Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira - Béjaia - Algérie
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master 2 en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

Mr. BOUSLA Sid Ali

THÈME

Introduction à la fonction zêta de Riemann

Soutenu publiquement le 20/06/2017 devant le jury composé de :

Mme.	Saâdia TAS	Pr	Université A. Mira de Béjaia	Président
Mr.	Bakir FARHI	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Promoteur
Mr.	Rezki CHEMLAL	M.C.B	Université A. Mira de Béjaia	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude à l'administration, et à l'ensemble de tous les enseignants de Mathématiques de l'Université de Bejaia pour leurs efforts et leur entière disponibilité, pour nous transmettre leur savoir et leurs connaissances.

Comme je tiens particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à mon promoteur Monsieur Bakir FARHI de m'avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation inestimable, et de m'avoir appris des raisonnements assez techniques en théorie des nombres, ainsi que son orientation tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement Mme Saâdia TAS pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur Rezki CHEMLAL pour avoir accepté de lire ce travail et de le juger.

Je remercie infiniment Monsieur Rachid BENMEZIANE, et Monsieur Nouredine MEHIDI de nous avoir orienter tout au long de ce parcours.

BOUSLA Sid Ali

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à toute ma famille ;

À mon cher frère Boualem ;

À mon cher ami Badr ;

À mon cher ami Redouane ;

À mon cher ami et camarade de classe Salim ;

À mon cher ami Bilal ;

À ma chère amie Lilia ;

Sans oublier mes amis : Rahim, Fafou, Fares, et Yacine ;

À tous mes Enseignants ;

À toute la promotion Master 2 Mathématiques 2017 ;

À tous les étudiants de Mathématiques de l'Université de Bejaia ;

À tous mes camarades de l'Université de Bejaia . . .

BOUSLA Sid Ali

Table des matières

Principales notations et conventions

On écrit $f = O(g)$ ou d'une façon équivalente $f \ll g$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq Cg(x)$, pour tout x dans un voisinage d'une certaine valeur (éventuellement infinie). La première notation est due à Landau et la seconde est due à Vinogradov. Si le rapport $f(x)/g(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on écrit $f(x) \sim g(x)$ et on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a ; de même on écrit $f = o(g)$ si le rapport $f(x)/g(x)$ tend vers zéro. Pour $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ désigne la partie entière du nombre t, et $\{t\}$ sa partie fractionnaire ($\{t\} = t - [t]$). L'ensemble des nombres premiers est noté P, et dans toute la suite la lettre p avec ou sans indice désigne un élément de P. Le plus grand facteur premier d'un entier n est noté $P^+(n)$. On désigne par $\pi(x)$ la fonction de comptage des nombres premiers, qui indique le nombre de nombres premiers n'excédant pas x, soit

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1.$$

Pour deux entiers a et b, on note $a|b$ pour signifier que a divise b. La limite supérieure d'une fonction f est définie d'une façon analogue avec les suites réelles, comme suit :

$$\lim_{x \to +\infty} \sup f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sup_{t \geq x} f(t),$$

la limite inférieure est définie de la même façon sauf que le sup sera remplacé par l'inf. La fonction logarithme intégrale est définie par :

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \geq 2).$$

Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe s sont notées respectivement $\Re(s)$ et $\Im(s)$. Si s est un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance n^s désigne tout simplement le nombre $e^{s \log n}$. Par ailleurs, $\varrho = \beta + i\gamma$ désigne un zéro non-trivial de la fonction zêta de Riemann. Le nombre de zéros non triviaux de la fonction zêta appartenant à un rectangle $0 < \Re(s) < 1, \quad 0 < \Im(s) \leq T$ est noté $N(T)$. La distance entre x et la plus proche puissance d'un nombre premier différente de x est notée $\langle x \rangle$.
Certaines de ces notations sont rappelées localement.

Introduction générale

On sait depuis Euclide que l'ensemble des nombres premiers est infini. La preuve est très simple ; elle est basée sur le fait que tout entier supérieur strictement à 1 possède un diviseur premier. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers, alors l'entier :

$$k = 1 + p_1 p_2 \ldots p_n,$$

possède un diviseur premier qui ne peut faire partie des nombres premiers fixé déjà à l'avance, car sinon il serait un diviseur de 1. Cela permet de trouver un nombre premier plus grand que toute limite fixée. Le problème se pose donc d'étudier le comportement de la fonction $\pi(x)$ déjà définie dans les notations pour des valeurs de x assez grandes.

Les premiers progrès significatifs concernant la théorie analytique des nombres premiers sont dûs à Euler (au dix-huitième siècle), qui découvre la célèbre formule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1},$$

valable pour tout $\sigma > 1$.

Gauss (en 1792), puis Legendre (en 1798), s'appuyant sur les tables des nombres premiers, conjecturent que l'on a lorsque x tend vers l'infini :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Plus tard (en 1852) Chebychev établit, avec des méthodes analytiques réelles, qu'il existe deux constante a et b strictement positives telles que :

$$\frac{ax}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{bx}{\log x} \qquad (x \geq 2),$$

et que si le rapport $\pi(x) \log x/x$ tend vers une limite, alors nécessairement cette limite vaut 1. Ces résultats constituent une forme faible de la conjecture de Gauss-Legendre.

En observant les résultats de Chebychev, les mathématiciens de cette époque croient qu'ils étaient proche, de la démonstration de la conjecture de Gauss-Legendre, pourtant il fallut attendre 44 ans pour qu'une telle preuve s'établisse de façon rigoureuse en empruntant d'ailleurs une voie complètement différente de celle de Chebychev. Cette nouvelle voie fut tracée par Riemann qui, en 1859, publie son fameux mémoire qui porte sur la théorie analytique des nombres, lequel a changé complètement la vision de la discipline. Riemann exploite l'idée de prolonger la fonction :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

en une fonction de la variable complexe et il démontre ensuite que la répartition des nombres premiers est ultimement liée à l'étude du prolongement de ζ.

En 1896, Hadamard et La Vallée-Poussin, s'appuyant l'un et l'autre sur les travaux de Riemann, démontrent indépendamment la conjecture de Gauss-Legendre.

Les travaux de Riemann était à vrai dire très pertinent ; ce dernier a laissé plusieurs conjectures, dont certaines font parties des problèmes d'actualité et d'autres ont étaient démontrées plus tard. La plus part de ces conjectures portent sur la répartition des zéros non-triviaux de la fonction ζ.

La fameuse conjecture de Riemann, ou ce que l'on appelle « l'hypothèse de Riemann » est l'un des plus grand problèmes non résolu aujourd'hui ; elle affirme que les zéros non-triviaux de ζ sont situés sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$ (appelée la droite critique). Si vous la prouvez, non seulement vous devenez célèbre, mais vous comptez également le prix de un-million de dollar offert par le Clay Mathematics Institute (voir le site : http ://www.claymath.org/).
L'un des progrès les plus significatifs concernant l'hypothèse de Riemann est dû à Hardy, qui a montré qu'il existe une infinité de zéros non-triviaux sur cette droite.

Le but de ce mémoire est de faire une brève introduction à la théorie de la fonction zêta de Riemann, ainsi que certaines applications à la répartition des nombres premiers, et de faire une présentation de l'hypothèse de Riemann et quelques conséquences de celle-ci.

Le premier chapitre ne semble pas à priori appartenir au sujet, il est en fait lié à ce qui suit, car nous allons introduire la fonction ψ de Chebychev qui jouera un rôle très important dans la suite.

CHAPITRE 1

Les théorèmes de Chebychev

1.1 Introduction

Nous présentons ici les deux théorèmes de Chebychev (datant de 1852), à qui on attribue les premières tentatives d'évaluation de la fonction de comptage des nombres premiers (voir ci-dessous) avec des méthodes d'analyse réelle.

1.2 Une forme faible de la formule de Stirling

Proposition 1.2.1. *On a la formule asymptotique suivante :*

$$\log n! = \sum_{1 \le m \le n} \log m = n \log n - n + O\left(\log n\right).$$

Démonstration. Cela découle directement des deux estimations suivantes :

1. Pour tout $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} 0 \le \int_m^{m+1} \log t \, dt - \log m &= \int_m^{m+1} \left(\log t - \log m\right) \, dt \\ &= \int_m^{m+1} \log\left(\frac{t}{m}\right) \, dt \\ &\le \int_m^{m+1} \left(\frac{t}{m} - 1\right) \, dt = \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 2$:
$$\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} = \sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{1}{m}\,dt \leq \sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{1}{t}\,dt = \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,dt = \log n.$$
de sorte que,
$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = O(\log n).$$

Il s'ensuit des deux parties 1 et 2 que :
$$\log{(n-1)!} = n \log n - n + O(\log n).$$
Par suite,
$$\log n! = \log n + \log{(n-1)!} = n \log n - n + O(\log n).$$
■

1.3 La fonction de comptage π des nombres premiers

Définition 1.3.1. *On appelle « fonction de comptage des nombres premiers », la fonction notée π, et définie par :*
$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \pi(x) := \mathrm{Card}\{p \in P, p \leq x\}. \end{array}$$

Afin de tirer des renseignements sur la fonction $\pi\,(x)$, Chebychev exploite l'idée de décomposer le nombre $n!$ en produit de facteurs premiers.
Pour chaque entier $m \geq 2$, on peut écrire :
$$\log m = \sum_{p^{\nu} | m} \log p.$$

La somme étant étendue à tous les couples (p,ν) tels que $p^\nu|m$ avec p premier et $\nu \geq 1$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\log n! = \sum_{m=1}^{n} \log m = \sum_{m=1}^{n} \sum_{p^\nu|m} \log p &= \sum_{p^\nu \leq n} \sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ p^\nu|m}} \log p \\ &= \sum_{p^\nu\leq n} \log p \left(\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ p^\nu|n}} 1 \right) \\ &= \sum_{p^\nu\leq n} \log p \left[\frac{n}{p^\nu}\right],\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que :

$$\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ p^\nu|m}} 1 = \sum_{1\leq kp^\nu\leq n} 1 = \sum_{1\leq k\leq \frac{n}{p^\nu}} 1 = \left[\frac{n}{p^\nu}\right].$$

En introduisant la fonction arithmétique de Von Mangoldt :

$$\Lambda(d) = \begin{cases} \log p & si\ \exists\ \ \nu \geq 1 : d = p^\nu \\ 0 & dans\ le\ cas\ contraire \end{cases},$$

nous déduisons de ce qui précède la formule asymptotique :

$$\sum_{1\leq d\leq n} \Lambda(d) \left[\frac{n}{d}\right] = n\log n - n + O(\log n) \qquad (n \geq 2).$$

Notons $B(n)$ le membre de gauche et posons $B(x) = B([x])$ pour tout $x \geq 2$.
Une autre estimation triviale mais qui sera utile est la suivante :

$$[x]\log[x] = x\log x + O(\log x) \qquad (x \geq 2).$$

En utilisant les deux formules asymptotiques précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}B(x) = \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d) \left[\frac{[x]}{d}\right] = \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right] &= [x]\log[x] - [x] + O(\log[x]) \\ &= x\log x - x + O(\log x).\end{aligned}$$

1.4 La fonction ψ de Chebychev et son encadrement

Nous allons utiliser notre estimation de $B(x)$ pour établir un encadrement de la fonction ψ de Chebychev, définie par :

$$\psi(x) = \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d).$$

On verra ensuite, que cela fournit un encadrement de même nature pour $\pi(x)$.

Théorème 1.4.1 (Chebychev)**.** *Pour tout $x \geq 2$, on a l'encadrement suivant :*

$$x\log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) \leq x\log 4 + O((\log x)^2).$$

Démonstration. Posons

$$\chi(u) = [u] - 2\left[\frac{u}{2}\right] \qquad (u \geq 0).$$

Alors χ est une fonction $2-$périodique qui vérifie

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq u < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq u < 2 \end{cases}$$

On définit la fonction B_2 comme suit :

$$B_2(x) = B(x) - 2B\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (x \geq 2).$$

D'une part on a :

$$B_2(x) = x\log x - x + O(\log x) - 2\left\{\frac{x}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} + O\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right\} = x\log 2 + O(\log x).$$

Et d'autre part :

$$B_2(x) = \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d)\left(\left[\frac{x}{d}\right] - 2\left[\frac{x}{2d}\right]\right) = \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d)\,\chi\left(\frac{x}{d}\right).$$

De cette dernière expression, on déduit

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{\frac{x}{2}<d\leq x} \Lambda(d) &= \sum_{\frac{x}{2}<d\leq x} \Lambda(d)\,\chi\left(\frac{x}{d}\right) \\ &\leq \sum_{1\leq d\leq x} \Lambda(d)\,\chi\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= B_2(x).\end{aligned}$$

Cela fournit directement la minoration :

$$\psi(x) \geq B_2(x) = x \log 2 + O(\log x) \qquad (x \geq 2).$$

On a par ailleurs :

$$\psi(x) \leq B_2(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq B_2(x) + B_2\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) \leq \cdots \leq \sum_{0 \leq j \leq k} B_2\left(\frac{x}{2^j}\right) + \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right).$$

où k est un entier arbitraire. En choisissant

$$k = k(x) = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right],$$

De sorte que $\frac{x}{2^{k+1}} < 2$ et $\psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = 0$, Il vient que :

$$\begin{aligned}
\psi(x) \leq \sum_{0 \leq j \leq k(x)} B_2\left(\frac{x}{2^j}\right) = \sum_{0 \leq j \leq k(x)} \left\{\frac{x \log 2}{2^j} + O(\log x)\right\} &= x \log 2 \sum_{0 \leq j \leq k(x)} \frac{1}{2^j} + O((\log x)^2) \\
&\leq x \log 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} + O((\log x)^2) \\
&= 2x \log 2 + O((\log x)^2).
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du théorème. ■

1.5 La fonction π et son encadrement

Proposition 1.5.1. *On a la formule asymptotique suivante :*

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) \qquad (x \geq 2).$$

Démonstration. Une autre façon d'écrire la fonction ψ est la suivante :

$$\psi(x) = \sum_{p^\nu \leq x} \log p.$$

Pour chaque p fixé, on a :

$$p^\nu \leq x \iff \nu \leq \frac{\log x}{\log p} \iff \nu \leq \left[\frac{\log x}{\log p}\right].$$

Il y a donc exactement $\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$ valeurs de ν tels que $p^\nu \leq x$, cela permet d'écrire :

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p.$$

Grâce à l'encadrement $[u] \leq u \leq 2[u]$ valable pour $u \geq 1$, on a :

$$\psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x = \sum_{p \leq x} \left(\frac{\log x}{\log p}\right) \log p \leq 2 \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p = 2\psi(x),$$

soit

$$\psi(x) \leq \pi(x) \log x \leq 2\psi(x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leq \pi(x) \log x - \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p\right) \\
&= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p\right) \\
&\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left(\log x - \left(\frac{\log x}{\log p} - 1\right) \log p\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p\right) \\
&= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} (\log x - \log p) \quad \left(\begin{array}{c} car: \quad \sqrt{x} < p \leq x \Rightarrow \\ \left[\frac{\log x}{\log p}\right] = 1 \end{array}\right) \\
&= \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \log\left(\frac{x}{p}\right) \\
&\leq \psi\left(\sqrt{x}\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \int_p^x \frac{dt}{t} \\
&= \psi\left(\sqrt{x}\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \int_{\sqrt{x}}^x \mathbb{1}_{[p,x]}(t) \frac{dt}{t} \\
&= \psi\left(\sqrt{x}\right) + \int_{\sqrt{x}}^x \left(\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \mathbb{1}_{[p,x]}(t)\right) \frac{dt}{t} \\
&= \psi\left(\sqrt{x}\right) + \int_{\sqrt{x}}^x \left(\sum_{\sqrt{x} < p \leq t} 1\right) \frac{dt}{t} \\
&= \psi\left(\sqrt{x}\right) - \pi\left(\sqrt{x}\right) \log \sqrt{x} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt \\
&\leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

Et puisque (d'après le théorème 1.4.1), on a :

$$\frac{\pi(t)}{t} \leq \frac{2\psi(t)}{t\log t} \leq \frac{2\log 4}{\log t} + O\left(\frac{\log t}{t}\right),$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\pi(t)}{t}\,dt \ll \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\log t} \ll \frac{x}{\log x}.$$

Nous déduisons alors de ce qui précède que :

$$\pi(x)\log x - \psi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right);$$

ou encore

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

La proposition est démontrée. ■

En combinant la proposition précédente et le théorème 1.4.1 on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.5.2. *On a lorsque x tend vers l'infini :*

$$\{\log 2 + o(1)\}\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \{\log 4 + o(1)\}\frac{x}{\log x}.$$

1.6 Le postulat de Bertrand

Dans ce qui précède nous avons présenté juste l'idée de base de Chebychev. En fait les résultats de Chebychev étaient beaucoup plus précis ; il utilise la fonction $\tilde{\chi}(u) = [u] - \left[\frac{u}{2}\right] - \left[\frac{u}{3}\right] - \left[\frac{u}{5}\right] + \left[\frac{u}{30}\right]$ qui est 30-périodique, au lieu de la fonction $\chi(u)$ vu dans la preuve du théorème 1.4.1. Il trouve ainsi l'encadrement suivant :

$$\{c_1 + o(1)\}\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \{c_2 + o(1)\}\frac{x}{\log x} \qquad (x \longrightarrow +\infty),$$

avec $c_1 = \log\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}30^{\frac{-1}{30}}\right) \simeq 0,92129$ *et* $c_2 = \frac{6}{5}c_1 \simeq 1,10555$.

Comme $c_2 < 2c_1$, cela implique que $\pi(2n-2) > \pi(n)$, pour n assez grand. En explicitant les termes $o(1)$, Chebychev a pu prouver que cette inégalité est bien valable pour tout

$n > 3$, ce qui constitue une preuve d'une conjecture célèbre, connue sous le nom de « postulat de Bertrand » (datant de 1845) :

Postulat de Bertrand :

Pour tout $n \geq 2$, il existe au moins un nombre premier p tel que ,

$$n < p < 2n.$$

1.7 Une forme faible de la conjecture de Gauss-Legendre

Théorème 1.7.1 (Chebychev). *On a l'encadrement :*

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1 \leq \limsup_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}.$$

Démonstration.

Remarquons d'abord que les deux limites existes et sont finies, car la fonction $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ est bornée.

D'après ce qui précède on a la formule asymptotique suivante :

$$B(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right] = x \log x - x + O(\log x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{1 \leq d \leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{1 \leq d \leq x} \Lambda(d) \left\{\frac{x}{d} + O(1)\right\} &= x \sum_{1 \leq d \leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} + O(\psi(x)) \\ &= x \sum_{1 \leq d \leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} + O(x). \end{aligned}$$

Par comparaison, on tire :

$$x \sum_{1 \leq d \leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} + O(x) = x \log x - x + O(\log x),$$

D'où

$$\sum_{1 \leq d \leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \log x + O(1) \qquad (x \geq 2).$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq d\leq x}\frac{\Lambda(d)}{d} = \sum_{1\leq d\leq x}\Lambda(d)\int_d^{\infty}\frac{dt}{t^2} &= \sum_{1\leq d\leq x}\Lambda(d)\left\{\int_d^x\frac{dt}{t^2}+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t^2}\right\}\\
&= \sum_{1\leq d\leq x}\Lambda(d)\int_d^x\frac{dt}{t^2}+\frac{\psi(x)}{x}\\
&= \int_1^x\left(\sum_{1\leq d\leq t}\Lambda(d)\right)\frac{dt}{t^2}+\frac{\psi(x)}{x}\\
&= \int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt+\frac{\psi(x)}{x}\\
&= \int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt+O(1),
\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt = \log x + O(1) \qquad (x\geq 2) \tag{1.7.1}$$

Soit maintenant :

$$\alpha = \limsup_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe donc un $x_0 = x_0(\varepsilon)$, tel que

$$\frac{\psi(t)}{t}-\alpha\leq\varepsilon, \qquad (\textit{pour}\ \ \textit{tout}\ \ t\geq x_0);$$

soit

$$\psi(t)\leq(\alpha+\varepsilon)t, \qquad (\textit{pour}\ \ \textit{tout}\ \ t\geq x_0).$$

Pour $x>x_0$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt &= \int_1^{x_0}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt+\int_{x_0}^x\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt\\
&\leq \int_1^{x_0}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt+(\alpha+\varepsilon)\log x-(\alpha+\varepsilon)\log x_0.
\end{aligned}$$

Cela donne (en vertu de (1.7.1)) :

$$\log x + O(1)\leq(\alpha+\varepsilon)\log x+O(1)$$

De sorte que,

$$1+o(1)\leq(\alpha+\varepsilon)+o(1) \qquad (x\longrightarrow+\infty)$$

Par passage à la limite quand ($x \longrightarrow +\infty$), on obtient :

$$(\alpha + \varepsilon) \geq 1,$$

Cela implique que, $\alpha \geq 1$ (puisque ε est arbitraire).

Un raisonnement analogue montre que $\beta \leq 1$, avec

$$\beta = \liminf_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x}.$$

Ceci complète la preuve du théorème. ■

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 1.7.1.

Corollaire 1.7.2. *Si le rapport* $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ *tend vers une limite, cette limite vaut* 1.

Remarque 1.7.3. *Chebychev établit une forme faible de la conjecture de Gauss-Legendre,*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \longrightarrow +\infty)$$

seulement en utilisant des méthodes d'analyse réelle. Après avoir publié ses travaux, les mathématiciens croient qu'ils étaient proche de la démonstration, mais ce n'était pas le cas. Il fallut attendre 44 *ans après, pour que Hadamard et La Vallée-Poussin démontrent la conjecture en empruntant une voie complètement différente, tracée par Riemann et utilisant les méthodes d'analyse complexe.*

CHAPITRE 2 La fonction zêta de Riemann

2.1 Introduction

Au dix-huitième siècle, Euler a découvert la célèbre formule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} \qquad (\alpha \in]1, +\infty]),$$

qui relie une somme portant sur tous les entiers, à un produit portant sur tous les nombres premiers. Riemann (en 1859), s'est rendu compte que l'apparition des nombres premiers dans la formule peut engendrer des renseignements sur la répartition des nombres premiers. L'idée essentielle de Riemann consiste à prolonger la fonction zêta :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\alpha \in]1, +\infty])$$

en une fonction de la variable complexe, tout en se servant de la théorie de Cauchy des fonctions analytiques. Dans ce chapitre nous allons établir le prolongement de ζ au plan complexe, ainsi que certaines propriétés de celle-ci. On verra par la suite (dans le chapitre 3) que l'étude du prolongement permet d'obtenir des renseignements relatifs à la répartition des nombres premiers.

2.2 Produits infinis

Définition 2.2.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes,*

$$\Gamma_n = u_1 u_2 \cdots u_n \qquad (n \geq 1),$$

tel que $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n$ existe. Nous écrivons ainsi

$$\Gamma = \prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Les Γ_n sont les produits partiels du produit infini Γ.

Lorsque $(\Gamma_n)_n$ est convergente, nous disons que le produit infini Γ est convergent.

Pour l'étude de la convergence d'une série Σa_n est significative la façon plus ou moins rapide dont les a_n tendent vers 0. De façon analogue, pour l'étude des produits infinis l'intérêt se focalise sur la proximité des facteurs au nombre 1.

Lemme 2.2.2. *Pour des nombres complexes $u_1, u_2, \cdots, u_N$, si l'on définit*

$$\Gamma_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \quad \Gamma_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|),$$

On dispose de

$$\Gamma_N^* \leq \exp\left(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_N|\right) \tag{2.2.1}$$

et de

$$|\Gamma_N - 1| \leq \Gamma_N^* - 1 \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Pour $x \geq 0$, on a l'inégalité $1 + x \leq \exp(x)$, il s'ensuit que :

$$(1+|u_n|) \leq \exp(|u_n|), \quad (\forall \;\; 1 \leq n \leq N)$$

Puis en multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient (2.2.1).

La relation (2.2.2) s'obtient comme conséquence de l'inégalité $|\Gamma_k - 1| \leq \Gamma_k^* - 1$ ($\forall k \in \{1, \ldots, N\}$) qu'on démontre par récurrence sur k.

- Pour $N = 1$, (2.2.2) est évidente.
- Pour $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, on écrit

$$\Gamma_{k+1} - 1 = \Gamma_k(1+u_{k+1}) - 1 = (\Gamma_k - 1)(1+u_{k+1}) + u_{k+1},$$

de sorte que si (2.2.2) a lieu avec k, on a bien :

$$|\Gamma_{k+1} - 1| \leq (\Gamma_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = \Gamma_{k+1}^* - 1.$$

Le lemme est démontré. ■

Théorème 2.2.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble $S \subset \mathbb{C}$, bornées et à valeurs complexes, telle que $\sum |u_n(s)|$ converge uniformément sur S. Le produit*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)) \tag{2.2.3}$$

converge uniformément sur S. De plus, $f(s)$ s'annule en un point $s_0 \in S$ si et seulement si $u_n(s_0) = -1$ pour un certain entier n.

Démonstration. Grâce à l'hypothèse, $\sum |u_n(s)|$ est bornée sur S, et si Γ_N désigne le $N^{\text{ème}}$ produit partiel de (2.2.3), le lemme précédent établit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $|\Gamma_N(s)| \leq c$ pour tout N et tout s. Choisissons ε, ou $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Il existe un entier N_0 tel que :

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \varepsilon, \qquad \forall s \in S \tag{2.2.4}$$

si $M > N \geq N_0$, on a pour tout $s \in S$:

$$\begin{aligned} |\Gamma_M(s) - \Gamma_N(s)| &= |\Gamma_N(s)| \left| \prod_{N<n\leq M} \{1 + u_n(s)\} - 1 \right| \\ &\leq |\Gamma_N(s)| \left(\exp(\varepsilon) - 1\right) \\ &\leq 2 \left|\Gamma_N(s)\right| \varepsilon \leq 2c\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

De sorte que (2.2.5) indique que $(\Gamma_N)_N$ est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme, donc elle converge uniformément vers une fonction limite f.

Et puisque,

$$|\Gamma_M(s) - \Gamma_{N_0}(s)| \leq 2 \left|\Gamma_{N_0}(s)\right| \varepsilon, \qquad \forall \;\; M > N_0 \tag{2.2.6}$$

il s'ensuit que

$$|\Gamma_M(s)| \geq (1 - 2\varepsilon) \left|\Gamma_{N_0}(s)\right|, \qquad \forall \;\; M > N_0.$$

donc

$$|f(s)| \geq (1-2\varepsilon)\,|\Gamma_{N_0}(s)|\,, \quad \forall \;\; s \in S, \tag{2.2.7}$$

cette relation montre bien que $f(s_0) = 0$ si et seulement si $u_n(s_0) = -1$ pour un certain entier n. Ce qui complète cette preuve. ■

Corollaire 2.2.4. *Pour tout nombre complexe $s = \sigma + i\tau$, tel que $\sigma > 1$, le produit infini $\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ est convergent. De plus si l'on note :*

$$f(s) = \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

alors la fonction f n'a pas de zéros dans le demi-plan $\sigma > 1$.

Démonstration. Soient, s comme dans l'énoncé et $1 < \delta < \sigma$. Il est clair que la série $\sum_{p\in P}\frac{1}{p^z}$ converge uniformément sur le demi-plan $\Re(z) \geq \delta$.
En appliquant le théorème précédent avec $u_n(z) = -\frac{1}{{p_n}^z}$, où p_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier, et $S = \{z \in \mathbb{C}, \;\; tel \;\; que \;\; \Re(z) \geq \delta\}$, il s'ensuit que, le produit infini $\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$ converge uniformément sur S, et puisque $\left(1-\frac{1}{p^z}\right) \neq 0$ pour tout $p \in P$, et tout $z \in S$, alors $\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$ ne s'annule pas sur S. En particulier pour $z = s$, on a $\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ est convergent et $f(s) = \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \neq 0$. Le corollaire est démontré. ■
Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.2.5. *Le produit infini $\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ est convergent dans le demi-plan $\Re(s) > 1$ et ne s'annule pas sur cette région.*

2.3 Formule d'Euler

Dans cette section, nous allons démontrer la fameuse formule d'Euler évoquée dans l'introduction, mais dans un cadre plus général.
Pour $s \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ est absolument convergente si et seulement si $\Re(s) > 1$. Dans la suite, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$.

Théorème 2.3.1 (Formule d'Euler)**.** *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, on a :*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit $s = \sigma + i\tau$, avec $\sigma > 1$. On a pour tout p premier :

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu s}}.$$

En prenant le produit pour $p \in P$, $p \leq N$ $(N \geq 2)$ dans les deux membres de cette dernière, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \prod_{p \leq N} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu s}} \qquad (N \geq 2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{{p_i}^{\nu s}} \\ &= \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_n \geq 0} \frac{1}{({p_1}^{\nu_1} \cdots {p_n}^{\nu_n})^s}, \end{aligned}$$

où, $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ désignent les nombres premiers $\leq N$.
On obtient grâce à l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, et en notons $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier n,

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{P^+(n) \leq N} \frac{1}{n^s}.$$

Mais comme, $\{1, \cdots, N\} \subset \{n \in \mathbb{N}^*, \;\; tel \;\; que \;\; P^+(n) \leq N\}$, on a :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\sigma},$$

en faisant tendre N vers l'infini, on obtient la formule d'Euler complexe. La démonstration est achevée. ∎

Corollaire 2.3.2. *La fonction ζ est analytique sur le demi-plan $\Re(s) > 1$.*

Démonstration. La convergence de la suite des produits partiels,

$$\left\{ \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right\}_{N \geq 2}$$

vers $\zeta(s)$ est uniforme sur tout demi-plan $\Re(z) \geq \delta$ avec $\delta > 1$, ceci découle directement de l'inégalité,

$$\left| \zeta(s) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\delta}, \quad \forall \;\; \Re(s) \geq \delta.$$

Donc la convergence uniforme a lieu sur tous les sous ensembles compacts du demi-plan $\Re(s) > 1$. Or, les produits partiels $\left\{\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right\}_{N\geq 2}$ sont analytiques, d'où l'on déduit que la fonction ζ est analytique sur le demi-plan $\Re(s) > 1$. ■

2.4 Prolongement analytique

Nous allons maintenant présenter l'une des méthodes du prolongement analytique de la fonction zêta sur le plan complexe, à savoir qu'il en existe plusieurs.
Contentons nous de rappeler un résultat fondamental de la théorie des fonctions analytiques.

Théorème 2.4.1 (Principe du prolongement analytique-admis)**.** *Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe et soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω. Si f et g coïncident sur une partie Σ de Ω, qui a un point d'accumulation dans Ω, alors elles coïncident sur Ω.*

Pour la preuve de ce théorème, voir par exemple ([10], p.52).
Nous allons tout d'abord prolonger $\zeta(s)$ au demi-plan $\Re(s) > 0$.

• Première méthode :

On a pour $\Re(s) > 1$:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} s\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}} = s\int_1^{+\infty}\left(\sum_{1\leq n\leq t}1\right)\frac{dt}{t^{s+1}}\\ &= s\int_1^{+\infty}\frac{[t]}{t^{s+1}}dt = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.\end{aligned}$$

Comme $\{t\} \in [0,1[$, la dernière intégrale est analytique sur le demi-plan $\Re(s) > 0$. Le dernier membre définit donc un prolongement de $\zeta(s)$ au demi-plan $\Re(s) > 0$, privé de $s = 1$.

• Deuxième méthode :

Pour $\Re(s) > 1$, on pose :

$$f(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Il vient que :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx.$$

Posons, $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Les fonctions φ_n, sont holomorphes sur le demi-plan $\Re(s) > 0$; de plus pour $s = \sigma + i\tau$, avec $\sigma > 0$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(s)| &= \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \\ &\leq \sup_{n \leq x \leq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| \\ &= \sup_{n \leq x \leq n+1} \left| s \int_n^x \frac{dt}{t^{s+1}} \right| \\ &\leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

Ceci implique que la série des φ_n converge uniformément vers f sur les sous ensembles compacts du demi-plan $\Re(s) > 0$, d'où f est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$.

Pour conclure, on pose $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + f(s)$ pour tout $s \neq 1$, avec $\Re(s) > 0$, ce qui fournit le prolongement de la fonction ζ sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ avec un pôle simple en $s = 1$. D'après le principe du prolongement analytique ce prolongement est unique.

A ce stade, il nous reste qu'a définir $\zeta(s)$ pour $\Re(s) \leq 0$. Comme le fait Riemann, on va démontrer l'existence d'une équation fonctionnelle de la forme :

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \qquad (0 < \Re(s) < 1),$$

où χ est une fonction analytique, définie en tout point $s \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un entier positif impair. Nous expliciterons plus loin $\chi(s)$.

Il faut d'abord, constater que l'équation fonctionnelle fournit le prolongement souhaité, puisque l'application $s \longmapsto 1 - s$, admet le point $s = \frac{1}{2}$ pour centre de symétrie ; cela permet de définir ζ dans le demi-plan $\Re(s) < \frac{1}{2}$, puisque on connaît déjà $\zeta(s)$ pour $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$.

2.5 Démonstration de l'équation fonctionnelle

Théorème 2.5.1. *Il existe une équation fonctionnelle de la forme :*

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \qquad (0 < \Re(s) < 1),$$

où χ est une fonction analytique, définie en tout point $s \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un entier positif impair.

Nous avons choisis de faire la preuve en utilisant la formule de Poisson, qui énonce que, si l'on définit la transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2\pi ixy}\, dy,$$

On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ converge.
2. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément pour $x \in [0,1]$.

Les conditions d'application de la formule de Poisson sont satisfaites pour la fonction $f_u(x) = e^{-\pi ux^2}$, pour tout $u > 0$ fixé.
On a, $\overset{\wedge}{f_u}(x) = e^{\left(-\frac{\pi x^2}{u}\right)}u^{-\frac{1}{2}}$, et donc la fonction : $\vartheta :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, qui à chaque u on associe $\vartheta(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_u(n)$ vérifie l'équation $\vartheta(\frac{1}{u}) = \sqrt{u}\,\vartheta(u)$, $\forall u > 0$.
La fonction $\chi(s)$ elle est définie à partir de la fonction Γ d'Euler par :

$$\chi(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s).$$

La fonction Γ, est définie par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$, tel que $\Re(s) > 0$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale montre que la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$, de plus une simple intégration par partie montre que :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

ce qui permet de prolonger la fonction Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant un pôle simple en tout entier négatif.

Parmi, les jolies formules de la fonction Γ, on a :

1. $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La formule des compléments :
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$
3. La formule de duplication :
$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2s}\Gamma(2s).$$

Démonstration du théorème 2.5.1. En faisant maintenant le changement de variable $x = \pi n^2 y$ dans l'intégrale de définition de $\Gamma(\frac{1}{2}s)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Re(s) > 1$:
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_0^{+\infty} x^{(\frac{s}{2}-1)}e^{-x}dx = \pi^{\frac{s}{2}}n^s \int_0^{+\infty} y^{(\frac{s}{2}-1)}e^{-\pi n^2 y}dy$$
ou bien,
$$\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_0^{+\infty} y^{(\frac{s}{2}-1)}e^{-\pi n^2 y}dy$$
En sommant sur tous les entiers non nuls, on obtient :
$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{+\infty} \vartheta_1(y)y^{(\frac{s}{2}-1)}dy,$$
où $\vartheta_1(y) = \frac{1}{2}\left(\vartheta(y)-1\right)$.

Maintenant, on écrit :
$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{1} \vartheta_1(y)y^{(\frac{s}{2}-1)}dy + \int_1^{+\infty} \vartheta_1(y)y^{(\frac{s}{2}-1)}dy.$$
En effectuant le changement de variable $z = \frac{1}{y}$ sur l'intervalle $]0,1]$, on obtient :
$$\int_0^{1} \vartheta_1(y)y^{(\frac{s}{2}-1)}dy = \int_1^{+\infty} \vartheta_1\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^{(\frac{s}{2}+1)}}dz$$
D'après ce qui précède, on vérifie facilement que $\vartheta_1\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{z}\vartheta_1(z) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{z}-1\right)$.

Ce qui implique que :
$$\begin{aligned}\int_0^{1} \vartheta_1(y)y^{(\frac{s}{2}-1)}dy &= \int_1^{+\infty} \vartheta_1(z)z^{-\frac{(s+1)}{2}}dz + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{(\sqrt{z}-1)}{z^{(\frac{s}{2}+1)}}dz \\ &= \int_1^{+\infty} \vartheta_1(z)z^{-\frac{(s+1)}{2}}dz + \frac{1}{s(s-1)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \vartheta_1(x)\left(x^{-\frac{(s+1)}{2}} + x^{(\frac{s}{2}-1)}\right) dx. \qquad (2.5.1)$$

Puisque, pour tout $x \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = e^{-\pi x}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi x(n^2-1)} \\ &\leq e^{-\pi x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} \\ &\leq \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}}.\end{aligned}$$

Cela signifie que $\vartheta_1(x) = O(e^{-\pi x})$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale montre que cette dernière intégrale est holomorphe sur tout le plan complexe et le membre de droite de (2.5.1) fournit donc un prolongement de $\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ en une fonction analytique, invariante par la transformation $s \longmapsto 1-s$. Pour $0 < \Re(s) < 1$, on a donc :

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}}.$$

En multipliant les deux membres de cette identité par $\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)$, il vient que :

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \zeta\left(1-s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\pi^{\frac{2s-1}{2}}$$

Les formules des compléments et de duplication impliquent que :

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

2.6 Quelques conséquences de l'équation fonctionnelle

1. L'équation fonctionnelle permet d'écrire pour $s \neq 0$:

$$\zeta(s) = -2^{s-1}\pi^s\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}{\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}\left(-s\zeta(1-s)\right)\Gamma(1-s).$$

Puisque $(s-1)\zeta(s)$ tend vers 1 quand $s \longrightarrow 1$, donc $-s\zeta(1-s)$ tend vers 1, quand $s \longrightarrow 0$, et on a également :

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \zeta(s) = -\frac{1}{2}$$

donc ζ est définie en 0 et $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, fournit :

$$\Gamma(1-s) = \frac{\Gamma(2n+1-s)}{(1-s)(2-s)\dots(2n-s)}$$

En effectuant un développement limité d'ordre 1 de $\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)$, au voisinage de $2n$ on obtient :

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) = \frac{(-1)^n \pi}{2}(s-2n) + o(s-2n)$$

D'où

$$\lim_{s \longrightarrow 2n} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s) = \frac{(-1)^n \pi}{2.(2n-1)!}$$

Ceci permet de définir $\chi(s)$ en $s = 2n$ et on a :

$$\chi(2n) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{2.(2n-1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et donc $\chi(s)$ possède un sens pour toute valeur de $s \in \mathbb{C}$, qui n'est pas un entier positif impair.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en faisant tendre s vers $2n+1$ dans l'identité $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, le membre de gauche tend vers une limite finie $\zeta(2n+1)$, et puisque le module de $\chi(s)$ tend vers l'infini, alors nécessairement $\zeta(1-s)$ tend vers zéro, cela veut dire que $\zeta(-2n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les nombres $-2, -4, \dots$, sont appelés **les zéros triviaux de la fonction** ζ.

4. Comme la fonction Γ ne s'annule en aucun point du plan complexe, l'équation fonctionnelle permet de conclure que les zéros non triviaux de la fonction ζ se situent sur la bande $0 \leq \Re(s) \leq 1$. On verra plus loin que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$, donc l'équation fonctionnelle entraîne que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 0$. Par conséquent, les zéros non triviaux de ζ sont dans la bande ouverte $0 < \Re(s) < 1$, appelée **la bande critique**.

5. Les zéros triviaux sont les seuls zéros réels de $\zeta(s)$. Pour justifier cela, il suffit de montrer que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $]0,1[$. D'après la première méthode de prolongement de $\zeta(s)$ sur le demi-plan $\Re(s)>0$, on a :

$$\zeta(\sigma)=\frac{\sigma}{\sigma-1}-\sigma\int_1^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{\sigma+1}}dt \qquad (pour\ \ tout\ \ 0<\sigma<1),$$

et puisque $\{t\}\in[0,1[$, on en déduit que $\zeta(\sigma)<0$ pour tout $\sigma\in]0,1[$, ce qui permet de conclure.

Remarque 2.6.1. *Une autre conséquence de l'équation fonctionnelle concerne le calcul de $\zeta(2n)$ pour $n\geq 1$. Pour ce faire, il faut faire appel à une autre démonstration de l'équation fonctionnelle qu'on ne précisera pas ici. Notons juste que si l'on définit les nombres de Bernoulli comme étant les coefficients du développement de Taylor suivant :*

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\frac{x^n}{n!},$$

alors, on a la formule d'Euler (voir [13], p.19) :

$$\zeta(2n)=(-1)^{n-1}2^{2n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n} \qquad (n\geq 1).$$

En particulier on a :

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}.$$

CHAPITRE 3 Le théorème des nombres premiers

3.1 Introduction

En s'inspirant des travaux de Riemann, Hadamard et La Vallée-Poussin ont démontré indépendamment en 1898 que la conjecture de Gauss-Legendre est équivalente à l'absence des zéros de la fonction ζ sur la droite $\Re(s) = 1$, et que la fonction ζ ne s'annule pas sur cette droite. Depuis, ce résultat est nommé « le théorème des nombres premiers ».
Nous avons vu au chapitre 1 la formule asymptotique :

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\psi(x)}{x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Cette dernière montre que le théorème des nombres premiers équivaut à :

$$\psi(x) \sim x \qquad (x \longrightarrow +\infty).$$

Nous verrons dans ce chapitre comment l'absence de zéros sur la droite $\Re(s) = 1$ implique le théorème des nombres premiers en sa forme :

$$\psi(x) \sim x \qquad (x \longrightarrow +\infty).$$

3.2 Résultats obtenus par intégration complexe

Soit f une fonction analytique. On note $\int_{s_1}^{s_2} f(s)\ ds$, l'intégrale curviligne de f le long d'un segment $[s_1, s_2]$ $(s_1, s_2 \in \mathbb{C})$. Des changements de variables simples montrent que :
Pour tous $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{c+i\alpha}^{c+i\beta} f(s)\ ds = i\int_{\alpha}^{\beta} f(c+it)\ dt,$$

$$\int_{\alpha+ic}^{\beta+ic} f(s)\ ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(t+ic)\ dt,$$

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\ ds = i\int_{-\infty}^{+\infty} f(c+it)\ dt.$$

3.2.1 Étude de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s ds}{s(s+1)}$

Lemme 3.2.1. *Soient x, c deux réels strictement positifs. On a :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s ds}{s(s+1)} = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1, \\ 1-\frac{1}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Démonstration. La fonction $s \mapsto \frac{x^s}{s(s+1)}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$, avec deux pôles simples 0 et -1, de résidus respectifs 1 et $-\frac{1}{x}$.

• Pour $x \leq 1$: On considère le rectangle, ayant les sommets $c-iT, c+iT, c+T+iT, c+T-iT$, avec $T>0$. Ce rectangle n'entoure aucun pôle, donc :

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} + \int_{c+iT}^{c+T+iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} + \int_{c+T+iT}^{c+T-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} + \int_{c+T-iT}^{c-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} = 0.$$

On a :

$$\left|\int_{c+T+iT}^{c+T-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)}\right| = \left|\int_{-T}^{T} \frac{x^{c+T+it} dt}{(c+T+it)(c+T+it+1)}\right| \leq \frac{2Tx^{c+T}}{(c+T)^2} \leq \frac{2Tx^c}{(c+T)^2}.$$

De même, on montre facilement que :

$$\left|\int_{c+iT}^{c+T+iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)}\right| \leq \frac{x^c}{T}$$

et que

$$\left|\int_{c+T-iT}^{c-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)}\right| \leq \frac{x^c}{T}.$$

En faisant tendre T vers l'infini, le résultat en découle immédiatement.

• Pour $x \geq 1$: On intègre cette fois-ci sur le rectangle de sommets $c - iT, c + iT$, $c - T + iT, c - T - iT$, avec $c - T < -1$. Ce rectangle entoure les deux pôles, donc (d'après le théorème des résidus) :

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} + \int_{c+iT}^{c-T+iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} + \int_{c-T+iT}^{c-T-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c-T-iT}^{c-iT} \frac{x^s ds}{s(s+1)} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Les majorations de l'intégrale sur les trois cotés autres que $c - iT, c + iT$, sont les mêmes que dans le cas $x \leq 1$; on conclut en faisant tendre T vers l'infini. ■

Définition 3.2.2. *On appelle série de Dirichlet, toute série de la forme* $\sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, *où* f *est une fonction quelconque définie sur* $\mathbb{N}^*$, *à valeurs complexes.*

Théorème 3.2.3. *Soit* $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *une série de Dirichlet qui converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re(s) > \sigma_0 > 0$ *et soient* $F(s)$ *sa somme pour* $\Re(s) > \sigma_0$ *et* $A(x) = \sum\limits_{1 \leq n \leq x} a_n$. *Alors pour tout* $c > \sigma_0$ *et tout* $x > 0$, *on a :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} \frac{x^s F(s) ds}{s(s+1)} = \frac{1}{x}\int_0^x A(u)du.$$

Démonstration. L'intégrale $\int_{c-i\infty}^{c+\infty} \frac{ds}{s(s+1)}$ est absolument convergente (pour assurer l'existence de l'intégrale ci-dessus) et $\sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est uniformément convergente sur le segment d'intégration, donc :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} \frac{x^s F(s) ds}{s(s+1)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{c-i\infty}^{c+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)}$$

Le lemme précédent donne alors :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} \frac{x^s F(s) ds}{s(s+1)} = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right) = \frac{1}{x}\sum_{1 \leq n \leq x} a_n(x - n) = \frac{1}{x}\int_0^x A(u)du.$$

■

Dans la suite, on admettra l'existence d'un prolongement analytique de la fonction logarithme vérifiant les propriétés suivante :

1. Pour toute fonction $f(s)$ analytique, ne s'annulant pas pour $\Re(s) > \alpha$ et strictement positive pour $s \in]\alpha, +\infty[$, la fonction $\log f(s)$ est défini dans le demi-plan $\Re(s) > \alpha$.
2. Pour tout s dans le demi-plan $\Re(s) > \alpha$, on a $\Re(\log f(s)) = \log |f(s)|$.
3. Pour $|s| < 1$, on a :
$$\log(1+s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} s^n}{n}$$

Sous certaines conditions qui seront toujours prise dans la suite, le prolongement satisfait aux règles de calcul usuelles.

Parmi les conséquences de la formule d'Euler complexe, nous avons pour $\Re(s) > 1$:
$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in P} \log\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \sum_{p \in P} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu p^{\nu s}},$$
où la dernière identité résulte de la troisième propriété du logarithme complexe.

Donc par dérivation logarithmique, la formule d'Euler donne :
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in P} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\log p}{p^{\nu s}},$$
ce que l'on peut exprimer en utilisant la fonction de Von Mangoldt, comme suit :
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Posons maintenant $Z(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. La fonction $Z(s)$ est méromorphe dans le plan complexe et possède une singularité en tout zéro et pôle de ζ. En particulier, Z possède une singularité au point $s = 1$.

Pour $\Re(s) > 1$, on définit $F(s)$ comme suit :
$$F(s) := Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

En appliquant le théorème 3.2.3 pour la fonction F, avec $\sigma_0 = 1$ et $A(x) = \psi(x) - [x]$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.4. *En écrivant $s = \sigma + i\tau$, on a :*
$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{s+1} F(s)}{s(s+1)} d\tau \qquad (\textit{pour tout } \sigma > 1).$$

On rappelle que pour $\Re(s) > 0$, la fonction ζ s'écrit sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + f(s)$$

où f est une fonction analytique sur le demi-plan $\Re(s) > 0$.

donc,

$$Z(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{(1-s)f'(s) - f(s)}{1 + (s-1)f(s)}$$

Le second membre de cette identité est méromorphe dans le demi-plan $\Re(s) > 0$ et possède une singularité en tout zéro de ζ dans cette même région ; ce qui implique que les fonctions ζ et Z sont toutes les deux de la forme $\frac{1}{s-1} + h(s)$, où h est analytique dans la région $\Re(s) > 0$. Il en découle de cela que $F(s)$ est définie en $s = 1$.

Nous allons établir des inégalités permettant de faire passer la limite quand $\sigma \longrightarrow 1^+$ sous le signe intégrale dans la formule du corollaire 3.2.4.

3.3 Majoration de ζ

Pour $s = \sigma + it$, avec $\sigma > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varphi_n(s),$$

avec $|\varphi_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \left| \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s} \right| + |s| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \tag{3.3.1}$$

Proposition 3.3.1. *Pour $1 \leq \sigma \leq 2$ et $|t|$ augmentant indéfiniment, on a :*

$$\zeta(\sigma + it) = O\left(\log |t|\right).$$

Démonstration. Supposons que $1 \leq \sigma \leq 2$ et que $|t| \geq 2$ et posons $N = [|t|]$ dans (3.3.1). Alors, pour $|t|$ augmentant indéfiniment, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \leq |t|} \frac{1}{n} = O(\log |t|).$$

$$\left|\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s}\right| = \left|\frac{([|t|]+1)^{1-s}-1}{1-s}\right| \leq \frac{([|t|]+1)^{1-\sigma}+1}{|t|} = O(1);$$

$$\begin{aligned} |s| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} &\leq (2+|t|) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \\ &= (2+|t|) \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \\ &\leq \frac{2+|t|}{[|t|]^\sigma} = O(1). \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. ■

Proposition 3.3.2. *Pour $0 < \sigma < 1$, et $|t|$ augmentant indéfiniment on a :*

$$\zeta(\sigma+it) = O\left(\frac{|t|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + O\left(\frac{|t|^{1-\sigma}}{\sigma}\right)$$

Démonstration. Posons $N = [|t|]$ dans (3.3.1). Pour $|t|$ augmentant indéfiniment, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^\sigma} \leq 1 + \frac{|t|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = O\left(\frac{|t|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right);$$

$$|s| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}} \leq ([|t|]+1) \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{[|t|]+1}{\sigma[|t|]^\sigma} \leq \frac{|t|^{1-\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma[|t|]^\sigma} = O\left(\frac{|t|^{1-\sigma}}{\sigma}\right).$$

La majoration de $\left|\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s}\right|$ est la même que celle rencontrée durant la preuve de la proposition précédente. Ce qui permet de conclure via (3.3.1). ■

Proposition 3.3.3. *Pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $\sigma \geq 1 - \frac{a}{\log|t|}$, $\sigma < 1$, avec $a > 0$ et $|t|$ assez grand de sorte que $1 - \frac{a}{\log|t|} \leq \sigma < 1$ (i.e : $0 < 1-\sigma \leq \frac{a}{\log|t|}$), on a :*

$$\zeta(\sigma+it) = O(\log|t|).$$

Démonstration. Le théorème des accroissement finis établit l'existence d'une constante $0 < \theta < 1$ telle qu'on ait :

$$\frac{|t|^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = \log|t| \frac{e^{(1-\sigma)\log|t|}-1}{(1-\sigma)\log|t|} = \log|t| e^{a\theta},$$

de sorte que la proposition précédente implique que pour $1 - \frac{a}{\log|t|} \leq \sigma < 1$, on a :

$$\zeta(\sigma+it) = O(\log|t|).$$

D'où le résultat. ■

En combinant les propositions précédentes on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.4. *Pour $a > 0$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$, et $\sigma \geq 1 - \frac{a}{\log|t|}$ on a :*

$$\zeta(\sigma + it) = O(\log|t|).$$

3.4 Majoration de ζ'

Proposition 3.4.1. *Si $b > 0$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$, $\sigma \geq 1 - \frac{b}{\log|t|}$, on a pour $|t|$ augmentant indéfiniment :*

$$\zeta'(\sigma + it) = O\left((\log|t|)^2\right).$$

Démonstration. Soit $a > 0$ tel que $b < a$. Pour $|t|$ assez grand, tout point de la région $1 - \frac{b}{\log|t|} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$ est centre d'un disque de rayon $\frac{c}{\log|t|}$, avec $c > 0$, contenu dans la région $1 - \frac{a}{\log|t|} \leq \sigma \leq 2$. On utilise la formule de Cauchy sous la forme :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\gamma) d\gamma}{(\gamma - z)^2},$$

où C est un cercle et f une fonction holomorphe à l'intérieur de C et continue sur C.

On a d'après cette formule :

$$\zeta'(\sigma + it) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\left(\sigma + it, \frac{c}{\log|t|}\right)} \frac{\zeta(\gamma) d\gamma}{(\gamma - (\sigma + it))^2};$$

ce qui implique que,

$$|\zeta'(\sigma + it)| \leq \left|\left|\frac{\zeta(.)}{(. - z)^2}\right|\right|_\infty \frac{c}{\log|t|},$$

où $\left|\left|\frac{\zeta(.)}{(.-z)^2}\right|\right|_\infty$ est la borne supérieure de $\left|\frac{\zeta(.)}{(.-z)^2}\right|$ dans le le cercle $C\left(\sigma + it, \frac{c}{\log|t|}\right)$.

La majoration de ζ établit donc l'existence d'une constante $\alpha > 0$ tel que :

$$|\zeta'(\sigma + it)| \leq \alpha(\log|t|)^2.$$

Et puisque la fonction ζ' est bornée pour $\sigma \geq \frac{3}{2}$, le résultat en découle. ■

3.5 La droite $\Re(s) = 1$

Théorème 3.5.1 (Hadamard et La Vallée-Poussin)**.** *La fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $\Re(s) = 1$. De plus, on a l'inégalité :*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it))|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \qquad \textit{(pour tous } \sigma > 1,\ t \in \mathbb{R}\textit{)}.$$

Démonstration. Étant donnés $\sigma > 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Re(\log\zeta(\sigma+it)) = \sum_p \sum_{\nu\geq 1} \frac{\cos(\nu t \log p)}{\nu p^{\nu\sigma}},$$

$$\Re(\log\zeta(\sigma+2it)) = \sum_p \sum_{\nu\geq 1} \frac{\cos(2\nu t \log p)}{\nu p^{\nu\sigma}},$$

et

$$\log\zeta(\sigma) = \sum_p \sum_{\nu\geq 1} \frac{1}{\nu p^{\nu\sigma}}.$$

D'où :

$$3\log\zeta(\sigma) + 4\Re(\log\zeta(\sigma+it)) + \Re(\log\zeta(\sigma+2it)) = \sum_p \sum_{\nu\geq 1} \frac{2\left(1+\cos(\nu t \log p)\right)^2}{\nu p^{\nu\sigma}} \geq 0.$$

Or $\Re\left(\log\zeta(s)\right) = \log|\zeta(s)|$; d'où :

$$3\log\zeta(\sigma) + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \geq 0.$$

Ce qui donne :

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it))|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq 1,$$

comme il fallait le prouver.

Supposons maintenant qu'il existe un $t \neq 0$ tel que $\zeta(1+it) = 0$. Puisque, ζ est holomorphe (donc développable en série entière), il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\zeta(\sigma+it) = c_n(\sigma-1)^n + c_{n+1}(\sigma-1)^{n+1} + \cdots = O(\sigma-1) \qquad \textit{quand } \sigma \longrightarrow 1^+.$$

De plus

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma-1} = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) \qquad \textit{quand } \sigma \longrightarrow 1^+,$$

Il en résulte donc que :

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4\,|\zeta(\sigma+2it)| = O(\sigma-1),$$

ce qui est en contradiction avec le fait que :

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it))|^4\,|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \qquad (\textit{pour tout } \sigma>1).$$

Ainsi ζ ne peut avoir un zéro sur la droite $\Re(s) = 1$. Ce qui complète la preuve du théorème. ■

3.6 Majoration de $\frac{1}{\zeta}$ et $\frac{\zeta'}{\zeta}$

Proposition 3.6.1. *Il existe une constante $A>0$ telle que pour $|t|$ assez grand, la fonction ζ ne s'annule pas dans la région $\sigma \geq 1-\frac{A}{(\log|t|)^9}$. Dans cette région, on a précisément :*

$$\frac{1}{\zeta(\sigma+it)} = O\left((\log|t|)^7\right) \quad \textit{et} \quad \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = O\left((\log|t|)^9\right).$$

Démonstration. Soit $1<\sigma_0<2$, que nous choisirons plus loin en fonction de t. Pour $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, on a d'après ce qui précède :

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \zeta^{-\frac{3}{4}}(\sigma)|\zeta(\sigma+2it)|^{-\frac{1}{4}}.$$

Puisque

$$\zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) \quad \textit{et} \quad \zeta(\sigma+2it) = O(\log|t|),$$

alors il existe une constante $A_1>0$ telle que l'on ait :

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq A_1\frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{(\log|t|)^{\frac{1}{4}}} \geq A_1\frac{(\sigma_0-1)^{\frac{3}{4}}}{(\log|t|)^{\frac{1}{4}}} \tag{3.6.1}$$

Pour $b>0$ et $1-\frac{b}{\log|t|} \leq \sigma \leq \sigma_0$, puisque $\zeta'(\sigma+it) = O\left((\log|t|)^2\right)$, le théorème des accroissements finis établit l'existence d'une constante $A_2>0$ telle que :

$$|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\sigma_0+it)| \leq A_2|\sigma-\sigma_0|(\log|t|)^2.$$

D'où

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq A_1\frac{(\sigma_0-1)^{\frac{3}{4}}}{(\log|t|)^{\frac{1}{4}}} - A_2|\sigma-\sigma_0|(\log|t|)^2.$$

En posant $A_3 = \left(\frac{A_1}{3A_2}\right)^4$ et $\sigma_0 = 1 + \frac{A_3}{(\log|t|)^9}$, on a :

$$A_1 \frac{(\sigma_0 - 1)^{\frac{3}{4}}}{(\log|t|)^{\frac{1}{4}}} = 3A_2(\sigma_0 - 1)(\log|t|)^2,$$

donc

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \{3(\sigma_0 - 1) - (\sigma_0 - \sigma)\} A_2(\log|t|)^2.$$

Puisque pour $\sigma \geq 1 - \frac{A_3}{\log|t|^9}$, on a :

$$3(\sigma_0 - 1) - (\sigma_0 - \sigma) \geq (\sigma_0 - 1),$$

alors :

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq A_2(\sigma_0 - 1)(\log|t|)^2 = \frac{A_2 A_3}{(\log|t|)^7} \tag{3.6.2}$$

En remplaçant σ_0 par sa valeur dans l'inégalité (3.6.1), on en déduit qu'il existe deux constantes $A > 0$, et $c > 0$ telles que pour $\sigma \geq 1 - \frac{A}{(\log|t|)^9}$, on ait :

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq c(\log|t|)^7.$$

D'où

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} = O\left((\log|t|)^7\right).$$

Enfin, la majoration de ζ' permet de conclure que :

$$\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = O\left((\log|t|)^9\right).$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

3.7 Démonstration du théorème des nombres premiers

On rappelle qu'en écrivant $s = \sigma + i\tau$, on a la formule suivante valable pour tout $\sigma > 1$:

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{s+1} F(s)}{s(s+1)} d\tau,$$

où la fonction F est méromorphe sur le plan complexe et possède une singularité en tout zéro de la fonction ζ. Or on vient juste de montrer que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\Re(s) = 1$; il s'ensuit que $F(\sigma + i\tau)$ est définie pour tout $\sigma \geq 1$, et tout $\tau \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 3.6.1 on a :

$$F(\sigma + i\tau) = O\left((\log|\tau|)^9\right) \qquad (\sigma \geq 1).$$

Cela permet de, faire passer la limite, quand $\sigma \longrightarrow 1^+$, sous le signe intégrale dans la formule précédente. On obtient ainsi :

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{i\tau} F(1+i\tau)}{(1+i\tau)(2+i\tau)} d\tau.$$

C'est à dire :

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = x^2 \hat{f} \left(-\frac{\log x}{2\pi}\right),$$

avec $f(\tau) = \frac{F(1+i\tau)}{(1+i\tau)(2+i\tau)}$. Ainsi, le lemme de Riemann-Lebesgue, selon lequel la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend nécessairement vers zéro à l'infini, montre que l'on a :

$$\int_0^x (\psi(y) - [y])\, dy = o(x^2) \qquad (x \to +\infty).$$

D'où

$$\int_0^x \psi(y) dy = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ fixé, la croissance de la fonction ψ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}(1-\varepsilon)^2 + o(x^2) &\leq \int_{x(1-\varepsilon)}^x \psi(y)dy \leq \varepsilon x \psi(x) \\ &\leq \int_x^{x(1+\varepsilon)} \psi(y)dy = \frac{x^2}{2}(1+\varepsilon)^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

En divisant par εx on obtient l'encadrement suivant :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) x + o(x) \leq \psi(x) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) x + o(x).$$

Comme on peut choisir ε aussi petit que l'on veut, on en déduit le théorème des nombres premiers sous sa forme :

$$\psi(x) \sim x \qquad (x \to +\infty).$$

3.8 Quelques conséquences arithmétiques

Théorème 3.8.1. *Si p_n désigne le $n^{ème}$ nombre premier alors, on a :*

$$p_n \sim n \log n \qquad (n \longrightarrow +\infty).$$

Démonstration. Le théorème des nombres premiers montre que l'on a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

En posons $y = \pi(x)$, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{y \log x}{x} = 1 \tag{3.8.1}$$

D'où,

$$\log y + \log \log x - \log x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc,

$$\frac{\log y}{\log x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{3.8.2}$$

de (3.8.1) et (3.8.2) on tire,

$$\frac{y \log y}{x} = \frac{y \log x}{x} \frac{\log y}{\log x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

en posons $x = p_n$, de sorte que $y = \pi\left(p_n\right) = n$, on obtient :

$$\frac{n \log n}{p_n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

Ce qui donne le résultat requis. ■

Pour tout entier non nul n, on désigne par $\nu_p(n)$ l'exposant de la plus grande puissance de p divisant n.

Théorème 3.8.2. *On a :*

$$\log\left\{\mathrm{ppcm}\left(1, 2, \ldots, n\right)\right\} \underset{+\infty}{\sim} n.$$

Démonstration. On peut exprimer le *ppcm* des entiers inférieurs ou égal à n par la formule suivante :

$$\mathrm{ppcm}\left(1, 2, \ldots, n\right) = \prod_{p \leq n} p^{\max(\nu_p(1), \nu_p(2), \ldots, \nu_p(n))} = \prod_{p \leq n} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]},$$

donc,

$$\log\{\mathrm{ppcm}\,(1,2,\ldots,n)\} = \sum_{p\leq n}\left[\frac{\log n}{\log p}\right]\log p = \psi(n),$$

et puisque $\psi(n) \underset{+\infty}{\sim} n$, le résultat en découle. ■

CHAPITRE

4 La formule explicite de ψ

4.1 Introduction

Le théorème de factorisation de Hadamard permet de définir une fonction analytique par ses zéros et ses singularités. Comme la fonction ζ définit complètement $\psi(x)$, il est naturel de rechercher un lien direct entre $\psi(x)$ et les zéros de ζ. La formule explicite de $\psi(x)$ est la suivante :

$$\psi^0(x) = \frac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2} = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right),$$

où la somme est étendue sur les zéros non triviaux de ζ, chacun est répété un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité (notons que cette convention sera prise dans toute la suite). Elle a été conjecturée par Riemann et démontrée plus tard par Von-Mangoldt en 1895. La formule est très remarquable et riche de conséquences, lesquelles seront citées plus loin.

4.2 Résultats obtenus par intégration complexe

Proposition 4.2.1. *Soient $x, c,$ et T trois réels strictement positifs. On a :*
pour $x < 1$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s}\, ds\right| \le \frac{x^c}{\pi T\,|\log x|} \tag{4.2.1}$$

pour $x > 1$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}\,ds - 1\right| \leq \frac{x^c}{\pi T\,|\log x|} \tag{4.2.2}$$

et

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{c}{\pi T} \tag{4.2.3}$$

Démonstration.

La fonction $f(s) = \frac{x^s}{s}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, elle possède 0 comme seul pôle (dont le résidu vaut 1).

Dans le cas $x < 1$, on intègre la fonction $\frac{x^s}{s}$ le long du rectangle, admettant les sommets $c - iT, c + iT, c + A + iT, c + A - iT$, où A est un nombre réel strictement positif.

Le rectangle n'entoure pas le pôle, donc l'intégrale est nulle.

On a :

$$\left|\int_{c+iT}^{c+A+iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| = \left|\int_{c}^{c+A}\frac{x^{t+iT}}{t+iT}dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{+\infty} x^t dt = \frac{x^c}{T\,|\log x|}$$

le même raisonnement montre que :

$$\left|\int_{c-iT}^{c+A-iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| \leq \frac{x^c}{T\,|\log x|}$$

et que :

$$\left|\int_{c+A-iT}^{c+A+iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| \leq \frac{x^{c+A}}{c+A}2T.$$

Cette dernière intégrale tend vers 0 quand A tend vers l'infini.

D'où, (4.2.1) en découle en faisant tendre A vers l'infini dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c+iT}^{c+A+iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c-iT}^{c+A-iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c+A-iT}^{c+A+iT}\frac{x^s}{s}\,ds\right| \\ &\leq \frac{x^c}{\pi T\,|\log x|} + \frac{Tx^{c+A}}{\pi(c+A)}.\end{aligned}$$

Dans le cas $x > 1$, on considère de même le rectangle ayant les sommets $c - iT, c + iT, c - A + iT, c - A - iT$ qui entoure le pôle $s = 0$ dès que A soit strictement supérieur à c. Pour un tel A, le résidu en $s = 0$ vaut 1 ; d'où (d'après le théorème des résidus), on a :

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{c+iT}^{c-A+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{c-A+iT}^{c-A-iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{c-A-iT}^{c-iT}\frac{x^s}{s}ds\right) = 1.$$

On a comme ci-dessus :

$$\left|\int_{c+iT}^{c-A+iT} \frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{x^c}{T\left|\log x\right|}$$
$$\left|\int_{c-A-iT}^{c-iT} \frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{x^c}{T\left|\log x\right|}$$
$$\left|\int_{c-A+iT}^{c-A-iT} \frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{2Tx^{c-A}}{A-c}.$$

D'où, (4.2.2) en découle en faisant tendre A vers l'infini dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s}\, ds - 1\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c+iT}^{c-A+iT} \frac{x^s}{s}\, ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c-A-iT}^{c-iT} \frac{x^s}{s}\, ds\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{c-A+iT}^{c-A-iT} \frac{x^s}{s}\, ds\right| \\ &\leq \frac{x^c}{\pi T\left|\log x\right|} + \frac{Tx^{c-A}}{\pi(A-c)}.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{dt}{c+it} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} \left\{\frac{1}{c+it} + \frac{1}{c-it}\right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} \frac{2c}{c^2+t^2} dt = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{c}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{c}{T}\right).\end{aligned}$$

Comme, $\left|\arctan\left(\frac{c}{T}\right)\right|$ est majoré par $\frac{c}{T}$, l'inégalité (4.2.3) en découle. ■

Remarque 4.2.2. *En faisant tendre T vers l'infini dans les inégalités obtenues dans La proposition précédente, on obtient :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \delta(y) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad y = 1 \\ 1 & si \quad y > 1 \end{cases}.$$

Proposition 4.2.3. *Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet qui converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \sigma_0$ et soit $F(s)$ sa somme (pour $\Re(s) > \sigma_0$). Définissons $A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n$ et*

$$A^0(x) = \frac{A(x-0) + A(x+0)}{2} = \begin{cases} A(x) & si\ x\ n'est\ pas\ un\ entier \\ A(x) - \frac{a_x}{2} & si\ x\ est\ un\ entier \end{cases}$$

Alors, pour tout $c > \max(0, \sigma_0)$*, on a :*

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s F(s) ds}{s} - A^0(x) \right| \leq \frac{x^c}{\pi T} \sum_{n \neq x} \frac{|a_n|}{n^c \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|} + \frac{c\,|a_x|}{\pi T},$$

où le terme a_x *vaut* 0 *dans le cas ou* x *n'est pas un entier.*

Démonstration. Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge uniformément sur le segment d'intégration (car $c > \sigma_0$), on a :

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s F(s) ds}{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Il suffit d'appliquer les inégalités de la proposition 4.2.1 à chacune des intégrales de la somme et on obtient le résultat. ∎

La proposition suivante découle immédiatement de la proposition 4.2.3.

Proposition 4.2.4. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2.3 on a :*

$$A^0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s F(s) ds}{s}.$$

En particulier si ψ *est la fonction de Chebychev alors pour* $c > 1$ *on a :*

$$\psi^0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right\} \frac{x^s}{s} ds.$$

Lemme 4.2.5. *Soit*

$$I(y, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds.$$

Pour $y > 0$*,* $c > 0$*, et* $T > 0$ *on a :*

$$|I(y, T) - \delta(y)| \leq \begin{cases} y^c \min\left(1, T^{-1} |\log y|^{-1}\right) & si \quad y \neq 1 \\ cT^{-1} \quad si \quad y = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Pour $0 < y < 1$ on remplace le segment d'intégration $[c - iT, c + iT]$ par l'arc du cercle de centre 0 et de rayon $R = \sqrt{c^2 + T^2}$ délimité par les points $c - iT, c + iT$ dans le demi-plan $\Re(s) > 0$, et puisque $|y^s| \leq y^c$ sur l'arc (car $\Re(s) \geq c$) on obtient :

$$|I(y, T)| \leq \frac{1}{2\pi} \pi R \frac{y^c}{R} \leq y^c.$$

D'où l'inégalité (4.2.1) permet de conclure.

On raisonne de la même façon dans le cas $y > 1$ sauf que cette fois-ci on considère l'arc du coté à gauche, et donc l'inégalité (4.2.2) permet de conclure.

Le cas $y = 1$ est déjà traité dans l'inégalité (4.2.3). ■

Dans la suite on note $\langle x \rangle$ la distance entre x et la plus proche puissance d'un nombre premier différente de x, autrement dit :

$$\langle x \rangle = \min_{p^\nu \neq x} |x - p^\nu|$$

Théorème 4.2.6. *Pour $x > 2$, $T > 0$ et $c = 1 + (\log x)^{-1}$ on a la majoration suivante :*

$$\left|\psi^0(x) - J(x,T)\right| \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + (\log x) \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right)$$

où,

$$J(x,T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right\} \frac{x^s}{s} ds.$$

Démonstration. En appliquant le lemme précédent pour $\psi^0(x)$, on obtient :

$$\left|\psi^0(x) - J(x,T)\right| \leq \sum_{n=1, n\neq x}^{+\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left(1, T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}\right) + cT^{-1}\Lambda(x)$$

Le terme $cT^{-1}\Lambda(x)$ est présent seulement si x est une puissance d'un nombre premier.

Remarquons d'abord que $x^c = ex$ et que $\left|\log \frac{x}{n}\right|$ est bornée pour $n \leq \frac{3}{4}x$ ou $n \geq \frac{5}{4}x$, ceci implique que la somme des termes pour lesquels $n \leq \frac{3}{4}x$ ou $n \geq \frac{5}{4}x$ est :

$$\ll xT^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} = xT^{-1} \left\{-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}\right\} \ll xT^{-1}(\log x)$$

où la dernière majoration vient du fait que la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est de la forme $\frac{1}{s-1} + h(s)$, avec $h(s)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$, elle admet une singularité en tout zéros de ζ donc elle est bornée dans l'intervalle $[1,3]$ (par exemple), cela implique qu'il existe une constante $A > 0$, telle que pour tout $1 < \sigma \leq 3$ on ait :

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + A \tag{4.2.4}$$

et pour $\sigma = c$, on obtient :

$$-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} \leq \log x + A \ll \log x.$$

Considérons maintenant les termes d'indices $\frac{3}{4}x < n < x$. Soit x_1 la plus grande puissance d'un nombre premier inférieure à x, on peut supposer que $\frac{3}{4}x < x_1 < x$ (car sinon tous les termes d'indices $\frac{3}{4}x < n < x$ seront nuls), pour $n = x_1$ on a :

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) = -\log\left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right) \geq \frac{x - x_1}{x}$$

donc le terme d'indice $n = x_1$ est :

$$\ll \Lambda(x_1)\min\left(1, \frac{x}{T(x - x_1)}\right) \ll (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T(x - x_1)}\right).$$

Pour les autres termes (nécessairement $\frac{3}{4}x < n < x_1$) on peut prendre $\nu = x_1 - n$ avec $0 < \nu < \frac{1}{4}x$ et on a :

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) \geq \log\frac{x_1}{n} = -\log\left(1 - \frac{\nu}{x_1}\right) \geq \frac{\nu}{x_1}$$

D'où la somme pour les indices $\frac{3}{4}x < n < x_1$ est :

$$\ll \sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \Lambda(x_1 - \nu)T^{-1}\frac{x_1}{\nu} \ll xT^{-1}(\log x)\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x}\frac{1}{\nu} \ll xT^{-1}(\log x)^2.$$

On traite les termes d'indices $x < n < \frac{5}{4}$ de la même façon, et on obtient les mêmes majorations sauf que x_1 sera remplacé par x_2 qui est la plus petite puissance d'un nombre premier supérieure à x, et la preuve en découle. ■

4.3 Factorisation de ζ et quelques conséquences

Dans la suite un zéro non trivial de ζ sera noté traditionnellement $\varrho = \beta + i\gamma$, s désigne un nombre complexe noté $s = \sigma + it$ et le nombre de zéros dans le rectangle $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq t \leq T$ est noté $N(T)$.

Théorème 4.3.1 (Factorisation de la fonction ζ-admis)**.**

1. *La fonction ζ possède une infinité de zéros dans la bande critique, et si on note ces zéros par $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, alors :*

$$\sum |\varrho_n|^{-1-\varepsilon} \quad \textit{converge pour tout} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\sum |\varrho_n|^{-1} \quad \textit{diverge.}$$

2. *Il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$\zeta(s) = \frac{e^{As}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}} \tag{4.3.1}$$

où le produit porte sur tous les zéros non triviaux de ζ, lesquels sont comptés avec leurs multiplicités.

La preuve de ce théorème est dans [3] (chap.12).

Théorème 4.3.2. *Pour $-1 \leq \sigma \leq 2$ et t augmentant indéfiniment, on a :*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right) + O\left(\log t\right).$$

Démonstration. Pour $\delta > 0$ on a :

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(|s|^{-1}\right),$$

avec $|s|$ augmentant indéfiniment et $|\arg(s)| \leq \pi - \delta$, (pour la preuve voir par exemple ([4] p.57).

La dérivation logarithmique de la formule (4.3.1) donne :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

La propriété de Γ citée au début permet de conclure. ■

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.3.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $1 \leq \sigma \leq 2$ et t assez grand on a :*

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq c \log t - \sum_{\varrho} \Re\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

Théorème 4.3.4. *Pour T assez grand on a :*

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{1 + (T-\gamma)^2} = O\left(\log T\right).$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent, pour t assez grand et $1 \leq \sigma \leq 2$ on a :

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \leq c \log t - \sum_{\varrho} \Re\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right),$$

Donc pour $s = 2 + iT$ (de sorte que $|\zeta'/\zeta|$ soit bornée), il existe une constante c' plus grande que c telle que :

$$\sum_{\varrho} \Re\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) \leq c' \log T,$$

et puisque,

$$\Re\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\Re(\varrho)}{|\varrho|^2} > 0,$$

$$\Re\left(\frac{1}{s-\varrho}\right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2},$$

cela implique que :

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2} \leq c' \log T,$$

L'inégalité $1 + x^2 \geq \frac{1}{4}(4 + x^2)$ permet de conclure. ■

Corollaire 4.3.5.

1. *Le nombre de zéros tels que $T - 1 < \gamma < T + 1$ est un $O(\log T)$.*
2. *La somme $\sum \frac{1}{(T-\gamma)^2}$, étendue sur tous les zéros ayant la partie imaginaire en dehors de l'intervalle $]T-1, T+1[$, est un $O(\log T)$.*
3. *Pour t assez grand ne coïncidant pas avec une ordonnée d'un zéro et $-1 \leq \sigma \leq 2$ on a :*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma|<1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log t).$$

Démonstration.

1. On a :

$$\sum_{|T-\gamma|<1} 1 \leq 2 \sum_{|T-\gamma|<1} \frac{1}{1 + (T-\gamma)^2} \ll \log T,$$

(d'après le théorème 4.3.4). CQFD.

2. Pour $x \geq 1$, on a :
$$\sum_{|T-\gamma|\geq 1} \frac{1}{(T-\gamma)^2} \leq 2 \sum_{|T-\gamma|\geq 1} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq 2 \sum_{\varrho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \ll \log T,$$
(d'après le théorème 4.3.4). CQFD.

3. On applique le théorème 4.3.2 successivement à s puis à $2+it$, puis on prend la soustraction des deux formules obtenues, en tenant compte du fait que $|\zeta'(2+it)/\zeta(2+it)|$ est bornée, on obtient :
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{2+it-\varrho} \right) + O\left(\log t\right),$$
Pour les termes tels que $|\gamma - t| \geq 1$, on a :
$$\left| \frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{2+it-\varrho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\varrho)\,(2+it-\varrho)|} \leq \frac{3}{(t-\gamma)^2},$$
et donc d'après le point 2, la somme de ces termes est un $O\left(\log t\right)$. Pour les termes tels que $|\gamma - t| < 1$, on a $|2+it-\varrho| \geq 1$ et d'après le point 1 le nombre de termes est un $O\left(\log t\right)$, d'où le résultat.

■

Lemme 4.3.6. *Dans le demi-plan $\sigma \leq -1$ privé des disques centrés en tout zéro trivial de ζ et de rayons $\frac{1}{2}$, on a l'estimation suivante :*
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\log 2|s|\right).$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle de ζ peut s'écrire sous la forme suivante :
$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(s)\zeta(s),$$
Par dérivation logarithmique, on a :
$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log\left(2\pi\right) - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{1}{2}\pi s\right) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$
La fonction $\tan\left(\frac{1}{2}\pi s\right)$ est bornée dans la région $|s-(2m+1)| \geq \frac{1}{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$ donc elle l'est pour $|(1-s)+2m| \geq \frac{1}{2}$, et pour $1-\sigma \leq -1$ (ou bien $\sigma \geq 2$), la fonction $\zeta'(s)/\zeta(s)$ est bornée. De plus l'estimation :
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(|s|^{-1}\right),$$

montre que l'on a finalement :

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right| \ll \log|s| \ll \log 2|1-s| \quad \textit{pour} \;\; 1-\sigma \leq -1,$$

il suffit donc de changer $1-s$ par s et le résultat en découle. ■

Lemme 4.3.7. *Il existe une suite $T_2, T_3, \ldots,$ telle que,*

$$n < T_n \leq n+1 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

et pour n assez grand on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\log^2 t\right) \qquad (-1 \leq \sigma \leq 2, \; t = T_n).$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$ et $\nu_n = N(n+1) - N(n)$, on partage l'intervalle $]n, n+1]$ en $\nu_n + 1$ intervalles de mêmes longueurs, l'un de ces intervalles ne peut contenir une ordonnée d'un zéro dans son intérieur, prenant T_n le centre de cet intervalle, de sorte que $|\gamma - T_n| \geq \{2(\nu_n + 1)\}^{-1}$, pour tout zéro non-trivial ϱ. D'après le point 1 du corollaire 4.3.5, on a :

$$\nu_n \ll \log n \ll \log T_n,$$

cela implique que $|\gamma - T_n| \gg (\log T_n)^{-1}$ pour tout zéro ϱ. Et d'après le point 3 du corollaire 4.3.5, on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma - T_n| < 1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log T_n).$$

Tous les termes de la somme sont de module $\ll \log T_n$ et le nombre de termes est $\ll \log T_n$ (en vertu du point 1 du corollaire 4.3.5) ; ce qui permet de conclure. ■

4.4 La formule explicite de $\psi(x)$

Théorème 4.4.1 (Von Mangoldt)**.** *On a la formule suivante :*

$$\psi^0(x) = x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x, T),$$

où,

$$|R(x,T)| \ll \frac{x \log^2(xT)}{T} + (\log x) \min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right).$$

et chaque terme $\frac{x^{\varrho}}{\varrho}$ *de la somme est répété un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de* ϱ.

Démonstration. En évaluant l'intégrale de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$ sur le rectangle de sommets $c \pm iT_n, -U \pm iT_n$, tel que U est un entier impair assez grand, T_n est l'un des termes de la suite vu dans le lemme 4.3.7 (à condition qu'il soit assez grand) et $c = 1 + (\log x)^{-1}$. Le pôle $s = 1$ a pour résidu x, le pôle $s = 0$ a pour résidu $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$, tout zéro ϱ non trivial de ζ a pour résidu $-m(\varrho)\frac{x^{\varrho}}{\varrho}$, où $m(\varrho)$ est l'ordre de multiplicité de ϱ, et tout zéro trivial $s = -2n$ de ζ a pour résidu $\frac{x^{-2n}}{2n}$. On en déduit que la somme des résidus inclus dans le contour d'intégration est :

$$x - \sum_{|\Im(\varrho)|<T_n} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \sum_{0<2n<U} \frac{x^{-2n}}{2n}.$$

Le lemme 4.3.7 montre que l'on a :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-1+iT_n}^{c+iT_n}\left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right\}\frac{x^s}{s}ds\right| \ll (\log T_n)^2\int_{-1}^{c}\left|\frac{x^s}{s}\right|d\sigma \ll \frac{(\log T_n)^2}{T_n}\int_{-\infty}^{c}x^{\sigma}d\sigma \ll \frac{x(\log T_n)^2}{T_n\log x}.$$

De même :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT_n}^{-1-iT_n}\left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right\}\frac{x^s}{s}ds\right| \ll \frac{x(\log T_n)^2}{T_n\log x}.$$

D'autre part la majoration du lemme 4.3.6 implique que les intégrales sur les segments $[-U + iT_n, -1 + iT_n]$ et $[-U - iT_n, -1 - iT_n]$ sont de modules :

$$\ll \frac{\log 2T_n}{T_n}\int_{-U}^{-1}x^{\sigma}d\sigma \ll \frac{\log T_n}{T_n x\log x} \ll \frac{x(\log T_n)^2}{T_n\log x}.$$

De même l'intégrale sur le segment $[-U - iT_n, -U + iT_n]$ est de module :

$$\ll \frac{\log 2U}{U}\int_{-T_n}^{T_n}x^{-U}dt \ll \frac{T_n\log U}{Ux^U},$$

qui tend vers 0 quand $U \longrightarrow \infty$.

Notons aussi que,

$$-\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-2n}}{2n}.$$

En combinant ces résultats avec le théorème 4.2.6, on obtient :

$$\psi^0(x) = x - \sum_{|\Im(\varrho)|<T_n}\frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x, T_n),$$

où
$$|R(x,T_n)| \ll \frac{x\log^2(xT_n)}{T_n} + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T_n\langle x\rangle}\right).$$
Donc la formule est valable pour les T_n qui sont plus grand à une certaine limite fixé, cela permet facilement de généraliser la formule pour tout $T>0$ assez grand, en effet pour un tel T il existe un T_n tel que $|T-T_n|<1$, donc le reste $R(x,T_n)$ peut être remplacé par $R(x,T)$ et puisque,
$$\left|\sum_{|\gamma|\in[T,T_n]} \frac{x^\varrho}{\varrho}\right| \ll \frac{x\log T}{T},$$
cela permet de remplacé la somme portant sur $|\gamma|<T_n$, par la somme portant sur $|\gamma|<T$ et on obtient la formule. ■

En faisant tendre T vers l'infini dans la formule du théorème 4.4.1 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.2. *On a la formule suivante :*
$$\psi^0(x) = x - \sum_{\varrho}\frac{x^\varrho}{\varrho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

4.5 Quelques conséquences de la formule de Von Mangoldt

Lemme 4.5.1. *Il existe une constante $c_1>0$, telle que pour t assez grand, tout zéro non trivial $\varrho=\beta+i\gamma$ vérifie :*
$$\beta \le 1 - \frac{c_1}{\log t}.$$

Démonstration. Pour $\sigma>1$, on a :
$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\Re\left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) + \Re\left(-\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) =$$
$$\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\right) \ge 0 \qquad (4.5.1)$$

(cela résulte de l'identité, $3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha = 2\left(1+\cos\alpha\right)^2$).

D'après (4.2.4), il existe une constante $A > 0$ telle que pour $1 \leq \sigma \leq 2$:

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + A \tag{4.5.2}$$

Et d'après le corollaire 4.3.3, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $1 \leq \sigma \leq 2$ et t assez grand on a :

$$\begin{aligned}\Re\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) &\leq c\log t - \sum_{\varrho} \Re\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) \\ &= c\log t - \sum_{\varrho}\left(\frac{\sigma-\beta}{|s-\varrho|^2} + \frac{\beta}{|\varrho|^2}\right) \\ &\leq c\log t - \frac{\sigma-\beta}{|s-\varrho|^2}\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

pour tout ϱ. En prenant $s = \sigma + it$ dans (4.5.3), tel que t est l'ordonnée de l'un des zéros non triviaux, on obtient :

$$\Re\left(-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) \leq c\log t - \frac{1}{\sigma-\beta} \tag{4.5.4}$$

Où β est la partie réelle du zéro en question. En combinant les inégalités (4.5.1), (4.5.2), (4.5.3) et (4.5.4) on en déduit qu'il existe une constante $B > 0$ telle que :

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + B\log t.$$

Donc, pour $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log t}$ avec $\delta > 0$, on a :

$$\beta \leq 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4\delta}{(3+B\delta)\log t} = 1 + \frac{(B\delta - 1)}{\left(\frac{3}{\delta} + B\right)\log t},$$

il suffit de faire un choix convenable de δ en fonction de B, si on prend par exemple $\delta = \frac{1}{2B}$, on obtient :

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14B\log t},$$

et le résultat en découle. ∎

Théorème 4.5.2. *Il existe une constante $c_2 > 0$ telle qu'on ait :*

$$\psi(x) = x + O\left\{x\exp\left(-c_2\sqrt{\log x}\right)\right\}.$$

Démonstration. Nous allons majorer le terme $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$ dans la formule de Von Mangoldt. D'après le lemme précédent, pour un T assez grand et $\varrho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial de ζ, on a nécessairement $\beta \leq 1 - \frac{c_1}{\log T}$, où c_1 est une constante strictement positive. Il s'ensuit que :

$$|x^\varrho| = x^\beta \leq x \exp\left(-c_1 \frac{\log x}{\log T}\right).$$

Pour $\gamma > 0$, on a $|\varrho| \geq \gamma$ donc :

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{|\varrho|} \leq \sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma}. \tag{4.5.5}$$

On a en fait $\sum\limits_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma} = O\left((\log T)^2\right)$, en effet :

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma} \leq \sum_{m=0}^{[T]} S_m,$$

où S_m est la somme des $\frac{1}{\gamma}$ pour $m < \gamma \leq m+1$. Et puisque $N\,(m+1) - N\,(m) = O\,(\log m)$ (d'après le point 1 du corollaire 4.3.5), alors :

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma} = O(1) + O\left(\sum_{m=2}^{[T]} \frac{\log m}{m}\right) = O\left((\log T)^2\right). \tag{4.5.6}$$

Par conséquent, on a la majoration suivante :

$$\sum_{|\gamma|<T} \left|\frac{x^\varrho}{\varrho}\right| = O\left\{x(\log T)^2 \exp\left(-c_1 \frac{\log x}{\log T}\right)\right\}.$$

Sans perte de généralité supposons que x est un entier assez grand, le théorème 4.4.1 implique que :

$$|\psi(x) - x| \ll \frac{x \log^2(xT)}{T} + x(\log T)^2 \exp\left(-c_1 \frac{\log x}{\log T}\right).$$

Il reste à choisir T en fonction de x pour optimiser cette estimation. On prend T tel que :

$$(\log T)^2 = \log x,$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}|\psi(x) - x| &\ll x(\log x)^2 \exp\left\{-(\log x)^{\frac{1}{2}}\right\} + x\,(\log x) \exp\left(-c_1 (\log x)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\ll x \exp\left\{-c_2 (\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned}$$

où c_2 est une constante positive strictement inférieur à $\min\,(1, c_1)$. ∎

Corollaire 4.5.3. *On a la formule asymptotique suivante :*

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

vu dans la proposition 1.5.1, et du théorème précédent. ■

Théorème 4.5.4. *Il existe une constante $c_3 > 0$ telle qu'on ait :*

$$\pi(x) = Li(x) + O\left\{x \exp\left[-c_3(\log x)^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

où $Li(x)$ désigne la fonction logarithme intégrale, définie par :

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \geq 2).$$

Démonstration. Posons,

$$\pi_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

On peut exprimer la fonction $\pi_1(x)$ en fonction de $\psi(x)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \int_n^x \frac{dt}{t(\log t)^2} + \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\ &= \int_2^x \frac{\psi(t)dt}{t(\log t)^2} + \frac{\psi(x)}{\log x}.\end{aligned}$$

Une intégration par partie montre que l'on a :

$$\int_2^x t\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\log t}\right) dt + \frac{x}{\log x} = Li(x) + \frac{2}{\log 2}.$$

En remplaçant ψ par la formule du théorème 4.5.2 on obtient :

$$\left|\pi_1(x) - Li(x) - \frac{2}{\log 2}\right| \ll \int_2^x \exp\left\{-c_2(\log t)^{\frac{1}{2}}\right\} dt + x \exp\left\{-c_2(\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Pour $2 \leq t \leq x^{\frac{1}{4}}$ l'intégrale précédente est trivialement inférieur à $x^{\frac{1}{4}}$, et pour $x^{\frac{1}{4}} \leq t \leq x$ on a $(\log t)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(\log x)^{\frac{1}{2}}$, donc :

$$\int_{x^{\frac{1}{4}}}^x \exp\left\{-c_2(\log t)^{\frac{1}{2}}\right\} dt \leq x \exp\left\{-\frac{c_2}{2}(\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

D'où,

$$\pi_1(x) = Li(x) + O\left\{x \exp\left[-c_3(\log x)^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

avec $c_3 = \frac{c_2}{2}$.

Enfin,

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= \sum_{p^\nu \leq x} \frac{\log p}{\nu \log p} = \sum_{p^\nu \leq x} \frac{1}{\nu} \\ &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots\end{aligned}$$

La somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes (car si $p \geq \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] + 1$ alors $\pi\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = 0$), et puisque $\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \leq x^{\frac{1}{2}}, \pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \leq x^{\frac{1}{3}} \dots$, si on note $\mu = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] + 1$ cela implique que la différence entre $\pi_1(x)$ et $\pi(x)$ est :

$$\begin{aligned}&\leq x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} + \dots + x^{\frac{1}{\mu}} \\ &\leq x^{\frac{1}{2}} + (\mu - 1)x^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] x^{\frac{1}{3}} \ll x^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\pi(x) = Li(x) + O\left\{x \exp\left[-c_3(\log x)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

■

Remarque 4.5.5. *Le théorème précédent a été démontré par La Vallée Poussin en 1899 ; il constitue une forme plus précise du théorème des nombres premiers, plus précisément on a :*

$$Li(x) \geq \frac{x-2}{\log x}.$$

Donc,

$$\pi(x) \sim Li(x) \qquad (x \longrightarrow +\infty).$$

Mais l'approximation est meilleure en effet, l'erreur de l'approximation du théorème 4.5.4 est d'ordre :

$$O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right),$$

pour tout $k > 0$.

Encore plus précis Vinogradov et Korobov ont démontré en 1958 que :

$$\pi(x) = Li(x) + O\left\{x \exp\left[-c(\theta)(\log x)^{\theta}\right]\right\},$$

pour toute constante $0 < \theta < \frac{3}{5}$.

Le terme d'erreur de La Vallée-Poussin fournit immédiatement la forme forte du postulat de Bertrand :

$$\pi(x + y) > \pi(x),$$

pour $y = \varepsilon x$, $x > x_0(\varepsilon)$ *où* ε *est un nombre strictement positif arbitrairement petit. On peut choisir par exemple* $y = xe^{-c_3\sqrt{\log x}}$ *où* c_3 *est la constante vu dans le théorème 4.5.4.*

CHAPITRE 5

L'hypothèse de Riemann et le théorème de Hardy

5.1 Introduction

Dans son mémoire de 1859, Riemann a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction ζ sont tous de parties réelles égales à $\frac{1}{2}$; cette conjecture (toujours non démontrée) est connue sous le nom de l'hypothèse de Riemann et constitue l'un des problèmes mathématiques les plus importants et les plus redoutables. Si nous désignons par Θ le nombre :

$$\Theta := \sup_{\zeta(\varrho)=0} \Re(\varrho),$$

l'hypothèse de Riemann s'exprime par l'égalité $\Theta = \frac{1}{2}$, car la répartition des zéros non triviaux est symétrique par rapport au point $\frac{1}{2}$. L'un des progrès les plus significatifs concernant la conjecture de Riemann est le théorème de Hardy qu'on verra dans la suite.

5.2 Quelques conséquences de l'hypothèse de Riemann

Sous l'hypothèse de Riemann, on peut avoir une approximation bien meilleure de la taille du terme d'erreur de $\pi(x)$. En effet, on a pour tout zéro non trivial $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$:

$$|x^{\varrho}| = x^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique que :

$$\sum_{|\gamma|<T} \left| \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \right| = O\left\{ x^{\frac{1}{2}} (\log T)^2 \right\}.$$

(en vertu de (4.5.5) et (4.5.6)).

En combinant cela avec le théorème 4.4.1, on en déduit que pour x entier assez grand, on a :

$$|\psi(x) - x| \ll x^{\frac{1}{2}} (\log T)^2 + xT^{-1} \log^2 (xT).$$

En prenant enfin $T = x^{\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$\psi(x) = x + O\left\{ x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2 \right\}.$$

Le même argument que celui dans la preuve du théorème 4.5.4 montre que l'on a :

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x \right).$$

Sans l'hypothèse de Riemann, on a seulement :

$$\psi(x) = x + O\left\{ x^{\Theta} (\log x)^2 \right\}$$

et

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\Theta} \log x \right).$$

Le théorème suivant établit une réciproque de l'hypothèse de Riemann.

Théorème 5.2.1. *Supposons qu'il existe une constante $\alpha < 1$ telle qu'on ait :*

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\alpha} \right).$$

Alors tout zéro non trivial ϱ de ζ est de partie réelle inférieure ou égale à α.

Démonstration. Pour $\Re(s) > 1$, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s} = s \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} \\ &= s \int_1^{+\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx, \end{aligned}$$

si $\psi(x) = x + R(x)$ alors,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{+\infty} R(x) x^{-s-1} dx,$$

le fait que $R(x) = O(x^\alpha)$ implique que l'intégrale ci-dessus est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > \alpha$ et ne présente aucune singularité, donc ζ ne peut avoir un zéro dans cette région, ce qui permet de conclure. ■

Corollaire 5.2.2. *S'il existe un α compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 tel que pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right),$$

alors on a :

$$\psi(x) = x + O\left\{x^\alpha (\log x)^2\right\}.$$

Démonstration. Le théorème précédent implique immédiatement que $\Theta \leq \alpha$ et puisque on dispose de la formule asymptotique :

$$\psi(x) = x + O\left\{x^\Theta (\log x)^2\right\},$$

le résultat en découle. ■

Il existe plusieurs problèmes concernant le comportement de la distance entre deux nombres premiers consécutifs. Posons $d_n = p_{n+1} - p_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $d_1 = 1$ et d_n est pair $\forall n \geq 2$. La conjecture des nombres premiers jumeaux est équivalente à dire que $d_n = 2$ pour une infinité d'entiers n. Le plus grand couple de nombres premiers jumeaux qu'on connait est :

$$2^{4025}.3.5^{4020}.7.11.13.79.223 \pm 1,$$

qui contient 4030 chiffres. Ce nombre a été découvert en 1993 par Harvey Dubner.

Bombieri et Davenport ont montrer que :

$$\liminf \frac{d_n}{\log n} < \frac{2+\sqrt{3}}{8} \approx 0.46650.$$

Cramer a montrer en utilisant l'hypothèse de Riemann que :

$$\sum_{n<x} d_n^2 < cx\,(\log x)^4\,,$$

puis, Erdös a conjecturé que le membre de droite peut être remplacé par $cx\,(\log x)^2$. L'hypothèse de Riemann implique que $d_n < p_n^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$.

Enfin, Dorin Andrica a conjecturé que pour tout n, on a :

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1,$$

Dan Grecu a vérifié que cela est vrai pour tout $n < 10^6$.

5.3 Le théorème de Hardy

Suite à la conjecture de Riemann, Hardy établit en 1914 que la fonction ζ possède une infinité de zéros sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Dans cette section nous allons présenter l'une des démonstrations du théorème de Hardy.

L'idée de Hardy consiste à construire une fonction réelle $\Psi(t)$ qui s'annule au même temps que la fonction $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ et de montrer ensuite que $\Psi(t)$ s'annule une infinité de fois sur la droite réelle.

On définit les deux fonctions $\Xi(t)$ et $\xi(s)$ comme suit :

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = -\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

On a vu dans le chapitre 2 (p.23) que la fonction $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ est méromorphe dans le plan complexe et qu'elle est invariante par la transformation $s \longmapsto 1-s$, elle admet deux pôles simples en 0 et 1. Cela implique que la fonction $\xi(s)$ est entière et on a $\xi(s) = \xi(1-s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. Puisque $\overline{\zeta(s)} = \zeta\left(\overline{s}\right)$ pour tout s, il s'ensuit que $\overline{\xi(s)} = \xi\left(\overline{s}\right)$ pour tout s, de sorte que :

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \overline{\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)} = \overline{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)} = \overline{\Xi(t)}.$$

Ce qui implique que la fonction $\Xi(t)$ est à valeurs réelles.

La fonction $\Psi(t)$ est définie comme suit :

$$\Psi(t) := \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^{-1} \Xi(t) e^{\frac{1}{4}\pi t} = -\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}} e^{\frac{1}{4}\pi t} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 5.3.1. *Pour tout $\delta > 0$ et tout $y \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(y) > 0$, on a :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} y^{-s} \Gamma(s) ds = e^{-y}.$$

La preuve de ce lemme utilise la formule de Mellin que nous rappelons :

Si on définit $\wp(s)$ comme suit :

$$\wp(s) = \int_0^{+\infty} y^{s-1} f(y) dy,$$

alors,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \wp(s) y^{-s} ds.$$

La preuve de cette formule se trouve dans ([12], p.7).

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Mellin Pour la fonction $f(y) = e^{-y}$. On a $\wp(s) = \Gamma(s)$ et la preuve en découle. ∎

Remarque 5.3.2. *Une deuxième méthode pour démontrer le lemme 5.3.1 consiste à intégrer la fonction $y^{-s}\Gamma(s)$ sur le rectangle ayant les sommets $-N + \frac{1}{2} \pm T, \delta \pm iT$, où N est un entier naturel assez grand et $T > 0$. Les résidus correspondants sont les nombres $(-1)^n \frac{y^{-n}}{n!}$ inclus dans le contour. Pour conclure il suffit de faire tendre N et T vers l'infini et de remarquer que les intégrales sur les trois cotés autres que $[\delta - iT, \delta + iT]$ tendent vers zéro.*

Théorème 5.3.3. *La fonction $\Psi(t)$ s'annule une infinité de fois sur la droite réelle.*

Démonstration. L'idée essentielle de la preuve consiste à étudier le comportement des deux intégrales :

$$\int_T^{2T} \Psi(t) dt \tag{5.3.1}$$

$$\int_T^{2T} |\Psi(t)| \, dt \tag{5.3.2}$$

quand T tend vers l'infini.

Raisonnant par l'absurde en supposant que Ψ ne possède qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{R}$. Cela entraine (vu que Ψ est continue sur $\mathbb{R}$) que $\Psi(t)$ garde un signe constant pour t assez grand. Donc pour T assez grand le module de l'intégrale (5.3.1) est égale à l'intégrale (5.3.2). Nous allons voir comment ceci fournit une contradiction.

On a pour $\Re(y) > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)y^{-\frac{1}{2}s}ds &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\left(n^2y\right)^{-\frac{1}{2}s}ds\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\Gamma(\omega)\left(n^2y\right)^{-\omega}d\omega\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2y}.\end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par le lemme 5.3.1.

On intègre maintenant la fonction $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)y^{-\frac{1}{2}s}$ le long du rectangle de sommets $\frac{1}{2}\pm iA$, $2\pm iA$, avec $A > 0$. Puisque on dispose de la formule de Stirling suivante (voir [1], p.79) :

$$|\Gamma(\sigma+it)| \sim e^c e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}} \qquad (|t| \longrightarrow +\infty)$$

et d'après la proposition 3.3.1, $\zeta(1+it) = O(\log|t|)$, cela implique que :

$$\Gamma\left(1+i\frac{t}{2}\right)\zeta(1+it)y^{-1-i\frac{t}{2}} = O\left(t^\alpha e^{-\frac{\pi}{4}t}\right),$$

pour une certaine constante $\alpha > 0$. Donc les intégrales sur les cotés horizontaux tendent vers zéro quand A tend vers $+\infty$. La fonction $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)y^{-\frac{1}{2}s}$ possède un seul pôle simple (inclus dans le contour d'intégration) au point $s = 1$ dont le résidu vaut $\sqrt{\frac{\pi}{y}}$ (à savoir que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$), on en déduit que :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)y^{-\frac{1}{2}s}ds = 2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2y} - \sqrt{\frac{\pi}{y}} = \phi(y).$$

Ce que l'on peut exprimer en fonction de $\Psi(t)$ comme suit :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it}dt = -\phi(y).$$

Pour $y = \pi e^{i\left(\frac{1}{2}\pi - \delta\right)}$, avec $\delta > 0$ très petit, en utilisant le fait que la fonction $e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)$ est paire on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)dt &= -e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\delta}{4}\right)}\phi\left(\pi e^{i\left(\frac{1}{2}\pi - \delta\right)}\right) \\ &= O\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta}\right) + O(1).\end{aligned}$$

Et puisque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} e^{-u^2\pi\sin\delta}du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2\pi\sin\delta}du,$$

en posant $x = u\sqrt{\pi\sin\delta}$ dans cette dernière intégrale on obtient facilement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta} = O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

D'où,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)dt = O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Si $\Psi(t) \neq 0$ pour $t \geq t_0$, alors pour $T \geq t_0$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}\int_T^{2T} |\Psi(t)|\,dt &= \left|\int_T^{2T} \Psi(t)dt\right| \leq e\left|\int_T^{2T} e^{\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\right)\frac{t}{2}\right\}} e^{-\frac{\pi t}{4}}\Psi(t)dt\right| \\ &\leq 2e\left|\int_{t_0}^{+\infty} \cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\right)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)dt\right| = O\left(\sqrt{T}\right).\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Et d'autre part, la formule de Stirling montre que :

$$|\Psi(t)| = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}\pi t}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right)\right|\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = Ct^{-\frac{1}{4}}\left(1 + o(1)\right)\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|,$$

pour une certaine constante $C > 0$. De sorte qu'il existe une constante $A > 0$, telle que pour t assez grand on a :

$$|\Psi(t)| \geq At^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|.$$

Par conséquent, on a :

$$\int_T^{2T} |\Psi(t)|\,dt \geq A'T^{-\frac{1}{4}}\int_T^{2T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|dt \geq A'T^{-\frac{1}{4}}\left|\int_T^{2T}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)dt\right|.$$

Or,

$$
\begin{aligned}
i\int_T^{2T}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)dt = \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+i2T}\zeta(s)ds &= \int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+i2T}\zeta(s)ds + \int_{2+iT}^{2+i2T}\zeta(s)ds + \int_{2+i2T}^{\frac{1}{2}+i2T}\zeta(s)ds \\
&= iT - \left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^s\log n}\right]_{2+iT}^{2+i2T} + O\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{T}d\sigma\right) = iT + O\left(\sqrt{T}\right).
\end{aligned}
$$

Ici le terme $\sqrt{T}$ provient des majorations de ζ vu dans la chapitre 3, on a en fait $\zeta(\sigma+it) = O\left(|t|^{1-\sigma}\right)$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $A'' > 0$ telle que :

$$
\int_T^{2T}|\Psi(t)|\,dt \geq A''T^{\frac{3}{4}}.
$$

Ce qui est en contradiction avec (5.3.3). ■

Conclusion générale

Dans ce travail, on a présenté une étude de la fonction zêta de Riemann, qui constitue un outil fondamental dans l'étude de la répartition des nombres premiers. En effet, la localisation des zéros de ζ (vue comme fonction à variable complexe) permet d'en déduire des renseignements sur cette répartition.

L'hypothèse de Riemann, selon laquelle les zéros non triviaux de ζ se trouvent tous dans la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$, est à ce jour une conjecture ouverte et redoutable et constitue l'un des problèmes les plus importants, aussi bien pour les mathématiciens que pour les physiciens. Elle constitue également l'un des 23 problèmes de Hilbert, énoncés en août 1900 dans le deuxième congrès international des mathématiciens.

À la fin de ce mémoire, on a intégré un théorème dû à Hardy qui est tout proche de l'hypothèse de Riemann et la soutient en un certain sens.

Bibliographie

[1] A. Blanchard, Initiation A la Théorie Analytique des Nombres Premiers, *Dunod, Paris*, 1969.

[2] W.W.L Chen, Elementary and Analytic Number Theory, 1981, prépublication.

[3] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, *Springer-Verlag*, 2nd ed, revised by H.L. Montgomery, 1980.

[4] A.E. Ingham, The Distribution of Prime Numbers, *Stechert-Hafner Service Agency. New York and London*, 1964.

[5] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function, *A Wiley-Interscience Publication*, 1985.

[6] R.K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, *Springer-Verlag*, 2nd ed, 1991.

[7] J.M. De Koninck & F.Luca, Analytic Number Theory Exploring the Anatomy of Integers, *Amer. math. Society*, 2012.

[8] G. Tenenbaum & M. Mendès, Les Nombres Premiers, *Presses Universitaires De France*, 1re édition, 1997.

[9] W. Rudin, Real and Complex Analysis, *McGraw-Hill,Inc*, 3eme édition, 1987.

[10] P. Tauvel, Analyse Complexe Pour La Licence 3, *Dunod, Paris*, 2006.

[11] E.C. Titchmarsh, The Zeta-Function Of Riemann, *Cambridge Univ. Press*, 1930.

[12] E.C. Titchmarsh, Introduction to The Theory of Fourier Integrals, *Clarendon Press. Oxford*, 2nd ed, 1948.

[13] E.C. Titchmarsh, The Theory of The Riemann Zeta-Function, *Clarendon Press. Oxford*, 1951.

RÉSUMÉ :

Il y a près de vingt-trois siècles, Euclide démontrait l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Le problème se pose donc d'étudier le comportement asymptotique de la fonction de comptage des nombres premiers. Dans le premier chapitre nous avons présenté les premiers progrès significatifs (dûs à Chebychev) concernant cette répartition. Ensuite on a présenté une étude de la fonction zêta de Riemann en tant que fonction à variable complexe. Nous avons vu comment la localisation des zéros de la fonction zêta permet d'en déduire le théorème des nombres premiers. Puis, on a présenté « l'hypothèse de Riemann » qui est l'un des problèmes non résolus aujourd'hui, ainsi que certaines de ses conséquences. À la fin de ce mémoire, on a intégré un théorème dû à Hardy qui est tout proche de l'hypothèse de Riemann et la soutient en un certain sens.
Mots clés : Les théorèmes de Chebychev, fonction zêta de Riemann, théorème des nombres premiers, hypothèse de Riemann, Le théorème de Hardy.
ABSTRACT :

Nearly twenty-three centuries ago, Euclid showed the infinity of the set of prime numbers. The problem therefore arises to study the asymptotic behavior of the function of counting prime numbers. In the first chapter we presented the first significant progress (due to Chebychev) concerning this distribution. Then, we presented a study of the Riemann zeta function as a complex variable function. We have seen how the localization of the zeros of the zeta function makes it possible to deduce from it the theorem of the prime numbers. Then we presented the « Riemann hypothesis » which is one of the unresolved problems today, as well as some of its consequences. At the end of this paper, we have integrated a theorem due to Hardy which is very close to the Riemann hypothesis and supports it in a certain sense.
Key words : Chebychev theorem's, Riemann zeta function, prime number theorem, Riemann hypothesis, Hardy's theorem.