

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA , BEJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques**

Spécialité : Analyse et Probabilités

Par

OUAZINE Sofiane

THÈME

Sur le comportement itératif de polynômes cubiques à coefficients réels

Soutenu publiquement, le 10/06/2012 devant le jury composé de :

M ^r .	F. BOUHMILA	Maître de Conférences	Président
M ^r .	N. AKROUNE	Professeur	Rapporteur
M ^{me} .	A. BOULKROUNE	Maitre assistant	Examinatrice
M ^{elle} .	N. MOHDEB	Maitre assistant	Examinatrice

Remerciements

Avant tout, je remercie DIEU le tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'étude et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.

Je témoigne toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

Mes vifs remerciements vont à :

M^r N. AKROUNE pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ses précieuses remarques.

M^r F. BOUHMILA pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.

M^{me} A. BOULKROUNE et M^{elle} N. MOHDEB pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour l'écoute, la présence, le soutien, les encouragements et l'amour qu'elle me porte de jour en jour, que ce soit dans les moments d'euphorie et de joie que dans ceux de doute et de remise en question.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes adorables parents.

A mon cher frère.

A mes chères sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	3
1.1 Définition d'un système dynamique	3
1.2 Notion d'orbite	5
1.2.1 Etat inverse d'un état donné	5
1.2.2 Ensemble-limite positif	5
1.3 Système dynamique engendré par une application	6
1.3.1 Flot engendré par un homéomorphisme	6
1.3.2 Flot engendré par une fonction continue	7
1.4 Systèmes dynamiques discrets et leurs singularités	8
1.5 Attracteurs	10
1.6 Stabilité, instabilité et sensibilité aux conditions initiales	11
1.7 Définition topologique du chaos	12
2 Systèmes dynamiques holomorphes	13
2.1 Préliminaires et notations	13
2.1.1 Rappels sur la sphère de Riemann	14
2.1.2 Les systèmes dynamiques holomorphes et leurs singularités	15
2.1.3 Conjugaison topologique	16

2.1.4	Familles normales de fonctions holomorphes	19
2.2	Ensemble de Julia et Fatou	22
2.3	Les points critiques	25
2.4	La structure de l'ensemble de Julia	29
3	Détermination et tracé de l'ensemble de Julia de polynômes cubiques	34
3.1	Équation du troisième degré (Méthode de Cardan).	35
3.1.1	Établissement de formules générales (Formules de Cardan)	35
3.2	La méthode de recherche des points de $J(P)$	39
3.3	Expérimentations théoriques et graphiques	40
3.3.1	Premier cas $P(z) = z^3$ ($p = r = 0$)	40
3.3.2	Deuxième cas $P(z) = \pm z^3 + pz$	41
3.3.3	Troisième cas $P(z) = z^3 + r$	47
3.3.4	Quatrième cas $P(z) = -z^3 + r$	51
3.3.5	Cinquième cas $P(z) = \pm z^3 + pz + r, p \neq 0, r \neq 0$	55
	Conclusion	62
	Appendice	63
	Bibliographie	65

Introduction

Nous nous proposons dans ce mémoire de vous faire découvrir un domaine qui a connu de grands développements ces 30 dernières années : la théorie de l'itération de polynômes et fractions rationnelles d'une variable complexe, avec des expérimentations graphiques sur des polynômes cubiques à coefficients réels.

L'intérêt porté au sujet date du siècle dernier, avec la méthode de Newton pour la recherche des racines d'un polynôme. C'est entre 1918 et 1920 que P. Fatou et G. Julia ([11] et [15]) publient une série d'articles qui posent les bases modernes de la théorie de l'itération de fractions rationnelles d'une variable complexe, en s'appuyant sur de nouveaux théorèmes de P. Montel ([16]) sur les familles normales. Depuis l'important article de synthèse de H. Brolin ([4]) paru en 1965, puis les expérimentations informatiques de B. Mandelbrot, ce sujet a connu un grand développement, notamment sous la houlette de A. Douady ([8] et [9]) et Devaney ([6] et [7]).

Dans le présent travail, on s'intéresse à la localisation des ensembles invariants de polynômes P . Ces transformations sont de degré trois, définies et à valeurs dans la sphère de Riemann ($\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) [1]. Les ensembles invariants peuvent être des points fixes, des cycles ou encore des bassins d'attraction (ainsi que leur frontière, aussi appelée ensemble de Julia, notée $J(P)$) du polynôme P .

Pour mener à bien cette étude et, par conséquent, cerner le comportement itératif de P , on construit un algorithme exploité sous Matlab qui permet de :

- 1) Déterminer tous les points fixes finis (ainsi que leurs nature : attractif, répulsif ou indifférent) du polynôme P considéré.

2) Approcher la frontière $J(P)$ des bassins d'attraction de P , par un ensemble formé d'un nombre fini de points du plan complexe.

Signalons aussi que nous traitons à part le cas où le point à l'infini, qui est un point fixe particulier du polynôme. Nous testons enfin notre algorithme sur une dizaine d'exemples, avec, dans chaque, cas l'illustration graphique de la frontière $J(P)$.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et notions fondamentales : système dynamique (continu et discret), attracteur, stabilité, sensibilité aux conditions initiales et chaos.

Le deuxième chapitre constitue le noyau de notre travail, où on fait une étude purement théorique sur l'itération des polynômes en général, avec un rappel sur familles normales, pour qu'on puisse définir l'ensemble de Julia et l'ensemble de Fatou. L'accent sera mis aussi sur la notion de points critiques qui jouent un rôle principal dans la théorie des itérations. Les propriétés géométriques et topologiques des deux ensembles précédents sont présentées.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présentons les résultats numériques et graphiques obtenus en exécutant notre programme (en langage Matlab) sur certains exemples de polynômes cubiques qui nous ont paru représentatifs.

Nous terminons notre travail par une conclusion incluant quelques perspectives de recherche.

Généralités sur les systèmes dynamiques

Le présent chapitre est consacré aux rappels des définitions et principales notions liées à la théorie des systèmes dynamiques.

1.1 Définition d'un système dynamique

Définition 1.1.1 (générale) *C'est tout système, processus, objet, ... qui évolue dans le temps (c.-à-d. que son état change avec le temps).*

Exemple 1.1.1 ◦ *Cotation d'un produit en bourse,*

- *Evolution de la population d'un pays, ou d'une espèce animale,*
- *Réaction chimique ... etc*

Définition 1.1.2 (Mathématique)

Soient X un espace métrique (en pratique, on prend généralement $X \subseteq \mathbb{R}^n$), et $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

$$f : X \times T \longrightarrow X \quad \text{et } f \text{ est continue sur } X \times T$$

$$(x, t) \longmapsto f(x, t)$$

Le triplet (X, T, f) est appelé "système dynamique" si les deux conditions suivantes

sont vérifiées:

$$1) \forall x \in X; f(x, 0) = x$$

$$2) \forall x \in X; \forall t_1, t_2 \in T$$

$$f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2)$$

Appellations

♦ X : Espace de phases (ou espace d'états).

♦ T : Espace temporel (ou espace temps).

♦ f : flot (ou fonction d'évolution) du système.

On dit que f modélise l'évolution, dans le temps, du système dynamique étudié.

◦ Si $T = \mathbb{R}$, le système dynamique (X, T, f) est dit "**Système dynamique continu**".

◦ Si $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{N}$, le système dynamique (X, T, f) est dit "**Système dynamique discret**".

Exemple 1.1.2 Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = x, x \in \mathbb{R} \text{ fixé} \end{cases}$$

La solution du problème est $y_x(t) = x.e^t$.

Posons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \longmapsto y_x(t)$$

Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Montrons que $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f)$ est un système dynamique.

$$1) \forall x \in \mathbb{R}; f(x, 0) = x.e^0 = x$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}; \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(f(x, t_1), t_2) &= x.e^{t_1}.e^{t_2} \\ &= x.e^{(t_1+t_2)} \\ &= f(x, t_1 + t_2) \end{aligned}$$

Donc la solution du problème de Cauchy engendre bien un système dynamique continu.

1.2 Notion d'orbite

Soit (X, T, f) un système dynamique

Définition 1.2.1 Soit $x \in X$, on appelle orbite (ou trajectoire) issue de x , l'ensemble noté $\theta(x)$, défini par

$$\theta(x) = \{f(x, t) \mid t \in T\} \subset X$$

Orbite positive : $\theta^+(x) = \{f(x, t) \mid t \in T \cap \mathbb{R}^+\}$.

Orbite négative : $\theta^-(x) = \{f(x, t) \mid t \in T \cap \mathbb{R}^-\}$.

1.2.1 Etat inverse d'un état donné

Soit (X, T, f) un système dynamique et x quelconque dans X .

Alors: $\forall t \in T \quad f(f(x, t), -t) = f(x, t - t) = f(x, 0) = x$

D'où l'état inverse de $f(x, t)$ est $f(x, -t)$.

1.2.2 Ensemble-limite positif

Soit (X, T, f) un système dynamique, x fixé dans X

On appelle ensemble-limite positif de x , noté $\omega(x)$, l'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X / \forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}^+, \forall t \geq t_0 / d(f(x, t), y) < \varepsilon\}$$

i.e. : $\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $T \cap \mathbb{R}^+$ croissante telle que:

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} f(x, t_n) = y$$

Remarque 1.2.1 On définira de même un ensemble-limite négatif, en considérant une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante (vers $-\infty$).

1.3 Système dynamique engendré par une application

1.3.1 Flot engendré par un homéomorphisme

$$X \subseteq \mathbb{R}^n \quad h : X \longrightarrow X$$

h est un homéomorphisme $\iff h$ est continue + bijective + h^{-1} continue

Posons pour $t \in \mathbb{Z}$, $f(x, t) = h^t(x)$

$$\text{avec } h^t = \begin{cases} \overbrace{h \circ \dots \circ h}^{t \text{ fois}} & \text{si } t \geq 0 \\ \overbrace{h^{-1} \circ \dots \circ h^{-1}}^{|t| \text{ fois}} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

$$f : X \times \mathbb{Z} \longrightarrow X$$

$$(x, t) \longmapsto h^t(x)$$

$\circ x \longmapsto f(x, \cdot)$ est continue sur X .

$\circ t \longmapsto f(\cdot, t)$ est continue sur $\mathbb{Z}$ (topologie discrète de $\mathbb{Z}$).

$$1) \forall x \in \mathbb{R}; f(x, 0) = h^0(x) = x$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}; \forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

$$f(f(x, t_1), t_2) = h^{t_2}(h^{t_1}(x)) = h^{t_1+t_2}(x) = f(x, t_1 + t_2)$$

Ainsi on vient de définir un système dynamique discret, engendré par l'homéomorphisme h .

Exemple 1.3.1 $X = \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{3}y\right) \end{aligned}$$

Il est clair que h est linéaire et h est (continue + bijective + h^{-1} continue). Donc h est un homéomorphisme. La fonction d'évolution s'écrit alors:

$$f(x, y; t) = h^t(x, y) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^t x, \left(\frac{2}{3}\right)^t y\right)$$

1.3.2 Flot engendré par une fonction continue

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : X \longrightarrow X$, g est continue.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x, n) = g^n(x)$

$$\begin{aligned} f : X \times \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ (x, n) &\longmapsto g^n(x) \end{aligned} \quad , \quad g^n = \overbrace{g \circ \dots \circ g}^{n \text{ fois}} , \quad g^0 = Id_X$$

◦ $x \longmapsto f(., t)$ est continue sur X .

◦ $t \longmapsto f(x, .)$ est continue sur $\mathbb{N}$ (topologie discrète de $\mathbb{N}$).

Avec ces définitions, on vient de définir un système dynamique discret, engendré par une application continue.

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x, n+1) = g^{n+1}(x) \\ &= g^n(g(x)) \\ &= f(g(x), n) \\ &= g^n(g(x)) \\ &= g(g^n(x)) \\ &= g(f(x, n)) = g(x_n) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_{n+1} = g(x_n)$$

Autrement dit, l'étude d'un système dynamique discret, engendré par une fonction continue g , revient simplement à l'étude des itérés de l'application (i.e. g).

Ce type du système sera l'objet de toute la suite, et on va confondre g et f .

Dans la suite du chapitre, on travaillera sur un système dynamique discret $(X, \mathbb{N}, f)$ où $X \subseteq \mathbb{R}^n$, et f une application continue.

1.4 Systèmes dynamiques discrets et leurs singularités

Dans cette section, on va introduire quelques définitions et propriétés des systèmes dynamiques discrets.

Définition 1.4.1 *Un point $x \in X$ est dit point fixe d'une application continue (i.e. d'un système dynamique discret $(X, \mathbb{N}, f)$), si et seulement si $f(x) = x$.*

Définition 1.4.2 *Un point $\alpha \in X$ est appelé périodique de période k si et seulement si $f^k(\alpha) = \alpha$ et pour tout $h < k$, $f^h(\alpha) \neq \alpha$. En particulier si $k = 1$ alors α est un point fixe.*

Notation 1.4.1 *Nous notons par*

$per_k(f)$: l'ensemble des points périodiques de période k ($k \geq 1$).

$per(f)$: l'ensemble de tous les points périodiques c.-à-d.

$$per(f) = \{x \in X \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in per_k(f)\}.$$

Définition 1.4.3 *un système dynamique discret $(X, \mathbb{N}, f)$ est dit régulier si et seulement si l'ensemble des points périodiques est dense dans X autrement dit:*

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha \in per(f) / |x - \alpha| < \epsilon$$

Définition 1.4.4 *Si $y = f^n(x)$, nous disons que :*

★ y est le successeur (ou: conséquent) d'ordre n de x .

★ x est le prédécesseur d'ordre n de y .

Définition 1.4.5 *Soit A une partie non vide de X .*

On dit que A est invariant par f si $f(A) = A$, de plus on dit que A est complètement invariant par f si $f(A) = A = f^{-1}(A)$.

On dit que A est positivement invariant par f si $f(A) \subseteq A$.

Notons que l'adhérence de A (notée $\overline{A}$) vérifie:

Proposition 1.4.1 *Si A est positivement invariant alors sa fermeture $\overline{A}$ est elle aussi positivement invariante.*

Démonstration. Si $f(A) \subseteq A$ alors $\overline{f(A)} \subseteq \overline{A}$. Par la continuité de f , on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, d'où la conclusion. ■

Définition 1.4.6 $(X, \mathbb{N}, f)$ est transitif si et seulement si pour chaque couple d'ensembles non-vides et ouverts $(A \text{ et } B) \subseteq X$, il existe un entier k tel que $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$.

Dans la littérature, ils existent plusieurs définitions de la notion de transitivité, mais elles sont toutes équivalentes, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.4.2 (voir [13]) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $(X, \mathbb{N}, f)$ est transitif ;
- 2) Pour tout ensemble ouvert non-vide $A \subseteq X$,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)} = X$$

- 3) Pour tout couple de points $x_1, x_2 \in X$, et pour toutes boules ouvertes centrées en x_1 et x_2 , $B(x_1)$ et $B(x_2)$, il existe $x \in B(x_1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que:

$$f^{n_0}(x) \in B(x_2).$$

Proposition 1.4.3 *Soit $(X, \mathbb{N}, f)$ transitif, alors $\overline{f(X)} = X$.*

Démonstration. Soit $x \in X$, nous allons prouver que quelle que soit la boule ouverte $B(x)$, centrée en x , il existe $B(x) \cap f(X) \neq \emptyset$.

Supposons que $B(x) \cap f(X) = \emptyset$; et soit U un ouvert disjoint de $B(x)$. Alors, par la transitivité:

Il existe $n > 0$ tel que ; $\emptyset \neq B(x) \cap f^n(U) \subseteq B(x) \cap f(X) = \emptyset$. ■

1.5 Attracteurs

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'un attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les orbites qui lui sont proches.

La définition suivante, prise dans **Guckenheimer-Holmes [13]**, est celle qui sera adoptée dans le cadre de notre travail.

Définition 1.5.1 Soit $(X, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret. Une sous-partie A de X est appelée "Attracteur" si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée;
2. A est positivement invariante;
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
 - (a) U est positivement invariant;
 - (b) U est attiré par A : $\forall u \in U; \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0$.

Tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions (3:a) et (3:b) est appelé voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U par A , on ne peut pas affirmer qu'il est unique, en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On appelle bassin (ou domaine) d'attraction $B(A)$ de A le plus grand de ces voisinages attirés, i.e.

$$B(A) = \cup \{U \in \mathcal{P}(X) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\}.$$

Proposition 1.5.1 Soit A un attracteur et soit $D_\infty(A)$ la collection de toutes les orbites qui sont définitivement capturées par A , i.e.:

$$D_\infty(A) = \{y \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), A) = 0\};$$

où $d(x, A) = \sup_{y \in A} (d(x, y))$. Alors, $D_\infty(A)$ est le bassin d'attraction de A :

$$c.-à-d. B(A) = D_\infty(A).$$

Démonstration. Nous allons prouver que D_∞ est f -positivement invariant. Pour $y \in D_\infty$ on a

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{n-1}(f(y)), A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(f(y)), A)$$

Donc, $f(y) \in D_\infty(A)$. Le fait que $D_\infty(A)$ soit un voisinage attiré par A est une conséquence immédiate de la définition. Donc $D_\infty(A)$ est un voisinage attiré par A d'où $D_\infty(A) \subseteq B(A)$. L'implication inverse est évidente. ■

Remarque 1.5.1 *Un point p isolé est un attracteur selon la définition 1.5.1 si et seulement s'il est contenu dans un voisinage U positivement invariant tel que toutes les orbites, qui ont leur état initial dans U , convergent vers p .*

1.6 Stabilité, instabilité et sensibilité aux conditions initiales

On introduit, dans ce paragraphe, les notions de stabilité d'une orbite, ainsi que la sensibilité aux conditions initiales ([7]).

Définition 1.6.1 *L'orbite d'état initial x est **stable** si et seulement si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(x, \epsilon) > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall y \in X, [d(x, y) < \delta \implies \exists n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon]$$

Le point x est appelé point stable. On dira qu'un système dynamique discret est stable si toutes ses orbites positives sont stables.

Définition 1.6.2 *L'orbite d'état initial x est **instable** si et seulement si:*

$$\exists \epsilon = \epsilon(x) > 0 \text{ tel que}$$

$$\{\forall \delta > 0, : \exists y \in X \quad \exists n \in \mathbb{N}, [d(x, y) < \delta \text{ et } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon]\}$$

On dira qu'un système dynamique discret est instable si toutes ses orbites positives sont instables.

Définition 1.6.3 *Un système dynamique discret est dit sensible aux conditions initiales si et seulement si $\exists \epsilon > 0$ tel que*

$$\forall x \in X, \{\forall \delta > 0, : \exists y \in X, \quad \exists n \in \mathbb{N} [d(x, y) < \delta \text{ et } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon]\}.$$

Maintenant la constante ϵ est indépendante du point x et est une caractéristique globale du système.

D'un point de vue intuitif, un système est sensible si pour chaque état x il existe des points arbitrairement voisins de x dont les orbites respectives sont séparées d'au moins ϵ pendant l'évolution du système. Nous soulignons que tous les points voisins de x ne sont pas forcément séparés pendant l'évolution du système, mais il suffit qu'il en existe au moins un dans chaque boule ouverte de centre x .

La sensibilité aux conditions initiales est une notion centrale dans la théorie du chaos car elle illustre l'idée intuitive que des petites erreurs dans les mesures expérimentales peuvent amener une divergence au cours du temps: le système est imprévisible.

1.7 Définition topologique du chaos

Un rôle très important dans la théorie moderne des systèmes dynamiques est joué par les phénomènes chaotiques. Malheureusement, pour les systèmes dynamiques discrets, il n'existe pas une définition universellement acceptée. Plusieurs notions différentes ont été introduites pour essayer de caractériser ce comportement, comme l'entropie ou les exposants de Lyapunov. Ici, nous présentons la définition (topologique) proposée par Devaney ([7]) qui est une des plus utilisées dans la littérature.

Définition 1.7.1 *Un système dynamique discret est **chaotique** si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- 1. il est régulier (i.e. il a un ensemble dense d'orbites périodiques).*
- 2. il est transitif.*

Exemple 1.7.1 *Dans (Holmgren [14]), il a été montré que le système $([0, 1], \mathbb{N}, f)$ est chaotique, où f est définie par:*

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto 4x(1 - x). \end{aligned}$$

Systèmes dynamiques holomorphes

L'étude des systèmes dynamiques holomorphes est intimement liée aux notions de point fixe et de cycle. Nous devons donc traiter ces concepts, et par là même, la notion de bassin d'attraction, avant de présenter l'ensemble de Julia et ses propriétés.

Avant d'aborder ces concepts, il est nécessaire de rappeler quelques définitions et théorèmes issus de la topologie ainsi que de l'analyse complexe.

2.1 Préliminaires et notations

La définition suivante ([17]), nous donne un aperçu sur les fonctions holomorphes.

Définition 2.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z \in U$ si la limite*

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

*existe. Si cette limite existe pour tout point z de U et si la fonction $f' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ comme elle est définie, continue sur U , on dit que f est **holomorphe** sur U .*

2.1.1 Rappels sur la sphère de Riemann

Dans cette partie, on fait une construction rigoureuse de la sphère de Riemann. L'idée est d'ajouter un point à l'espace localement compact $\mathbb{C}$ pour le rendre compact. Notons $\tilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où ∞ est juste le nom donné au point ajouté. Pour justifier ce nom, on construit une topologie sur ce qui n'est, pour le moment, qu'un ensemble.

Considérons la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la sphère centrée en $(0, 0, \frac{1}{2})$, de rayon $\frac{1}{2}$ et tangente au plan xy à l'origine (voir figure 2.1.1). Cette sphère est appelée sphère de Riemann ([1]). Le plan xy est associé au plan complexe. Le point $N(0, 0, 1)$ est le pôle nord de Σ alors que le pôle sud est l'origine (dans $\mathbb{R}^3$).

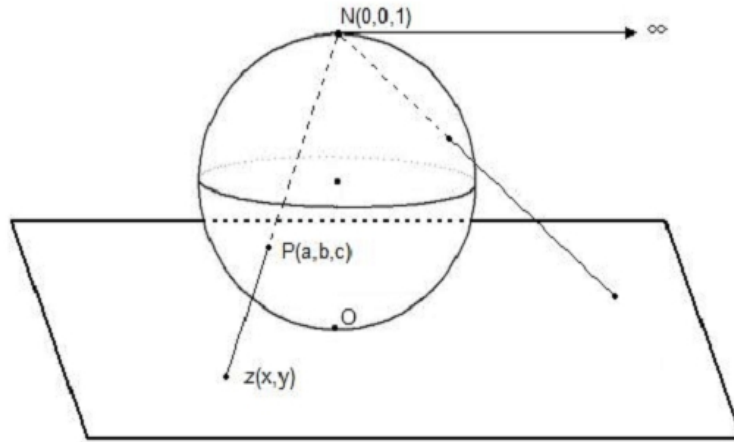


Figure 2.1.1: Sphère de Riemann

Traçons maintenant une droite partant du point N et passant par un point z du plan xy . Cette droite intercepte Σ en un unique point $P(a, b, c)$. Cette procédure amène donc une correspondance biunivoque entre les points du plan complexe et les points de $\Sigma \setminus \{N\}$. Si on associe le point N à ∞ , la correspondance est maintenant entre le plan complexe étendu, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et la sphère Σ . La correspondance projective en fait les points de la

sphère sur le plan complexe. Cette projection est conforme c'est-à-dire qu'elle préserve les angles.

La topologie de $\tilde{\mathbb{C}}$

On considère τ une topologie définie sur $\mathbb{C}$, on établit la topologie τ' définie sur $\tilde{\mathbb{C}}$ comme suite:

$$U \text{ est ouvert de } \tilde{\mathbb{C}} \iff \begin{cases} U \cap \mathbb{C} \text{ ouvert de } \mathbb{C} & \text{si } \infty \notin U \\ U = \mathbb{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}^K & | K \text{ est compact de } \mathbb{C} \text{ si } \infty \in U \end{cases}$$

Les axiomes relatifs aux réunions et intersections d'ouverts se vérifient immédiatement.

Cette topologie dans $\tilde{\mathbb{C}}$ permet de définir les notions de limite et de continuité.

2.1.2 Les systèmes dynamiques holomorphes et leurs singularités

Soit $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, f)$ un système dynamiques holomorphe.

Définition 2.1.2 : *Caractérisation des points fixes*

Un point $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ est dit fixe sous une application $f \Leftrightarrow f(z_0) = z_0$.

On s'intéresse alors à la valeur de la dérivée (si elle existe) au point fixe z_0 et le nombre $\lambda = f'(z_0)$ nous permet de classer les points fixes en 3 catégories:

1. Attractif : Un point fixe est dit attractif quand $0 \leq |\lambda| < 1$.

Lorsque $\lambda = 0$, alors on dit que le point fixe est super-attractif.

2. Répulsif : Un point fixe est dit répulsif si $|\lambda| > 1$.

3. Neutre : Un point fixe est dit neutre (ou indifférent) lorsque $|\lambda| = 1$.

Définition 2.1.3 Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Un ensemble de k points $\{z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*\}$ est dit **cycle d'ordre k** si:

$$\blacklozenge f(z_1^*) = z_2^*$$

$$\blacklozenge f(z_2^*) = z_3^*$$

.

.

$$\blacklozenge f(z_k^*) = z_1^*$$

$$\text{De plus } f^k(z_i^*) = z_i^*, \forall i = \overline{1, k}$$

$$f^j(z_i^*) \neq z_i^*, \forall i = \overline{1, k} \quad \forall j = \overline{1, k-1}$$

Multiplicateur d'un cycle d'ordre k :

$$\alpha = \left| \prod_{j=1}^k f'(z_j^*) \right|$$

Définition 2.1.4 On définit le bassin d'attraction du point fixe attractif z_0 ([4]) correspondant à la fonction holomorphe f , noté $A_f(z_0)$, ou plus simplement $A(z_0)$, comme l'ensemble des points $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, tels que $f^n(z) \rightarrow z_0$.

En d'autres termes, le bassin d'attraction du point z_0 est l'ensemble des points z de $\tilde{\mathbb{C}}$ pour lesquels la suite des itérés de la fonction f converge vers z_0 . Remarquons qu'il faut que les itérés de f au point z soient définis pour tout entier positif n .

2.1.3 Conjugaison topologique

La notion de conjugaison topologique entre les systèmes dynamiques discrets est utilisée pour identifier les systèmes qui ont le même comportement qualitatif.

Définition 2.1.5 Un système dynamique $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, f)$ est topologiquement conjugué avec le système dynamique $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, g)$ s'il existe un homéomorphisme $\phi : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ telle que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}, \text{ c.-à-d. telle que le diagramme suivant commute :}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \tilde{\mathbb{C}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \tilde{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & \tilde{\mathbb{C}} \end{array}$$

Dans ce cas-là, le système $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, g)$ est appelé **facteur** du système $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, f)$.

Plusieurs comportements dynamiques (relatifs à des questions de topologie et de théorie des ensembles) sont hérités par les systèmes facteurs. En particulier on a les relations suivantes:

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, f) & & (\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, g) \\
 \text{Régulier} & \Longleftrightarrow & \text{Régulier} \\
 \text{Transitif} & \Longleftrightarrow & \text{Transitif} \\
 \text{Chaotique} & \Longleftrightarrow & \text{Chaotique}
 \end{array}$$

La conjugaison topologique donne une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les systèmes dynamiques discrets. Si deux systèmes dynamiques discrets sont topologiquement conjugués alors l'orbite positive d'état initial $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ est en correspondance (point par point) avec l'orbite positive d'état initial $\phi(z_0)$ en $\tilde{\mathbb{C}}$; nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(z) = \phi^{-1}[g^n(\phi(z))]$$

Soit z^* un point fixe de f donc on a:

$$\begin{aligned}
 \blacklozenge \quad g \circ \phi(z^*) &= \phi \circ f(z^*) \Longleftrightarrow g(\phi(z^*)) = \phi(f(z^*)) \\
 &\Longleftrightarrow g(\phi(z^*)) = \phi(z^*) \quad (\text{car } z^* \text{ est un point fixe de } f)
 \end{aligned}$$

On voit immédiatement que $\phi(z^*)$ est un point fixe de g .

$\blacklozenge$ De plus, si ϕ est un difféomorphisme, on a:

$$(g \circ \phi)'(z) = (\phi \circ f)'(z) \Longleftrightarrow \phi'(z)g'(\phi(z)) = f'(z)\phi'(f(z))$$

Pour $z = z^*$

$$\phi'(z^*)g'(\phi(z^*)) = f'(z^*)\phi'(f(z^*)) \Longleftrightarrow \phi'(z^*)g'(\phi(z^*)) = \phi'(z^*)f'(z^*).$$

Si $\phi'(z^*) \neq 0$ alors

$$g'(\phi(z^*)) = f'(z^*)$$

Donc les points fixes (z^* de f) et ($\phi(z^*)$ de g) sont de même nature,

Autrement dit, l'étude de la nature des points fixes de f revient simplement à l'étude de la nature des points fixes de g . Notons que ces observations sont valables aussi pour les cycles

Exemple 2.1.1 Soit le système dynamique discret $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ tel que:

$$P(z) = az^2 + bz + c, (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2,$$

Le système $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ est topologiquement conjugué avec le système dynamique $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, Q)$ tel que

$$Q(z) = z^2 + \lambda \text{ / } \lambda = \frac{4ac + 2b - b^2}{4} \in \mathbb{C}.$$

En effet:

Posons $\phi(z) = az + \frac{b}{2}$, il est clair que ϕ est un homéomorphisme.

$$Q(z) = (\phi \circ P \circ \phi^{-1})(z)$$

On a: $\phi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$w \longrightarrow \phi^{-1}(w) = \frac{w}{a} - \frac{b}{2a}$$

Donc

$$\begin{aligned} Q(z) &= (\phi \circ P)\left(\frac{z}{a} - \frac{b}{2a}\right) \\ &= \phi\left(a\left(\frac{z}{a} - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{z}{a} - \frac{b}{2a}\right) + c\right) \\ &= \phi\left(\frac{z^2}{a} - \frac{b^2}{4a} + c\right) \\ &= z^2 - \frac{b^2}{4} + ac + \frac{b}{2} \\ &= z^2 + \frac{4ac + 2b - b^2}{4} \end{aligned}$$

On remarque que si on travaille avec le système dynamique $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$, il nous faut manipuler 3 paramètres, cependant, le système dynamique $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, Q)$ est représenté par un seul paramètre.

Donc on peut exploiter la conjugaison topologique dans le sens de la réduction du nombre de paramètres.

Exemple 2.1.2 Soit le système dynamique discret $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ tel que:

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3,$$

Posons $\phi(z) = \sqrt{|a|}z + \frac{b}{3\sqrt{|a|}}$, il est clair que ϕ est un homéomorphisme.

$$Q(z) = (\phi \circ P \circ \phi^{-1})(z)$$

On a: $\phi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$w \longrightarrow \phi^{-1}(w) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}w - \frac{b}{3\sqrt{|a|}}$$

$$\text{Donc } Q(z) = (\phi \circ P)\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}z - \frac{b}{3\sqrt{|a|}}\right)$$

$$Q(z) = \pm z^3 + pz + r$$

Où le signe de z^3 est le même que celui de a ;

$$p = -\frac{b^2}{3a} + c, \quad r = \sqrt{|a|}\left(\frac{b}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right).$$

Alors $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ et $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, Q)$ sont topologiquement conjugués par la transformation inversible ϕ , et grâce à cette conjugaison l'espace des paramètres passe de quatre (i.e.: a, b, c et d) à deux (i.e.: p et r).

2.1.4 Familles normales de fonctions holomorphes

Nous allons maintenant présenter les résultats sur les familles normales de fonctions holomorphes. Le premier théorème important de cette section est le théorème de Montel.

Il nous donnera un critère simple pour déterminer la normalité d'une famille de fonctions holomorphes. L'autre résultat important de cette section est le critère fondamental de normalité, résultat également développé par Paul Montel [16]. Le critère fondamental de normalité a conduit à plusieurs résultats par la suite. Avant de présenter ces deux résultats, nous présentons tout d'abord la définition de famille normale de fonctions holomorphes.

Définition 2.1.6 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur un domaine Ω est **normale** dans Ω si pour chaque suite de fonctions $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$, il existe :

★ Soit une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact de Ω vers une fonction $f \neq \infty$.

★ Soit une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact de Ω vers ∞ .

Remarque 2.1.1 : Dans le cas où la sous-suite $\{f_{n_k}\}$ converge uniformément vers ∞ , cela signifie que pour chaque compact $K \subset \Omega$ et pour chaque constante $M > 0$, il existe $N_{M,K}$ tel que si $k > N$, alors $|f_{n_k}(z)| > M$ pour tout $z \in K$.

Exemple 2.1.3 : Considérons la famille $\mathcal{F} := \{f_n\} := \{z^{(-1)^n \cdot n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ sur $B_{\mathbb{C}}(0, 1) \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$. Alors la sous-suite f_{2n-1} converge uniformément vers ∞ , par-contre la sous-suite $\{f_{2n}\}$ converge uniformément vers 0.

Maintenant qu'on a présenté la notion de famille normale sur un domaine Ω , il serait également intéressant d'avoir un concept de normalité en un point en particulier. La prochaine définition présente ce concept. On verra ensuite qu'une famille de fonctions est normale dans un certain domaine si et seulement si elle est normale en tout point de ce domaine.

Définition 2.1.7 La famille de fonctions holomorphes $\mathcal{F}$ est dite normale au point $z_0 \in \Omega$ s'il existe un ouvert U de Ω contenant z_0 tel que $\mathcal{F}$ est une famille normale sur U .

Remarque 2.1.2 : On dit qu'une famille de fonctions holomorphes $\mathcal{F}$ est normale en le point ∞ si la famille $G := \{g : g(z) = f(\frac{1}{z}), f \in \mathcal{F}\}$ est normale en $z = 0$. Ainsi, on peut étendre la définition de famille normale et considérer un domaine $\Omega \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$.

Théorème 2.1.1 (voir [18]) Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes est normale dans un domaine Ω si et seulement si elle est normale en chaque point de Ω .

Exemple 2.1.4 : Soit $\mathcal{F} := \{f_n(z) = nz \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$. Alors $f_n(0) \rightarrow 0$ mais $f_n(z) \rightarrow \infty$ pour $z \neq 0$, c'est-à-dire que la famille $\mathcal{F}$ ne peut être normale dans aucun domaine contenant l'origine.

Le théorème 2.1.1 n'est pas un résultat très surprenant. Il nous offre un critère pour déterminer si une famille de fonctions n'est pas normale, mais il est peu utile pour montrer qu'une famille est normale. Le théorème de Montel nous fournira justement un critère plus simple pour s'assurer qu'une famille de fonctions est normale.

Théorème 2.1.2 (Paul Montel [16]) Soit $\mathcal{F} := \{f^n(z)\}$ est une famille de fonctions holomorphes définies sur un domaine U . Supposons qu'il existe $a, b, c \in \tilde{\mathbb{C}}$ tel que

$$[\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U)] \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

Alors la famille $\mathcal{F}$ est normale dans U .

Il est intéressant de voir qu'une condition sur les images d'une famille, pourrait garantir la normalité. Dans cette section, nous employons le théorème de Montel pour construire quelques propriétés de base de l'ensemble de Julia.

Exemple 2.1.5 Soit $P : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$

$$z \longmapsto z^2$$

Posons $U = B_{\mathbb{C}}(0, 1)$, on a $\bigcup_{n \geq 0} P^n(U) \subset U$, donc les conditions du théorème précédent sont vérifiées, ce qui donnent la normalité de la famille $\mathcal{F} := \{P^n(z)\}$ sur U .

2.2 Ensemble de Julia et Fatou

Dans le cadre de l'itération de polynômes et de fractions rationnelles complexes, entre 1918 et 1920, Fatou et Julia ([11] et [15]) développent une théorie intéressante. Ils analysent la dynamique à la fois locale, au voisinage des points périodiques par exemple, et globale, en dégageant la dichotomie entre l'ensemble de Julia ("l'ensemble où le comportement est chaotique") et son complémentaire. Ils perçoivent également la nécessité de comprendre la dynamique d'un polynôme et découvrent l'incroyable diversité des comportements asymptotiques.

On travaille maintenant sur une fonction polynômiale $P : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ de degré $n \geq 2$.

On définira donc l'ensemble de Julia $J(P)$ et l'ensemble de Fatou $F(P)$ d'un point de vue dynamique. On présentera également les caractéristiques les plus importantes de ces ensembles tel le fait que l'ensemble de Julia est un compact.

Définition 2.2.1

1) $J(P)$ est l'ensemble des points z en lesquels la famille

$$\mathcal{F} := \{g_n(z) = P^n(z) = \overbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}^{n \text{ fois}}(z) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

n'est pas normale (au sens de Montel).

2) $F(P)$ est l'ensemble des points z pour lesquels la famille

$$\mathcal{F} := \{g_n(z) = P^n(z) = \overbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}^{n \text{ fois}}(z) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

est normale.

Remarque 2.2.1 : Par définition, $J(P)$ et $F(P)$ forment une partition de $\tilde{\mathbb{C}}$.

Les principales propriétés de $J(P)$ sont données ci-après. Pour plus de détails, voir ([2], [4] et [7]).

Proposition 2.2.1 : *L'ensemble $J(P)$ est un compact.*

Démonstration. : On voit immédiatement que:

$F(P) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} \text{ tel qu'il existe un ouvert } V \text{ voisinage de } z \text{ avec la famille } \{P^n\} \text{ est normale dans } V\}$

est un ouvert, donc $J(P)$ est fermé.

Comme le degré de P est supérieur à 2, on a:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{|P(z)|}{|z|} = +\infty \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que:}$$

$$\forall |z| > \alpha \implies \frac{|P(z)|}{|z|} > \varepsilon.$$

Donc on peut trouver $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| > 2|z|$ si $|z| > r$ (c.-à-d. $r = \alpha, \varepsilon = 2$)

d'où $|P^n(z)| > 2^n r$ si $|z| > r$. Ainsi, $P^n(z) \rightarrow \infty$ uniformément sur l'ouvert

$$V = \{|z| > r\}.$$

Par définition, $\{P^n\}$ est normale sur V , donc $V \subset \tilde{\mathbb{C}} \setminus J(P)$.

On obtient alors que $J(P)$ est borné, et par suite compact. ■

Proposition 2.2.2 : *L'ensemble $J(P)$ est non vide.*

Démonstration. : Supposons que $J(P) = \emptyset$. Alors, pour chaque $r > 0$, la famille $\{P^n\}$ est normale sur le disque ouvert $B(0, r)$ de centre l'origine et de rayon r . Comme P est un polynôme, on peut choisir r assez grand pour que $B(0, r)$ contienne un point z pour lequel $|P^n(z)| \rightarrow +\infty$ et également un point fixe w pour P , avec:

$$P^n(w) = w, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une sous-suite de $\{P^n\}$ ne peut alors pas converger uniformément soit vers une fonction analytique bornée soit vers ∞ sur tout compact de $B(0, r)$ qui contient à la fois z et w , ce qui contredit la normalité de $\{P^n\}$.

D'où le résultat. ■

Théorème 2.2.1 : *L'ensemble des points répulsifs et neutres est un sous ensemble de $J(P)$.*

Preuve. : C'est suffisant de prendre des points fixes d'ordre 1.

1) Soit α un point fixe répulsif d'ordre 1, on pose $\alpha = 0$ pour simplifier. Au voisinage de 0, on a le développement:

$$P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots \text{ tel que } |a_1| > 1, \text{ (car } |P'(0)| > 1).$$

Alors $P^n(z) = a_1^n z + \dots$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_1^n| = \infty$.

Ce qui prouve que $\{P^n\}$ ne peut être normale en $(\alpha = 0)$.

2) On pose $\alpha = 0$ un point fixe neutre d'ordre 1, pour simplifier.

De plus

$$P(z) = z + a_p z^p + \dots, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 2$$

$$\text{D'ailleurs } P^n(z) = z + n a_p z^p + \dots$$

et $\{P^n\}$ ne peut être normale en 0.

Donc l'ensemble des points répulsifs et neutres est un sous ensemble de $J(P)$. ■

Théorème 2.2.2 : *L'ensemble $J(P)$ est complètement invariant par P .*

$$(i.e.: P(J(P)) = P^{-1}(J(P)) = J(P)).$$

Preuve. : Il est équivalent de montrer que l'ensemble de Fatou $F(P)$ est complètement invariant par P .

Soit V un ouvert de $F(P)$ avec $\{P^n\}$ normale sur V , considérons $\zeta \in V$:

$\{P^{n_k}\}$ converge uniformément sur un voisinage de ζ , de plus $\{P^{n_k+1}\}$ et $\{P^{n_k-1}\}$ converge uniformément sur un voisinage de $P(\zeta)$ et les antécédents de (ζ) respectivement.

Donc la famille $\{P^n\}$ est normale au points ζ , $P(\zeta)$ et les antécédents de (ζ) .

D'où le résultat: $F(P)$ est complètement invariant par P . ■

De plus, on a (cf. [4] et [7]) les trois résultats suivants

Proposition 2.2.3 *Pour tout entier strictement positif k , $J(P^k) = J(P)$.*

Proposition 2.2.4 *L'ensemble $J(P)$ est d'intérieur vide.*

Théorème 2.2.3 *L'ensemble $J(P)$ est un ensemble parfait.*

On peut maintenant résumer le résultat principal de cette section, que $J(P)$, l'ensemble des points de non-normalité de la famille $\{P^n\}$ et le même que $J(P)$, l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs et indifférents du polynôme P .

2.3 Les points critiques

Les points critiques des fonctions inverses $\{P^{-n}(z)\}$ sont de grande importance dans la détermination de $J(P)$. Par conséquent nous devons discuter leur rapport avec la théorie des itérations.

Définition 2.3.1 *Si l'équation $P^n(z) - c = 0$ a une racine multiple, alors c s'appelle un point critique de la fonction inverse $P^{-n}(z)$. On dénotera dorénavant l'ensemble des points critiques par D .*

Lemme 2.3.1 *Les points critiques de $P^{-n}(z)$ sont les points critiques de $P^{-1}(z)$ et de leurs successeurs d'ordre 1, 2, 3, ..., $n - 1$.*

Preuve. On donne une autre expression à l'équation:

$$P^n(z) - c = 0$$

par

$$\begin{cases} P^{n-1}(x) - c = 0 \dots(\text{I}) \\ x = P(z) \dots(\text{II}) \end{cases}$$

Si l'équation (II) a une solution multiple $\iff x$ est un point critique de $P^{-1}(z)$.

Par l'équation (I), on voit immédiatement que les successeurs de l'ordre $n - 1$ de ces points sont les points critiques de $P^{-n}(z)$ (car $c = P^{n-1}(x)$).

On divise l'équation (I) de la même manière que l'équation $P^n(z) - c = 0$, répétant cette procédure $(n - 1)$ fois et le lemme est démontré. ■

Lemme 2.3.2 *Soit P de degré d et N le nombre de points critiques de $P^{-1}(z)$, alors:*

On a l'inégalité suivant:

$$N \leq d - 1$$

Remarque 2.3.1 *Il est facile de voir que les points critiques de $P^{-1}(z)$ sont les successeurs d'ordre 1 des zéros de P' .*

En effet

Soit c un point critique de $P^{-1}(z)$, donc l'équation $P(z) - c = 0$ admet une racine multiple qu'on note par z^* , alors

$$P(z) - c = 0 \iff \exists z^* \in \tilde{\mathbb{C}} / P(z) - c = (z - z^*)^k . P_1(z), k \geq 2$$

Où P_1 est un polynôme non nul en z^* .

On a alors:

$$\begin{aligned} P(z) - c = (z - z^*)^k . P_1(z) &\iff P'(z) = k(z - z^*)^{k-1} . P_1(z) + (z - z^*)^k . P_1'(z) \\ &\iff P'(z^*) = 0 \end{aligned}$$

On voit bien que z^* est un zéro de P' et qu'il vérifie $P(z^*) = c$, d'où l'inégalité du lemme (2.3.2).

Dans ce mémoire, on rappelle qu'un domaine de $\tilde{\mathbb{C}}$ est un ensemble ouvert et connexe. Pour voir le lien entre les points critiques et les points (fixes et cycles) attractifs de P , on introduit les définitions suivantes:

Définition 2.3.2 1) *On définit le bassin immédiat d'attraction du point fixe attractif z_0 , correspondant à la fonction holomorphe f , noté $A^*(z_0)$, comme le domaine maximal (au sens de l'inclusion) de normalité de $\{f^n\}$ qui contient z_0 .*

2) *Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ un cycle d'ordre k c.-à-d.:*

$$\blacklozenge P(\alpha_1) = \alpha_2$$

$$\blacklozenge P(\alpha_2) = \alpha_3$$

.

.

$$\blacklozenge P(\alpha_k) = \alpha_1$$

On définit le bassin immédiat d'attraction du cycle $\{\alpha_k\}$ défini précédemment, noté $A^*(\{\alpha_k\}) = \bigcup_k A_k^*(\alpha_k)$, où $A_k^*(\alpha_k)$ est le bassin immédiat d'attraction au point α_k , pris comme point fixe attractif d'ordre k de P . Le bassin total d'attraction $A(\{\alpha_k\})$ du cycle est défini par:

$$A(\{\alpha_k\}) = \left\{ z \in \tilde{\mathbb{C}} \mid \{\alpha_k\} \text{ est l'ensemble limite de } \{P^n(z)\} \right\}.$$

De la définition de $A(z_0)$, il est évident de remarquer que: $z \in A(z_0) \implies P^n(z) \rightarrow z_0$, pour cela le théorème suivant nous donne un résultat entre $A(z_0)$ et $J(P)$.

Théorème 2.3.1 *Soit w un point fixe attractif de P , alors $\partial A(w) = J(P)$. Ceci est encore vrai pour $w = \infty$.*

Pour montrer ce théorème, il faut énoncer le lemme suivant:

Lemme 2.3.3 *(voir [7])*

Soit f une fonction holomorphe, et soient $w \in J(f)$ et U un voisinage de w . Alors $W \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ est $\mathbb{C}$ tout entier, sauf peut-être un point. Un tel point exceptionnel n'est pas dans $J(f)$, et est indépendant de w et de U .

Preuve du théorème. Si $z \in J(P)$ alors $P^n(z) \in J(P)$ pour tout n et ne peut pas converger vers un point fixe attractif, donc $z \notin A(w)$. Toutefois, si U est un voisinage de z , l'ensemble $P^n(U)$ contient des points de $A(w)$ pour un certain n par le Lemme 2.3.3, donc il y a des points arbitrairement proches de z qui sont itérés sur w . Donc $z \in \overline{A(w)}$ et $z \in \partial A(w)$.

Supposons que $z \in \partial A(w)$ mais $z \notin J(P)$. Alors z a un voisinage ouvert connexe V sur lequel $\{P^n\}$ admet une sous-suite convergente soit vers une fonction analytique, soit vers ∞ . Cette sous-suite converge vers w sur $V \cap A(w)$, qui est ouvert et non-vide, et

donc sur V , car une fonction analytique est constante sur un connexe si elle est constante sur tout ouvert. Tous les points de V sont envoyés sur $A(w)$ par des itérés de P , donc $V \subset A(w)$ ce qui contredit le fait que $z \in \partial A(w)$. ■

Exemple 2.3.1 Avec l'exemple $P(z) = z^2$, on retrouve pour ensemble de Julia le cercle unité, qui est la frontière de $A(0)$ et de $A(\infty)$.

Le théorème suivant ([4]) établit l'influence d'un cycle attractif sur les points critiques.

Théorème 2.3.2 Si $\{\alpha_k\}$ est un cycle attractif $\implies$ Il existe au moins un point critique c de P^{-1} tel que $c \in A^*(\{\alpha_k\})$.

Remarque 2.3.2 Ce théorème constitue un outil très puissant pour savoir, si un polynôme admet des cycles attractifs.

En effet: d'après le théorème précédent on a : s'il existe aucun point critique c de P^{-1} tel que $c \in A^*(\{\alpha_k\})$, alors P n'admet aucun cycle attractif.

Il est évident que les points fixes neutres doivent être considérés en tant que points exceptionnels dans la théorie d'itération. En caractérisant l'ensemble de Julia, cependant, nous ne pouvons pas omettre les points fixes neutres, qui ont la même influence sur la structure de l'ensemble de Julia que les points fixes attractifs et répulsifs. Dans ce contexte, on a le théorème:

Théorème 2.3.3 (voir [4]) Soit α un point fixe indifférent de P , alors:

- 1) Il existe un bassin d'attraction $A(\alpha)$ qui est une réunion de domaines dans lesquels la suite $\{P^n\}$ est normale et pour chacun d'eux α est un point frontière.
- 2) $A^*(\alpha)$ contient au moins un point critique de $P^{-1}(z)$.
- 3) Le nombre des points fixes neutres est fini.

Le théorème suivant ([4]) nous précise la nature des points de l'ensemble de Julia

Théorème 2.3.4 *Si z^* un point fixe (répulsif ou indifférent) de P .*

Supposons $H = \{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P^n(z) = z^\} = \text{ensemble des antécédents de } z^*$ (par P), alors $\overline{H} = J(P)$*

2.4 La structure de l'ensemble de Julia

A ce stade, on connaît les principales propriétés topologiques et itératives de l'ensemble de Julia, cependant, dans cette section on établit les propriétés géométriques de cet ensemble.

L'ensemble de Julia peut avoir différentes formes (courbe continue, discontinue, connexe, convexe, ..., etc). Il peut aussi être constitué d'une infinité de courbes de Jordan; on rappelle ci-après la définition de ce dernier type de courbe.

Définition 2.4.1 *Toute courbe $\Lambda \subset \tilde{\mathbb{C}}$ fermée continue sans point double, de longueur finie ou non est appelée une courbe de Jordan.[17].*

Le théorème suivant ([17]), nous montre comment une courbe de Jordan décompose la sphère de Riemann $\tilde{\mathbb{C}}$.

Théorème 2.4.1 *(Théorème de Jordan)*

Une courbe de Jordan dans $\tilde{\mathbb{C}}$ partage le plan en deux ouverts connexes ayant la courbe considérée comme une frontière commune. L'ouvert connexe qui est borné [i.e. tel que tous ses points z satisfont $|z| \leq M$ où M est une constante strictement positive] est appelé l'intérieur de la courbe; l'autre ouvert est appelé l'extérieur de la courbe.

Après cet aperçu sur la courbe de Jordan, les deux théorèmes suivants ([4]) sont énoncés pour des fractions qui admettent au moins deux points fixes attractifs, mais ces théorèmes sont aussi valables pour les polynômes.

Théorème 2.4.2 *Si P admet deux points fixes attractifs α, β tels que:*

$$A^*(\alpha) = A(\alpha) \text{ et } A^*(\beta) = A(\beta)$$

Alors $J(P)$ est une courbe de Jordan.

Théorème 2.4.3 *Si les assertions suivantes sont vérifiées:*

- 1) *Le nombre de points fixes attractifs est supérieur ou égal à 2;*
- 2) *Un et un seul d'entre eux, α , vérifie $A^*(\alpha) = A(\alpha)$;*
- 3) *$J(P) \cap \overline{D} = \emptyset$;*

Alors $J(P)$ est formé d'une infinité de courbes de Jordan.

Remarque 2.4.1 *Fatou [11], a montré que $J(P)$ est une courbe de Jordan si P a un point fixe attractif α et un point fixe indifférent β tels que $A^*(\alpha) = A(\alpha)$ et $A^*(\beta) = A(\beta)$. Dans ce cas, β doit satisfaire: $P'(\beta) = 1$ et $P''(\beta) \neq 0$.*

En ce qui concerne le point à l'infini, il y a plusieurs résultats [4] qui donnent une caractérisation de son bassin d'attraction.

Théorème 2.4.4 *Si P est un polynôme de degré $d \geq 2$, alors*

- i) *$z = \infty$ est un point fixe attractif d'ordre 1.*
- ii) *$c = \infty$ est un point critique de $P^{-1}(z)$ d'ordre $(d-1)$.*
- iii) *$A^*(\infty) = A(\infty)$.*

Preuve. i) Soit $P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_{d-1} z + a_d$.

Montrons que $\alpha = \infty$ est point fixe de P d'ordre 1, c.-à-d. $P(\alpha) = \alpha$: il suffit de prouver, en utilisant la conjugaison topologique énoncée au paragraphe (2.1.3), que $\beta = 0$ est un point fixe d'une fraction rationnelle Q reliée à P de la manière suivante :

Pour cela, posons $z = \frac{1}{\omega}$ alors

$$P(z) = z \iff P\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}$$

$$\Longleftrightarrow a_0 \frac{1}{\omega^d} + a_1 \frac{1}{\omega^{d-1}} + \dots + a_{d-1} \frac{1}{\omega} + a_d = \frac{1}{\omega}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_0 + a_1 \omega + \dots + a_{d-1} \omega^{d-1} + a_d \omega^d}{\omega^d} = \frac{1}{\omega}$$

$$\Longleftrightarrow \omega = \frac{\omega^d}{a_0 + a_1 \omega + \dots + a_{d-1} \omega^{d-1} + a_d \omega^d} = Q(\omega)$$

On remarque que $\beta = 0$ est un point fixe d'ordre 1 de Q .

D'où le résultat: ∞ est un point fixe d'ordre 1 de P .

$\alpha = \infty$ est attractif;

En effet $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que: } \forall |z| > \delta, |P(z)| > \varepsilon$

Ce qui prouve que $\alpha = \infty$ à un bassin d'attraction.

ii) On utilise ici la notion de conjugaison topologique, l'homéomorphisme est

$$\phi : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

$$z \longrightarrow \phi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\text{Posons } Q(z) = (\phi \circ P \circ \phi^{-1})(z)$$

$$= (\phi \circ P)(\phi^{-1}(z))$$

$$= \phi\left(\frac{a_0}{z^d} + \frac{a_1}{z^{d-1}} + \dots + \frac{a_{d-1}}{z} + a_d\right)$$

$$= \phi\left(\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{d-1} z^{d-1} + a_d z^d}{z^d}\right)$$

$$= \frac{z^d}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{d-1} z^{d-1} + a_d z^d}$$

Pour que $z = \infty$ soit un point critique de P^{-1} , il suffit que $z_0 = 0$ soit un point critique de Q^{-1} , i.e. l'équation $Q(z) - z_0 = 0$ admet une racine multiple.

D'après la remarque qui suit le (Lemme 2.3.2), les points critiques de Q^{-1} sont les successeurs d'ordre 1 des zéros de Q' , alors

$$\begin{aligned} Q(z) - z_0 = 0 &\iff z_0 = Q(z) \\ &\iff z_0 = \frac{z^d}{a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d} \end{aligned}$$

Nous dérivons les deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} Q'(z) &= \frac{d \cdot z^{d-1}(a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d)}{(a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d)^2} \\ &\quad - \frac{z^d(a_1 + \dots + (d-1)a_{d-1}z^{d-2} + d \cdot a_dz^{d-1})}{(a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d)^2} = 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement, après simplifications:

$$Q'(z) = \frac{z^{d-1}(da_0 + (d-1)a_1 + \dots + a_{d-1}z^{d-1})}{(a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d)^2} = 0$$

On conclut finalement que $z = 0$ est une racine d'ordre $(d-1)$ de $Q'(z) = 0$.

Par ailleurs, il n'existe aucun point z fini tel que $P(z) = \infty$; en fait le seul antécédent par P du point à l'infini est le point à l'infini lui-même.

iii) $A^*(\infty)$ est le domaine maximal (aux sens de l'inclusion) de normalité de $\{P^n\}$ qui contient ∞ .

Donc on cherche des $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ où il existe une sous suite $|P^{n_k}(z)| \rightarrow \infty$, et on a: s'il existe une sous suite divergente alors la suite elle-même diverge.

Alors

$$A^*(\infty) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}}, \text{ tels que } f^n(z) \rightarrow \infty.\} = A(\infty)$$

D'où le résultat. ■

Notation 2.4.1 Notons par D_1 l'ensemble des points critiques finis de $P^{-1}(z)$.

L'ensemble D_1 nous permet de préciser certaines propriétés topologiques de l'ensemble de Julia et de $A(\infty)$. En fait, on a les théorèmes suivants ([4]):

Théorème 2.4.5 *La frontière $J(P)$ est connexe $\iff A(\infty) \cap D_1 = \emptyset$.*

Corollaire 2.4.1 *Si $D_1 \subset J(P)$, alors $J(P)$ est un ensemble connexe et $A(\infty)$ est simplement connexe.*

Théorème 2.4.6 *Si un polynôme P a un point fixe α fini d'ordre 1 tel que $D_1 \subset A^*(\alpha)$, alors $J(P)$ est une courbe de Jordan.*

Définition 2.4.2 *Un ensemble est dit totalement discontinu si tous ses points sont isolés. Autrement dit, toutes ses composantes connexes sont réduites à des singletons.*

Le théorème suivant donné par P. Fatou (voir la référence de [4]), montre que l'ensemble $J(P)$ peut avoir cette structure sous certaines conditions.

D'une façon plus précise, si l'on note λ_1 (resp. λ_2) la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), on a le théorème suivant ([4]) concernant la mesure de $J(P)$:

Théorème 2.4.7 *Si P est un polynôme tel que $D_1 \subset A^*(\infty)$, alors:*

- i) $J(P)$ est totalement discontinu.*
- ii) $\lambda_2(J(P)) = 0$.*
- iii) $\lambda_1(J(P)) = 0$ si $J(P) \subset L$ où L est une ligne droite.*

Détermination et tracé de l'ensemble de Julia de polynômes cubiques

A l'aide des résultats exposés dans le chapitre précédent, on détermine ici l'ensemble de Julia de polynômes cubiques à coefficients réels.

Pour cela, il est d'abord nécessaire de rappeler quelques théorèmes issus de la théorie de l'itération de polynômes holomorphes cubiques:

$$P : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

$$z \longrightarrow P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3.$$

Dans le paragraphe (2.1.3), relatif à la Conjugaison topologique, on a montré que $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ et $(\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, Q)$ sont topologiquement conjugués, où:

$$Q(z) = \pm z^3 + pz + r, \text{ le signe de } z^3 \text{ est le même que celui de } a;$$

$$p = -\frac{b^2}{3a} + c \text{ et } r = \sqrt{|a|}\left(\frac{b}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right).$$

Autrement dit, l'étude du comportement itératif du polynôme P , peut être ramenée à celle de Q .

Dans la suite du mémoire, on aura besoin de résoudre quelques équations du troisième degré, pour cela on fait un appel à une méthode directe de résolution (méthode de Cardan).

3.1 Équation du troisième degré (Méthode de Cardan).

Dans ce paragraphe, nous allons donner les formules de Cardan de façon à pouvoir résoudre des équations du troisième degré. Ensuite, nous utiliserons les nombres complexes pour trouver les trois racines de l'équation ($Q(z) = 0$).

3.1.1 Établissement de formules générales (Formules de Cardan)

Soit à résoudre l'équation

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{3.1.1}$$

On s'arrange pour que le signe de z^3 soit positif.

Posons $z = u + v$, on obtient:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

Ce qui donne en développant:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

Qui se factorise sous la forme:

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

Posons

$$3uv + p = 0$$

On obtient alors

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

Qui se met sous la forme:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

u^3 et v^3 sont donc racines de l'équation (3.1.1) :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Nous distinguerons alors trois cas selon que le signe (+, nul, -) de Δ .

Avant de donner les solutions, un petit rappel sur les racines cubique d'un nombre complexe est nécessaire.

On définit le nombre complexe j par :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

j vérifie les deux propriétés suivantes :

$$j^3 = 1$$

$$j^2 + j + 1 = 0$$

Si on connaît une racine cubique r d'un nombre complexe c , alors il est aisé de voir que les trois racines cubiques de c sont :

$$r \quad j.r \quad j^2.r$$

Premier cas : si Δ positif

Les calculs faits dans ce paragraphe sont aussi valables pour Δ nul et le résultat, dans ce cas, sera alors simplifié dans le paragraphe suivant:

La résolvante de Cardan a alors pour racine :

$$\begin{cases} u^3 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \\ v^3 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

D'où on déduit que:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ v = j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ v = j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons trois valeurs possibles pour z :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \\ z_2 &= j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \\ z_3 &= j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{aligned}$$

Deuxième cas : si Δ nul

Dans le paragraphe précédent, faisons $\Delta = 0$ dans la formule donnant z_1 , on obtient:

$$z_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

$\Delta = 0$ se traduit par:

$$\begin{aligned} q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 &\iff \frac{27q^2}{4p^3} = -1 \\ &\iff \frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2} \\ &\iff \sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \frac{3q}{2p} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$z_1 = \frac{3q}{p}$$

En faisant $\Delta = 0$ dans la formule donnant z_2 et z_3 du paragraphe précédent, on obtient:

$$z_2 = z_3 = (j + j^2) \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

Comme on a $j + j^2 = -1$, on obtient:

$$z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p}$$

En résumé, les trois racines sont:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3q}{p} \\ z_2 &= z_3 = -\frac{3q}{2p} \end{aligned}$$

Troisième cas : si Δ strictement négatif

La résolvante de Cardan a alors pour racine :

$$\begin{cases} u^3 = \frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2} \\ v^3 = \frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

D'où on déduit que:

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ v = \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ v = j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ v = j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{cases}$$

Ci-dessus u et v s'expriment comme racines cubiques d'un nombre complexe. Comme un nombre complexe a trois racines cubiques, il est important de choisir des valeurs de u et v qui soit conjuguées de façon à vérifier la relation:

$$3uv + p = 0.$$

Pour simplifier les choses, on peut aussi simplement, pour un nombre w complexe donné, adopter la convention :

$$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{|w|} e^{\frac{\arg(w)}{3}i}$$

Nous en déduisons trois valeurs possibles pour les racines:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ z_2 &= j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} + j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ z_3 &= j^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} + j \cdot \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{aligned}$$

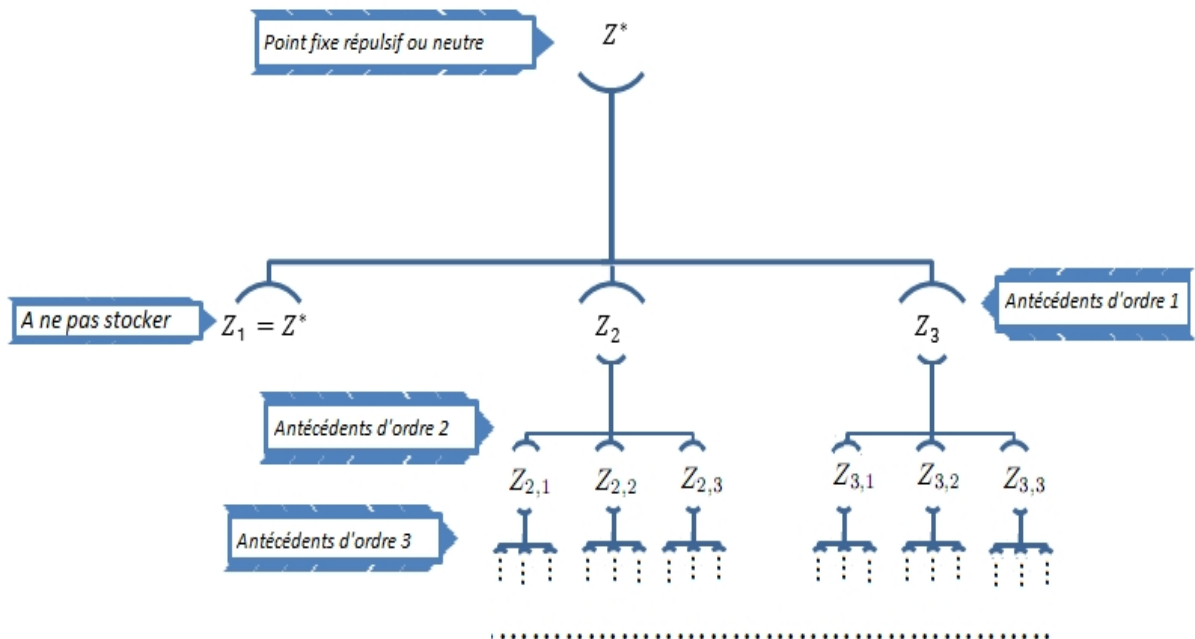
Résumé

$\Delta < 0$	L'équation (3.1.1) admet 3 racines réelles.
$\Delta = 0$	L'équation (3.1.1) possède deux solutions réelles: une simple et une double.
$\Delta > 0$	L'équation (3.1.1) possède une solution réelle et deux complexes conjuguées.

3.2 La méthode de recherche des points de $J(P)$

La recherche des points de $J(P)$ est bien expliquée par le théorème 2.3.4, donc il suffit de chercher un point fixe répulsif (ou indifférent) z^* , et de trouver ses antécédents.

Donc la recherche des points de $J(P)$, peut être illustrée par l'arbre à 3 branches suivant:



Remarques 3.2.1

1) La recherche des antécédents d'un point par P , revient à résoudre une équation polynômiale cubique, d'où la présentation des formules de Cardan dans la section précédente.

2) L'ensemble $J(P)$ est mieux approximé si le nombre d'antécédents trouvé est grand.

Ce dernier est limité par la place-mémoire de la machine utilisée, ainsi que par le programme exploitant l'algorithme d'obtention des points de $J(P)$.

3.3 Expérimentations théoriques et graphiques

Dans cette section, on applique le procédé, exposé à la fin du chapitre précédent, à différents polynômes cubiques complexes. Dans chaque cas, on donne des exemples, assez différents les uns des autres, qui ont été choisis pour rendre compte de la complexité de la frontière $J(P)$ ainsi que des diverses formes sous lesquelles elle peut se présenter.

3.3.1 Premier cas $P(z) = z^3$ ($p = r = 0$)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0$: attractif, et $z_2, z_3 = \pm 1$, tous deux répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.1), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

P^{-1} admet un point critique fini $c_1 = 0$ indiqué par le symbole (+).

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

Le seul point critique coïncide avec le point fixe attractif, donc $c_1 \notin A(\infty)$, d'après le théorème 2.4.5 $J(P)$ est connexe, et la frontière $J(P)$ est une courbe de Jordan, d'après le théorème 2.4.6.

$J(P)$ sépare les bassins immédiats d'attractions de z_1 et de celui de l'infini.

Le plan complexe est par conséquent formé de trois ensembles invariants $A^*(0)$, $A^*(\infty)$ et $J(P)$.

D'après le théorème 2.3.1, on a $\partial A(0) = J(P)$, donc la frontière $J(P)$ est le cercle unité.

La frontière $J(P)$, approchée par Cinq milles (5000) points, est représentée en figure 3.3.1.

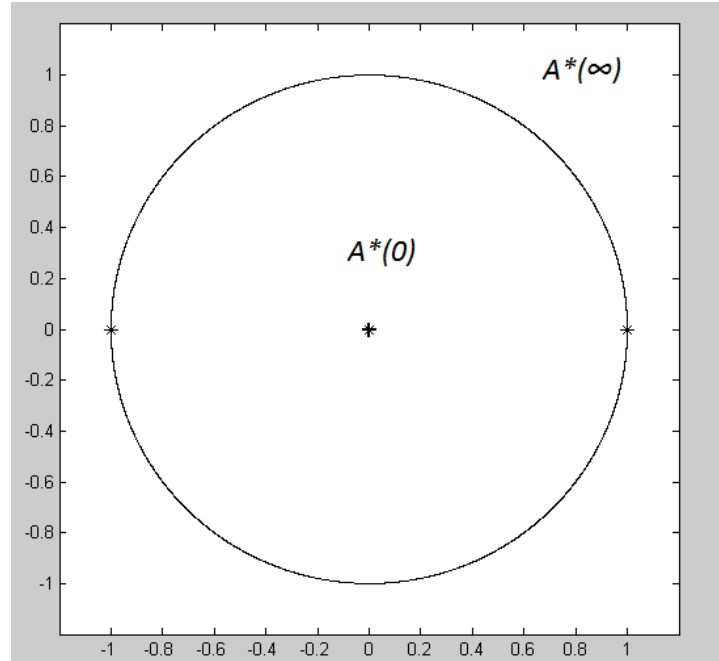


Figure 3.3.1 ($P(z) = z^3$)

Important: la détermination de $J(P)$ permet, en considérant $(J(P) \cap \mathbb{R})$, de déduire le comportement itératif de la fonction réelle $f(x) = x^3$ ($A(0) = A^*(0) =]-1, +1[$). Cette observation reste, bien sûr, valable pour tous les exemples de ce chapitre.

3.3.2 Deuxième cas $P(z) = \pm z^3 + pz$

Premièrement, on considère le polynôme $P(z) = -z^3 + pz$, avec la conjugaison topologique d'homéomorphisme $\phi(z) = iz$, il suffit de considérer le polynôme:

$$P(z) = z^3 + pz$$

◦ P admet 3 points fixes d'ordre 1: z_1, z_2 et z_3 .

$$P(z) = z \implies z(z^2 + (p-1)) = 0$$

$$\implies \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2, z_3 = \pm\sqrt{1-p} \end{cases}$$

o P^{-1} admet 2 points critiques finis c_1 et c_2 .

$$\begin{aligned} P'(z) = 0 &\implies 3z^2 + p = 0 \\ &\implies z_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}} \\ c_1 = P(z_3) \text{ et } c_2 = P(z_4) \end{aligned}$$

Donc les points critiques sont $c_{1,2} = \pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$

La plupart des théorèmes (théorème 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 et 2.4.7) qui donnent la structure de l'ensemble de Julia, se basent sur les points critiques; pour cela les deux lemmes suivants tirés de ([4]), nous donnent une localisation des points critiques selon la valeur de p .

Lemme 3.3.1 Si $|p| \leq 1$ alors $c_1, c_2 \in A^*(0)$.

Preuve. On a $z_1 = 0$ est point fixe attractif si $|p| < 1$, et si $|p| = 1$ alors $z_1 = 0$ est point fixe neutre donc les deux théorèmes (2.3.2 et 2.3.3) nous assurent qu'il existe au moins un point critique c de P^{-1} tel que $c \in A^*(0)$.

Comme $A^*(0)$ est symétrique par rapport à l'origine alors $c_1, c_2 \in A^*(0)$. ■

Lemme 3.3.2 Les points critiques $c_1, c_2 \in A(\infty) \iff |p| > 3$

A l'aide de ce lemme et du théorème 2.4.7, on peut dire $|p| > 3 \implies J(P)$ est totalement discontinu.

Dans ce cas du polynôme Brolin ([4]), nous donne une localisation de l'ensemble de Julia.

Théorème 3.3.1 L'ensemble $J(P) \subset \{z / |z| \leq \sqrt{1+|p|}\}$.

Le théorème suivant ([4]) exprime bien la structure de l'ensemble de Julia dans le cas étudié.

Théorème 3.3.2 1) Si $|p| \leq 3 \implies J(P)$ est connexe.

2) Si $|p| < 1 \iff J(P)$ est une courbe de Jordan.

3) Si $|p| = -3 \implies J(P)$ est le segment $[-2, 2]$.

4) Si $|p| = 3 \implies J(P)$ est le segment $[-2i, 2i]$.

5) Si $|p| > 3 \implies J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_1(J(P)) = 0$.

6) Si $p < -3 \implies J(P)$ est dans une droite réelle, de plus $J(P) \subset [-z_2, z_2]$.

7) Si $p > 3 \implies J(P)$ est dans une droite imaginaire, de plus $J(P) \subset [-\zeta_1, \zeta_1]$ où $\zeta_1 = \sqrt{-p-1}$.

Démonstration. 1) Si $|p| \leq 3$, par le lemme (3.3.2) $c_1, c_2 \notin A(\infty)$, et par conséquent,

du théorème 2.4.5, $J(P)$ est connexe.

2) Le polynôme P a un seul point fixe attractif si et seulement si $|p| < 1$, et par le lemme (3.3.1) $c_1, c_2 \in A^*(0)$ pour $|p| < 1$, et le résultat découle directement avec l'application du théorème 2.4.6.

3) Si $p = -3$ alors $c_1, c_2 \in J(P)$ (car $c_1 = -2, c_2 = 2$ sont des points fixes répulsifs). De plus on a $[-2, 2]$ est positivement invariant et l'équation $z^3 - 3z + t = 0$ tel que $t \in [-2, 2]$ admet 3 racines réelles (car le discriminant est négatif).

Donc $J(P) \subset [-2, 2]$, et d'après le théorème 2.4.5 $J(P)$ est connexe, ce qui nous permet de dire que $J(P) = [-2, 2]$.

4) la démonstration du résultat est analogue au cas $p = -3$.

5) Supposons que $|p| > 3$, avec le lemme 3.3.2: $c_1, c_2 \in A(\infty)$.

Selon le théorème 2.4.7 on a $J(P)$ est totalement discontinu.

Pour montrer que $\lambda_1(J(P)) = 0$, il faut d'abord prouver (6) et (7).

6) Si $p < -3$ alors $z_2 = \sqrt{1-p}$ est un point fixe répulsif, posons donc:

$H = \{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } P^n(z) = z_2\}$ = ensemble des antécédents de z_2 (par P).

Considérons l'équation

$$z^3 + pz =, \quad x \in \mathbb{R} \dots \dots \dots (E)$$

Si $|x| < \sqrt{1-p}$, avec les formules de Cardan, on conclut que (E) a trois racines réelles.

Avec le théorème 3.3.1, on a $J(P) \subset \{z / |z| \leq \sqrt{1-p}\}$, et puisque les équations

$$P^n(z) = z_2, \quad n \in \mathbb{N}$$

ont trois racines réelles, on voit immédiatement que $H \subset [-z_2, z_2]$.

On a, avec le théorème 2.4.3, $\overline{H} = J(P)$, et le résultat $J(P) \subset [-z_2, z_2]$ découle directement.

7) On peut procéder de la même façon qu'en (6).

Comme (6) et (7) sont vérifiés, avec le théorème (2.4.7), on a bien que $\lambda_1(J(P)) = 0$.

■

Exemple 3.3.1 ($J(P)$ est connexe)

Soit $P(z) = z^3 + \frac{3}{4}z$ (ici, $|p| < 1$, cas $n^\circ = 2$ du théorème 3.3.2)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0$: attractif, et $z_2, z_3 = \pm \frac{1}{2}$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.2), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Les points critiques sont $c_1, c_2 = \pm \frac{1}{4}i$, comme ils sont indiqués par des (+).

Les successeurs de ces points critiques convergent vers le seul point fixe attractif z_1 , il n'y a pas d'autres cycles attractifs, à part z_1 et le point à l'infini, en vertu du théorème 2.3.2.

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est connexe, et est une courbe de Jordan, d'après le théorème 3.3.2. Il sépare les bassins immédiats d'attractions de z_1 et de celui de l'infini.

Le plan complexe est par conséquent formé de trois ensembles invariants $A^*(0)$, $A^*(\infty)$ et $J(P)$.

La frontière $J(P)$, approchée par Cinquante milles (50 000) points, est représentée en figure 3.3.2

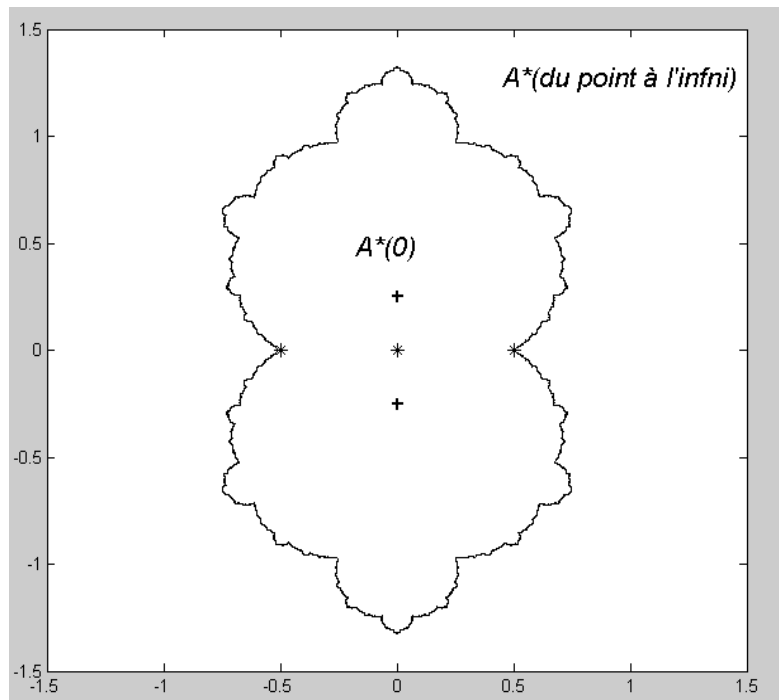


Figure 3.3.2 ($P(z) = z^3 + \frac{3}{4}z$)

Exemple 3.3.2 ($J(P)$ est formé d'une infinité de courbes de Jordan)

Soit $P(z) = z^3 + \frac{3}{2}z$ (ici, $|p| < 3$, cas $n^\circ = 1$ du théorème 3.3.2)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0$: répulsif, et $z_2, z_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$: attractifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.3), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Les points critiques sont $c_1, c_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, comme ils sont indiqués par des (+), dans ce cas, les deux points critiques coïncident avec les deux points fixes attractifs z_2, z_3 .

Structure de $J(P)$

D'après le théorème 3.3.2, $J(P)$ est connexe, mais n'est pas une courbe de Jordan.

Il s'ensuit, en utilisant le théorème 2.4.3, sachant $A^*(\infty) = A(\infty)$, que $J(P)$ formé d'une infinité de courbes de Jordan dont chacune fait partie du bassin d'attraction de z_2 ou de z_3 , on a représenté cette frontière par deux cents milles (200 000) points, dans la figure 3.3.3 ci-dessous

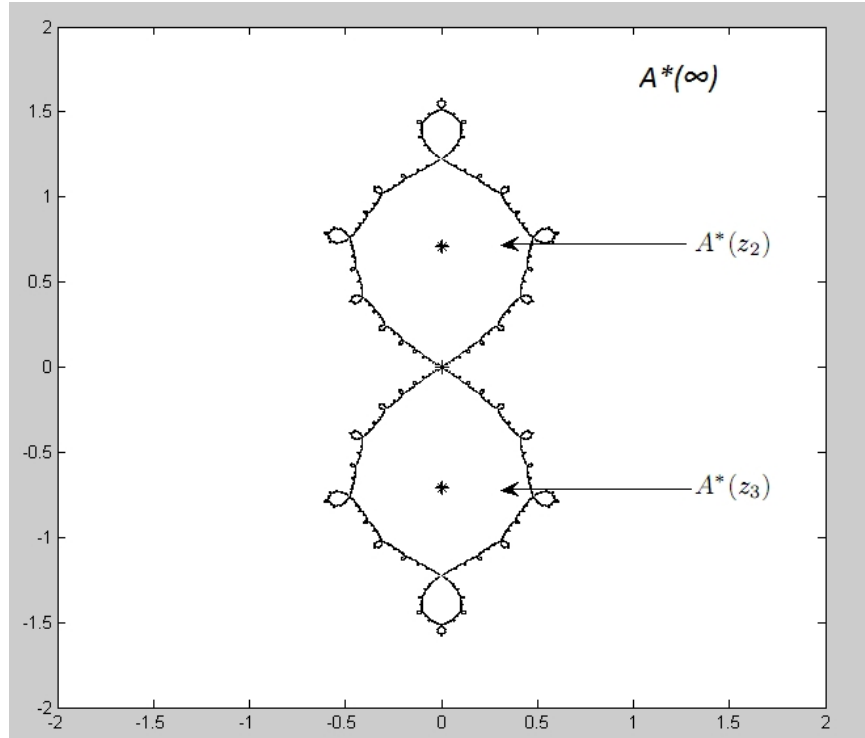


Figure 3.3.3 ($P(z) = z^3 + \frac{3}{2}z$)

3.3.3 Troisième cas $P(z) = z^3 + r$

Classification des points fixes

♦ Si $|r| < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors d'après les formules de Cardan (calcul du discriminant, paragraphe 3.1), $P(z) = z^3 + r$ a 3 points fixes q_1, q_2 et q_3 tels que:

$$q_3 < 0 < r < q_2 < q_1 \text{ si } 0 < r < \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (3.3.1)$$

$$q_3 < q_2 < r < 0 < q_1 \text{ si } -\frac{2\sqrt{3}}{9} < r < 0 \quad (3.3.2)$$

Dans ce cas, q_1 et q_3 sont répulsifs et q_2 est attractif.

♦ Si $|r| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors deux points fixes coïncident, et ces points sont indifférents et l'autre point fixe est répulsif.

♦ Si $|r| > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ on a seulement un point fixe réel à savoir:

$$q_3 < 0 \text{ si } r > \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$q_1 > 0 \text{ si } r < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Les points fixes sont toujours répulsifs, de plus $P^{-1}(z)$ a un seul point critique $c_1 = r$.

Concernant le point critique c_1 , Brolin ([4]) a établi les résultats:

Lemme 3.3.3 *Le seul point critique $c_1 \in A(\infty) \iff |r| > \frac{2\sqrt{3}}{9}$.*

Preuve. $\Leftarrow$) Soit $r > \frac{2\sqrt{3}}{9}$, on a vu précédemment que le seul point fixe réel est strictement négatif, donc $P(x) > x \forall x > 0$.

Puisque $c_1 = r$ alors $P^n(c_1) \longrightarrow +\infty$, donc $c_1 \in A(\infty)$.

Soit $r < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, de la même manière on montre que $P^n(c_1) \longrightarrow -\infty$, c.-à-d. $c_1 \in A(\infty)$.

$\Rightarrow$) Pour montrer cette implication on montre que si $|r| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ alors $c_1 \notin A(\infty)$.

Si $|r| < \frac{2\sqrt{3}}{9}$, avec (3.1.1) et (3.1.2), on conclut que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P^n(c_1) \in [q_1, q_3]$.

Donc $c_1 \notin A(\infty)$. ■

Théorème 3.3.3 (voir [4])

- 1) Si $|r| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \iff J(P)$ est une courbe de Jordan..
- 2) Si $|r| > \frac{2\sqrt{3}}{9} \implies J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_2(J(P)) = 0$.

Exemple 3.3.3 ($J(P)$ est une courbe de Jordan)

Soit $P(z) = z^3 + \frac{1}{3}$ (ici, $p < \frac{2\sqrt{3}}{9}$, cas $n^\circ = 1$ du théorème 3.3.3)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont donnés par les formules de Cardon comme suit:

$z_1 = 0.3949$: attractif, $z_3 = 0.7422$: répulsif, $z_3 = -1.1372$: répulsif, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.4), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Le seul point critique est $c = \frac{1}{3}$, il est indiqué par un plus(+) dans la figure (3.3.4).

Les successeurs du point critique convergent vers le seul point fixe attractif z_1 , il n'y a pas d'autres cycles attractifs, à part z_1 et le point à l'infini, en vertu du théorème 2.3.2.

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est connexe, et est une courbe de Jordan, d'après le théorème 3.3.3. Il sépare les bassins immédiats d'attractions de z_1 et de celui de l'infini.

Le plan complexe est par conséquent formé de trois ensembles invariants $A^*(z_1)$, $A^*(\infty)$ et $J(P)$.

La frontière $J(P)$, approchée par Cinquante milles (50 000) points, est représentée en figure 3.3.4

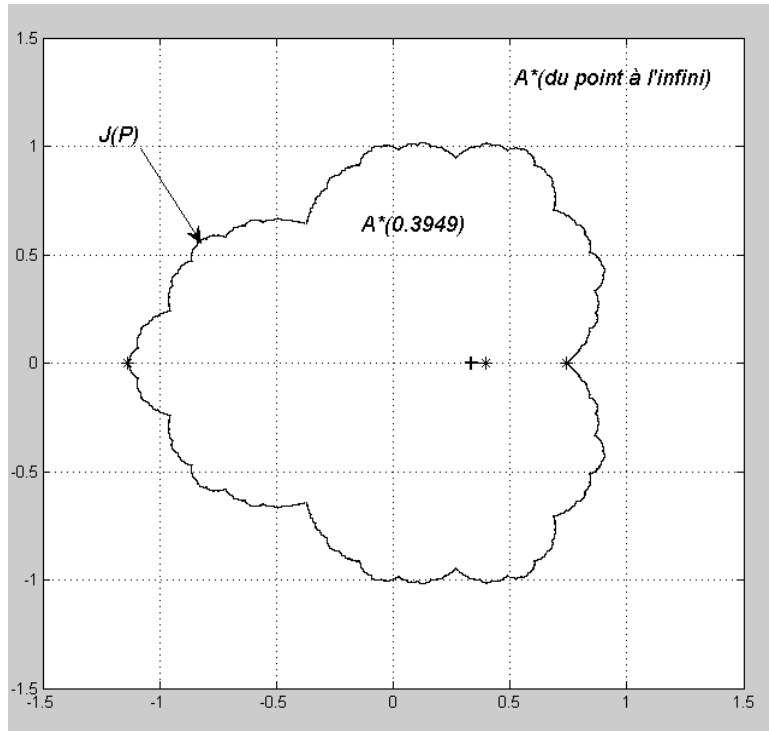


Figure 3.3.4 ($P(z) = z^3 + \frac{1}{3}$)

Exemple 3.3.4 ($J(P)$ est totalement discontinu)

Soit $P(z) = z^3 + \frac{1}{2}$ (ici, $p > \frac{2\sqrt{3}}{9}$, cas $n^\circ = 2$ du théorème 3.3.3)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = -1.1915$: répulsif, $z_2 = 0.5957 + 0.2544i$: attractif, $z_3 = 0.5957 - 0.2544i$: attractif, indiqués par des étoiles (*) dans la figure (3.3.5), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Le seul point critique est $c = \frac{1}{2}$, marqué par un plus(+), les successeurs du point critique convergent vers le point à l'infini, donc il n'y a pas de cycle attractif à part le point à l'infini.

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_2(J(P)) = 0$, d'après le théorème 3.3.3

La frontière $J(P)$, approchée par Deux cents milles (200 000) points, est représentée en figure 3.3.5

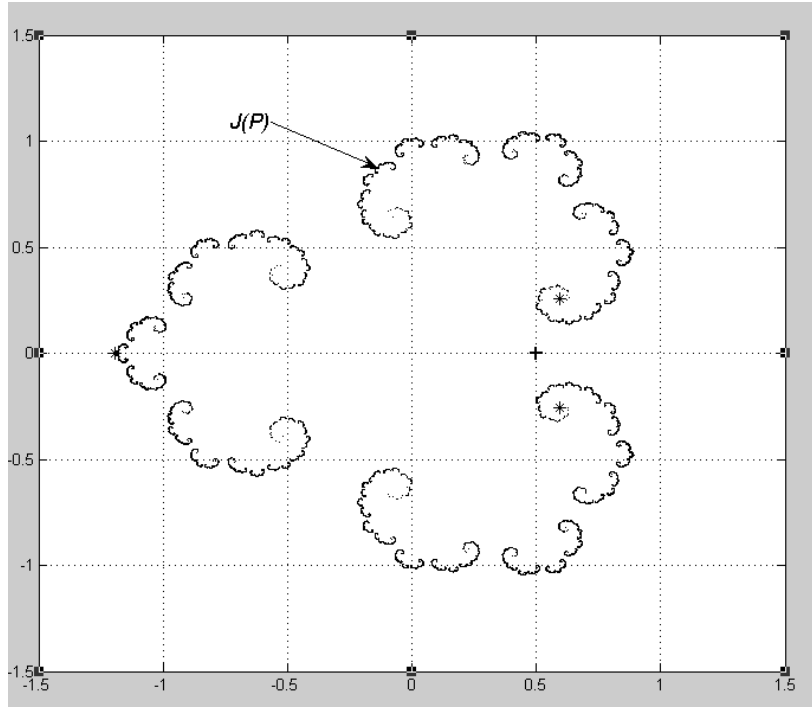


Figure 3.3.5 ($P(z) = z^3 + \frac{1}{2}$)

Pour rendre compte de la complexité de la frontière $J(P)$, la figure 3.3.6 montre dans la première image, l'ensemble $J(P)$ ainsi que trois agrandissements successifs de la région rectangulaire $R = [-1.225, -0.85] \times [-0.2, 0.2]$ repérée dans la dite-image .

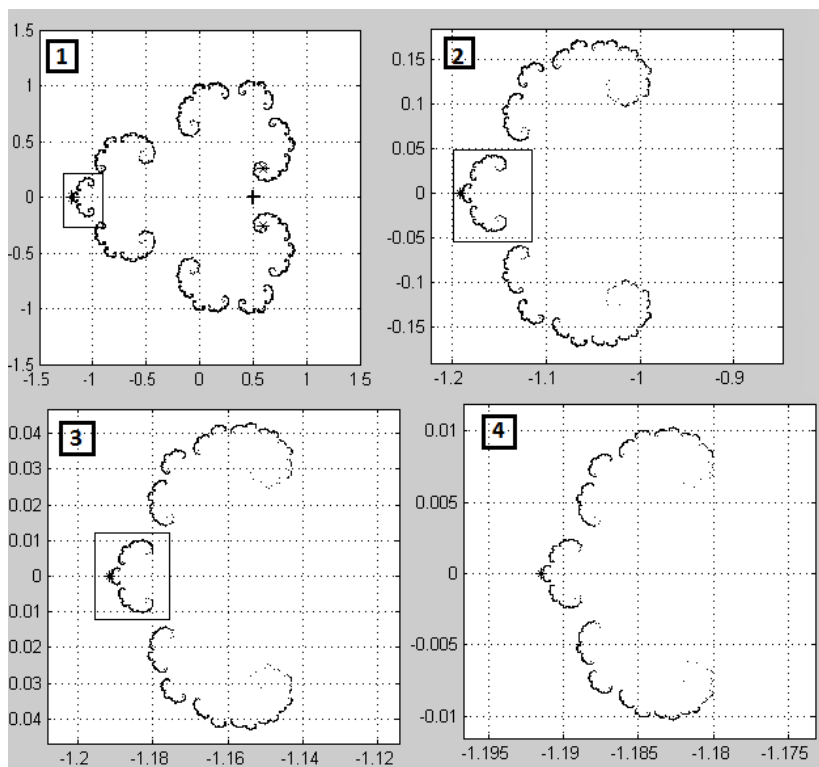


Figure 3.3.6 (Zooms successifs de la figure 3.3.5)

3.3.4 Quatrième cas $P(z) = -z^3 + r$

Le polynôme $P(z) = -z^3 + r$ a pour chaque r un seul point fixe réel q :

q est attractif si $|r| < \frac{4\sqrt{3}}{9}$, neutre si $|r| = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ et répulsif si $|r| > \frac{4\sqrt{3}}{9}$

La fonction inverse $P^{-1}(z)$ a seulement un point critique fini $c_1 = r$ et nous avons le lemme suivant:

Lemme 3.3.4 (voir [4])

$$Si \ c_1 \in A(\infty) \iff |r| > \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

Ainsi que le théorème suivant:

Théorème 3.3.4 (voir [4])

- 1) Si $|r| \leq \frac{4\sqrt{6}}{9}$ alors $J(P)$ est connexe.
- 2) L'ensemble $J(P)$ est une courbe de Jordan $\iff |r| < \frac{4\sqrt{3}}{9}$.
- 3) Si $|r| > \frac{4\sqrt{6}}{9} \implies J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_2(J(P)) = 0$.

Exemple 3.3.5

$$P(z) = -z^3 + \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (\text{ici, } r = \frac{4\sqrt{3}}{9}, \text{ cas } n^\circ = 1 \text{ du théorème 3.3.4})$$

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0.5774$: neutre, $z_2, z_3 = -0.2887 \pm 1.1180i$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.7), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Le seul point critique est $c = r = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, marqué par un plus(+).

L'ensemble des conséquents de c est $\{P^n(c); n = 1, 2, \dots\}$ convergent vers le point fixe réel z_1 .

En effet:

Posons les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par:

$$\begin{cases} u_n = P^{2n}(c) \\ v_n = P^{2n-1}(c) \end{cases}$$

On a: $c > P^2(c) > P^4(c) > \dots > P^{2n}(c) > \dots > z_1$, Donc la suite u_n est décroissante et minorée par z_1 ; d'où $u_n \longrightarrow z_1$.

On a: $P(c) < P^3(c) < P^5(c) < \dots < P^{2n+1}(c) < \dots < z_1$, Donc la suite u_n est croissante et majorée par z_1 ; d'où $v_n \longrightarrow z_1$.

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est connexe, mais n'est pas une courbe de Jordan d'après le théorème 3.3.4.

Huit cents milles (800 000) points, représentés en figure (3.3.7) donnent une approximation de $J(P)$.

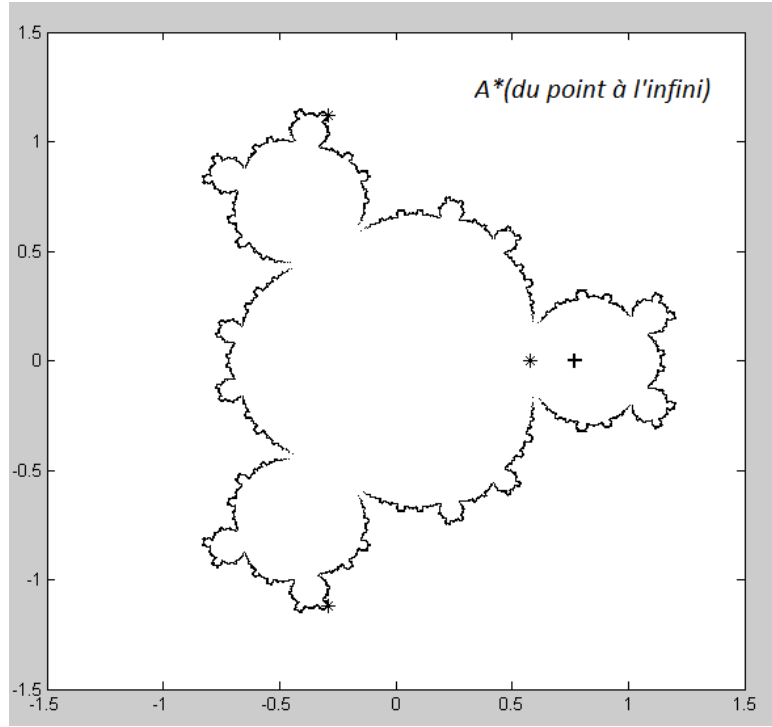


Figure 3.3.7 ($P(z) = -z^3 + \frac{4\sqrt{3}}{9}$)

La propriété de connexité (et de continuité) de la frontière $J(P)$ n'est pas visible sur la figure malgré le nombre relativement élevé de points qui composent $J(P)$.

Exemple 3.3.6

$$P(z) = -z^3 + \frac{6}{5} \text{ (ici, } r > \frac{4\sqrt{6}}{9}, \text{ cas } n^\circ = 3 \text{ du théorème 3.3.4)}$$

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0.7604$: répulsif, $z_2, z_3 = -0.3802 \pm 1.1973i$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) et des flèches ($\leftarrow$) dans la figure (3.3.8), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Le seul point critique est $c = r = \frac{6}{5}$, marqué par un plus (+) et par ($\Leftarrow$), ses itères convergent vers le point à l'infini, donc il n'y a pas d'autre cycle attractif (sauf le point à l'infini).

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_2(J(P)) = 0$, d'après le théorème 3.3.4.

Huit cents milles (800 000) points, représentés en figure 3.3.8 donnent une approximation de $J(P)$.

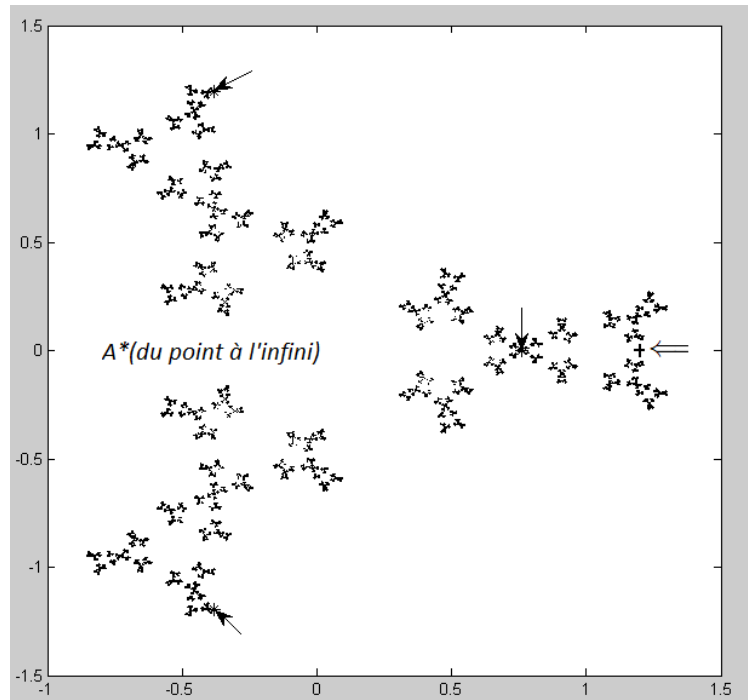


Figure 3.3.8 ($P(z) = -z^3 + \frac{6}{5}$)

Dans ce cas $\tilde{\mathbb{C}} = J(P) \cup A^*(\infty)$, autrement dit, la frontière $J(P)$ n'entoure aucun domaine.

3.3.5 Cinquième cas $P(z) = \pm z^3 + pz + r$, $p \neq 0$, $r \neq 0$

Dans les trois derniers cas, Broiln [4] a donné des lemmes pour bien localiser les points critiques « $D_1 \subset A(\infty)$ ou $D \cap A(\infty) = \emptyset$ » et à l'aide des résultats (théorème 2.4.3, théorème 2.4.5, théorème 2.4.6 théorème 2.4.7 et la proposition 2.1.2) annoncés dans le chapitre précédent, on a pu déterminer la structure de l'ensemble de Julia.

Cependant, dans ce cas n'allons pas énoncer les conditions détaillées dans lesquelles $D_1 \subset A(\infty)$ ou $D \cap A(\infty) = \emptyset$,

On va donner des résultats généralisés à savoir :

Le théorème suivant ([4]), nous donne une structure de l'ensemble de Julia sous des conditions très particulières.

Théorème 3.3.5 *Soit $P(z) = z^3 - pz + r$ un polynôme où $p > 0$ et r est réel alors:*

$$27r^2 > 4(p+1)^3 \implies J(P) \text{ est totalement discontinu et } \lambda_2(J(P)) = 0.$$

Démonstration. Par hypothèse, l'équation:

$$z^3 - (p+1)z + r = 0 \tag{3.3.3}$$

a le discriminant $\Delta = r^2 - \frac{4}{27}(p+1)^3$ positif.

Donc les formules de Cardan (paragraphe 3.1) nous assurent que l'équation (3.3.3) admet une seule racine réelle, notée q .

Avec les formules de Cardan, $q = \sqrt[3]{\frac{-r + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-r - \sqrt{\Delta}}{2}}$, il est clair que:

$$\text{Si } r > 0 \text{ alors } q < 0 \tag{3.3.4}$$

$$\text{Si } r < 0 \text{ alors } q > 0 \tag{3.3.5}$$

La fonction inverse $P^{-1}(z)$ admet deux points critiques, à savoir:

$$c_1, c_2 = \pm \frac{2p}{3} \sqrt{\frac{P}{3}} + r$$

Donc, on a les résultats suivants:

Si $r > 0$ alors $c_1, c_2 > 0$

Si $r < 0$ alors $c_1, c_2 < 0$

Pour la suite de la démonstration, on distinguera deux cas:

1^{ier} cas: supposons $r > 0$ à l'aide de (3.3.4): $P(z) > z$, de plus si z est réel positif alors $P^n(z) \longrightarrow +\infty$, ce qui nous assure que $P^n(c_1) \longrightarrow +\infty$ et $P^n(c_2) \longrightarrow +\infty$, autrement dit $c_1, c_2 \in A(\infty)$.

2^{ème} cas: supposons $r < 0$ à l'aide de (3.3.5): $P(z) < z$, de plus si z est réel négatif alors $P^n(z) \longrightarrow -\infty$, ce qui nous assure que $P^n(c_1) \longrightarrow -\infty$ et $P^n(c_2) \longrightarrow -\infty$, autrement dit $c_1, c_2 \in A(\infty)$.

On conclut que dans les deux cas $c_1, c_2 \in A(\infty)$, le résultat découle donc directement du théorème 2.4.7. ■

Exemple 3.3.7

$$P(z) = z^3 - \frac{62}{100}z + \frac{4}{5} \text{ (ici, } 27r^2 > 4(p+1)^3, \text{ cas du théorème 3.3.5)}$$

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = -1.4710$: répulsif, $z_2, z_3 = 0.7355 \pm 0.0537i$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.9), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Les points critiques sont $c_1 = 0.6121$ et $c_2 = 1.1758$, repérés par des (+).

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

À priori $J(P)$ est formé d'une infinité de composantes connexes, ce qui n'est pas vrai en effet

On a $c_1, c_2 \in A(\infty)$ donc les successeurs des points critiques convergent vers le point à l'infini, ce qui prouve le résultat.

Autrement dit, la frontière $J(P)$ n'entoure aucun domaine donc la sphère de Riemann est partagée en deux ensembles invariants.

$J(P)$ est totalement discontinu et $\lambda_2(J(P)) = 0$, d'après le théorème 3.3.5

Deux cents milles (200 000) points, représentés en figure 3.3.9, donnent une approximation de $J(P)$.

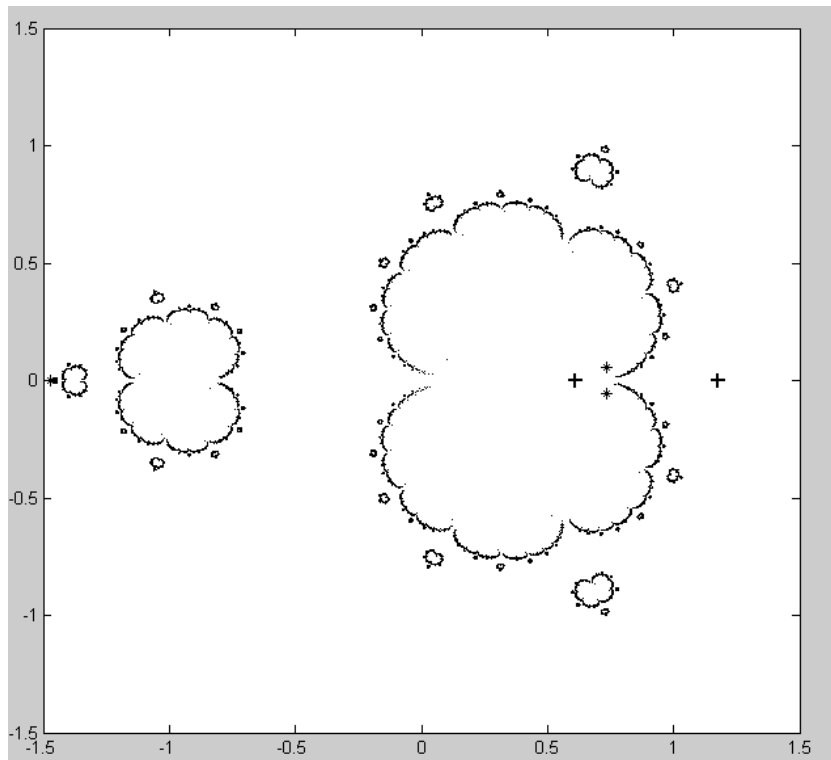


Figure 3.3.9 ($P(z) = z^3 - \frac{62}{100}z + \frac{4}{5}$)

La structure fractale est bien illustrée dans cette figure: on voit la même image à différentes échelles.

Malgré le nombre relativement élevé de points qui composent $J(P)$, on ne remarque pas l'appartenance des points fixes répulsifs $z_2, z_3 = 0.7355 \pm 0.0537i$ à $J(P)$.

Cette dernière remarque, nous montre la faiblesse de nos machines à approximer la frontière $J(P)$.

La plupart des résultats qui donnent des propriétés géométriques de l'ensemble de Julia, se basent sur les points critiques, ($D_1 \subset A(\infty)$ ou $D_1 \cap A(\infty) = \emptyset$), cependant il existe des polynômes tel que $D_1 \cap A(\infty) \neq \emptyset$ et $D_1 \cap \mathbb{C}A(\infty) \neq \emptyset$, à savoir les deux théorèmes suivants [4] établissent ce cas.

Théorème 3.3.6 *Soit P un polynôme de degré trois, et $P^{-1}(z)$ admet deux points critiques c_1 et c_2 ,*

$c_1 \in A(\infty)$ et $c_2 \in J(P) \implies J(P)$ est formé d'une infinité de points isolés.

Exemple 3.3.8

$P(z) = z^3 - \frac{27}{4}z + \frac{15}{4}$ (ici $c_1 \in J(P)$) et $c_2 \in A(\infty)$, cas du théorème 3.3.6)

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = -3$, $z_2 = \frac{5}{2}$, et $z_3 = \frac{1}{2}$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.10), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Les points critiques sont $c_1 = -3$, $c_2 = \frac{21}{2}$, marqués par des (+), les itères de c_2 convergent vers le point à l'infini.

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est totalement discontinu, d'après le théorème 3.3.6.

Cinquante milles (50 000) points, représentés en figure 3.3.10 donnent une approximation de $J(P)$.

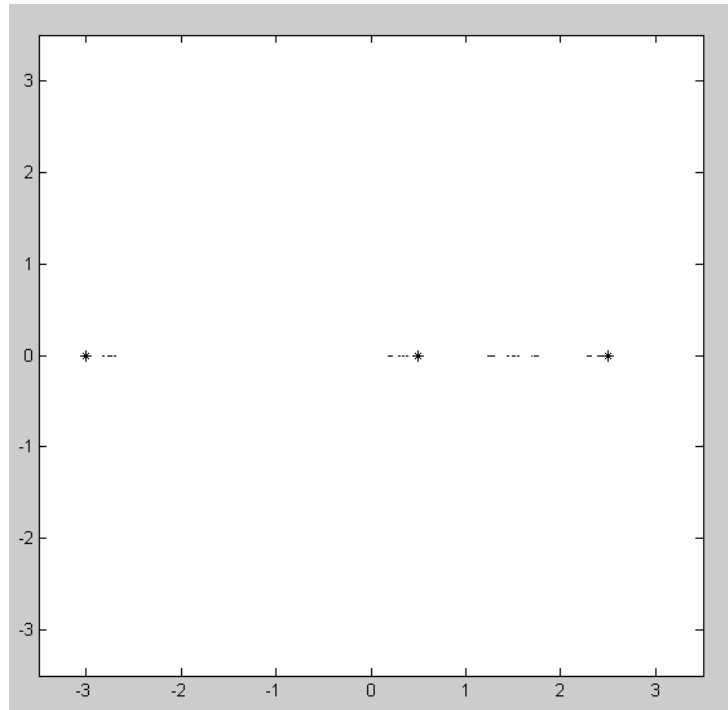


Figure 3.3.10 ($P(z) = z^3 - \frac{27}{4}z + \frac{15}{4}$)

Dans ce cas, $J(P)$ a toutes les propriétés d'un ensemble de Cantor.

Jusqu'ici, on a tracé les ensembles de Julia de polynômes cubiques à coefficients réels, mais notre programme, mis au point sous Matlab, marche aussi dans le cas où les coefficients sont complexes. L'exemple suivant illustre ce cas.

Exemple 3.3.9

Soit $P(z) = z^3 + \frac{12}{25}z + \frac{116}{125}i$

Points fixes

Les points fixes de ce polynôme sont $z_1 = 0.8i$, $z_2, z_3 = \pm 1 - 0.4000i$: répulsifs, représentés par des étoiles (*) dans la figure (3.3.11), ainsi que le point à l'infini (super-attractif).

Points critiques

Les points critiques sont $c_1 = 0.8i = z_1$, $c_2 = 1.056i$, marqués par un plus (+), les successeurs du point c_2 convergent vers un 2-cycle (attractif) formé des imaginaires purs $(1.043i)$ et $(0.2928i)$; ils sont repérés par des (Δ).

Structure de $J(P)$

D'après la Proposition 2.2.1, $J(P)$ est compact.

$J(P)$ est connexe, d'après le théorème 2.4.5.

Cinquante milles (50 000) points, représentés en figure 3.3.11, donnent une approximation de $J(P)$.

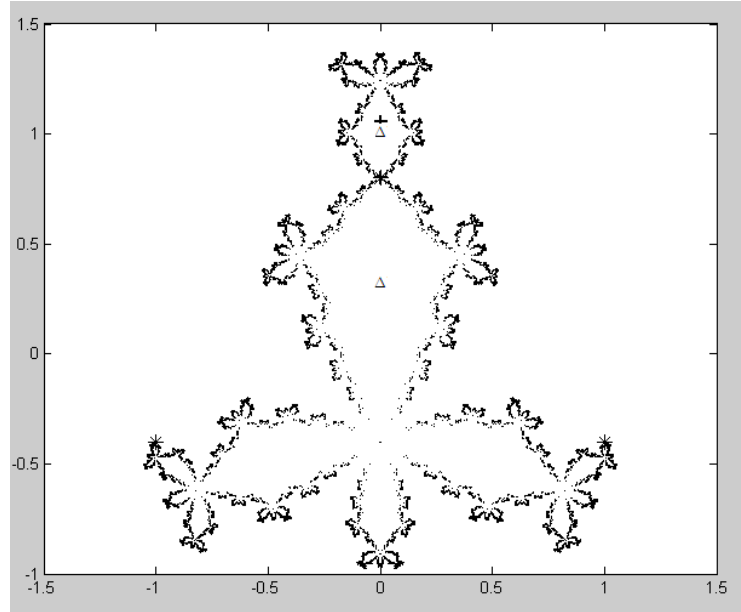


Figure 3.3.11 ($P(z) = z^3 + \frac{12}{25}z + \frac{116}{125}i$)

Commentaire:

Les exemples traités dans ce chapitre montrent que la frontière $J(P)$ peut présenter des formes géométriques très différentes (courbe de Jordan, discontinue, connexe, convexe, ... etc).

L'obtention des points de $J(P)$ nous permet, sachant qu'il constitue la frontière des bassins d'attractions des points (fixes et cycles) attractifs du polynôme étudié, de prévoir le

comportement itératif de P en choisissant convenablement le point initial z_0 de l'itération $z_{n+1} = P(z_n)$, $n = 0, 1, \dots$.

De plus, la connaissance de $(J(P) \cap \mathbb{R})$ permet l'étude de la dynamique de la fonction réelle associée à P .

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté des ensembles de Julia de polynômes cubiques à coefficients réels. On a énoncé, en nous basant sur la théorie des systèmes dynamiques holomorphes, les principales propriétés de ces ensembles.

Nous avons construit un algorithme de recherche des antécédents d'un point fixe répulsif (ou indifférent) par le polynôme P considéré. Ces antécédents approchent la frontière invariante des bassins d'attractions des points fixes (et des cycles) attractifs de P (lorsque ceux-ci existent), et cette frontière coïncide avec l'ensemble de Julia $J(P)$ de P .

Cette frontière nous permet de prévoir le comportement de la suite $(P^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout point z du plan complexe, et donc de déterminer tous les ensembles invariants de P .

Nous avons appliqué cet algorithme à différents exemples de polynômes cubiques, en traçant la frontière $J(P)$ correspondante à chacun d'eux.

Comme les théorèmes de ce mémoire ne s'appliquent qu'aux fractions rationnelles, la suite logique de ce travail réside dans l'étude du comportement itératif d'autres types de fonctions complexes telles que e^z , $\sin(z)$, $\text{Log}(z)$, etc.

Enfin, la théorie des systèmes dynamiques discrets, mais non holomorphes, présente assurément un éventail plus large de directions de recherche.

Appendice

Programme en Matlab d'obtention de $J(P)$, où P est de degré trois

L'algorithme suivant (sous Matlab) permet d'approximer l'ensemble $J(P)$, avec un nombre n de points.

function $Y = julia(a,b,p,q,n)$ % a,b,p,q sont les coefficients du polynôme P et n c'est le nombre des points qui constituent $J(P)$.

```
pt_fixe=roots([a b p-1 q]); % l'application roots cherche les racines d'un polynôme
for i=1:3
    if abs(3*a*((pt_fixe(i))^2)+b*2*(pt_fixe(i))+p) >= 1
        repulsif=pt_fixe(i);
    end
end
antecedent=roots([a b p q-repulsif]);
for i=1:3
    if abs(antecedent(i)-repulsif)<10^(-8)
        j=i;
    end
end
antecedent(j)=antecedent(3);
antecedent(3)=repulsif;
Y=[antecedent(1); antecedent(2)];
```

```
e=1;
i=0;
while length(Y)<=n
    k=length(Y);
    for j=e:k
        t=roots([a b p q-Y(j)]);      Y=[Y;t];
    end
    e=k+1;
    if length(Y)>=n,break;end
end
rac=roots([3*a 2*b p]);
suceur=[a*(rac(1))^3+b*(rac(1))^2+p*rac(1)+q a*(rac(2))^3+b*(rac(2))^2+p*rac(2)+q]
plot(real(Y),imag(Y),'k.',real(pt_fixe),imag(pt_fixe),'k*',real(suceur),imag(suceur),'k+')

```

Bibliographie

[1] **M. Audin,**

Analyse complexe (Licence de mathématiques). Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 1999.

[2] **P. Blanchard,**

Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere. Bulletin (New series) of the american mathematical society, Vol 11 N°1, 1984, 85-141

[3] **B. Branner and J.H. Hubbard,**

The iteration of cubic polynomials Part I: The global topology of parameter, 10-888286 Acta Mathematica 160. (1988), 143-206

[4] **H. Brolin,**

Invariant sets under iteration of rational functions, Ark. Mat., 6 (1965), 103-144.

[5] **L. Carleson and T. W. Gamelin,**

Complex Dynamics, (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] **R. L. Devaney,**

Complex Dynamical Systems: The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

- [7] **R. L. Devaney**,
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems , second edition , Addison-Weseley
, 1989 .
- [8] **A. Douady**,
Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbarki 35^e année, n° 599, 1982,
01-25
- [9] **A. Douady**,
"Julia Sets and the Mandelbrot Set." In The Beauty of Fractals: Images of Complex
Dynamical Systems (Ed. H.-O. Peitgen and D. H. Richter). Berlin: Springer-Verlag,
p. 161, 1986.
- [10] **A. Douady, J.H. Hubbard**,
On the dynamics of polynomial-like mappings, Annales scientifiques de l'E.N.S.
4^e série, tome 18, n° 2 (1985), p. 287-343.
- [11] **P. Fatou**,
Sur les équations fonctionnelles, B.S.M.F 47 (1919) et 48 (1920).
- [12] **A. Fortin**
Analyse numérique pour ingénieurs, presses internationales polytechnique, Montreal,
Canada, 1996.
- [13] **J. Guckenheimer, P. Holmes**,
Nonlinear oscillations, dynamical systems, and biforcations of vector elds. Springer
Verlag, Berlin, 1983.
- [14] **R. Holmgren**,
A First Course in Discrete Dynamical Systems, 2nd ed. New York: Springer-Verlag,
1996.

[15] **G. Julia,**

Mémoire sur l'itération de fonctions rationnelles, JORNALE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES 1918.

[16] **P. Montel,**

Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[17] **Murray, R. Spiegel,**

Theory and Problems of Complex Variables, Copyright McGraw-Hill Inc, New York, 1973

[18] **G. Valiron,**

Familles normales et quasi-normales de fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, 1929.