive du hamiltonien précédent peut être obtenue en travaillant avec une autre jauge. Il s'agit de la jauge de Goeppert-Mayer qui se déduit de la jauge de Coulomb par une transformation de jauge grâce aux équations (2.1.7) et (2.1.8) dans lesquelles on choisit

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.2.3)$$

Dans cette transformation, les potentiels se transforment comme suit :

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.2.4)$$

$$U'(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} \quad (2.2.5)$$

Le hamiltonien déjà vue dans l'équation (2.1.9) devient après cette transformation

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t))^2 + qU'(\mathbf{r}, t) + qU_{coul}(\mathbf{r}) \quad (2.2.6)$$

soit,

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t))^2 + q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} + qU_{coul}(\mathbf{r}) \quad (2.2.7)$$

D'après (2.1.16) et (2.2.1), nous avons  $\frac{\partial A(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = -\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$  et  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$ , d'où l'expression finale du hamiltonien de l'interaction d'une onde plane avec un atome

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + qU_{coul}(\mathbf{r}) - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.2.8)$$

où  $\mathbf{D}$  est le moment dipolaire électrique du système électron-noyau (de l'atome) donné par

$$\mathbf{D} = q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.2.9)$$

Pour résumer, nous sommes passés d'un terme d'interaction de la forme  $\left(\frac{q}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\right)$  dans la jauge de Coulomb à un terme de la forme  $(-\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})$  avec la jauge de Goeppert-Mayer.

### 2.3. Etat de Rydberg comme atome à deux niveaux

Bien que les atomes avec seulement deux niveaux d'énergies n'existent pas réellement dans la nature, il est possible qu'un atome réel se comporte comme tel dans la situation où la fréquence du champ de rayonnement excitant est très proche de la fréquence de transition entre deux niveaux d'énergie bien définis de ce dernier [10,12,15]. Autrement dit, la seule transition possible va se faire entre ces deux niveaux, en laissant de côté les autres niveaux atomiques.

Expérimentalement, l'étude de l'interaction entre un champ avec un atome à deux niveaux se fait souvent grâce à des atomes de Rydberg. En effet, les états de Rydberg circulaires s'obtiennent lorsque des atomes avec un électron sur l'orbite extérieure sont fortement excités pour atteindre un état caractérisé par un très grand nombre quantique principal  $n$  compris entre  $n = 50$  et  $n = 100$ , avec des moments angulaire et magnétique maximaux  $l = |m| = n - 1$ . Par conséquent, ces atomes peuvent être bien décrits par le modèle atomique de Bohr de l'hydrogène, mais leur taille est  $n^2$  plus grande que la taille de cet atome. Les atomes de Rydberg sont donc des atomes géants, ayant un moment dipolaire électrique important à l'échelle atomique, ce qui fait qu'ils se couplent facilement avec le

champ électrique.

Par exemple, de nombreux atomes de Rydberg composés d'atomes de rubidium<sup>85</sup>Rb, qui est un métal alcalin, sont utilisés pour détecter de manière non destructrice la présence d'un photon dans une cavité, en ne permettant que la transition entre les niveaux circulaires  $n=50$  et  $n=51$ . Ce type d'atome est difficile à obtenir et nécessite l'utilisation d'une source laser. Ils sont aussi très fragiles et il faut les produire à basse pression pour éviter les collisions entre atomes.

## 2.4. Interaction d'atome à deux niveaux avec un champ électrique

Dans cette section de notre travail, nous allons aborder l'étude d'un système à deux niveaux d'énergie en interaction avec une onde électromagnétique [1,6], après avoir fait les approximations nécessaires des sections précédentes.

On considère alors un champ électrique classique d'expression  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ , supposé réel (cette forme est obtenue avec le choix de  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  dans l'expression de l'onde plane). Ce champ interagit en couplage dipolaire électrique avec un atome à deux niveaux d'énergie  $E_g$  et  $E_e$  correspondant aux états propres  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  où  $|g\rangle$  est l'état fondamental (ground state) avec l'énergie  $E_g$  et  $|e\rangle$  représentant l'état excité (excited state) dont l'énergie est  $E_e$ . Ces états peuvent être notés de plusieurs manières

$$|g\rangle = |i\rangle = |- \rangle = |2\rangle \quad (2.4.1)$$

$$|e\rangle = |f\rangle = |+ \rangle = |1\rangle \quad (2.4.2)$$

Si le hamiltonien de l'atome est  $H_{at}$ , nous aurons des équations aux valeurs propres

$$H_{at}|g\rangle = E_g|g\rangle \quad ; \quad H_{at}|e\rangle = E_e|e\rangle \quad (2.4.3)$$

L'atome étant un système à deux niveaux, il est analogue à un spin 1/2, d'où la possibilité de représenter les opérateurs par des matrices d'ordre 2. Pour commencer, il faut savoir que dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , nous avons

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

A l'aide de la relation de fermeture  $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1$ , le hamiltonien de l'atome va prendre la forme

$$H_{at} = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

La différence d'énergie entre ces deux états est proportionnelle à la fréquence de Bohr de transition entre eux

$$\omega_0 = \frac{E_e - E_g}{\hbar} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E_e = \hbar\omega_0 + E_g \quad (2.4.6)$$

Le hamiltonien atomique peut alors s'exprimer sous la forme

$$H_{at} = \frac{1}{2}(E_g + E_e) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(E_e - E_g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

d'où

$$H_{at} = \frac{1}{2}(E_g + E_e)\mathbb{1}_{2 \times 2} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z \quad (2.4.8)$$

où  $\sigma_z$  est l'une des matrices de Pauli dont on rappelle les expressions

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

L'objectif de notre travail est d'étudier l'émission et l'absorption de l'atome sous l'effet de l'onde électromagnétique, et dans les deux cas, c'est la différence d'énergie qui entre en jeu. Pour cette raison, on va omettre le premier terme du hamiltonien atomique

$$H_{at} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

Le hamiltonien de l'interaction atome lumière déjà construit dans la section précédente est de la forme

$$H = H_{at} + V \quad (2.4.11)$$

où le terme d'interaction  $H_I = V$  est donné par

$$V = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.4.12)$$

avec le champ électrique

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (2.4.13)$$

et le moment dipolaire

$$\mathbf{D} = q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = q\mathbf{R}. \quad (2.4.14)$$

Donc

$$V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R} \cos \omega t \quad (2.4.15)$$

Si on pose  $V_0 = -q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}$ , on peut avoir la forme réduite

$$V = -V_0 \cos(\omega t) \quad (2.4.16)$$

Maintenant, il nous faut la représentation matricielle de l'opérateur  $\hat{V} = -\hat{V}_0 \cos(\omega t)$  associé à  $V = -V_0 \cos(\omega t)$  pour terminer la construction du hamiltonien de système lumière atome. En effet, si on pose  $\langle 1 | \hat{V}_0 | 2 \rangle = \tilde{V}$ , on aura les deux éléments

$$V_{12} = \langle 1 | -\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{D}} | 2 \rangle = -\langle 1 | \hat{V}_0 | 2 \rangle \cos \omega t = -\tilde{V} \cos \omega t \quad (2.4.17)$$

$$V_{21} = -\langle 2 | \hat{V}_0 | 1 \rangle \cos \omega t = -\langle 1 | \hat{V}_0 | 2 \rangle^* \cos \omega t = -\tilde{V}^* \cos \omega t \quad (2.4.18)$$

Car l'opérateur  $\hat{V}_0$  est hermitien ( $\hat{V}_0^+ = \hat{V}_0$ ). Les deux autres éléments de la matrice associée à l'opérateur  $V$  sont nuls

$$V_{11} = \langle 1 | -\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{D}} | 1 \rangle = 0 \quad (2.4.19)$$

$$V_{22} = \langle 2 | -\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{D}} | 2 \rangle = 0 \quad (2.4.20)$$

Cela est dû au fait que les transitions atomiques se font d'un niveau à un autre niveau **différent**. En effet, il ne faut pas perdre de vue que les états  $|1\rangle = |e\rangle$  et  $|2\rangle = |g\rangle$  sont des états choisis dans un atome obéissant à des règles de sélection bien connues du rayonnement dipolaire (une conséquence de la parité des fonctions d'onde hydrogénoïdes). Au final,

$$V = -\begin{pmatrix} 0 & \tilde{V} \\ \tilde{V}^* & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t) \quad (2.4.21)$$

D'après l'équation (2.4.11), le hamiltonien du système devient

$$H = H_{at} + V = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{V} \\ \tilde{V}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.22).$$

Ce hamiltonien dépend de la différence d'énergie entre les états caractérisée par la fréquence de transition  $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$  et de la fréquence  $\omega$  du champ de l'onde électromagnétique.

Avec un bon choix des états atomiques, on peut se mettre dans la situation où  $\tilde{V}$  est un réel qu'on va poser égal à  $\Omega$

$$\Omega = \tilde{V} = \tilde{V}^* \quad (2.4.23)$$

Notre hamiltonien aura alors la forme définitive

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \Omega \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.24)$$

Le paramètre  $\Omega$  est une fréquence classique qui caractérise l'intensité du couplage entre le dipôle atomique et le champ électrique.

## 2.5. Evolution semi-classique du système lumière-atome

Après avoir établi le hamiltonien de l'interaction de notre atome à deux niveaux avec l'onde plane électromagnétique, nous nous intéresserons dans cette section à la résolution de l'équation de Schrödinger relative à ce système

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.5.1)$$

où

$$H = H_{at} + V = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & -\Omega \cos \omega t \\ -\Omega \cos \omega t & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (2.5.2)$$

Pour ce faire, nous avons écrire le vecteur d'état sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t) e^{\frac{-iE_g t}{\hbar}} |g\rangle + C_e(t) e^{\frac{-iE_e t}{\hbar}} |e\rangle \quad (2.5.3)$$

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t) e^{\frac{-iE_g t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_e(t) e^{\frac{-iE_e t}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.4)$$

Autrement dit,

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} C_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} \\ C_g(t)e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

En calculant la dérivée du vecteur d'état, on aboutit à

$$\frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{C}_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} - \frac{iE_e}{\hbar} C_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} \\ \dot{C}_g(t)e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} - \frac{iE_g}{\hbar} C_g(t)e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

Nous avons aussi

$$H|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} C_e(t)e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} - \Omega \cos(\omega t) C_g(t) e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} \\ -\Omega \cos(\omega t) C_g(t) e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} - \frac{\hbar\omega_0}{2} C_e(t) e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (2.5.7)$$

A partir des deux équations précédentes, nous aurons les relations suivantes :

$$\dot{C}_g(t) = \frac{i}{\hbar} E_g C_g(t) + \frac{\hbar\omega_0}{2} C_g(t) - \Omega \cos(\omega t) C_e(t) e^{-\frac{iE_e t}{\hbar}} \quad (2.5.8)$$

$$\dot{C}_e(t) = \frac{i}{\hbar} E_e C_e(t) - \Omega \cos(\omega t) C_g(t) e^{-\frac{iE_g t}{\hbar}} - \frac{\hbar\omega_0}{2} C_e(t) \quad (2.5.9)$$

Sachant que  $E_g = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$ ,  $E_e = \frac{\hbar\omega_0}{2}$  et  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ , le système d'équations devient

$$\dot{C}_g(t) = -\frac{i}{\hbar} \Omega \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2} C_e(t) - \frac{i}{\hbar} \Omega \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2} C_e(t) \quad (2.5.10)$$

$$\dot{C}_e(t) = -\frac{i}{\hbar} \Omega \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2} C_g(t) - \frac{i}{\hbar} \Omega \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t}}{2} C_g(t) \quad (2.5.11)$$

A ce stade, nous allons négliger les deux termes en  $e^{i(\omega+\omega_0)t}$  devant les autres termes en  $e^{i(\omega-\omega_0)t}$  car dans les expériences, on choisit toujours des conditions où la pulsation de l'onde plane est très proche de la pulsation de transition  $(\omega_0 - \omega) = \delta \approx 0$ , ce qui rend

$\omega + \omega_0 \gg \delta$  ; et cela afin de garantir que la seule transition atomique possible est celle correspondant à la fréquence  $\omega_0$ . De ce fait, les termes en  $e^{-i(\omega+\omega_0)t}$  vont osciller très rapidement autour de zéro comparés aux termes en  $e^{i(\omega-\omega_0)t}$  et ainsi, leurs moyennes dans le temps vont être nulles. On parle ici de l'approximation de l'onde tournante.

Après cette simplification, notre système d'équations va se réduire à la forme

$$\dot{C}_g(t) = -\frac{i}{2\hbar}\Omega e^{-i\delta t} C_e(t) \quad (2.5.12)$$

$$\dot{C}_e(t) = -\frac{i}{2\hbar}\Omega e^{i\delta t} C_g(t) \quad (2.5.13)$$

où le désaccord entre les fréquences de l'atome et du champ est

$$\delta = \omega_0 - \omega \quad (2.5.14)$$

Après dérivation de la deuxième équation par rapport au temps et utilisation des deux équations précédentes, on obtient l'équation différentielle du coefficient  $C_e(t)$

$$\ddot{C}_e(t) - i\delta\dot{C}_e(t) + \frac{\Omega^2}{4\hbar^2}C_e(t) = 0 \quad (2.5.15)$$

Nous avons ainsi obtenu une équation linéaire de deuxième degré dont la solution se met sous la forme suivante :

$$C_e(t) = A e^{irt} \quad (2.5.16)$$

Après injection dans l'équation différentielle,

$$\left[ -r^2 - i\delta(ir) + \frac{\Omega^2}{4\hbar^2} \right] A e^{irt} = 0 \quad (2.5.17)$$

d'où l'équation caractéristique

$$r^2 - \delta r - \frac{\Omega}{4\hbar^2} = 0 \quad (2.5.18)$$

ayant les deux solutions distinctes

$$r = \frac{-\delta \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = \delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \quad (2.5.19)$$

Explicitement,

$$r_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} \quad , \quad r_2 = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} \quad (2.5.20)$$

La solution générale est combinaison linéaire

$$C_e(t) = A e^{ir_1 t} + B e^{ir_2 t} \quad (2.5.21)$$

Pour déterminer  $C_g(t)$ , nous allons utiliser l'équation  $\dot{C}_e(t) = -\frac{i}{2\hbar} \Omega e^{i\delta t} C_g(t)$ , d'où

$$C_g(t) = \frac{2i\hbar}{\Omega} e^{i\delta t} \dot{C}_e(t) \quad (2.5.22)$$

d'où l'expression générale de  $C_g(t)$

$$C_g(t) = -\frac{2\hbar}{\Omega} e^{i\delta t} [r_1 A e^{ir_1 t} + r_2 B e^{ir_2 t}] \quad (2.5.23)$$

Pour continuer, on considère que notre système se trouve dans l'état fondamental  $|\Psi(0)\rangle = |g\rangle$  à  $t=0$ , ce qui revient à prendre les conditions initiales  $C_g(0) = 1$ , et  $C_e(0) = 0$

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t) e^{\frac{+i\hbar\omega_0 t}{2}} |g\rangle + C_e(t) e^{\frac{-i\hbar\omega_0 t}{2}} |e\rangle \quad (2.5.24)$$

D'après l'équation (2.5.21), nous aurons les conditions

$$\begin{aligned} C_e(0) = A + B = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ C_g(0) = -\frac{2\hbar}{\Omega} [r_1 A + r_2 B] = 1 &\Rightarrow r_1 A + r_2 B = -\frac{\Omega}{2\hbar} \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Après substitution,

$$A \left( \frac{2\hbar}{\Omega} \right) [-r_1 + r_2] = 1 \Rightarrow A = \frac{\Omega}{2\hbar} \frac{1}{-r_1 + r_2} \quad (2.5.27)$$

En remplaçant  $r_1$  et  $r_2$  par leurs expressions, on trouve

$$A = -\frac{1}{2\hbar \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} \Omega \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2\hbar \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} \Omega \quad (2.5.28)$$

Finalement, la solution recherchée vérifiant les conditions initiales est de la forme

$$C_e(t) = \frac{1}{2\hbar\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} \Omega (-e^{ir_1 t} + e^{ir_2 t}) \quad (2.5.29)$$

$$C_g(t) = -\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} e^{i\delta t} (-r_1 e^{ir_1 t} + r_2 e^{ir_2 t}) \quad (2.5.30)$$

Comme  $r_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}$  et  $r_2 = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}$ , la solution définitive va se mettre sous la forme explicite

$$C_e(t) = \frac{i}{\hbar\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} \Omega e^{i\frac{\delta}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} t\right) \quad (2.5.31)$$

$$C_g(t) = e^{i\frac{\delta}{2}t} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} t\right) - \frac{i\delta}{\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} t\right) \right] \quad (2.5.32)$$

L'état du système atome-lumière est alors décrit par le ket

$$|\Psi(t)\rangle = C_g(t)e^{i\frac{\omega_0}{2}t}|g\rangle + C_e(t)e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}|e\rangle \quad (2.5.33)$$

## 2.6. Oscillations de Rabi semi-classiques

Une fois que la solution des l'équation de Schrödinger est obtenue, la question qui se pose est de calculer la probabilité que l'atome, initialement l'état fondamental  $|g\rangle$ , se trouve dans l'état excité  $|e\rangle$  à un instant  $t$ . Le postulat de mesure de la mécanique quantique nous permet d'écrire que cette probabilité est donnée par la relation

$$P_{g \rightarrow e}(t) = |\langle e|\Psi(t)\rangle|^2 \quad (2.6.1)$$

Sachant que  $|\Psi(t)\rangle = C_g(t)e^{i\frac{\omega_0}{2}t}|g\rangle + C_e(t)e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}|e\rangle$ , la probabilité recherchée sera égale à

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \left| e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} C_e(t) \right|^2 = |C_e(t)|^2 \quad (2.6.2)$$

Explicitement,

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \left( \delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \right)^{-1} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} t \right) \quad (2.6.3)$$

Cette probabilité de transition est une fonction sinusoïdale d'amplitude  $\frac{\Omega^2}{\hbar^2} \left( \delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \right)^{-1}$  dépendant de la fréquence  $\Omega_R = \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}$  appelée la fréquence de Rabi, et ce phénomène d'oscillations de probabilité de transition est appelé oscillations de Rabi.

Ce phénomène est observé initialement par Isidor Isaac Rabi en 1939 lors de l'étude des états du spin dans la résonance magnétique nucléaire (RMN). Le spin nucléaire et tout d'abord engagé dans un champ magnétique constant et uniforme et par la suite un champ magnétique tournant qui a effet pour introduire les transitions entre les états de spin et par le couplage avec ce deuxième champ que le modèle de Rabi est né. Il se définit comme étant des oscillations dans l'occupation des états d'un système à deux niveaux excités à une fréquence proche de la résonance, ils s'inscrivent dans le cadre général des systèmes physiques quantiques à deux niveaux.

Nous avons montré que ce phénomène peut se produire avec un atome à deux niveaux en interaction semi-classique avec une onde électromagnétique dans le cadre de l'approximation du dipôle.

Dans le cas résonnant où  $\delta = 0$ , la probabilité se réduit à

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \sin^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\hbar} t \right) \quad (2.6.4)$$

Ce qui montre que cette probabilité oscille entre zéro (0) et un (1). Autrement dit, une demi-période  $\frac{T}{2} = \pi \hbar / \Omega$ , après l'instant initial, l'atome va passer à l'état excité, et une demi-période juste après, il va revenir à l'état fondamental et ainsi de suite. Nous sommes bel et bien dans une situation d'oscillations entre ces deux niveaux

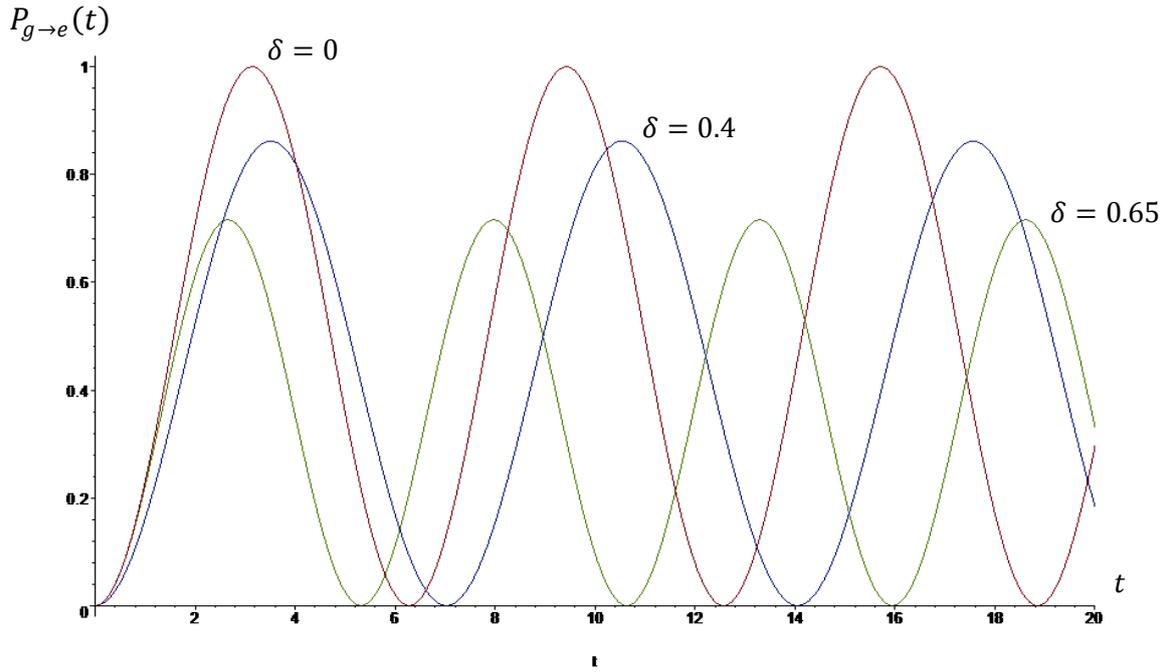


Figure 1 : Probabilité de transition entre le niveau fondamental et niveau excité.

Dans les autres cas où  $\delta \neq 0$ , la probabilité pour que l'atome se trouve dans état excité oscille entre zéro et  $\frac{\Omega^2}{\hbar^2} \left( \delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \right)^{-1}$  avec une période égale à  $\pi / \sqrt{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}}$ . Donc, pour résumer, la valeur maximale de la probabilité que l'atome soit excité dépend de la différence entre la fréquence de l'atome et celle de l'onde électromagnétique  $\delta = (\omega_0 - \omega)$

$$P_{max} = \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \left( \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{\hbar^2}} \right) \tag{2.5.95}$$

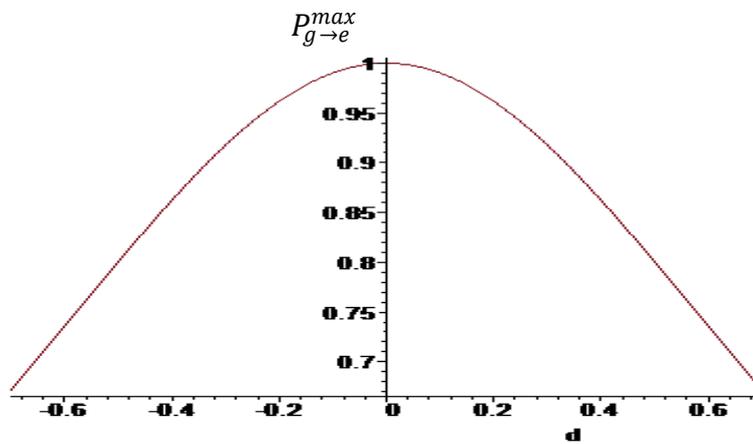


Figure 2 : La valeur maximale de l'oscillation de  $P_{g \to e}^{max}$  en fonction de  $\delta$

$\delta$

Une dernière remarque consiste à dire qu'on cas d'absence d'interaction ( $\Omega = 0$ ), la probabilité de passer de l'état fondamental à l'état excité est complètement nulle quelque soit l'instant d'observation ( $P_{g \rightarrow e}(t) = 0$ ).

En conclusion de ce chapitre nous pouvons dire que dans un premier temps nous avons introduit l'approximation des grandes longueurs d'onde qui consiste à traiter l'onde plane comme étant une constante dans l'espace sur le domaine de l'extension de l'atome d'hydrogène. Après, nous sommes passé de la détermination du hamiltonien d'interaction de la jauge de Coulomb à la jauge de Goppert-Mayer, ce qui nous a permis d'arriver à l'approximation du type dipôle. Ensuite, nous avons fait l'étude d'un système constitué d'un atome à deux niveaux et d'un champ électromagnétique dans le cadre de l'approximation de l'onde tournante qui consiste à négliger les termes oscillants rapidement, ce qui s'est soldé par résoudre les équations d'évolution. A la fin, nous sommes arrivés à déterminer la probabilité de transition de l'état fondamental à l'état excité de l'atome, ce qui nous a relevé l'existence des oscillations de Rabi, ayant des amplitudes d'oscillations maximales quand la fréquence de transition de l'atome coïncide avec la fréquence propre de l'onde électromagnétique.

# Interaction atome- lumière quantifiée

Nous allons dans ce chapitre présenter l'une des études les plus connues en optique quantique, à savoir, l'électrodynamique quantique en cavité, qui s'intéresse à l'interaction lumière-matière à l'échelle atomique dans un contexte complètement quantique. Le modèle de Jaynes-Cummings [1,8-16] décrivant bien ce type de systèmes sera examiné avec les détails nécessaires dans le souci de faire une comparaison avec les résultats obtenus dans le chapitre précédent dans le cas de l'approximation semi-classique.

## 3.1. Le hamiltonien de Jaynes-Cummings

C'est un modèle théorique, proposé par Edwin Jaynes et Fred Cummings en 1963 [8], pour représenter l'interaction lumière-matière en simulant un système dans lequel deux niveaux d'atomes interagissent avec un modèle quantifié du champ électromagnétique dans une cavité. La situation est la même que dans le chapitre 2, sauf que cette fois le champ est traité d'une façon purement quantique.

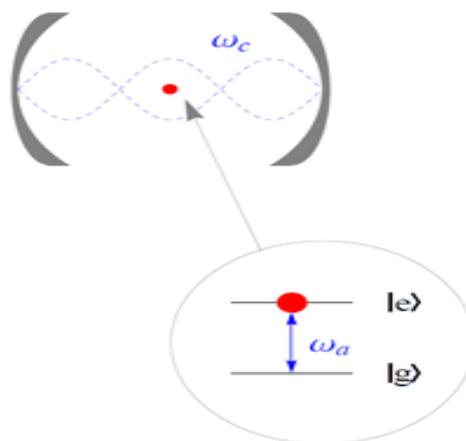


Figure 1 : Schéma du modèle de Jaynes-Cummings (Atome dans une cavité)

Le hamiltonien du système se décompose en trois parties correspondant à l'atome, au champ et à l'interaction

$$H_{JC} = H_{cham} + H_{at} + H_{int} \quad (3.1.1)$$

Le hamiltonien du champ électromagnétique dans une cavité, déjà vu au premier chapitre, est de la forme

$$H_{cham} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1.2)$$

où :

$\omega$  : est la fréquence associée au mode choisi du champ  $\omega = kc$  .

$\hat{a}^+$  : est l'opérateur de création et  $\hat{a}$  : est l'opérateur d'annihilation

$\frac{1}{2} \hbar\omega$  : est l'énergie du vide qu'on va omettre, car elle est sans impact sur les différences d'énergie, d'où la forme réduite du hamiltonien

$$H_{cham} = \hbar\omega \hat{a}^+ \hat{a} \quad (3.1.3)$$

Le hamiltonien atomique correspondant aux deux niveaux de l'atome présent dans la cavité, est déterminé dans le chapitre deux

$$H_{at} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z \quad (3.1.4)$$

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

Le hamiltonien de l'interaction, obtenu aussi au chapitre deux grâce à l'approximation du dipôle, est de la forme

$$H_{int} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$$

Mais à présent, le champ  $\hat{\mathbf{E}}$  est un être quantique comme on l'a vu au premier chapitre

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\epsilon_0}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) \quad (3.1.7)$$

où la dépendance en  $z$  est pratiquement nulle par rapport à la dimension de l'atome, car nous sommes aussi dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde, où  $\hat{\mathbf{E}}$  varie doucement dans l'espace. Supposons que  $\hat{\mathbf{D}} = \hat{d}\mathbf{i}$ , dans ce cas, l'interaction devient

$$H_{int} = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\epsilon_0}}\hat{d}(\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) \quad (3.1.8)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la représentation matricielle de l'opérateur  $\hat{d}$  est relativement simple

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.9)$$

où  $d = \langle e|\hat{d}|g\rangle$ . Dans une autre forme,

$$\hat{d} = d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = d(\sigma^- + \sigma^+) \quad (3.1.10)$$

avec

$$\sigma^+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

En remplaçant dans le terme d'interaction, on aura

$$H_{int} = \hbar\Omega(\sigma^+ + \sigma^-)(\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (3.1.12)$$

où

$$\Omega = -\frac{d}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega^2}{L\epsilon_0}}\sin(kz). \quad (3.1.13)$$

Après développement,

$$H_{int} = \hbar\Omega(\sigma^+\hat{a} + \sigma^+\hat{a}^+ + \sigma^-\hat{a} + \sigma^-\hat{a}^+) \quad (3.1.14)$$

Les termes  $\sigma^+\hat{a}^+$  et  $\sigma^-\hat{a}$  ne conservent pas l'énergie, car un terme du type  $\sigma^+\hat{a}^+$  par exemple, correspond physiquement à la création d'un photon par  $\hat{a}^+$  et au passage à l'état excité par  $\sigma^+$ , ce qui constitue un défaut d'énergie. C'est pour cette raison qu'on va les omettre de l'expression de  $H_{int}$ . Un autre raisonnement [1] consiste à dire qu'en image de Dirac (image

interaction), nous avons  $\frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, H_0]$  ,  $\frac{d\hat{a}^+}{dt} = [\hat{a}^+, H_0]$  et  $\frac{d\sigma^\pm}{dt} = [\sigma^\pm, H_0]$  avec  $H_0 = H_{cham} + H_{at} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$ . Après résolution, l'évolution des différents opérateurs sera

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (3.1.15)$$

$$\hat{a}^+(t) = \hat{a}^+(0)e^{i\omega t} \quad (3.1.16)$$

$$\sigma^\pm = \sigma^\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t} \quad (3.1.17)$$

Donc, le hamiltonien d'interaction dans cette image sera

$$\begin{aligned} H_{int} = \hbar\Omega & (\sigma^+(0)\hat{a}(0) e^{i(\omega_0-\omega)t} + \sigma^+(0)\hat{a}^+(0) e^{i(\omega+\omega_0)t} \\ & + \sigma^-(0)\hat{a}(0) e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \sigma^-(0)\hat{a}^+(0) e^{-i(\omega_0-\omega)t}) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Les termes  $\sigma^+\hat{a}^+$  et  $\sigma^-\hat{a}$  varient beaucoup plus rapidement par rapporte aux autres termes, donc nous pouvons invoquer l'approximation de l'onde tournante pour les négliger, comme nous l'avons fait au deuxième chapitre. Au final, le hamiltonien d'interaction prend la forme réduite

$$H_{int} = \hbar\Omega(\sigma^+\hat{a} + \sigma^-\hat{a}^+) \quad (3.1.19)$$

Nous arrivons ainsi déterminé le hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings de l'équation (3.1.1) que l'on peut réécrire sous la forme

$$H_{JC} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\Omega(\sigma^+\hat{a} + \sigma^-\hat{a}^+) \quad (3.1.20)$$

## 3.2. Les valeurs et les états propres du $H_{JC}$

On se propose dans cette section de déterminer les valeurs et les vecteurs propres du hamiltonien de Jaynes-Cummings  $H_{JC}$ . Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, l'action de l'opérateur d'annihilation et l'opérateur de création sur les états de Fock est

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle , a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle , a^+a|n\rangle = n|n\rangle \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2.1)$$

Nous avons aussi les relations

$$\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z|g\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|g\rangle, \quad \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z|e\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}|e\rangle \quad (3.2.2)$$

Auxquelles s'ajoutent

$$\sigma^+|e\rangle = 0, \quad \sigma^+|g\rangle = |e\rangle, \quad \sigma^-|e\rangle = |g\rangle, \quad \sigma^-|g\rangle = 0 \quad (3.2.3)$$

Nous allons calculer l'action  $H_{JC}$  sur  $\{|e\rangle \otimes |n\rangle, |g\rangle \otimes |n+1\rangle\} = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ , car le hamiltonien d'interaction ne provoque que des transitions du type  $|e\rangle|n\rangle \leftrightarrow |g\rangle|n+1\rangle$  qui correspondent à la désexcitation avec émission d'un photon ou à l'excitation suite à l'absorption d'un photon. Donc, la dynamique du système est confinée dans un espace à deux états  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ . En effet,

$$H_{JC}|e, n\rangle = H_{cham}|e, n\rangle + H_0|e, n\rangle + \hbar\Omega(\sigma^+\hat{a} + \sigma^-\hat{a}^\dagger)|e, n\rangle \quad (3.2.4)$$

$$H_{JC}|e, n\rangle = n\hbar\omega|e, n\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{2}|e, n\rangle + \hbar\Omega\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle \quad (3.2.5)$$

et

$$H_{JC}|g, n+1\rangle = \hbar\omega(n+1)|g, n+1\rangle - \frac{\hbar\omega_0}{2}|g, n+1\rangle + \hbar\Omega\sqrt{n+1}|e, n\rangle \quad (3.2.6)$$

Nous constatons que  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$  ne sont pas des vecteurs propres de  $H_{JC}$ . On se propose alors de déterminer les valeurs et les vecteurs propres comme une combinaison linéaire de ces derniers. Autrement dit, soit  $\alpha|e, n\rangle + \beta|g, n+1\rangle$  un vecteur propre avec la valeur propre  $E_n$

$$H_{JC}(\alpha|e, n\rangle + \beta|g, n+1\rangle) = E_n(\alpha|e, n\rangle + \beta|g, n+1\rangle) \quad (3.2.7)$$

Mais,

$$\begin{aligned} & H_{JC}(\alpha|e, n\rangle + \beta|g, n+1\rangle) \\ &= \hbar\left(\alpha n\omega + \frac{\alpha\omega_0}{2} + \beta\Omega\sqrt{n+1}\right)|e, n\rangle + \hbar\left(\beta(n+1)\omega - \beta\frac{\omega_0}{2} + \alpha\Omega\sqrt{n+1}\right)|g, n+1\rangle \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\alpha E_n = \hbar(\alpha n \omega + \frac{\alpha \omega_0}{2} + \beta \Omega \sqrt{n+1}) \quad (3.2.9)$$

$$\beta E_n = \hbar(\beta(n+1)\omega - \beta \frac{\omega_0}{2} + \alpha \Omega \sqrt{n+1}) \quad (3.2.10)$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} n\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\Omega\sqrt{n+1} \\ \hbar\Omega\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

On constate que nous sommes devant le problème aux valeurs propres associé à la matrice

$$H_n = \begin{pmatrix} n\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\Omega\sqrt{n+1} \\ \hbar\Omega\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$

Nous allons maintenant déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  en passant par le calcul de déterminant caractéristique

$$\det(H_n - E_n I) = 0 \quad (3.2.13)$$

d'où l'équation

$$E_n^2 - 2\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) E_n + \hbar^2 \left( \left(n\omega + \frac{1}{2}\omega_0\right) \left((n+1)\omega - \frac{1}{2}\omega_0\right) - \Omega^2(n+1) \right) = 0 \quad (3.2.14)$$

Cette équation admet deux solutions distinctes correspondant aux deux valeurs propres

$$E_n^- = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{\hbar}{2} \Omega_n(\delta) \quad (3.2.15)$$

$$E_n^+ = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar}{2} \Omega_n(\delta) \quad (3.2.16)$$

avec

$$\Omega_n(\delta) = \sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n+1)} \quad ; \quad \delta = \omega_0 - \omega \quad (3.2.17)$$

Il faut à présent injecter ces valeurs dans le système précédent pour déterminer les vecteurs propres. En effet, nous avons établi au dessus que

$$\alpha E_n = \hbar(\alpha n \omega + \frac{\alpha \omega_0}{2} + \beta \Omega \sqrt{n+1}) \quad (3.2.18)$$

d'où la relation

$$\alpha = \frac{\hbar \Omega \sqrt{n+1}}{(E_n - n \hbar \omega - \frac{\hbar \omega_0}{2})} \beta \quad (3.2.19)$$

Pour  $E_n^- = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega - \frac{\hbar}{2} \Omega_n(\delta)$ , nous aurons

$$\alpha = \frac{-\Omega \sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}(\delta + \Omega_n(\delta))} \beta \quad (3.2.20)$$

Pour  $E_n^+ = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega + \frac{\hbar}{2} \Omega_n(\delta)$ , nous aurons

$$\alpha = \frac{\Omega \sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}(-\delta + \Omega_n(\delta))} \beta \quad (3.2.21)$$

Les vecteurs propres recherchés sont

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \frac{-\Omega \sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}(\Omega_n(\delta) + \delta)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \frac{\Omega \sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}(\Omega_n(\delta) - \delta)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour fixer  $\beta$ , il faut normaliser ces deux vecteurs pour avoir finalement

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}} \end{pmatrix} \text{ pour } E_n^- \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}} \end{pmatrix} \text{ pour } E_n^+ \quad (3.2.22)$$

là on a utilisé la relation

$$\Omega_n^2 - \delta^2 = 4\Omega^2(n+1) \quad (3.2.23)$$

Au final,

$$|n, -\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}} |e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}} |g, n+1\rangle \quad (3.2.24)$$

$$|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}} |e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}} |g, n+1\rangle \quad (3.2.25)$$

Introduisons  $\phi_n$  défini par

$$\sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}}, \quad \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}} \quad (3.2.26)$$

d'où

$$\tan(\phi_n) = \frac{2\Omega\sqrt{n+1}}{\delta} \Rightarrow \phi_n = \arctan\left(\frac{2\Omega\sqrt{n+1}}{\delta}\right) \quad (3.2.27)$$

A présent, les états propres du hamiltonien de Jaynes-Cummings vont se mettre sous la forme réduite

$$|n, -\rangle = -\sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |e, n\rangle + \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |g, n+1\rangle \quad (3.2.28)$$

$$|n, +\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |e, n\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |g, n+1\rangle \quad (3.2.29)$$

Après inversion,

$$|e, n\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \quad (3.2.30)$$

$$|g, n+1\rangle = \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle + \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \quad (3.2.31)$$

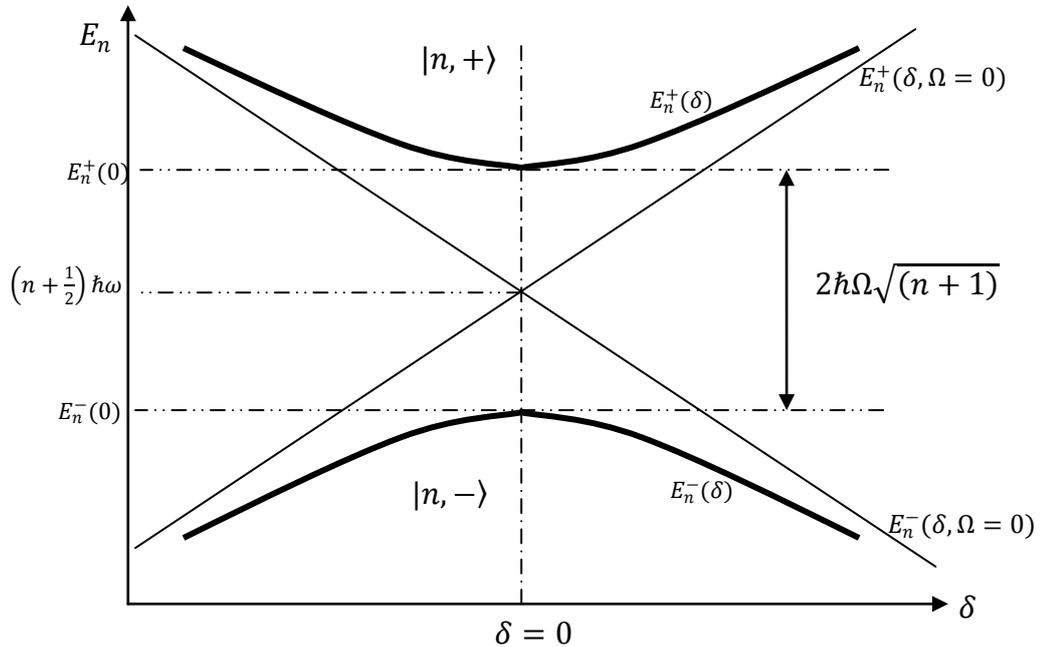


Figure 2 : Energies des états habillés en fonction du désaccord atome-champ  $\delta$

Ces états sont parfois appelés « les états habillés » d'un système constitué d'un atome à deux niveaux habillé par les photons d'un champ électromagnétique quantifié dans une cavité. Contrairement aux états  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  correspondant au cas  $\Omega = 0$ , dont les énergies sont séparées par  $\hbar\delta = \hbar(\omega_0 - \omega)$ , les états habillés sont séparés par une bande de largeur  $\hbar\Omega_n(\delta) = \hbar\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n+1)}$  qui est plus importante que  $\hbar\delta$ . On en déduit que dans le cas où  $\delta = 0$ , les états  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  vont avoir la même énergie (états dégénérés), tandis que les états  $|n, -\rangle$  et  $|n, +\rangle$  vont rester non dégénérés  $\Delta E_n = 2\hbar\Omega\sqrt{(n+1)}$ . Dans ce cas

$$|n, -\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|g, n+1\rangle \quad (3.2.32)$$

$$|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|g, n+1\rangle \quad (3.2.33)$$

Nous allons terminer cette section par la détermination de l'opérateur d'évolution du système atome-lumière. En effet, nous avons la base  $\{|n, +\rangle, |n, -\rangle\}$  où  $n \in \{0, 1, \dots\}$ , ainsi que les relations de fermeture et l'orthonormalisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon} |n, \varepsilon\rangle \langle \varepsilon, n| = \sum_{n=0}^{\infty} (|n, +\rangle \langle n, +| + |n, -\rangle \langle n, -|) = 1 \quad (3.2.34)$$

$$\langle \varepsilon, n | n', \varepsilon' \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \quad (3.2.35)$$

où  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-, +\}$

L'opérateur d'évolution de notre système stationnaire ( $\frac{\partial H_{JC}}{\partial t} = 0$ ) est donné par

$$U(t) = e^{\frac{-iH_{JC}}{\hbar}t} \quad (3.2.36)$$

Après insertion de la relation de fermeture

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{\frac{-iH_{JC}}{\hbar}t} |n, +\rangle \langle n, +| + e^{\frac{-iH_{JC}}{\hbar}t} |n, -\rangle \langle n, -| \right) \quad (3.2.37)$$

d'où

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-iE_n^+}{\hbar}t} |n, +\rangle \langle n, +| + e^{\frac{-iE_n^-}{\hbar}t} |n, -\rangle \langle n, -| \quad (3.2.38)$$

car  $H_{JC} |n, +\rangle = E_n^+ |n, +\rangle$  (on a utilisé la propriété  $A|a\rangle = a|a\rangle \Rightarrow f(A)|a\rangle = f(a)|a\rangle$ ). Nous avons ainsi obtenu l'opérateur d'évolution du modèle de Jaynes-Cummings en fonction des états habillés.

### 3.3. Interaction d'un atome avec un état de Fock

Maintenant supposons qu'à  $t = 0$ , notre système se trouve dans l'état  $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ , (l'atome s'excite avec  $n$  photons). A un instant ultérieur  $t > 0$ , l'état du système s'obtient à l'aide de l'opérateur d'évolution  $U(t) = e^{\frac{-iH_{JC}}{\hbar}t}$ . En effet

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|e, n\rangle \quad (3.3.1)$$

Mais, on vu que

$$|e, n\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \quad (3.3.2)$$

Donc, l'état du système est décrit par le ket

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^+}{\hbar}t} |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^-}{\hbar}t} |n, -\rangle \quad (3.3.3)$$

A présent, on peut déterminer la probabilité que notre système se trouve dans l'état  $|g, n + 1\rangle$  où l'atome va émettre un photon et revenir à l'état fondamental  $|g\rangle$  (les autres transitions physiquement impossibles).

$$P_{e \rightarrow g}(t) = \|\langle g, n + 1 | \Psi(t) \rangle\|^2 \quad (3.3.4)$$

Comme  $|g, n + 1\rangle = \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle + \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle$ , le produit scalaire  $\langle g, n + 1 | \Psi(t) \rangle$  devient

$$\langle g, n + 1 | \Psi(t) \rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^+}{\hbar}t} - \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^-}{\hbar}t} \quad (3.3.5)$$

Mais

$$E_n^- = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n + 1)} \quad (3.3.5)$$

$$E_n^+ = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n + 1)} \quad (3.3.6)$$

d'où

$$\langle g, n+1 | \Psi(t) \rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \left( e^{-\frac{i\sqrt{\delta^2+4\Omega^2(n+1)}t}{2}} - e^{\frac{i\sqrt{\delta^2+4\Omega^2(n+1)}t}{2}} \right) \quad (3.3.7)$$

soit,

$$\langle g, n+1 | \Psi(t) \rangle = -2i \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2+4\Omega^2(n+1)}\right) \quad (3.3.8)$$

La probabilité que notre système se trouve dans l'état  $|g, n+1\rangle$ , après avoir été dans l'état  $|e, n\rangle$  à l'instant initial

$$P_{e \rightarrow g}(t) = 4 \cos^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2+4\Omega^2(n+1)}\right) \quad (3.3.9)$$

Mais,  $\cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n + \delta}{\Omega_n}}$  et  $\sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Omega_n - \delta}{\Omega_n}}$ , d'où  $4 \cos^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{\Omega_n^2 - \delta^2}{\Omega_n^2}$ . On a aussi  $\Omega_n = \sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n+1)} \Rightarrow \Omega_n^2 = \delta^2 + 4\Omega^2(n+1)$ . Finalement la probabilité recherchée se réduit à l'expression

$$P_{e \rightarrow g}(t) = \frac{4\Omega^2(n+1)}{\delta^2 + 4\Omega^2(n+1)} \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2(n+1)}\right) \quad (3.3.10)$$

En particulier, si le désaccord entre la fréquence du champ  $\omega$  et la fréquence de transition de l'atome  $\omega_0$  est nul ( $\delta = \omega_0 - \omega = 0$ ), la probabilité va se simplifier considérablement

$$P_{e \rightarrow g}(t) = \sin^2(\Omega\sqrt{n+1}t) \quad (3.3.11)$$

La probabilité que notre système revient dans l'état excité  $|e, n\rangle$

$$P_{e \rightarrow e}(t) = 1 - P_{e \rightarrow g}(t) = 1 - \sin^2(\Omega\sqrt{n+1}t) \quad (3.3.12)$$

Soit,

$$P_{e \rightarrow e}(t) = \cos^2(\Omega\sqrt{n+1}t) \quad (3.3.13)$$

La fréquence des deux probabilités est quantifiée (la fréquence de Rabi est quantifiée), contrairement au cas semi-classique.

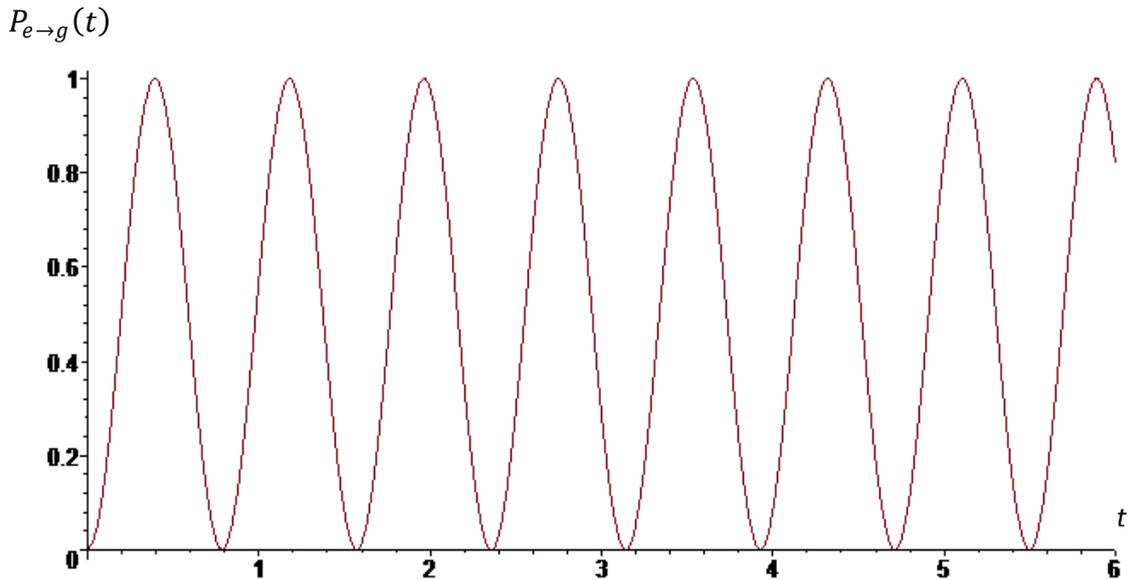


Figure 3 : Oscillations de probabilité de transition dans le temps pour  $\delta = 0$ .

La probabilité  $P_{e \rightarrow g}(t)$  oscille périodiquement, tout comme dans le cas semi-classique avec des ondes planes, mais avec une fréquence quantifiée  $2\Omega\sqrt{n+1}$  dépendant du nombre de photons  $n$ . Ce résultat est contre-intuitif car les états de Fock (où le nombre de photons est bien connu) sont fortement quantiques et ils sont loin d'être décrits par des ondes planes électromagnétiques classiques (voir chapitre 1).

Un autre aspect entièrement quantique du modèle Jaynes Cummings dans notre cas, est le fait qu'en absence de photons initialement ( $n = 0$ ), des oscillations de Rabi vont quand même avoir lieu avec une fréquence  $2\Omega$  (oscillations de Rabi du champ de vide). Elles sont le résultat de l'émission spontanée d'un photon par l'atome puis de son absorption par ce dernier, qui va ensuite le réémettre pour réabsorber à nouveau et ainsi de suite.

### 3.4. Interaction d'un atome avec un état cohérent

Après le résultat de la section précédente, l'intuition pourrait nous suggérer que lorsque le champ est initialement dans un état cohérent (qui est un état quasi-classique selon le chapitre 1), on devrait retrouver le caractère semi-classique, périodique et régulier des oscillations de Rabi.

Considérons le cas où à  $t = 0$ , notre système est dans l'état  $|\Psi(0)\rangle = |\alpha, e\rangle$ , qui décrit atome excité  $|e\rangle$  en présence d'une lumière cohérente  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.4.1)$$

A instant ultérieur  $t > 0$ , l'état du système devient

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{-iH_{JC}t}{\hbar}} |n, e\rangle \quad (3.4.2)$$

Mais  $|e, n\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) |n, -\rangle$ , d'où

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^+ t}{\hbar}} |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) e^{\frac{-iE_n^- t}{\hbar}} |n, -\rangle \quad (3.4.3)$$

Plaçons nous dans la situation de résonance où  $\delta = 0$  et  $\cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . A présent,

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left( e^{\frac{-iE_n^+ t}{\hbar}} |n, +\rangle - e^{\frac{-iE_n^- t}{\hbar}} |n, -\rangle \right) \quad (3.4.4)$$

Rappelons que  $|n, -\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n+1\rangle$  et  $|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n+1\rangle$ , sans oublier que les énergies  $E_n^- = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \hbar\Omega(n+1)$  et  $E_n^+ = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \hbar\Omega(n+1)$ . L'état du système devient comme suit :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left( \frac{1}{2} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} (e^{-i\Omega(n+1)t} + e^{i\Omega(n+1)t}) |e, n\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} (e^{-i\Omega(n+1)t} - e^{i\Omega(n+1)t}) |g, n+1\rangle \right) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Au final, la fonction d'onde décrivant l'évolution d'un système formé par un atome à deux niveaux excité par une lumière cohérente est de la forme

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} (\cos(\Omega\sqrt{n+1}t) |e, n\rangle - i \sin(\Omega\sqrt{n+1}t) |g, n+1\rangle) \quad (3.4.6)$$

D'après les postulats de la mécanique quantique, la probabilité de trouver le système dans l'état fondamental  $|g\rangle$ , sans se soucier de nombre de photons, à un instant  $t$  est

$$P_{e \rightarrow g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \|\langle g, n+1 | \Psi(t) \rangle\|^2 \quad (3.4.7)$$

Calculons d'abord  $\langle g, n+1 | \Psi(t) \rangle$ . En effet,

$$\langle g, n+1 | \Psi(t) \rangle = -i e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}} e^{-i\omega(n'+\frac{1}{2})t} \sin\left(\Omega\left(\sqrt{n'+1}\right)t\right) \delta_{nn'} \quad (3.4.8)$$

d'où

$$\langle g, n + 1 | \Psi(t) \rangle = -i e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sin(\Omega(\sqrt{n+1})t) \quad (3.4.9)$$

On en déduit que

$$\|\langle g, n + 1 | \Psi(t) \rangle\|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \sin^2(\Omega(\sqrt{n+1})t) \quad (3.4.10)$$

Finalement, la probabilité que l'atome se trouve dans l'état fondamental est

$$P_{e \rightarrow g}(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \sin^2(\Omega(\sqrt{n+1})t) \quad (3.4.11)$$

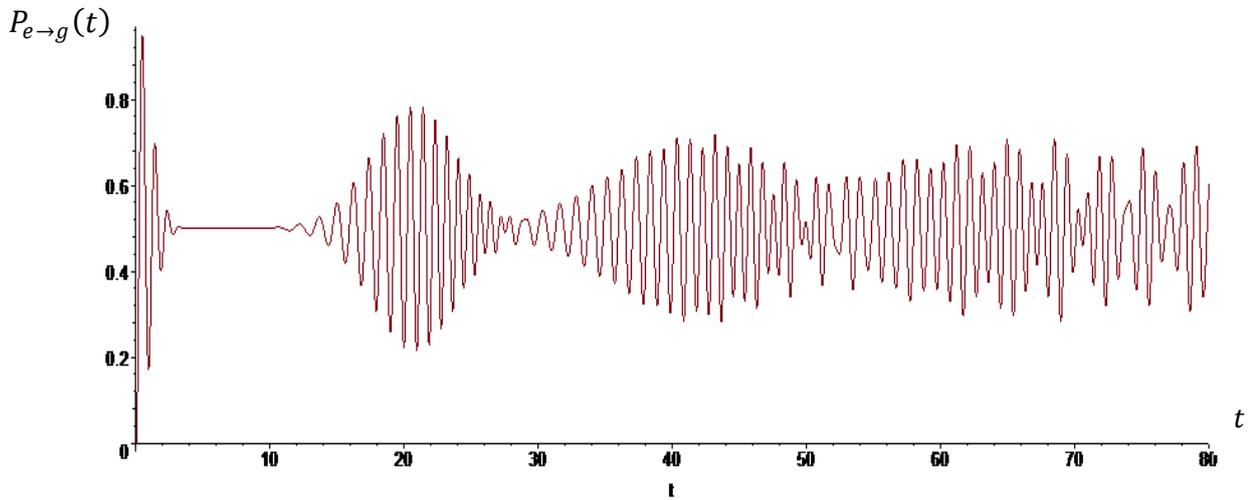


Figure 4 : La probabilité de désexcitation de l'atome sous l'effet d'un champ cohérent

Au départ, les oscillations de Rabi s'atténuent à partir de  $P_{e \rightarrow g}(t) = 1$ , pour disparaître complètement quand  $P_{e \rightarrow g}(t) = 1/2$ , mais après une période de repos, elles vont commencer à réapparaître de nouveau, mais pas complètement (car  $P_{e \rightarrow g}(t) < 1$ ). Ce phénomène d'effondrement et de renaissance va se poursuivre à mesure que le temps augmente, mais d'une façon moins distincte. Cette succession d'effondrement et de renaissance des oscillations de Rabi dans le modèle entièrement quantique de Jaynes-Cummings constitue une différence majeure avec l'approximation semi-classique où les oscillations ont une amplitude constante dans le temps.

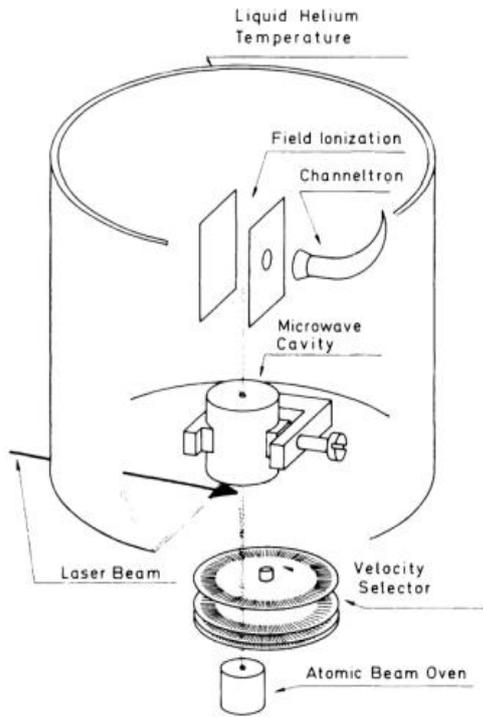


Figure 5 : Schéma de l'expérience de G. Rempe, H. Walther et N. Klein

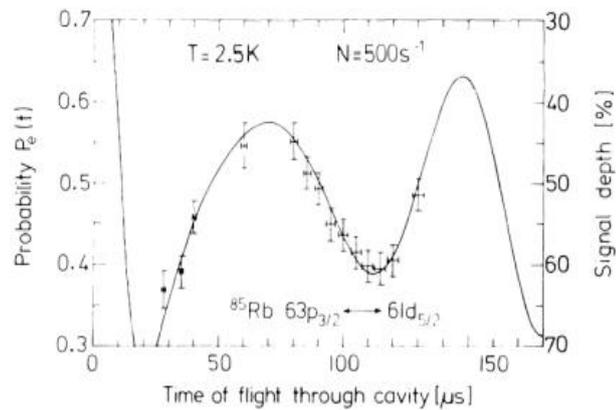


FIG. 3. The probability  $P_e(t)$  of finding the atom in the upper maser level  $63p_{3/2}$  for the cavity tuned to the  $63p_{3/2} \leftrightarrow 61d_{5/2}$  transition of  $^{85}\text{Rb}$ . The flux of Rydberg atoms is  $N = 500 \text{ s}^{-1}$ .

L'effondrement et la renaissance quantiques prédits par le modèle Jaynes-Cummings datant de 1963 [8] ont été démontrés expérimentalement pour la première fois en 1987 par G. Rempe, H. Walther et N. Klein [16] à l'aide des états de Rydberg de rubidium-85 ayant un très grand nombre quantique principal interagissant avec un champ électromagnétique résonant dans une cavité.

Pour récapituler, dans ce chapitre, nous avons d'abord introduit l'expression de hamiltonien de notre système qui est le hamiltonien de Jaynes-Cummings décrivant un atome à deux niveaux en présence d'un champ électromagnétique quantifié dans une cavité. Puis, nous avons déterminé ses valeurs et ses états propres ainsi que son opérateur d'évolution. Par la suite, nous avons étudié les dynamiques de ce système dans les situations où le champ est dans un état de Fock et dans un état cohérent. Dans les deux cas, nous avons pu calculer les probabilités de transition entre le niveau fondamental et le niveau excité de l'atome. Dans le cas de Fock, la probabilité oscille périodiquement dans le temps même en absence de photons, tandis que les oscillations de probabilité dans le cas cohérent passent par des phases d'effondrement et de renaissance, phénomène quantique sans équivalent classique.

---

# Conclusion générale

Le but de ce travail a été de rendre compte des phénomènes d'interaction entre la matière et la lumière dans le cadre du formalisme de la mécanique quantique, aussi bien pour les atomes que pour le champ électromagnétique.

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord passé en revue quelques notions relatives à l'oscillateur harmonique quantique, où nous avons déterminé ses valeurs propres et ses vecteurs propres, ainsi que les opérateurs de création et d'annihilation. Dans une deuxième section, nous avons vérifié le principe d'incertitude de Heisenberg après avoir calculé les valeurs moyennes des différents opérateurs.

La dernière section de ce chapitre est consacrée à la quantification du champ électromagnétique à un seul mode dans une cavité monodimensionnelle, en utilisant comme point du départ les équations de Maxwell pour trouver les équations du champ électromagnétique. Les équations obtenues avaient la même forme que celle de l'oscillateur harmonique, ce qui nous permet de donner une version quantique de la lumière où les états propres du hamiltonien sont réinterprétés comme étant des états décrivant des photons ayant des énergies bien déterminées. Nous avons par ce fait, étudié quelques états particuliers de la lumière (les états de Fock et les états cohérents).

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié dans le contexte de l'approximation semi-classique, l'interaction d'un atome quantifié avec une lumière classique. Dans un premier temps, nous avons déterminé le hamiltonien de l'interaction en passant par les équations de Maxwell en jauge de Coulomb dans le contexte des grandes longueurs d'onde. Après un changement de la jauge vers la jauge de Goepfert-Mayer, nous sommes arrivés à définir l'approximation dipôle qui consiste à réduire l'interaction à un couplage entre le champ électrique de l'onde plane et le moment du dipôle électrique de l'atome.

Par la suite, nous avons étudié un système à deux niveaux en présence d'un champ électromagnétique où on a pu résoudre les équations d'évolution dans le contexte de l'approximation de l'onde tournante, ce qui a fait apparaître la fréquence de Rabi comme étant

la fréquence d'oscillation de la probabilité de transition entre les deux niveaux de notre atome sous l'effet de l'onde électromagnétique.

Le troisième chapitre, a été consacré à l'étude de l'interaction atome-lumière quantifiée dans une cavité, dans un cadre purement quantique, grâce à l'introduction du hamiltonien de Jaynes-Cummings qui se compose de trois parties (champ, atome et interaction). En effet, nous avons étudié la dynamique de ce modèle en calculant les valeurs propres et les vecteurs propres relatifs à notre système décrit par le hamiltonien en question, ce qui s'est soldé par la détermination de l'opérateur d'évolution. Par la suite, nous avons obtenu les solutions de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un atome avec un nombre bien déterminé de photons (correspondant à un état de Fock) et dans le cas où la lumière se trouvant dans un état cohérent caractérisé par un nombre de photons suivant une distribution de Poisson.

A l'aide de ces solutions, nous avons d'abord calculé les probabilités de transition dans le cas où le nombre de photon est connu et nous avons constaté que la fréquence de Rabi est quantifiée contrairement au cas semi-classique. A la fin de ce chapitre, nous avons pu calculer les probabilités de transition entre les deux niveaux dans le cas d'une lumière cohérente, ce qui nous a permis de mettre en évidence le phénomène de l'effondrement et la renaissance des oscillations de Rabi, phénomène purement quantique.

Comme perspectives, il serait intéressant dans un premier temps, d'étudier le problème d'interaction d'un champ monomodal avec plusieurs atomes à deux niveaux avec une éventuelle interaction entre eux. Ensuite, un cas plus intéressant serait d'aborder la dynamique de l'interaction d'un atome à trois niveaux avec un champ bimodal.

---

# Bibliographie

- [1] C. Gerry, P. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press (2005).
- [2] A. Benmoussa, *Solutions Manual: To introductory quantum optics*, by C.Gerry and P. Knight (2005).
- [3] Z. Ficek, M. R. Wahiddin, *Quantum optics for beginners*, CRC Press (2014).
- [4] S. Olivares, *Introduction to generation, manipulation and characterization of optical quantum states*, Université Milano (2018).
- [5] Marlan-O-Scully-M-Suhail-Zubairy, *Quantum optics*, Cambridge, universitypress(1997).
- [6] A. Aspect, C. Fabre, G. Grynberg, *Optique quantique 1: lasers*, Tome I (2005).
- [7] Roy J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Physical Review, vol.131, no. 6, pages 2766–2788, (1963).
- [8] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, n° 1, 1963, p. 89–109
- [9] A. Ramadhan, *Jaynes-Cumming Model, Nonlinear optics presentation*, (2016, march 22).
- [10] T. Meunier, *Oscillation de Rabi induites par un renversement du temps: un test de la coherence d'une superposition quantique mésoscopique*, universite Pierre et Marie Curie-ParisVI (2004).
- [11] R. Shafer, *Collapse and revival in the Jaynes-Cumming- Paul Model*. Departementa l Honors Defense in Physics , (2009, April 28).
- [12] A. Auffeves, *Oscillation de Rabi à la frontiere classique-quantique et généralisation de chats de Schrodinger physique atomique [physics-atom-ph]- université Pierre et Marie Curie-parisVI (2004).*
- [13] P. Toussaint, *Le modèle de Rabi* . département de physique-faculté des sciences- université de Liège, (2014/ 2015).
- [14] S. Derouault, *Interaction entre des impulsion electromagnétique quantifiées et des système atomique: effets transitoire-* Universit" Toulouse 3 Paul Sabatier,(2014, 12 05).
- [15] A. Maali, *Oscillation de Rabi quantique: test direct à la quantification du champ-physique atomique[physics-atom-ph],université Pierre et Marie Curie-parisVI, (1996).*
- [16] G. Rempe; H. Walther; N. Klein, *Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*. Phys. Rev. Lett. **58** (4): 353–356. (1987).
- [17] D. Djahnine, *Introduction à l'optique quantique*, université de Béjaia (2020).