Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Par

M^{elle} Djabri yousra

Thème

Sur la théorie du point fixe positif d'une contraction stricte d'ensembles dans un espace de Banach ordonné et applications

devant le jury composé de :

Mr.	A. BERBOUCHA	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
M^{me}	S.ALLILI-ZAHAR	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Examinatrice.
M^{me}	K. KHELOUFI.	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Promotrice.

Juin 2013

Remerciements

Je remercie DIEU tout puissant de m'avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans mon chemin les bonnes personnes et m'a confié aux bonnes mains.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Madame ***K.Kheloufi*** *ma promotrice pour l'intéressant sujet qu'elle m'a proposé. Ainsi que pour son aide sa patience ses conseils et ses encouragements sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.* Je *lui suis également reconnaissante pour la connaissance qu'elle ma accordée.* Il *m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

J'adresse ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur ***A. Berboucha****, pour m' avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.*

Je tiens à remercier également Madame ***S.Allili-Zahar*** *qui a accepté d'examiner cet humble travail.*

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, frère et soeur, pour leur soutien et leur confiance en moi, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin pour achever ce travail.

.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mon cher frère: houssem et ma cher soeur: naila.

Tout mes enseignants.

Mes très chers grand-parents.

Ma chere grande famille: mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Toutes mes amies.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

YOUSRA

Table des matières

Notations et conventions

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire:

- E étant un espace de Banach et Ω un sous ensemble borné de E. On notera par:

✓ $\|.\|$ sa norme.

✓ $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω.

✓ $\partial\Omega$ la frontière de Ω.

✓ $B(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

✓ $\overline{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

✓ $diam(A)$ diamètre de l'ensemble A.

✓ $dim(A)$ dimension de l'ensemble A.

✓ $\alpha(.)$ la mesure de non-compacité de Kuratowski.

✓ $conv(A)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

✓ $\overline{conv}(A)$ l'enveloppe convexe fermé de l'ensemble A.

✓ I_d l'application identique.

✓ θ le zéro de l'espace E.

✓ $C^k(I, J)$: l'ensemble des fonctions $f : I \to J$ k fois continûment différentiables sur I.

✓ $C(I, J)$: l'espace des fonctions continue sur I à valeurs dans J.

✓ $L^p([a, b])$: l'espace des fonctions u mesurables sur $[a, b]$ et vérifiant $\int\limits_a^b |u(t)|^p \, dt < \infty$.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de lever le voile sur une petite partie de la théorie du point fixe. Plus précisément, on présente quelques théorèmes du point fixe positif pour une certaine classe d'applications (qui sera définie ultérieurement). Ces théorèmes répondent aux questions d'existence et de multiplicité de solutions de quelques problèmes en analyse.

Avant d'aborder cette étude, on a jugé utile de présenter la théorie du point fixe d'une manière générale.

C'est quoi la théorie du point fixe?

C'est une théorie qui trouve ses origines dans des problèmes mathématiques d'analyse et d'algèbre classiques. La plupart des problèmes concrets de la physique, chimie, technologie, biologie, médecine, économie et des sciences sociales, etc. peuvent être ramenés à la résolution d'équations de type

$$f(x) = y_0. \tag{0.0.1}$$

Le cas classique correspond au cas où f est une fonction linéaire ou un polynôme. L'inconnue x peut être un nombre réel ou un nombre complexe; ou pour les systèmes d'équations un ensemble $(x_1, ..., x_n)$ de tels nombres.

Ces problèmes deviennent plus sophistiqués lorsque (0.0.1) est une équation fonctionnelle (équation différentielle ordinaire, équation intégrale, équation aux dérivées partielles ...). Dans ce cas, l'inconnue x est une fonction ($x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $x : D \longrightarrow \mathbb{C}$) définie sur un certain domaine D. Finalement, l'équation (0.0.1) peut être plus compliquée, lorsque l'inconnue est un opérateur agissant entre deux espaces abstraits.

La théorie du point fixe répond en premier lieu à la question suivante:

L'équation (0.0.1) admet-elle une solution?

Si la réponse est affirmative, on passe à d'autres questions: comment la solution peut-elle être construite ou approchée? Combien de solutions y a-t-il ? Quelle est la structure de l'ensemble de toutes les solutions?

Dans ce mémoire, on s'intéresse notamment à l'étude d'existence de points fixes positifs d'une contraction stricte d'ensembles en prolongeant le concept de l'indice du point fixe défini pour les applications complètement continues à des classes d'applications plus larges (les contractions strictes d'ensembles et les applications condensantes).

Une contraction stricte d'ensemble est une application telle que l'image de tout ensemble borné est en un certain sens plus compacte que l'ensemble lui-même. Le degré de non-compacité est mesuré à l'aide d'une fonction appelée mesure de non-compacité.

Le premier qui a considéré la mesure de non-compacité d'un sous-ensemble A d'un espace métrique est K. Kuratowski en 1930. Dans les années cinquante, G. Darbo, A. Furi, M.A. Krasnosel'skii et autres ont appliqué différentes mesures de non-compacité dans les théories du point fixe, des applications linéaires et des équations différentielles et intégrales.

Ce mémoire comprend trois chapitres:

Le premier chapitre contient un ensemble de définitions et de résultats qui nous seront indispensables à la compréhension de la suite de cette étude. Ces résultats concernent essentiellement les notions suivantes: la mesure de non-compacité de Kuratowski, les contractions strictes d'ensembles, les applications condensantes et les cônes.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe sur les cônes pour les contractions strictes d'ensembles qui entraînent l'existence ou la multiplicité d'un point fixe positif. La première section de ce chapitre est consacrée à la définition de l'indice du point fixe pour une contraction stricte d'ensembles. Dans la deuxième section, nous rassemblons quelques lemmes fondamentaux utiles pour la suite de ce travail, puis nous donnons quelques développements récents du célèbre théorème de Krasnosel'skii, établi en 1960 et développé par la suite par beaucoup d'auteurs, on peut citer les travaux de Guo ([14],1988), Avery et Anderson ([3], 2002), Avery, Anderson et Krueger ([4], 2006). Ces récents développements sont dû à Sun ([26], 1986), Meiqiang, Zhang et Weigao ([20], 2010) pour les contractions strictes d'ensembles. Dans la troisième section, nous nous intéressons à l'existence des points fixes multiples d'une contraction stricte d'ensembles définie sur un cône dans un espace de Banach ordonné. Plus précisément, nous présentons des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour l'existence de deux points fixes positifs.

Dans le troisième chapitre, nous étudions deux équations différentielles ordinaires de différents ordres, l'une associée à une condition initiale et l'autre à des conditions aux limites, dans un espace de Banach ordonné.

CHAPITRE 1 Préliminaires

1.1 La mesure de non-compacité

1.1.1 Notion générale de la mesure de non-compacité

Définition 1.1.1 *[27] Soit E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles bornés de E. Une fonction ϕ définie de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty[$ est appelée* ***mesure de non-compacité*** *(MNC) sur E si elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. $\phi(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ *est relativement compacte.*

2. $\phi(A) = \phi\left(\overline{A}\right), \forall A \in \mathcal{A}$.

3. $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}, \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.1 *La fonction $\phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ telle que:*

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ est relativement compact} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure de non-compacité. En effet,

1. $\phi(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ *est relativement compacte (évidente).*

2. $\phi(A) = \phi\left(\overline{A}\right)$, *car A est relativement compact $\Longleftrightarrow \overline{A}$ est compact.*

3. $$(A_1 \cup A_2) \text{ relativement compact} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1 \text{ est relativement compact;} \\ \text{et} \\ A_2 \text{ est relativement compact.} \end{cases}$$

Alors, dans tous les cas on trouve $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$.

Exemple 1.1.2 *Soit $E = \mathbb{R}$, posons*

$$\phi(A) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in A} |x| & si \;\; A \text{ est borné;} \\ \infty & si \;\; A \text{ n'est pas borné,} \end{cases}$$

la fonction ϕ ne vérifie pas la troisième propriété. En effet, soient A_1 et A_2 deux ensembles bornés de $\mathbb{R}$ avec $A_1 \subset A_2$. D'une part on a

$$\phi(A_1 \cup A_2) = \phi(A_2). \tag{1.1.1}$$

D'autre part on a $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow \inf\limits_{x \in A_2} |x| \leq \inf\limits_{x \in A_1} |x|$.

Par suite, on aura

$$\max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\} = \phi(A_1). \tag{1.1.2}$$

D'où, ϕ n'est pas une mesure de non-compacité.

1.1.2 La mesure de non-compacité de Kuratowski

Définition 1.1.2 (la mesure de non-compacité de Kuratowski [9],[27]) *Soient E un espace de Banach, $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles bornés de E.* ***La mesure de-non compacité au sens de Kuratowski*** *est l'application $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par:*

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \begin{array}{c} d > 0 \text{ tel que } A \text{ admet un recouvrement finie d'ensembles} \\ \text{de diamètre inférieur ou égal à } d \text{ .} \end{array} \right\},$$

c'est à dire

$$\alpha(A) = \inf \left\{ d > 0 \text{ tel que } \exists\, A_1, A_2, ..., A_n \subset E;\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\; diam(A_i) \leq d;\; \forall i = 1, ..., n \right\},$$

où $\quad diam(A_i) = \sup \|x - y\|, \forall x, y \in A_i$ *et* $diam(\emptyset) = 0$.

Remarque 1.1.1 *1. La définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski est significative non seulement pour les espace de Banach mais également pour les espaces métriques arbitraires.*

2. $0 \leq \alpha(A) \leq diam(A) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

3. A *est fini* $\Longrightarrow \alpha(A) = 0$.

Définition 1.1.3 (Distance de Hausdorff) *La distance de Hausdorff entre deux ensembles non-vide bornés A et B est définie par:*

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|, \sup_{x\in B}\inf_{y\in A}\|x-y\|\right\}.$$

Nototons que: $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$ *et* $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$

Propriétés élémentaires de la mesure de non-compacité de Kuratowski

Proposition 1.1.1 *Soient E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille des ensembles bornés de E. Alors, la fonction α a les propriétés suivantes:*

1. ***Régularité:*** $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ *est compact.*
2. ***Monotonie:*** $A \subset B \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$, *i.e* α *est croissante.*
3. ***Invariance par passage à la fermeture:*** $\alpha(A) = \alpha\left(\overline{A}\right).$
4. ***Semi-additivité:*** $\alpha(A\cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}.$
5. $\alpha(A\cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}.$
6. ***Semi-homogénéité:*** $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\,\alpha(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}.$
7. ***Semi-additivité algébrique:*** $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B), \forall A, B \in \mathcal{A}.$
8. ***Invariance par translation:*** $\alpha(A+x) = \alpha(A), \forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in E.$
9. ***Invariance par passage à l'enveloppe convexe:*** $\alpha(A) = \alpha(convA), \forall A \in \mathcal{A}.$
10. $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq 2\mathcal{H}(A,B).$

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{A}$.

1. Comme E est un espace de Banach, alors

$$\begin{aligned}\overline{A}\text{ est compact} &\Longleftrightarrow A\text{ est totalement borné (voir la proposition 2 dans l'annexe.)}\\ &\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B_i,\ i=1,...,n \text{ tel que } A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_i \text{ et } diam(B_i)\leq\varepsilon\ \ \forall i\\ &\Longleftrightarrow \alpha(A)=0.\end{aligned}$$

2. On a $A \subset B$. Donc tout recouvrement de B est un recouvrement de A.

   Par conséquent,
$$\alpha(A) \leq \alpha(B).$$

3. Montrons que $\alpha(A) = \alpha\left(\overline{A}\right)$. D'une part, on a
$$A \subset \overline{A} \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha\left(\overline{A}\right).$$

   D'autre part, par définition de $\alpha(A)$; $\forall \varepsilon > 0, \exists \{A_i\}_{i=1}^n$ tel que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \ \forall i = 1, ..., n$. Comme $\overline{A} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et $diam\left(\overline{A_i}\right) = diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \ \forall i = 1...n$, on obtient
$$\alpha\left(\overline{A}\right) \leq \alpha(A).$$

4. Grâce à la monotonie de α, on a d'une part,
$$A \subset (A \cup B) \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A \cup B),$$

   et d'autre part,
$$B \subset (A \cup B) \Longrightarrow \alpha(B) \leq \alpha(A \cup B).$$

   Alors,
$$\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leq \alpha(A \cup B). \tag{1.1.3}$$

   Réciproquement, posons $\eta = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$. Par définition de $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$, on a
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \{A_i\}_{i=1}^n \text{ tel que } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \leq \eta + \varepsilon \ \forall i = \overline{1, n}$$

   et
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \{B_j\}_{j=1}^m \text{ tel que } B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_j \text{ et } diam(B_j) \leq \alpha(B) + \varepsilon \leq \eta + \varepsilon \ \forall i = \overline{1, m}$$

   Par suite, on a $A \cup B \subseteq \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j\right)$, ce qui nous donne
$$\alpha(A \cup B) \leq \eta + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

   Donc,
$$\alpha(A \cup B) \leq \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}. \tag{1.1.4}$$

   De (1.1.3) et (1.1.4) on aura le résultat.

5. Grâce à la monotonie de α, on a d'une part, $(A \cap B) \subset A \Longrightarrow \alpha(A \cap B) \leq \alpha(A)$ et d'autre part, $(A \cap B) \subset B \Longrightarrow \alpha(A \cap B) \leq \alpha(B)$. Donc

$$\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}.$$

6. i) $\alpha(\lambda A) \leq |\lambda| \alpha(A) \, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. En effet; supposons que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Alors $\lambda A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \lambda A_i$ et

$$\begin{aligned} diam(\lambda A_i) &= \sup\{|\lambda| \; \|x-y\| \text{ avec } x, y \in A_i \; \forall i = 1, ..., m\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|x-y\| \text{ avec } x, y \in A_i \; \forall i = 1, ..., m\} \\ &= |\lambda| diam(A_i) \;\; \forall i = 1, ..., m \end{aligned}$$

ii) $|\lambda| \alpha(A) \leq \alpha(\lambda A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. En effet; d'après la monotonie de α on a

$$\begin{aligned} \left(\lambda^{-1}\lambda A = A\right) &\Longrightarrow A \subset \lambda^{-1}\lambda A \\ &\Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha\left(\lambda^{-1}\lambda A\right) \\ &\Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha\left(\lambda^{-1}\lambda A\right) \leq |\lambda|^{-1}\alpha(\lambda A). \end{aligned}$$

De i) et ii) on obtient le résultat.

7. On a par définition de $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$: $\exists \{A_i\}_{i=1}^{n}$tel que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon$, $\forall i = 1...n$, $\exists \{B_j\}_{j=1}^{m}$tel que $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ $diam(B_i) \leq \alpha(B) + \varepsilon \; \forall j = 1...m$ respectivement. Comme les ensembles $\{A_i + B_j\}$ recouvrent l'ensemble $A + B$, et

$$diam(A_i + B_j) \leq diam(A_i) + diam(B_j).$$

Alors,

$$diam(A_i + B_j) \leq \alpha(A) + \alpha(B) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient, $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

8. D'après la propriété de semi-additivité algébrique de α pour $B = \{x\}$ on obtient, $\alpha(A + \{x\}) \leq \alpha(A) + \alpha(\{x\})$; or la propriété de régularité entraîne que $\alpha(\{x\}) = 0$, (car l'ensemble $\{x\}$ est fini); d'où

$$\alpha(A + \{x\}) \leq \alpha(A). \qquad (1.1.5)$$

D'autre part on a $A = (A + \{x\}) - \{x\}$, donc

$$\begin{aligned}\alpha(A) &= \alpha(A + \{x\} - \{x\}) \\ &\leq \alpha(\{x\} + A) + \alpha(-\{x\}) \\ &= \alpha(\{x\} + A) - \alpha(\{x\}) \\ &= \alpha(\{x\} + A),\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha(A + \{x\}) \geq \alpha(A) \tag{1.1.6}$$

de (1.1.5) et (1.1.6) on aura l'égalité.

Par abut d'écriture, on écrit $\alpha(A + x)$ au lieu de $\alpha(A + \{x\})$.

9. *a*) $A \subset conv(A) \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(conv(A))$

   b) On a par définition de $\alpha(A)$: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\{A_i\}_{i=1}^{n}$, tel que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon\ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$

   Puisque $diam(A) = diam(conv(A))$, on peut supposer que A_i est convexe $\forall i = 1, 2, ..., n.$

   Posons $\Lambda = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) : \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ et $B(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$

$$\begin{aligned}\alpha(B(\lambda)) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha(A_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i diam(A_i) \\ &\leq (\alpha(A) + \varepsilon) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=1} \\ &\leq \alpha(A) + \varepsilon.\end{aligned}$$

   Montrons que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda)$ est convexe

   Soit $z = tx + (1 - t)y$ et $\eta = t\lambda + (1 - t)\mu$. Il suffit de montrer que si $0 \leq t < 1$, $x \in B(\lambda)$ et $y \in B(\mu)$, alors $z \in B(\eta)$. En effet, soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i y_i$ où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Lambda$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \Lambda$ et $x_i, y_i \in A_i\ \forall i = 1, 2, ..., n.$

   On suppose

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{t\lambda_i}{\eta_i}, & \eta_i > 0; \\ 0, & \eta_i = 0, \end{cases}$$

et $z_i = \rho_i x_i + (1-\rho_i) y_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i z_i = \begin{cases} 0, & \eta_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta_i - t\lambda_i) y_i = tx + (1-t) y, & \eta_i > 0. \end{cases}$$

Donc $z = \sum_{i=1}^{n} \eta_i z_i$, par conséquent $z \in B(\eta)$.

Maintenant, on peut montrer le résultat.

Puisque $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda)$ et l'ensemble $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda)$ est convexe, donc

$$conv(A) \subset conv\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda) \Longrightarrow \alpha(conv(A)) \leq \alpha\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda)\right).$$

Comme l'ensemble Λ est compact, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de points $\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)}$ dans Λ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a

$$\min\left\{\left\|\lambda - \lambda^{(i)}\right\| : i = 1, ..., n\right\} < \frac{\varepsilon}{M}$$

où $M = \sup_{x\in B_i} \|x\| < \infty$ donc, si $\forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda)$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors $\exists j = 1, ..., m$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \lambda_i^j\right| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Si on pose $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j x_i$, alors $\|x - \overline{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \lambda_i^j\right| \|x_i\| < \varepsilon$ et on a aussi

$$conv(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B\left(\lambda^{(i)}\right) + \varepsilon\overline{B(0,1)}\right),$$

ce qui implique que

$$\alpha(conv(A)) \leq \max_i \left\{\alpha\left(B\left(\lambda^{(i)}\right)\right) + \alpha\left(\varepsilon\overline{B(0,1)}\right)\right\} \leq \alpha(A) + \varepsilon + 2\varepsilon.$$

Et comme ε est arbitraire, on obtient $\alpha(conv(A)) \leq \alpha(A)$.

10. On a par définition de $\alpha(A)$: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists \{A_i\}_{i=1}^{n}$, tel que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$.

Posons $\eta = \mathcal{H}(A,B) + \varepsilon$, $B_i = \{y \in B \text{ tel que } \exists x \in A_i,\ d(x,y) < \eta\}\ \forall i = 1, ..., n$. Comme $\mathcal{H}(A,B) < \eta$, on a $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Alors

$$diam(B_i) \leq 2\eta + diam(A_i) < 2\mathcal{H}(A,B) + \alpha(A) + 3\varepsilon \ \forall i = 1, ..., n$$

On fait tendre ε vers 0 on obtient $\alpha(B) \leq 2\mathcal{H}(A,B) + \alpha(A)$.

De même on a $\alpha(A) \leq 2\mathcal{H}(A,B) + \alpha(B)$. Par conséquent, on aura

$$|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq 2\mathcal{H}(A,B).$$

■

Remarque 1.1.2 (i) *Les propriétés de semi-homogénéité et semi-additivité algébrique nous donnent que la MNC de Kuratowski α est une semi-norme sur E.*

(ii) *Ce n'est pas facile de déterminer la valeur explicite de $\alpha(A)$ pour un ensemble borné A d'un espace de Banach.*

Exemple 1.1.3 *Soit $B(0,1)$ la boule unité d'un espace de Banach E de dimension finie. Alors*

$$\alpha(B(0,1)) = 0.$$

En effet, $\overline{B(0,1)}$ est compacte $\Longleftrightarrow \dim E < \infty$.

Plus généralement, $\alpha(B(x_0,r)) = 0$, où $B(x_0,r)$ est une boule de centre x_0 et de rayon r dans l'espace E, car $\overline{B(x_0,r)}$ est un compacte de l'espace de dimension finie E.

Proposition 1.1.2 *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $B(0,1)$ une boule unité de E. Alors*

$$\alpha(B(0,1)) = 2.$$

Démonstration. Il est clair que $diam(B(0,1)) = 2$, alors $\alpha(B(0,1)) \leq 2$.

Si $\alpha(B(0,1)) < 2$, donc il existe $A_1, A_2, ..., A_n$ tels que $diam(A_k) < 2$ pour $k = 1, ..., n$ et $B(0,1) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Posons $B_k(0,1) = B(0,1) \cap E_n$ et $B_k = A_k \cap E_n$. Alors, on a $B_k(0,1) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ et $diam(B_k) < 2\ \forall k = 1, ..., n$. D'autre part, le théorème des antipodes (voir l'annexe) assure qu'il existe au moins un des ensembles B_k qui vérifie $diam(B_k) \geq diam(B_k(0,1)) = 2$, ce qui est une contradiction. D'où $\alpha(B(0,1)) = 2$.

Plus généralement, $B_k(x_0,r) = 2r$. ■

1.2 Les contractions strictes d'ensembles et les applications condensantes

Soient E et F deux espaces de Banach, A un ouvert de E.

Définition 1.2.1 *Soit $f : A \subseteq E \longrightarrow F$ une application continue*

i. *f est dite **compacte** si $f(A)$ est relativement compacte.*

ii. *f est dite **complètement continue** si l'image de tout bornée de A est relativement compacte.*

Remarque 1.2.1 (Relation entre compacte et complétement continue) *Toute application compacte est complètement continue. Si A est bornée, la réciproque est vraie.*

Définition 1.2.2 (k-contraction d'ensembles [13]) *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e. f transforme les bornés de E en des bornés de F).*

1. *On dit que f est une **k-contraction d'ensembles** s'il existe $k \geq 0$, tel que*

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \ \forall A \text{ borné de } E. \tag{1.2.1}$$

2. *f est appelée **k-contraction stricte d'ensembles** (ou **contraction stricte d'ensembles**) si $0 \leq k < 1$.*

3. *f est dite **condensante** si*

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A), \ \forall A \text{ borné non relativement compact } (\alpha(A) > 0).$$

Remarque 1.2.2 *Il est évident que toute application f complètement continue, est une k-contraction stricte d'ensembles et toute k-contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a:*

1. *f est condensante $\Longrightarrow$ f est une 1-contraction d'ensembles;*

2. *f est complètement continue $\Longleftrightarrow$ f est une 0-contraction d'ensembles.*

Exemple 1.2.1 *Soit X un espace normé réel et $L : X \to X$ une application linéaire bornée. Alors, L est une $\|L\|$-contraction d'ensembles.*

Exemple 1.2.2 *Soit X un espace normé réel et $T : D \subset X \to X$ une application lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l. Alors, T est une l-contraction d'ensembles.*

1.2.1 Propriétés des contractions d'ensembles

Proposition 1.2.1 *[25] Soit F_i $(i = 1, 2, 3)$ trois espaces métriques et supposons que:*

$T_1 : F_1 \longrightarrow F_2$, et $T_2 : F_2 \longrightarrow F_3$ sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles. Alors,

$$T_2 \circ T_1 : F_1 \longrightarrow F_3 \text{ est une } k_1 k_2 - \text{contraction d'ensembles.}$$

Démonstration. On a $T_1 : F_1 \longrightarrow F_2$, $T_2 : F_2 \longrightarrow F_3$ sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles, donc T_1 est continue, bornée et $\alpha(T_1(A)) \leq k_1 \alpha(A)$; $\forall$ A un ouvert borné de F_1 et T_2 est continue, bornée et $\alpha(T_2(B)) \leq k_2 \alpha(B)$;$\forall$ B un ouvert borné de F_2.

Donc, $T_2 \circ T_1 : F_1 \longrightarrow F_3$ est continue, bornée comme composée de deux applications continues et bornées. D'autre part, pour tout A borné de F_1 on a:

$$\alpha((T_2 \circ T_1)(A)) = \alpha(T_2(T_1(A))) \leq k_2 k_1 \alpha(A).$$

Alors, $\alpha((T_2 \circ T_1)(A)) \leq k_1 k_2 \alpha(A)$, $\forall$ A un ouvert borné de F_1. ■

Proposition 1.2.2 *Soit E un espace métrique et F un espace de Banach.*

Si $T_1 : E \longrightarrow F$ et $T_2 : E \longrightarrow F$ sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles.

Alors,

$$T_1 + T_2 : E \longrightarrow F \text{ est une}(k_1 + k_2)\text{-contraction d'ensembles.}$$

Démonstration. Montrons que l'application $T_1 + T_2 : E \longrightarrow F$ est une $(k_1 + k_2)$-contraction d'ensembles.

On a $T_1, T_2 : E \longrightarrow F$ sont respectivement k_1, k_2-contraction d'ensembles, donc T_1et T_2 sont continues, bornées et

$$\begin{aligned} \alpha(T_1(A)) &\leq k_1 \alpha(A) ; \ \forall A \text{ un ouvert borné de } E \\ \text{et } \alpha(T_2(A)) &\leq k_2 \alpha(A) ; \ \forall A \text{ un ouvert borné de } E. \end{aligned}$$

Donc, $T_1 + T_2 : E \longrightarrow F$ est continue, bornée comme somme de deux applications continues et bornées. Grâce à la semi-additivité algébrique de α, on a

$$\begin{aligned} \alpha((T_1 + T_2)(A)) &\leq \alpha(T_1(A)) + \alpha(T_2(A)) ; \\ &\leq k_1 \alpha(A) + k_1 \alpha(A) \\ &\leq (k_1 + k_1) \alpha(A), \ \forall A \text{ un ouvert borné de } E. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 1.2.1 *Soit A et B deux sous ensembles fermés d'un espace métrique E. Supposons que $T : A \subset E \longrightarrow E$ et $T' : B \subset E \longrightarrow E$ sont deux k-contractions d'ensembles telles que $T = T'$ sur $A \cap B$.*

Soit l'application $T'' : A \cup B \subset E \longrightarrow E$ définie par:

$$T''(x) = \begin{cases} T(x) & si \;\; x \in A; \\ T'(x) & si \;\; x \in B. \end{cases}$$

Alors, T'' est une k-contraction d'ensembles.

Démonstration. On a T est une application continue bornée sur A vérifiant

$$\alpha\left(T\left(\Omega\right)\right) \leq k\alpha\left(\Omega\right), \;\; \forall\Omega \text{ un ouvert borné de } A. \tag{1.2.2}$$

de même pour, T' on a T' est une application continue bornée sur B vérifiant

$$\alpha\left(T'\left(\Omega\right)\right) \leq k\alpha\left(\Omega\right), \;\; \forall\Omega \text{ un ouvert borné de } B, \tag{1.2.3}$$

d'où, T'' est continue et bornée sur $A \cup B$.

De plus, pour tout Ω borné de $A \cup B$ on a :

$$\alpha\left(T''(\Omega)\right) = \begin{cases} \alpha\left(T(\Omega)\right) & \text{si } \Omega \subset A; \\ \alpha\left(T'(\Omega)\right) & \text{si } \;\Omega \subset B. \end{cases}$$

Donc, d'après la semi-additivité de α on a

$$\begin{aligned} \alpha\left(T''\left(\Omega\right)\right) &\leq \max\left\{\alpha\left(T(\Omega)\right), \alpha\left(T'(\Omega)\right)\right\} \\ &\leq k\max\left\{\alpha\left(\Omega\right), \alpha\left(\Omega\right)\right\} \\ &\leq k\alpha(\Omega). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 1.2.3 *Soit F un espace de Banach, D un sous ensemble de F, $T : D \subset F \longrightarrow F$ une k-contraction d'ensembles et $\lambda : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que* $\sup\left\{\lambda\left(x\right) : x \in D\right\} = l < \infty$. *On définit $T' : D \subset F \longrightarrow F$ par*

$$T'\left(x\right) = \lambda\left(x\right) T\left(x\right), \;\; \forall x \in D.$$

Alors, T' est une kl-contraction d'ensembles.

Démonstration. T' est continue et bornée comme produit de deux applications continues et bornées. Soit Ω un sous ensemble borné de D. Par suite, les propriétés $(2), (9)$ et (6) de la MNC α (proposition 1.1.1) entraînent que

$$\begin{aligned}
T'(\Omega) &\subseteq conv\left(\{\theta\} \cup lT(\Omega)\right). \\
\alpha(T'(\Omega)) &\leq \alpha(conv\left(\{\theta\} \cup lT(\Omega)\right)) \\
&= \alpha(\{\theta\} \cup lT(\Omega)) \\
&\leq \max\{\alpha(\{\theta\}), \alpha(lT(\Omega))\} \\
&\leq \max\{\alpha(\{\theta\}), l\alpha(T(\Omega))\} \\
&\leq kl\alpha(\Omega)
\end{aligned}$$

D'où, T' est une kl-contraction d'ensembles. ■

Lemme 1.2.2 *[15] Soit D un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X. Si $f : X \to X$ est une application de la forme $L+T$, où L est une application linéaire et T est complètement continue.*

Alors,

$$\alpha\left(f\left(D\right)\right) = \alpha\left[f(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right)\right].$$

Démonstration. Puisque $D \subset \overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right)$, la 2euxième propriété de la proposition 1.1.1 entraîne que $\alpha\left(f\left(D\right)\right) \leq \alpha\left[f(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))\right]$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
f(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right) &\subset L(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right) + T(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right) \\
\alpha[f(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))] &\leq \alpha[L(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right) + T(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))] \\
&\leq \alpha[L(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))] + \underbrace{\alpha[T(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))]}_{=0} \\
&\leq \alpha[L(\overline{conv}\left(D \cup \{\theta\}\right))] \\
&= \alpha\left[\overline{conv}\left(L(D \cup \{\theta\})\right)\right] \\
&= \alpha\left[\overline{conv}\left(L(D) \cup L(\{\theta\})\right)\right] \\
&= \alpha[L(D)] \\
&= \alpha[(f-T)(D)] \\
&\leq \alpha[f(D)] + \alpha[(-T)(D)] \\
&= \alpha[f(D)].
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\alpha[f(\overline{conv}\,(D\cup\{\theta\}))] = \alpha\,(f(D))\,.$ ■

Exemple 1.2.3 *Un exemple important donné par une application $F+G$, où F est une k contraction d'ensembles et G est complètement continue alors $F+G$ est une k contraction d'ensembles. Soit par exemple $u \in C\,(J,\mathbb{R})$ solution de l'équation*

$$u\,(t) = \varphi\,(t, u\,(t)) + \int_0^t \psi\,(t,s,u\,(s))\,ds \quad pour\ t \in J = [0,a]\,,$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues. Posons

$$G\,(u(t)) = \int_0^t \psi\,(t,s,u\,(s))\,ds$$

et

$$F(u(t)) = \varphi\,(t, u\,(t))$$

G est continue grâce à la continuité de l'intégrale et de la fonction ψ, et pour toute partie bornée $\Omega \subset C\,(J,\mathbb{R})$, $G(\Omega)$ est relativement compact alors, G est complètement continue. D'où, G est une 0-contraction d'ensembles. Or F est une k-contraction d'ensembles. En effet, puisque φ est telle que

$$|\varphi\,(t,u) - \varphi\,(t,v)| \leq k\,|u-v|\,,\ \forall t \in J\ et\ u,v \in \mathbb{R},$$

alors

$$|F\,(u) - F(v)| \leq k\,|u-v|\,.$$

Ensuite, la proposition 1.2.2 assure que $F+G$ est une $k+0$ contraction d'ensembles.

Proposition 1.2.4 *Soient X un espace de Banach de dimension infini, $\phi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et strictement décroissante, $B\,(0,1)$ la boule unité de X. Soit $F : \overline{B\,(0,1)} \to \overline{B\,(0,1)}$ une application définie par:*

$$F(x) = \varphi\,(|x|)\,x\ \forall x \in \overline{B\,(0,1)}.$$

Alors,

(a) L'application F n'est pas une k-contraction stricte d'ensembles,

(b) L'application F est condensante.

Démonstration.

(a) Comme $F(B) \subset conv(B \cup \{\theta\}), \forall B \subset \overline{B(0,1)}$.

Pour tout $B \subset \overline{B(0,1)}$ on a:

$$\begin{aligned} \alpha(F(B)) &\leq \alpha(conv(B \cup \{\theta\})) \\ &= \alpha(B \cup \{\theta\}) \\ &= \max\{\alpha(B), \alpha(\{\theta\})) \\ &\leq \alpha(B) \text{ car } \alpha(\{\theta\}) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\partial B(0, r\varphi(r)) \subset F\left(\overline{B}(0,r)\right)$ pour $r \in [0,1]$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha(F\left(\overline{B}(0,r)\right)) &\geq \alpha(\partial B(0, r\varphi(r))) \\ &= 2r\varphi(r) = \alpha(\overline{B}(0,r))\varphi(r)\,.\,(\text{d'après la proposition 1.1.2})\,. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(r) \rightarrow r$ quand $r \rightarrow 0$, F ne peut pas être une k-contraction stricte d'ensembles.

(b) Montrons que $\alpha(F(B)) < \alpha(B)\ \forall B \subset \overline{B(0,1)}$ avec $\alpha(B) > 0$.

Supposons que $B = B_1 \cup B_2$, $B \subset \overline{B(0,1)}$ tel que $\alpha(B) = d > 0$, Prenons $0 < r < \frac{d}{2}$, et définissons les ensembles $B_1 = B \cap \overline{B(0,r)}$, $B_2 = B \backslash \overline{B(0,r)}$. Il est clair que $F(B) = F(B_1) \cup F(B_2)$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \alpha(F(B_1)) &= \alpha(B \cap \overline{B}(0,r)) \\ &= \min\{\alpha(B), \alpha(\overline{B}(0,r))\} \\ &\leq \alpha(\overline{B(0,r)}) = 2r < \alpha(B), \text{ (car } \alpha(B) = d > 2r). \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} \alpha(F(B_2)) &\leq \alpha(\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq \varphi(r) \text{ et } x \in B_2\}) \\ &\leq \alpha(conv[\varphi(r) B \cup \{0\}]) \\ &\leq \alpha(\varphi(r) B \cup \{0\}) \\ &\leq \alpha(\varphi(r) B) \\ &\leq \varphi(r)\,\alpha(B) \\ &< \alpha(B), \text{ car } \varphi \text{ est strictement décroissante.} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\alpha(F(B)) = \max\{\alpha(F(B_1)), \alpha(F(B_2))\} < \alpha(B)$. Alors F est une application condensante.

■

Théorème 1.2.1 *[24] Soit E un espace de Banach, $B \subset \mathcal{C}([a,b], E)$ un sous-ensemble équicontinu et borné.*

Alors, $\alpha(B(t))$ est continue sur $[a,b]$, où $B(t) = \{x(t) : x(.) \in B\}$ et

$$\alpha\left(\left\{\int_a^b x(t)\,dt : x(.) \in B\right\}\right) \leq \int_a^b \alpha(B(t))\,dt.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\alpha(\{x(t) : x(.) \in B\})$ est continue sur $[a,b]$. Comme B est équicontinu alors $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\gamma > 0$, $\forall t, t' \in [a,b]$,

$$|t - t'| < \gamma \Longrightarrow \|x(t) - x(t')\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in B.$$

Ainsi, $\forall t, t' \in [a,b]$ vérifiant $|t - t'| < \gamma$ on a

$$\mathcal{H}((\{x(t) : x(.) \in B\}), (\{x(t') : x(.) \in B\})) \leq \varepsilon,$$

Alors, par la propriété (10) de la proposition 1.1.1, on obtient $\forall t, t' \in [a,b]$ vérifiant $|t - t'| < \gamma$

$$|\alpha(\{x(t) : x(.) \in B\}) - \alpha(\{x(t') : x(.) \in B\})| \leq 2\varepsilon.$$

Par conséquent, $\alpha(\{x(t) : x(.) \in B\})$ est continue sur $[a,b]$.

Soit $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, où $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$ une subdivision de $[a,b]$. Comme B est équicontinu,($\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tel que si $n > N$, alors $\|x(t_i) - x(t)\| < \varepsilon$, $\forall\ x(.) \in B$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$), alors, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} x(t_i) - \int_a^b x(t)\,dt\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x(t_i) - x(t))\,dt\right\| < (b-a)\,\varepsilon \quad \forall n > N.$$

Donc, la propriété (10) de la proposition 1.1.1 entraîne que

$$\left|\alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\, x(t_i) : x(.) \in B\right\}\right) - \alpha\left(\left\{\int_a^b x(t) : x(.) \in B\right\}\right)\right| \leq 2\varepsilon(b-a).$$

C'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} x(t_i) : x(.) \in B\right\}\right) = \alpha\left(\left\{\int_a^b x(t) : x(.) \in B\right\}\right)$$

D'autre part, la propriété (7) de la proposition 1.1.1 nous donne

$$\alpha\left(\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}x\left(t_i\right):\ x(.)\in B\right\}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\ \alpha\left(\left\{x\left(t_i\right):\ x(.)\in B\right\}\right)$$

D'où,

$$\alpha\left(\left\{\int_a^b x\left(t\right)dt:\ x(.)\in B\right\}\right)\leq\int_a^b\alpha\left(B\left(t\right)\right)dt.$$

■

Théorème 1.2.2 *[24] Soit E un espace de Banach, $B\subset\mathcal{C}\left(\left[a,b\right],E\right)$ un sous-ensemble équicontinu et borné, où $a,b\in\mathbb{R}$. Alors,*

$$\alpha\left(B\right)=\max_{t\in[a,b]}\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right).$$

Démonstration. D'une part, le théorème 1.2.2, entraîne que $\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right)$ est une fonction continue sur $\left[a,b\right]$.

Maintenant, par définition de $\alpha\left(B\right)$: on a $\forall\varepsilon>0\ \exists\left\{B_i\right\}_{i=1}^{m}$ tels que $B\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i$ et $diam\left(B_i\right)\leq\delta$ (où δ c'est un nombre positif tel que B admet un recouvrement fini de diamétre inférieur ou égal à δ), $\forall i=1,...,m$. Par conséquent, pour tout $t\in\left[a,b\right]$ on a

$$\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left\{x(t):\ x(.)\in B_i\right\}.$$

Aussi, on a

$$diam\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B_i\right\}\right)=\sup_{x(.),y(.)\in B_i}\left\|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right\|\leq diam\left(B_i\right)\leq\delta.$$

Alors, $\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right)\leq\delta,\ \ \forall t\in\left[a,b\right]$, et ainsi

$$\max\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right)\leq\alpha\left(B\right).$$

D'autre part, comme B est équicontinu, donc il existe $t_1,t_2,...,t_n\in\left[a,b\right]$ tels que

$$\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left\{x(t_i):\ x(.)\in B\right\}+B\left(\theta,\varepsilon\right),\ \forall t\in\left[a,b\right].$$

Si $\max\limits_{t\in[a,b]}\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right)<\alpha\left(B\right)$, on peut trouver un nombre finie de sous ensembles $A_1,A_2,...,A_s\subset E$ tels que

$$diam\left(A_j\right)\leq\alpha\left(B\right),\quad\bigcup_{i=1}^{n}\left\{x(t_i):\ x(.)\in B\right\}\subset\bigcup_{j=1}^{s}A_j.$$

Évidemment, $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left\{x(.)\in B:x(t_i)\in A_j,\ i=1,...,n\right\}$ tels que $diam\left(\left\{x(.)\in B:x(t_i)\in A_j\right\}\right)\leq\delta+2\varepsilon$, et donc $\forall\varepsilon>0\ \alpha\left(B\right)\leq\alpha\left(B\right)+2\varepsilon$. Par conséquent, $\alpha(B)\leq\delta$, d'où $\alpha\left(B\right)\leq\max\limits_{t\in[a,b]}\alpha\left(\left\{x(t):\ x(.)\in B\right\}\right)$. ■

Théorème 1.2.3 *[24] Soient E un espace de Banach, $C^1([a,b],E)$ l'espace des fonctions continûment différentiable muni de la norme*

$$\|x(.)\|_1 = \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\| + \max_{t\in[a,b]} \|x'(t)\|$$

et α_1 la MNC de Kuratowski dans $C^1([a,b],E)$.

Soit $B \subset C^1([a,b],E)$ et $B' = \{x'(.) : x(.) \in B\}$. Si B et B' sont bornés, équicontinus. Alors,

$$\alpha_1(B) = \max\left\{\max_{t\in[a,b]} \alpha(\{x(t) : x(.) \in B\}), \max_{t\in[a,b]} \alpha(\{x'(t) : x(.) \in B\})\right\}.$$

Lemme 1.2.3 *[13] Soit E un espace de Banach, si $B \subset \mathcal{C}([a,b],E)$ est un ensemble dénombrable, et il existe une fonction $\rho(t) \in L([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que $\|x(t)\| \le \rho(t)$, $t \in [a,b]$ avec $(a < b < \infty)$, $x \in B$. Alors, $\alpha(B(t)) \in L([a,b],\mathbb{R}^+)$ et*

$$\alpha\left(\left\{\int_a^b x(t)\,dt : \ x(.) \in B\right\}\right) \le 2\int_a^b \alpha(B(t))\,dt.$$

Lemme 1.2.4 *Soit E un espace de Banach et $B \subset \mathcal{C}(J,E)$. Si B est dénombrable, et il existe une fonction $\rho(t) \in L([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ telle que $\|x(t)\| \le \rho(t)$, $t \in [0,+\infty[$, $x \in B$.*

Alors, $\alpha(\{x(t) : \ x(.) \in B\})$ est intégrable sur J, de plus

$$\alpha\left(\left\{\int_0^{+\infty} x(t)\,dt : \ x(.) \in B\right\}\right) \le 2\int_0^{+\infty} \alpha(\{x(t) : \ x(.) \in B\})\,dt.$$

Démonstration. (voir [30]). ■

1.3 Les cônes

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.3.1 *Un sous-ensemble non vide P de E est dit* **cône** *sur E s'il est convexe, fermé et vérifie les deux conditions suivantes:*

1. *$(x \in P$ et $\lambda \ge 0) \Longrightarrow \lambda x \in P$;*
2. *$P \cap (-P) = \{\theta\}$, (i.e $(x \in P$ et $-x \in P) \Longrightarrow x = \theta$).*

La première condition entraîne que $\theta \in P$.

Définition 1.3.2 *Un espace de Banach est dit ordonné s'il contient un cône P.*

On définit une relation d'ordre sur E comme suit

$$x \le y \Longleftrightarrow y - x \in P.$$

De plus, on a

1. $x < y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.

2. $x \ll y, \Longleftrightarrow y - x \in \overset{\circ}{P}$ où $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.

3. $x \nleq y \Longleftrightarrow y - x \notin P$.

   Et, on définit le segment d'un cône P par $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$.

Définition 1.3.3 (Cône normal) *Un cône P sur E est dit **normal** (ou naturel) si*

$$\exists\ \delta > 0,\ \forall x, y \in P, (\|x\| = \|y\| = 1) \Longrightarrow \|x + y\| \geq \delta.$$

Géométriquement, la normalité de P signifie que l'angle entre chaque deux vecteurs unitaires positifs ne peut pas dépasser π. Autrement dit, un cône normal ne peut pas être trop large.

Proposition 1.3.1 *[14] Soit P un cône sur E. Alors, P est normal si*

$$\exists\ N > 0,\ \forall x, y \in P.\ 0_E \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq N \|y\|. \tag{1.3.1}$$

(i.e la norme est semi-monotone.)

Remarque 1.3.1 *La proposition précédente peut être considérée comme définition d'un cône normal P sur E, et dans ce cas, la plus petite constante $N > 0$ telle que (1.3.1) soit vérifiée est appelée "constante de normalité de P".*

Exemple 1.3.1
1. $E_1 = \mathbb{R}^n$, $P_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = 1...n\} = (\mathbb{R}_+)^n$.

   P_1 est normal, avec la constante de normalité $N = 1$, car toute les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont monotones, tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n; 0_{\mathbb{R}^n} \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

2. $E_2 = C^1([0, 2\pi])$: l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, 2\pi]$ muni de la norme $\|x\|_{E_2} = \max\limits_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)| + \max\limits_{0 \leq t \leq 2\pi} |x'(t)|$.

   Soit

$$P_2 = \{x \in E_2 : x(t) \geq 0, \forall t \in [0, 2\pi]\}$$

P_2 n'est pas normal car sinon, l'hypothèse de la proposition (1.3.1) *donne que:*

$$\exists N > 0 : \forall x, y \in P_2 . 0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\|_{E_2} \leq N \|y\|_{E_2} .$$

Soit donc $x_n(t) = 1 - \cos nt$, et $y_n(t) = 2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n, y_n \in P_2 \text{ et } 0 \leq x_n(t) \leq y_n(t), \text{ car } \forall t \in [0, 2\pi], 1 - \cos nt \leq 2,$$

mais

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_2} &= \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |1 - \cos nt| + n \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\sin nt|. \\ &= 2 + n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors, $2 + n \leq 2N$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible par passage a la limite quand $n \to +\infty$.

Proposition 1.3.2 *Soit P un cône, pour tout u, x, y et $z \in P$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $x \leq x$.
2. $(x \leq y$ *et* $y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$.
3. $(x \leq y$ *et* $y \leq x) \Longrightarrow x = y$.
4. $(x \leq y$ *et* $0 \leq a \leq b) \Longrightarrow ax \leq by$.
5. $(x \leq y$ *et* $u \leq z) \Longrightarrow x + u \leq y + z$.
6. $(x \ll y$ *et* $y \ll z) \Longrightarrow x \ll z$.
7. $(x \ll y$ *et* $y \leq z) \Longrightarrow x \ll z$.
8. $(x \leq y$ *et* $y \ll z) \Longrightarrow x \ll z$.
9. $(x \ll y$ *et* $a > 0) \Longrightarrow ax \ll ay$.
10. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de E telles que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Alors*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leq \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Démonstration. Ces propriétés se démontrent en utilisant les définitions précédentes.

■

CHAPITRE 2

Théorèmes du point fixe d'une contraction stricte d'ensembles

2.1 Indice du point fixe d'une contraction stricte d'ensembles

2.1.1 Rappel sur l'indice du point fixe d'une application complètement continue

Commençons d'abord par donner la définition suivante:

Définition 2.1.1 (Ensemble rétracté) *Soit E un espace de Banach. Un sous-ensemble F de E est dit un* ***rétracté*** *de E, s'il existe une application continue $r : E \to F$ telle que*

$$r(x) = x, \ \forall x \in F.$$

Ou encore si $I_{d|F}$ admet une extension continue à E. L'application r est alors appelée ***rétraction****.*

Remarque 2.1.1 *Toute partie convexe fermée d'un espace de Banach E est une rétractée de E, en particulier, tout cône $P \subset E$ est un rétracté de E.*

Lemme 2.1.1 *[20] Soit P un cône d'un espace de Banach réel E. Si $\rho : P \to [0, \infty[$ une fonction convexe, uniformément continue avec $\rho(\theta) = 0$ et $\rho(x) > 0$ $\forall x \neq \theta$, alors $\forall r > 0$, $D_r = \{x \in P : \rho(x) \geq r\}$ est un rétracté de E.*

Théorème 2.1.1 *([14])(**définitions axiomatiques**)*

Soit E un espace de Banach, X un rétracté de E, pour tout ouvert borné Ω de X et toute application complètement continue $f : \overline{\Omega} \to X$ sans points fixes sur $\partial\Omega$, il existe un unique nombre entier noté $i(f, \Omega, X)$ ayant les propriétés suivantes:

1. ***Normalisation.***

   $i(f, \Omega, X) = 1$ *si* f *est constante sur* Ω *(i.e.* $f(x) = y_0 \in \Omega$; $\forall x \in \overline{\Omega}$).

2. ***Additivité.***

   Pour toute paire de sous-ensembles ouverts et disjoints Ω_1, Ω_2 *de* Ω *tels que* f *n'admet pas de point fixe sur* $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, *on a:*

   $$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega_1, X) + i(f, \Omega_2, X)$$

   où $i(f, \Omega_k, X) = i(f_{|\overline{\Omega_k}}, \Omega_k, X); k \in \{1, 2\}$.

3. ***Invariance homotopique.***

   L'entier $i(h_t, \Omega, X)$ *est indépendant du choix du paramètre* $t \in [0, 1]$*; où* $h_t : [0, 1] \times \Omega \to X$ *est une application complètement continue vérifiant* $h_t(x) \neq x$ *pour tout* $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$.

4. ***Permanence.***

   Si Y *est un rétracté de* X *telle que* $f(\overline{\Omega}) \subset Y$, *alors*

   $$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega \cap Y, Y) = i(f_{|\overline{\Omega \cap Y}}, \Omega, Y).$$

De plus, soit $M = \left\{ \begin{array}{l} i(f, \Omega, X) \text{ tel que } X \text{ est un rétracté de } E,\ \Omega \text{ est un ouvert borné de } X \\ \text{et } f : \overline{\Omega} \to X \text{ est une application complètement continues} \\ \text{sans points fixes sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$
vérifiant les propriétés $(1)-(4)$ est défini d'une façon unique. L'entier $i(f, \Omega, X)$ est appelé l'indice du point fixe de f sur Ω par rapport à X.

2.1.2 L'indice du point fixe d'une contraction stricte d'ensembles

Le concept de l'indice du point fixe peut être prolongé à des contractions stricte d'ensembles et encore à des applications condensantes.

Soit X un ensemble convexe, fermé et non vide d'un espace de Banach E, Ω un sous ensemble ouvert borné de X. Soit $f:\overline{\Omega}\to X$ une k-contraction stricte d'ensembles telle que $f(x)\neq x$, $\forall x\in\partial\Omega$ (i.e. que f n'admet pas de points fixe sur $\partial\Omega$). Alors on définit l'indice du point fixe de f sur Ω par rapport à X, $i\left(f,\Omega,X\right)$ comme suit:

Posons

$$D_1=\overline{conv}f\left(\overline{\Omega}\right) \text{ et } D_n=\overline{conv}f\left(D_{n-1}\cap\overline{\Omega}\right) \quad \text{pour } (n=2,3,...)$$

(1) Si $\exists\ n=n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $D_{n_0}\cap\overline{\Omega}=\emptyset$, alors D_n n'a aucune signification pour $n>n_0$.

Dans ce cas, on définit l'indice du point fixe $i\left(f,\Omega,X\right)$ par

$$i\left(f,\Omega,X\right)=0 \tag{2.1.1}$$

(2) Supposons que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ D_n\cap\overline{\Omega}\neq\emptyset$. Il est clair que, $D_2\subset D_1$. Si on suppose que $D_{k-1}\supset D_k$, alors

$$D_k=\overline{conv}f\left(D_{k-1}\cap\overline{\Omega}\right)\supset\overline{conv}f\left(D_k\cap\overline{\Omega}\right)=D_{k+1}.$$

Donc, $D_n\subset D_{n-1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$. Comme f est une k-contraction d'ensembles pour tout $n\in\{1,2,...\}$ on a

$$\alpha\left(D_n\right)\leq\alpha\left(f\left(D_{n-1}\cap\overline{\Omega}\right)\right)\leq k\ \alpha\left(D_{n-1}\cap\overline{\Omega}\right)\leq k\ \alpha\left(D_{n-1}\right)\leq k^{n-1}\ \alpha\left(D_1\right),\ (n=1,...)$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha\left(D_n\right)=0$, car $\left(0\leq k<1\right)$.

Par suite, la proposition 1 (voir l'annexe) entraîne que $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n$ est un ensemble non vide, compact de X. Et il est clair que D est convexe comme intersection d'ensembles convexes. De plus, $D\cap\overline{\Omega}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(D_n\cap\overline{\Omega}\right)$ est également non vide, compact (car D est non vide et $D\cap\overline{\Omega}$ est fermé dans un compact), et d'ailleurs $f\left(D\cap\overline{\Omega}\right)\subset D$. En effet; puisque

$$f\left(D_n\cap\overline{\Omega}\right)\subset\overline{conv}f\left(D_n\cap\overline{\Omega}\right)=D_{n+1}\subset D_n.$$

Alors,

$$f\left(D\cap\overline{\Omega}\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}f\left(D_n\cap\overline{\Omega}\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=D.$$

Comme D est compact, l'application $f:D\cap\overline{\Omega}\to D$ est complètement continue. Ensuite, le théorème d'extension de Dugundji (voir l'annexe théorème 2), entraîne qu'il existe une application complètement continue

$$f_1:\overline{\Omega}\to D,\ \left(D\subset X\right) \text{ telle que } f_1(x)=f(x)\ \forall x\in D\cap\overline{\Omega}$$

L'application f_1 n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$. En effet; on raisonne par l'absurde, supposons que

$$\exists x_0 \in \partial\Omega \text{ tel que } f_1(x_0) = x_0.$$

Alors, puisque $f_1(x_0) \in D$ donc $x_0 \in D \cap \overline{\Omega}$, ainsi $f_1(x_0) = f(x_0)$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$ pour $x_0 \in \partial\Omega$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, le théorème 2.1.1, entraîne que l'indice du point fixe $i(f_1, \Omega, X)$ est bien défini.

Par suite, l'indice du point fixe $i(f, \Omega, X)$ est défini par:

$$i(f, \Omega, X) = i(f_1, \Omega, X) \tag{2.1.2}$$

Remarque 2.1.2 *L'indice du point fixe d'une k-contraction stricte d'ensembles $i(f, \Omega, X)$ défini dans (2.1.1) et (2.1.2) est indépendant du choix de l'application f_1. En effet, supposons que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \to D$ sont deux applications complètement continues telles que:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x),\ \forall x \in D \cap \overline{\Omega}, \\ f_2(x) &= f(x),\ \forall x \in D \cap \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Soit $H(t, x) = t\ f_1(x) + (1-t)\, f_2(x)$, on a $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ est complètement continue. De plus, $H(t,x)$ n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$ (i.e. $H(t,x) \neq x\ \forall (t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$), car si $\exists\ t_0 \in [0,1], x_0 \in \partial\Omega$ tels que $H(t_0, x_0) = x_0$ alors on a

$$t_0 f_1(x_0) + (1-t_0)\, f_2(x_0) = x_0$$

et comme $f_1(x), f_2(x) \in D$ et D est convexe, alors $x_0 = t_0 f_1(x_0) + (1-t_0)\, f_2(x_0) \in D$.

Ainsi, $x_0 \in D \cap \overline{\Omega}$ et $f_1(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0)$ ce qui nous donne $f(x_0) = x_0$ pour $x_0 \in \partial\Omega$ ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe d'une application complètement continue nous donne que $i(f_1, \Omega, X) = i(f_2, \Omega, X)$.

L'indice du point fixe d'une application condensante

Soit X un convexe fermé non vide et $f : \overline{\Omega} \to X$ une application condensante sans point fixe sur $\partial\Omega$. On choisit une k-contraction stricte d'ensemble $g : \overline{\Omega} \to X$ telle que

$$\|f(x) - g(x)\| < \tau, \forall x \in \overline{\Omega},$$

où

$$\tau = \inf_{x \in \partial\Omega} \|x - f(x)\| > 0.$$

Remarquons que g existe toujours, on peut prendre par exemple $g = kf$, où $0 \leq k < 1$ et $1 - k$ est suffisamment petit. Il est clair que g n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$. En effet; on raisonne par l'absurde, supposons $\exists x_0 \in \partial\Omega$ tel que $g(x_0) = x_0$ et

$$g(x_0) = x_0 \Longrightarrow g(x_0) - x_0 = \theta \Longrightarrow \|g(x_0) - x_0\| = 0$$

alors,

$$\begin{aligned} \|f(x_0) - x_0\| &= \|f(x_0) - g(x_0) + g(x_0) - x_0\| \\ &\leq \|f(x_0) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \\ &< \tau \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $\inf_{x \in \partial\Omega} \|f(x) - x\| = \tau$. Et par conséquent, le théorème 2.1.1, entraîne que l'indice du point fixe $i(g, \Omega, X)$ est bien défini.

Maintenant, on définit l'indice du point fixe $i(f, \Omega, X)$ par:

$$i(f, \Omega, X) = i(g, \Omega, X). \tag{2.1.3}$$

Théorème 2.1.2 (*[10], page* 21) *L'indice du point fixe $i(f, \Omega, X)$ d'une k-contraction stricte d'ensembles vérifie les propriétés suivantes:*

1. ***Normalisation.***

   Si $f : \overline{\Omega} \to \Omega$ est une application constante (i.e. $f(x) = y_0 \in \Omega$; $\forall x \in \overline{\Omega}$.), alors $i(f, \Omega, X) = 1$.

2. ***Additivité.***

   Si Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles ouverts et disjoints de Ω tels que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, alors:

   $$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega_1, X) + i(f, \Omega_2, X)$$

3. ***Invariance homotopique.***

   Si on suppose que

(a) $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ *est continue et* $H(.,x)$ *est uniformément continue* $\forall x \in \overline{\Omega}$.

(b) $H(t,.) : \overline{\Omega} \to X$ *est une k-contraction stricte d'ensembles, où k ne dépend pas de* $t \in [0,1]$,

(c) $H(t,x) \neq x \ \forall t \in [0,1]$ *et* $x \in \partial\Omega$,

Alors,

$$i(H(t,.),\Omega,X) \equiv constante \ \forall t \in [0,1].$$

4. ***Permanence.***

Si Y est un rétracté de X telle que $f\left(\overline{\Omega}\right) \subset Y$, *alors*

$$i(f,\Omega,X) = i(f,\Omega \cap Y, Y).$$

5. ***Propriété d'excision.***

Soit $V \subset \Omega$ *un sous-ensemble ouvert tel que f soit sans points fixes sur* $\overline{\Omega} \backslash V$; *alors*

$$i(f,\Omega,X) = i(f,V,X).$$

6. ***Propriété d'existence.***

$i(f,\Omega,X) \neq 0 \Longrightarrow f$ *admet au moins un points fixe sur* Ω.

Démonstration. D'après (2.1.2), on a

$$i(f,\Omega,X) = i(f_1,\Omega,X)$$

où f_1 est une application complètement continue.

Ensuite, le théorème (1.3.1) assure la validité des propriétés de $(1)-(4)$.

Notons que les propriétés de $(1)-(4)$ de l'indice du point fixe d'une application complètement continue sont déjà démontré.

Dans ce qui suit, on démontre deux conséquences de la propriétés d'additivité qui sont les propriétés 5 et 6 si dessus.

- Soit $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \emptyset$. On a, $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overline{\Omega} \backslash \Omega = \partial\Omega$. f est donc, par hypothèse sans points fixes sur $\partial\Omega$, la propriété d'additivité de l'indice a lieu et on a

$$i(f,\Omega,X) = i(f,\Omega,X) + i(f,\emptyset,X) \Longrightarrow i(f,\emptyset,X) = 0.$$

Si on prend maintenant $V = \Omega_1$, la même propriété nous donne

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) + i(f, \emptyset, X) = i(f, V, X)$$

D'où le résultat demandé.

- On raisonne par l'absurde. On suppose que $i(f, \Omega, X) \neq 0$ et que f n'admet pas de point fixe sur Ω. Soit $V = \emptyset$, (i.e

$\overline{\Omega} \backslash V = \overline{\Omega}$, f étant sans points fixes sur Ω et $\partial\Omega$), donc elle l'est aussi sur $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$,

Ceci nous permet d'appliquer la propriété d'excision pour $V = \emptyset$, et on a:

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) = i(f, \emptyset, X) = 0,$$

ce qui contredit le fait que $i(f, \Omega, X) \neq 0$. D'où le résultat demandé.

■

Remarque 2.1.3 *L'indice du point fixe d'une application condensante défini dans* (2.1.3) *est indépendante du choix de l'application* g, *et le théorème 2.1.2 reste toujours vrai pour cette dernière classe d'applications.*

2.2 Quelques théorèmes du point fixe positif

2.2.1 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.2.1 *[10] Soit* X *un convexe fermé de* E, X_1 *un convexe fermé borné de* X *et* Ω *un ensemble ouvert non vide de* X *avec* $\Omega \subset X_1$. *Si* $f : X_1 \to X$ *est une* k*-contraction stricte d'ensembles,* $f(X_1) \subset X_1$ *et* f *n'admet pas de points fixe sur* $X_1 \backslash \Omega$. *Alors,*

$$i(f, \Omega, X) = 1.$$

Démonstration. Il est clair que X_1 est fermé dans E et $f\left(\overline{\Omega}\right) \subset X_1$. Par la propriété (4) du théorème 2.1.2 on a

$$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega, X_1). \tag{2.2.1}$$

Puisque Ω est un sous-ensemble ouvert de X et $\Omega \subset X_1 \subset X$, alors Ω est également un sous-ensemble ouvert de X_1. Comme f n'a aucun point fixe sur $X_1 \backslash \Omega$, la propriété (5) du théorème 2.1.2, entraîne que

$$i(f, \Omega, X_1) = i(f, X_1, X_1). \tag{2.2.2}$$

Choisissons $x_0 \in \Omega \subset X_1$ et soit $H(t,x) = t\, x_0 + (1-t) f(x)$.

Il est clair que $H : [0,1] \times X_1 \to X_1$ est continue $\forall t \in [0,1]$ et $S \subset X_1$ borné, on a

$$\alpha (H(t,S)) \leq (1-t)\, \alpha (f(S)) \leq (1-t)\, k\alpha (S) \leq k\alpha (S).$$

Alors, $\forall t \in [0,1]$ $H(t,x) : X_1 \to X_1$ est une k-contraction stricte d'ensembles.

Notons que, quand X_1 est traité comme sous-ensemble ouvert de X_1 sa frontière est vide. Selon (1) et (3) du théorème 2.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} i(f, X_1, X_1) &= i(H(0,.), X_1, X_1) \\ &= i(H(1,.), X_1, X_1) \\ &= i(x_0, X_1, X_1) = 1. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Donc, (2.2.1) , (2.2.2) et (2.2.3) entraînent que $i(f, \Omega, X) = 1$. ■

Lemme 2.2.2 *[10] Soit X un convexe fermé de E et Ω un sous-ensemble convexe ouvert borné non vide de X. Si $f : \overline{\Omega} \to X$ est une k-contraction stricte d'ensembles et $f\left(\overline{\Omega}\right) \subset \Omega$. Alors,*

$$i(f, \Omega, X) = 1.$$

Démonstration. On aura le résultat en posant $X = \overline{\Omega}$ dans le lemme 2.2.1. ■

Lemme 2.2.3 *[10] Soit X un convexe fermé de E et Ω un ensemble ouvert borné dans X avec $\theta \in \Omega$. Si $f : \overline{\Omega} \to X$ est une k-contraction stricte d'ensembles satisfaisant l'hypothèse suivante*

$$f(x) \neq \mu x, \ \forall x \in \partial\Omega, \ \mu \geq 1. \tag{2.2.4}$$

Alors,

$$i(f, \Omega, X) = 1.$$

Démonstration. Soit $H(t,x) = tf(x)$. L'application $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ est continue par rapport à x, et la continuité de H est uniforme par rapport à t. $H(t,.) : \overline{\Omega} \to X$ est une k-contraction stricte d'ensembles, tel que $H(t,x) \neq x$, $\forall x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$. En effet, s'il existe $t \in [0,1]$, pour lequel $\exists\, x_0 \in \partial\Omega$, tel que $H(t,x_0) = x_0$, alors deux cas se présentent:

1. pour $t = 0$, on obtient l'existence d'un point $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $x_0 = \theta$, d'où la contradiction avec $\theta \in \Omega$.

2. pour $t \in]0,1]$, on obtient l'existence d'un point fixe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $tf(x_0) = x_0$ donc $f(x_0) = \frac{1}{t}x_0$, où $\frac{1}{t} \geq 1$, d'où la contradiction avec l'hypothèse (2.2.4). Alors, d'après les propriétés de l'invariance homotopique et de la normalisation de l'indice du point fixe, on en déduit que

$$i(f, \Omega, X) = i(\theta, \Omega, X) = 1.$$

D'où le résultat.

■

Remarque 2.2.1 *Les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 restent toujours vrais pour une application condensante.*

Lemme 2.2.4 (*[10], page* 174) *Soit P un cône dans un espace de Banach E et Ω un ensemble ouvert borné de P, soit $f : \overline{\Omega} \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles vérifiant*

$$\theta \in \Omega \text{ et } f(x) \not\geq x, \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(f, \Omega, P) = 1.$$

Démonstration. Montrons que $f(x) \neq \mu x, \forall x \in \partial\Omega$, $\mu \geq 1$. En effet, si

$$\exists x_0 \in \partial\Omega \text{ et } \mu_0 \geq 1 \text{ tels que } f(x_0) = \mu_0 x_0,$$

on aura $f(x_0) = \mu_0 x_0 \geq x_0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquence du lemme 2.2.3, on obtient $i(f, \Omega, P) = 1$. ■

Lemme 2.2.5 *[20] Soit P un cône et Ω un ensemble ouvert borné dans E. Supposons que $f : P \cap \overline{\Omega} \to P$ est une k-contraction stricte d'ensembles, et $\rho : P \to [0, \infty[$ une fonction convexe, uniformément continue avec $\rho(\theta) = 0$ et $\rho(x) > 0$ $\forall x \neq \theta$. Si*

$$\rho(f(x)) \leq \rho(x) \text{ et } f(x) \neq x \ \forall x \in P \cap \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(f, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Démonstration. Si $\exists\ x_0 \in P \cap \partial\Omega$ et $\mu_0 \geq 1$ tels que $f(x_0) = \mu_0 x_0$, alors $\mu_0 > 1$. Par conséquent,

$$\rho\left(x_0\right) = \rho\left(\frac{1}{\mu_0} f(x_0)\right) \leq \frac{1}{\mu_0} \rho\left(f(x_0)\right) \leq \frac{1}{\mu_0} \rho\left(x_0\right) < \rho\left(x_0\right). \tag{2.2.5}$$

D'où la contradiction. Du lemme 2.2.3, il découle que $i\left(f, P \cap \Omega, P\right) = 1$. ■

Lemme 2.2.6 (*[10], page* 23) *Supposons que X est un convexe fermé dans E, Ω est un ensemble ouvert borné dans X et $f : \overline{\Omega} \to X$ une k-contraction stricte d'ensembles satisfaisant aux hypothèses suivantes*

$$\exists u_0 \in X, u_0 \neq \theta, \text{ tel que } \lambda u_0 \in X\ \forall \lambda \geq 0 \text{ et } x - f(x) \neq \lambda u_0\ \forall\ x \in \partial\Omega,\ \lambda \geq 0. \tag{2.2.6}$$

Alors,

$$i\left(f, \Omega, X\right) = 0.$$

Démonstration. Supposons que $i\left(f, \Omega, X\right) \neq 0$. Choisissons $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\lambda_0 > \left\|u_0\right\|^{-1} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left(\|x\| + \|f(x)\|\right). \tag{2.2.7}$$

Posons $H\left(t, x\right) = f(x) + \lambda_0 t u_0$. Puisque X est un ensemble convexe fermé, on a

$$\forall n \in N, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \lambda_0 t u_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \left(\frac{1}{n} \times n\lambda_0 t u_0\right) \in X.$$

Ainsi, on fait tendre $n \to +\infty$ on obtient $f(x) + \lambda_0 t u_0 \in X\ \forall x \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0, 1]$, et

$$\alpha\left(H\left(t, B\right)\right) = \alpha\left(f(B) + \lambda_0 t u_0\right) = \alpha\left(f(B)\right) \leq k\alpha\left(B\right)\ \ \forall B \subset X \text{ borné}$$

alors $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$ est une applications k-contraction stricte d'ensembles. Par hypothèse on a $x - f(x) \neq \lambda u_0$, $\forall\ x \in \partial\Omega$, $\lambda \geq 0$, alors $H\left(t, x\right) \neq x\ \forall x \in \partial\Omega$ et $0 \leq t \leq 1$. Par conséquent, grâce à l'invariance homotopique, on a

$$i\left(H\left(1, .\right), \Omega, X\right) = i\left(H\left(0, .\right), \Omega, X\right),$$

c'est-à-dire,

$$i\left(f + \lambda_0 u_0, \Omega, X\right) = i\left(f, \Omega, X\right) \neq 0.$$

Et par la propriété d'existence, on sait qu'il $\exists\ x_0 \in \Omega$ tels que $x_0 = f(x_0) + \lambda_0 u_0$ et ainsi $\lambda_0 \leq \left\|u_0\right\|^{-1} \left(\|x\| + \|f(x)\|\right)$, ce qui est une contradiction avec (2.2.7), D'où le résultat.
■

Lemme 2.2.7 *[10] Soit P un cône et Ω un ensemble ouvert borné de P, soit $f : \overline{\Omega} \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles satisfaisant la conditions suivante*

$$f(x) \nleq x \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Alors,

$$i(f, \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Choisissons $u_0 > \theta$ et montrons que $x - f(x) \neq \lambda u_0, x \in \partial\Omega, \lambda \geq 0$. En effet, si

$$\exists x_0 \in \partial\Omega \text{ et } \lambda_0 \geq 0 \text{ tels que } x_0 - f(x_0) = \lambda_0 u_0,$$

alors, $x_0 \geq f(x_0)$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, du lemme 2.2.6, on obtient $i(f, \Omega, P) = 0$. ■

Si f est une 0-contraction d'ensembles (f est complètement continue) on a le lemme suivant:

Lemme 2.2.8 *Soit $\theta \in \Omega$ et $f : P \cap \overline{\Omega} \to P$ une application complètement continue satisfaisant l'hypothèse*

1. $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega} \|f(x)\| > 0;$
2. $f(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \ \ 0 < \mu \leq 1.$

Alors,

$$i(f, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Remarque 2.2.2 *L'exemple suivant montre que le lemme* 2.2.8 *n'est pas toujours vrai pour une k-contraction stricte d'ensembles si $k \in]0, 1[$. Pour avoir un résultat analogue dans ce cas on donnera les deux résultat qui suivent l'exemple.*

Exemple 2.2.1 *Soient* $E = l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \ \ | \ \ \|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^2 \ \ | \ \ \|x\| < 1 \right\}.$$

et P un cône sur E défini par:

$$P = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l^2 | \ x_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, ... \right\}.$$

On définit l'application $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *par:*

$$F(x) = (0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_3, ..., \frac{1}{2}x_{n-1}, ...), \ \forall x \in l^2. \tag{2.2.8}$$

Puisque $\forall x, y \in l^2$; $\|F(x)\| = \frac{1}{2}\|x\|$ *et* $\|F(x) - F(y)\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$, *alors* F *est une* $\frac{1}{2}$*-contraction stricte d'ensembles. Et on a*

$$F(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \ \mu > 0. \tag{2.2.9}$$

En effet, si

$$\exists x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*, ...) \in P \cap \partial\Omega \text{ et } \mu^* > 0 \text{ tels que } F(x^*) = \mu^* x^*.$$

Alors,

$$0 = \mu^* x_1^*, \frac{1}{2}x_1^* = \mu^* x_2^*, ..., \frac{1}{2}x_{n-1}^* = \mu^* x_n^*, ...$$

et par conséquent, $x_1^* = x_2^* = x_3^* = ... = x_n^* = ... = 0$, *i.e* $x^* = 0$, *contradiction avec le fait que* $\|x^*\| = 1$.

Du fait que $\|Fx\| = \frac{1}{2}\|x\|$ *et* $Fx \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \ \mu > 0$, *les conditions du lemme* 2.2.8 *sont vérifiées, alors* $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$.

Mais la condition $F(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \ \mu > 0$ *et le lemme* 2.2.3 *entraînent que*

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Lemme 2.2.9 *([10], page* 175*) Soit* P *un cône de* E, Ω *un ensemble ouvert borné de* P, *et* $f : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *une* k*-contraction stricte d'ensembles satisfaisant les conditions suivantes:*

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \|f(x)\| > k \sup_{x \in P \cap \partial\Omega} \|x\| \tag{2.2.10}$$

$$f(x) \neq \mu x, x \in \partial\Omega, \mu \in \left]0, 1\right]. \tag{2.2.11}$$

Alors,

$$i(f, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Pour la preuve de ce lemme, (voir Fournier-Martelli, théorème 3.5).

■

Lemme 2.2.10 *[26] Soit* P *un cône d'un espace de Banach* E, $B_r = \{x \in E : \|x\| < r\}$ *et* $f : \overline{B_r} \cap P \to P_r$ *une* k*-contraction stricte d'ensembles vérifiant les conditions suivantes* (*i*) $\exists\delta > 0$ *tel que* $\|f(x)\| \geq (k+\delta)\|x\|$ $\forall x \in \partial B_r \cap P$.

(*ii*) $f(x) \neq \mu x, \forall x \in \partial B_r \cap P$ *et* $0 < \mu \leq 1$.

Alors,

$$i(f, B_r \cap P, P) = 0.$$

Démonstration. Pour la preuve de ce lemme, (voir [26], théorème 1, page 567). ■

Lemme 2.2.11 *[20] Soit* E *un espace de Banach réel,* $\|.\|$ *la norme dans* E, P *un cône dans* E *et* $\Omega = \{x \in E : \|x\| < R,\ R \in \mathbb{R}^+\}$. *Supposons que* $f : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *est une* k*-contraction stricte d'ensembles et* $\rho : P \to [0, \infty[$ *une fonction convexe, uniformément continue avec* $\rho(\theta) = 0$ *et* $\rho(x) > 0$ $\forall x \neq \theta$ *et* $\rho(x) \leq \|x\|$. *Si*

(*i*) $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega} \rho(x) > 0$, *et* $\exists\ \delta > 0$ *tel que* $\frac{R}{\inf\limits_{x \in P\cap\partial\Omega} \rho(x)} \leq 1 + \frac{\delta}{k}$ *et*

$$\rho(f(x)) \geq (k+\delta)\rho(x), \forall x \in P \cap \partial\Omega$$

(*ii*) $f(x) \neq \mu x,\ \mu \in]0,1], \forall x \in P \cap \partial\Omega$,

Alors,

$$i(f, P \cap \Omega, P) = 0.$$

Démonstration. Supposons $k + \delta > 1$. Soit $N = \frac{1}{k+\delta}$, puis Nf est une k-contraction stricte d'ensembles. Considérons

$$H_1(t,x) = tf(x) + (1-t)Nf(x), t \in [0,1], x \in P \cap \partial\Omega.$$

D'une part,

$$\alpha(H_1(t,B)) \leq t\alpha(f(B)) + (1-t)\alpha(Nf(B)) \leq k\alpha(B)\ \ \forall B \text{ borné de } P \cap \overline{\Omega}.$$

D'autre part, $\exists\ t_0 \in [0,1], x_0 \in P \cap \partial\Omega$ tels que $x_0 = tf(x_0) + (1-t)Nf(x_0)$, alors $f(x_0) = \left(\frac{1}{t_0 + N(1-t_0)}\right)x_0$, ce qui contredit la condition (*ii*). La propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe entraîne que

$$i(f, P \cap \Omega, P) = i(Nf, P \cap \Omega, P).$$

Soit $r = \inf\limits_{x \in p \cap \partial\Omega} \rho(x)$. Définissons l'ensemble D_r par:

$$D_r = \{x \in P \text{ tel que } \rho(x) \geq r\}.$$

Comme $\theta \notin D_r$ alors $d = \inf\limits_{x \in D_r} \|x\| > 0$. Du fait que $\rho(x) \leq \|x\|$, on a $r \leq d \leq R$. En effet, puisque $P \cap \partial\Omega \subset D_r$ on obtient $d \leq r$. D'autre part, $\forall x \in D_r$, $\rho(x) = r$ en combinant cela avec $\rho(x) \leq \|x\|$, on aura $r \leq \|x\|$, $\forall x \in D_r$ alors $r \leq \inf\limits_{x \in D_r} \|x\| = d$.

Soit $M = \frac{R}{r}$, la condition (i) entraîne que

$$\frac{Mk}{(k+\delta)} < 1 \quad , \quad Md > \sup_{x \in p \cap \partial\Omega,} \|x\| \text{ et } MD_r \cap (P \cap \overline{\Omega}) = \emptyset,$$

où $MD_r = \{Mx|\ x \in D_r\}$.

Soit $H_2(t,x) = (1-t)\,Nf(x) + tMNf(x)$, $\forall (t,x) \in [0,1] \times P \cap \overline{\Omega}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \alpha(H(t,S)) &\leq (1-t)\,\alpha(Nf(S)) + t\alpha(MNf(S)) \\ &\leq (1-t)\,\frac{k}{k+\delta}\alpha(S) + t\frac{Mk}{k+\delta}\alpha(S) \\ &< \frac{Mk}{k+\delta}\alpha(S),\ \forall S \text{ borné de } P \cap \Omega, \end{aligned}$$

et donc on obtient que $H_2(t,.) : P \cap \overline{\Omega} \to P$ est une k-contraction stricte d'ensembles. D'autre part, H est uniformément continue par rapport à t.

Si $\exists\ x_1 \in P \cap \partial\Omega$, $t_1 \in [0,1]$ tels que $x_1 = (1-t_1)\,Nf(x_1) + t_1MNf(x_1)$, alors $f(x_1) = N(1-t_1+t_1M)^{-1}x_1$, ce qui contredit la condition (ii). Par conséquent, la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe, nous donne

$$i(Nf, P \cap \Omega, P) = i(MNf, P \cap \Omega, P).$$

Comme D_r est un rétracté de E (voir le lemme 2.1.1), alors il existe une rétraction $g : E \to D_r$, satisfaisant $g(x) = x$, $\forall x \in D_r$.

Soient $f_1 = Nf$, $\overline{f_1} = g \circ f_1$, donc $\overline{f_1}$ est une k-contraction stricte d'ensembles. La condition (i) et la définition de ρ, entraînent que

$$\rho(f_1(x)) = \rho(Nf(x)) \geq N\rho(f(x)) \geq \rho(x) \geq r, \forall x \in P \cap \partial\Omega. \tag{2.2.12}$$

Par conséquent, $f_1(\partial\Omega) \subset D_r$, alors $\overline{f_1}(x) = f_1(x)$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega$. Par suite

$$i(MNf, P \cap \Omega, P) = i(Mf_1, P \cap \Omega, P) = i\left(M\overline{f_1}, P \cap \Omega, P\right).$$

Si $i(f_1, P \cap \Omega, P) \neq 0$, on obtient $i\left(M\overline{f_1}, P \cap \Omega, P\right) \neq 0$, ce qui implique que $M\overline{f_1}$ admet un point fixe x^* sur $P \cap \Omega$. Ainsi $x^* = M\overline{f_1}(x^*) \in MD_r$, contradiction, d'où le résultat. ∎

2.2.2 Théorèmes du point fixe positif d'expansion et de compression d'un cône d'une contraction stricte d'ensembles

Maintenant, on est en mesure d'énoncer quelques théorèmes du point fixe positif sur les cônes.

Soit E un espace de Banach, P un cône de E. Pour $0 < r < R$, on introduit les ensembles suivant

$$P_r = \{x \in P : \|x\| \leq r\},$$

$$\partial P_r = \{x \in P : \|x\| = r\},$$

$$P_{r,R} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\}.$$

Définition 2.2.1 *[25] Une application $F : P_{r,R} \to P$ est dite:*

1. ***compression** du cône P si*
   - *(a)* $F(x) \nleq x \; \forall x \in \partial P_r$;
   - *(b)* $\forall \varepsilon > 0 \; F(x) \ngeq (1+\varepsilon)\, x \; \forall x \in \partial P_R$.
2. ***expansion** du cône P si*
   - *(a)* $\forall \varepsilon > 0 \; F(x) \ngeq (1+\varepsilon)\, x \; \forall x \in \partial P_r$
   - *(b)* $F(x) \nleq x \; \forall x \in \partial P_R$.

Remarque 2.2.3 *La définition 2.2.1 est la définition générale de l'expansion et de la compression d'un cône donnée par Krasnosel'skii dans le chapitre 4 de [16] en 1964.*

Théorème du point fixe de Krasnosel'skii

Commençons d'abord par le théorème principal suivant, appelé théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône (dû à Krasnosel'skii [17] en 1960) qui généralise le théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné affirmant que si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non vide tel que

$$(F(a) - a)(b - F(b)) > 0.$$

Alors, F admet au moins un point fixe dans $]a,b[$.

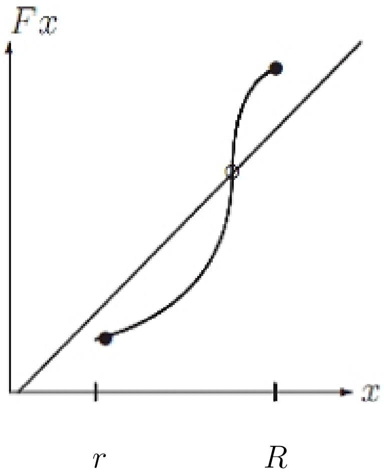
Théorème 2.2.1 *([20],([7]; page 239)) Soient P un cône dans un espace de Banach X et $F : P \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles, vérifiant l'une des conditions suivantes:*

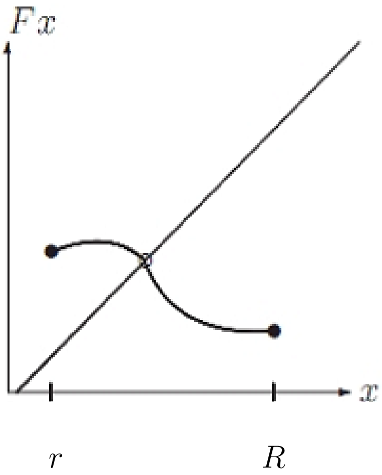
1. $F(x) \ngeq x$, $\forall x \in \partial P_r$ *et* $F(x) \nleq x$, $\forall x \in \partial P_R$.

2. $F(x) \nleq x$, $\forall x \in \partial P_r$ *et* $F(x) \ngeq x$, $\forall x \in \partial P_R$.

Alors, si $0 < r < R$, F *admet au moins un point fixe* $x \in P$ *tel que* $r \leq \|x\| \leq R$.

Illustration graphique dans $\mathbb{R}$ où $P = \mathbb{R}_+$, $\partial P_r = \{r\}$ et $\partial P_R = \{R\}$.





Démonstration. 1^er^ cas : F vérifie la condition (1).

• S'il existe $x \in \partial P_r \cup \partial P_R$ tel que $F(x) = x$, alors la preuve est terminée.

• Sinon, posons $\Omega = \overline{P_R}$, $\Omega_1 = \overline{P_R} \backslash P_r \subset \overline{P_R}$ et $\Omega_2 = P_r \subset \overline{P_R}$. On vérifie alors que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial P_r \cup \partial P_R$, et comme $F(x) \neq x$, $\forall x \in \partial P_r \cup \partial P_R$, l'indice du point fixe étant additif, donc

$$i(F, \overline{P_R}, P) = i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) + i(F, P_r, P) \Rightarrow i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) = -1.$$

En effet, d'après les lemmes 2.2.4 et 2.2.7, la première inégalité de 1 donne

$$i(F, P_r, P) = 1,$$

et la deuxième donne

$$i(F, \overline{P_R}, P) = 0.$$

Par suite, on obtient $i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) = -1$.

• **2$^{\text{ème}}$ cas** : F vérifie la condition (2).

Si on procède de la même manière que dans le premier cas, on trouve

$$i(F, P_r, P) = 0,$$

$$i(F, \overline{P_R}, P) = 1.$$

Par suite, on obtient

$$i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) = 1.$$

Finalement, on a démontré que $i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) \neq 0$, et en utilisant la propriété de l'existence de l'indice du point fixe, on conclut que F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_R} \backslash P_r$. D'où le résultat. ■

Théorème 2.2.2 *([7], page 239) Soient P un cône dans un espace de Banach X, $P_R = P \cap B(0, R)$ et $F : \overline{P_R} \rightarrow P$ une k-contraction stricte d'ensembles vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$F(x) \neq \lambda x$, $\forall x \in \partial P_R$ et $\forall \lambda > 1$;*
2. *$\exists r \in [0, R]$ et $\rho \in P \backslash \{\theta\}$ tel que $x - F(x) \neq \lambda \rho$ $\forall x \in \partial P_r$ et $\lambda > 0$.*

Alors, F admet au moins un point fixe dans $P_{r,R} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\}$.

Démonstration. Supposons qu'il y'a aucun point fixe sur $\partial P_r \cup \partial P_R$ i.e $F(x) \neq x$, $\forall x \in \partial P_r \cup \partial P_R$. Et posons $\Omega = P_R$, $\Omega_1 = P_R \backslash \overline{P_r} \subset P_R$ et $\Omega_2 = P_r \subset P_R$. On vérifie aisément que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial P_r \cup \partial P_R$, et comme l'indice du point fixe est additif, donc

$$i(F, P_R, P) = i(F, P_R \backslash \overline{P_r}, P) + i(F, P_r, P). \tag{2.2.13}$$

L'hypothèse (1) et le lemme 2.2.3 entraînent que $i(F, P_R, P) = 1$, d'autre part, l'hypothèse (2) et le lemme 2.2.6 nous donne que $i(F, P_r, P) = 0$. Alors, en remplaçant dans (2.2.13) on aura, $i(F, P_R \backslash \overline{P_r}, P) = 1$, et par conséquent F admet au moins un point fixe sur $P_{r,R} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\}$. ■

Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme

La version de type norme du théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii, est obtenue par Guo [14].

Théorème 2.2.3 *Soient X un espace de Banach, Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de X tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $P \subset X$ un cône et $F : P \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to X$ une application complètement continue vérifiant l'une des conditions suivantes:*

1. $\|Fx\| \leq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \geq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.
2. $\|Fx\| \geq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \leq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors, F admet au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

En 1987, Sun a généralisé le théorème 2.2.3 pour une contraction stricte d'ensemble en donnant la version suivante.

Théorème 2.2.4 *[26] Soit P un cône d'un espace de Banach E et $P_r = \{x \in P : \ \|x\| \leq r\}$, $P_{r,R} = \{x \in P, \ r \leq \|x\| \leq R\}$ avec $R > r > 0$. On considéré une k-contraction stricte d'ensembles $F : P_r \to P$ vérifiant l'une des conditions suivantes:*

1. $\|F(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in P,$ *et* $\|x\| = r; \|F(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in P, \|x\| = R;$
2. $\|F(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in P,$ *et* $\|x\| = r; \|F(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in P, \|x\| = R.$

Alors, F admet un point fixe $x \in P_{r,R}$.

Démonstration. Démontrons ce théorème sous la condition 1. (la preuve est analogue si F vérifie 2).

- S'il existe $x \in \partial P_r \cup \partial P_R$ tel que $F(x) = x$, alors la preuve est terminée.
- Sinon, posons $\Omega = \overline{P_R}$, $\Omega_1 = \overline{P_R} \backslash P_r \subset \overline{P_R}$ et $\Omega_2 = P_r \subset \overline{P_R}$. On a alors $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial P_r \cup \partial P_R$, dans ce cas, la condition 1 devient

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \text{ et } F(x) \neq x, \ \forall x \in \partial P_r \ . \tag{2.2.14}$$

$$\|F(x)\| \geq \|x\| \text{ et } F(x) \neq x, \ \forall x \in \partial P_R. \tag{2.2.15}$$

Or d'une part, on a (2.2.14) $\Rightarrow$ (2.2.4). En effet; raisonnons par l'absurde et supposons que l'hypothèse (2.2.14) est vérifiée sans que (2.2.4) le soit. Donc, $\exists x_0 \in \partial P_r$, $\exists \lambda_0 \geq 1$ tels que $F(x_0) = \mu_0 x_0$.

• Si $\mu_0 > 1$: $\|F(x_0)\| = \|\mu_0 x_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, ce qui contredit le fait que $\|F(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in \partial P_r$.

• Si $\mu_0 = 1$: $F(x_0) = x_0$. Ce qui contredit le fait que $F(x) \neq x$, $\forall x \in P_r$.

Ainsi, on a démontré que $\|F(x)\| \leq \|x\|$ et , $F(x) \neq x$, $\forall x \in \partial P_r \Rightarrow F(x) \neq \mu x, \forall x \in \partial P_r$ et $\mu \geq 1$. Par suite, le lemme 2.2.3 nous donne

$$i(F, P_r, P) = 1.$$

D'autre part, (2.2.15) $\Rightarrow$ (2.2.6). En effet; raisonnons par l'absurde, supposons donc que:

$$\forall u_0 \in P, \exists x_0 \in \partial P_R, \exists \lambda_0 \geq 0 \ : x_0 - F(x_0) = \lambda_0 u_0 \text{ et } \lambda u_0 \in P$$

• $\lambda_0 = 0$: $F(x_0) = x_0$, contradiction avec $F(x) \neq x$, $\forall x \in \partial P_R$.

• $\lambda_0 > 0$: $x_0 - F(x_0) = \lambda_0 u_0 > 0 \Rightarrow F(x_0) < x_0 \Rightarrow \|F(x_0)\| < \|x_0\|$, contradiction avec $\|F(x)\| \geq \|x\|$, $\forall x \in P_R$. Le lemme 2.2.6, entraîne que

$$i(F, P_R, P) = 0.$$

Comme $F(x) \neq x$, $\forall x \in \partial P_r \cup \partial P_R$, et l'indice du point fixe étant additif, alors

$$i(F, \overline{P_R}, P) = i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) + i(F, P_r, P)$$

ce qui implique

$$i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) = -1.$$

Finalement, on a démontré que $i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) \neq 0$, en utilisant la propriété de l'existence de l'indice du point fixe, on conclut que F admet au moins un point fixe $x \in \overline{P_R} \backslash P_r$. D'où le résultat. ■

Une autre version du théorème d'expansion et de compression d'un cône est la suivante

Théorème 2.2.5 *[26] Soit P un cône d'un espace de Banach E et $P_R = \{x \in P : \ \|x\| \leq R\}$, $P_r = \{x \in P : \ \|x\| \leq r\}$ avec $R > r > 0$. On considère une k-contraction stricte d'ensembles $F : P_r \to P$ vérifiant l'une des conditions suivantes:*

1. *$\exists \delta > 0$ tel que $\|F(x)\| \geq (k+\delta)\|x\|$ $\forall x \in \partial P_R \cap P$,*

   $F(x) \neq \lambda x$ $\forall x \in \partial P_R \cap P$ et $0 < \lambda < 1$;

   $F(x) \neq \mu x$ $\forall x \in \partial P_r \cap P$ et $\mu > 1$.

2. *$\exists \delta > 0$ tel que $\|F(x)\| \geq (k+\delta)\|x\|$ $\forall x \in \partial P_r \cap P$,*

   $F(x) \neq \lambda x$ $\forall x \in \partial P_r \cap P$ et $0 < \lambda < 1$.

   $F(x) \neq \mu x$ $\forall x \in \partial P_R \cap P$ et $\mu > 1$.

Alors, F admet un point fixe sur $\overline{P_R} \backslash P_r$.

Démonstration. Démontrons ce théorème sous la condition (1). (la preuve est analogue si F vérifie 2).

• S'il existe $x \in \partial P_r \cup \partial P_R$ tel que $F(x) = x$, alors la preuve est terminée.

• Supposons que F n'admet pas de point fixe sur $\partial P_r \cup \partial P_R$. D'une part, le lemme 2.2.10 entraîne que

$$i(F, P_R, \theta) = 0.$$

D'autre part, le lemme 2.2.3 nous donne que

$$i(F, P_r, \theta) = 1.$$

L'indice du point fixe étant additif, on obtient alors

$$i(F, \overline{P_R}, P) = i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) + i(F, P_r, P) \Rightarrow i(F, \overline{P_R} \backslash P_r, P) = -1.$$

D'où F admet un point fixe sur $\overline{P_R} \backslash P_r$. ■

En 2010, Feng Meiqiang , Xuemei Zhang et Ge Weigao ont généralisé le théorème d'expansion et de compression d'un cône de type norme de Guo-Sun, en remplaçant la norme par une fonctionnelle convexe dans les deux théorèmes suivants:

Théorème 2.2.6 *[20] Soit Ω_1 un ensemble ouvert borné de E tels que $\theta \in \Omega_1$, $\Omega_2 = \{x \in E | \, \|x\| < R\}$ et $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Supposons que $F : P \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to P$ est une k-contraction stricte d'ensembles et $\rho : P \to [0, \infty[$ une fonction convexe, uniformément continue avec $\rho(\theta) = 0$, $\rho(x) > 0$ $\forall x \neq \theta$ et $\rho(x) \leq \|x\|$, satisfaisant les conditions suivantes*

1. *$\rho(F(x)) \leq \rho(x)$ $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$,*

2. $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\rho(x)>0$, *et* $\exists\,\delta>0$ *tels que* $\frac{R}{\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\rho(x)}\le 1+\frac{\delta}{k}$ *et* $\rho(F(x))\geq(k+\delta)\,\rho(x)$, *et* $F(x)\neq\mu x,\;\; 0<\mu\leq 1,\,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$.

Alors, F a au moins un point fixe dans $P\cap\left(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1\right)$.

Démonstration. D'après le lemmes 2.2.11, la condition (2) donne

$$i\,(F,P\cap\Omega_2,P)=0. \tag{2.2.16}$$

D'autre part, D'après le lemmes 2.2.5, la condition (1) entraîne que

$$i\,(F,P\cap\Omega_1,P)=1. \tag{2.2.17}$$

Comme l'indice du point fixe est additif et $\Omega_1\subset\Omega_2$, alors

$$i(F,P\cap\Omega_2,P)=i(F,P\cap\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1,P)+i(F,P\cap\Omega_1,P).$$

Par suite, on obtient

$$i(F,P\cap\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1,P)=-1.$$

Finalement, de la propriété de l'existence de l'indice du point fixe, on conclut que F admet au moins un point fixe $x\in P\cap\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1$. D'où le résultat. ■

Théorème 2.2.7 *[20] Soit* $\Omega_1=\{x\in E|\,\|x\|<R\}$ *et Ω_2 un ensemble ouvert borné de E tels que $\Omega_1\subset\Omega_2$. Supposons que* $F:P\cap\left(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1\right)\to P$ *est une k-contraction stricte d'ensembles et* $\rho:P\to[0,\infty[$ *une fonction convexe, uniformément continue avec* $\rho(\theta)=0$, $\rho(x)>0\;\forall x\neq\theta$ *et* $\rho(x)\leq\|x\|$, *satisfaisant les conditions suivantes*

1. $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\rho(x)>0$, *et* $\exists\,\delta>0$ *tels que* $\frac{R}{\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\rho(x)}\le 1+\frac{\delta}{k}$ *et* $\rho(F(x))\geq(k+\delta)\,\rho(x)$, *et* $F(x)\neq\mu x,\;\; 0<\mu\leq 1,\,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$.

2. $\rho(F(x))\leq\rho(x)\;\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$.

Alors, F admet au moins un point fixe dans $P\cap\left(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1\right)$.

Démonstration. Identique à celle du théorème 2.2.6. ■

Corollaire 2.2.1 *[20] Soit Ω_1 un ensemble ouvert borné de E tels que $\theta\in\Omega_1$, et* $\Omega_2=\{x\in E|\,\|x\|<R\}$ *et $\Omega_1\subset\Omega_2$. Supposons que* $F:P\cap\left(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1\right)\to P$ *est une k-contraction stricte d'ensembles et* $\rho:P\to[0,\infty[$ *une fonction convexe, uniformément continue avec* $\rho(\theta)=0$, $\rho(x)>0\;\forall x\neq\theta$ *et* $\rho(x)\leq\|x\|$, *satisfaisant les conditions suivantes*

1. $\rho(F(x)) \leq \rho(x)$ $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$,

2. $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \rho(x) > 0$, *avec* $\frac{R}{\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \rho(x)} \leq \frac{1}{k}$ *et* $\rho(F(x)) \geq \rho(x)$, *et* $F(x) \neq \mu x$, $0 < \mu \leq 1$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors, F a au moins un point fixe dans $P \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Démonstration. Le résultat se démontre en prenant $(k + \delta) = 1$ dans la démonstration du théorème 2.2.6. ■

Corollaire 2.2.2 *[20] Soit* $\Omega_1 = \{x \in E | \, \|x\| < R\}$ *et Ω_2 un ensemble ouvert borné de E tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Supposons que $F : P \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to P$ est une k-contraction stricte d'ensembles et $\rho : P \to [0, \infty[$ une fonction convexe uniformément continue avec $\rho(\theta) = 0$, $\rho(x) > 0$ $\forall x \neq \theta$ et $\rho(x) \leq \|x\|$, satisfaisant les conditions suivantes*

1. $\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \rho(x) > 0$, *avec* $\frac{R}{\inf\limits_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \rho(x)} \leq \frac{1}{k}$ *et* $\rho(F(x)) \geq \rho(x)$, *et* $F(x) \neq \mu x$, $0 < \mu \leq 1$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$.

2. $\rho(F(x)) \leq \rho(x)$ $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Alors, F admet au moins un point fixe dans $P \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Démonstration. Le résultat se démontre en prenant $(k + \delta) = 1$ dans la démonstration du théorème 2.2.6. ■

2.3 Théorèmes d'existence des points fixes multiples d'une contraction stricte d'ensembles

Théorème 2.3.1 *Soient Ω_1, Ω_2 et Ω_3 trois ouverts bornés de E tels que $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_3$, soit $F : P \cap \overline{\Omega_3} \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles satisfaisant les hypothèses suivantes*

$$F(x) \nleq x, \quad x \in P \cap \partial\Omega_1, \tag{2.3.1}$$

$$F(x) \ngeq x, \quad x \in P \cap \partial\Omega_2, \tag{2.3.2}$$

$$F(x) \nleq x, \quad x \in P \cap \partial\Omega_3. \tag{2.3.3}$$

Alors, F admet au moins deux points fixes x^* et x^{**} dans $P \cap \Omega_3$, et $x^* \in P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right)$, $x^{**} \in P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right)$.

Démonstration. Le lemme 2.2.7, (2.3.1) et (2.3.3) entraînent que

$$i\,(F, P \cap \Omega_1, P) = i\,(F, P \cap \Omega_3, P) = 0. \tag{2.3.4}$$

D'après le lemme 2.2.4, et (2.3.2) on obtient que

$$i\,(F, P \cap \Omega_2, P) = 1, \tag{2.3.5}$$

Ensuite, par la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on aura d'une part,

$$i\,(F, P \cap \Omega_2, P) = i\,(F, P \cap \Omega_1, P) + i\left(F, P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right), P\right),$$

donc

$$i\left(F, P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right), P\right) = i\,(F, P \cap \Omega_2, P) - i\,(F, P \cap \Omega_1, P) = 1. \tag{2.3.6}$$

Et d'autre part,

$$i\,(F, P \cap \Omega_3, P) = i\,(F, P \cap \Omega_2, P) + i\left(F, P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right), P\right)$$

alors

$$i\left(F, P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right), P\right) = i\,(F, P \cap \Omega_3, P) - i\,(F, P \cap \Omega_2, P) = -1. \tag{2.3.7}$$

Ainsi, en utilisant la propriété de permanence du théorème 2.1.2, on obtient qu'il existe $(x^* \neq \theta) \in P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right)$, et $(x^{**} \neq \theta) \in P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right)$ tel que $x^* = F\,(x^*)$ et $x^{**} = F(x^{**})$. ■

Théorème 2.3.2 *Soient Ω_1, Ω_2 et Ω_3 trois ouverts bornés de E tels que $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_3$, soit $F : P \cap \overline{\Omega_3} \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles satisfaisant les hypothèse suivantes*

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|F(x)\| > k \sup_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|x\|, \qquad F(x) \neq \mu x, x \in P \cap \partial\Omega_1, \mu \in \left]0, 1\right], \tag{2.3.8}$$

$$F(x) \neq \mu x, x \in P \cap \partial\Omega_2, \mu \geq 1, \tag{2.3.9}$$

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_3} \|F(x)\| > k \sup_{x \in P \cap \partial\Omega_3} \|x\|, \qquad F(x) \neq \mu x, x \in P \cap \partial\Omega_3, \mu \in \left]0, 1\right], \tag{2.3.10}$$

Alors, F admet deux points fixes x^* et x^{**} dans $P \cap \Omega_3$, et $x^* \in P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right)$, $x^{**} \in P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right)$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est basée sur les lemmes 2.2.3 et 2.2.9. ■

Théorème 2.3.3 *Soient Ω_1, Ω_2 et Ω_3 trois ouverts bornés de E tels que $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_3$, soit Ω_1, et Ω_3 deux boules ouvertes de centre θ, et $F : P \cap \overline{\Omega_3} \to P$ une k-contraction stricte d'ensembles vérifiant*

$$\|F(x)\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1, \tag{2.3.11}$$

$$\|F(x)\| \leq \|x\|, \quad F(x) \neq x, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2, \tag{2.3.12}$$

$$\|F(x)\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_3. \tag{2.3.13}$$

Alors, F admet deux point fixe x^* et x^{**}, tel que $x^* \in P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right)$, $x^{**} \in P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right)$.

Démonstration. Montrons d'abord que F admet un point fixe dans $P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right)$. Si F admet un point fixe sur $P \cap \partial\Omega_1$, alors la preuve est terminée.

Ainsi, supposons que $F(x) \neq x$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ et montrons que $F(x) \neq \mu x$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1, 0 < \mu < 1$. Si $\exists\ x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$ et $0 < \mu_0 < 1$ telles que $F(x_0) = \mu_0 x_0$, alors

$$\|F(x_0)\| = \mu_0 \|x_0\| < \|x_0\|,$$

ce qui contredit (2.3.11). D'où $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, $0 < \mu < 1$, $F(x) \neq \mu x$.

Maintenant, montrons que

$$\forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \inf_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|F(x)\| > k \sup_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|x\|.$$

Comme F est une k-contraction stricte d'ensembles $(0 \leq k < 1)$, et Ω_1 une boule ouverte de centre θ et de rayon r_1, et $\|F(x)\| \geq \|x\|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_1$, alors

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|F(x)\| \geq \sup_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|x\| = r_1 > kr_1 = k \sup_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|x\|.$$

Par conséquent, (2.3.8) est vérifié.

D'où, il reste a montré que $F(x) \neq \mu x$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega_2$, $\mu \geq 1$ est satisfaite. En effet, si $\exists\ x_1 \in P \cap \partial\Omega_2$ et $\mu_1 \geq 1$ tels que $F(x_1) = \mu_1 x_1$, alors par (2.3.11) on a $\mu_1 \neq 1$, d'où,

$$\|F(x_1)\| = \mu_1 \|x_1\| > \|x_1\|, \ \mu_1 > 1,$$

ce qui contredit (2.3.12).

Ensuite le lemme 2.2.9, donne

$$i\,(F, P \cap \Omega_1, P) = 0.$$

Or le lemme 2.2.3, entraîne que

$$i\left(F, P \cap \Omega_2, P\right) = 1.$$

Et comme l'indice du point fixe est additif, alors

$$i(F, P \cap \left(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}\right), P) = i\left(F, P \cap \Omega_2, P\right) - i(F, P \cap \Omega_1, P) = 1.$$

En utilisant la propriété d'existence de l'indice du point fixe, on conclut que F admet au moins un point fixe $x \in P \cap \overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1$.

De la même manière on montre que F admet un point fixe $x^{**} \in P \cap \left(\Omega_3 \backslash \overline{\Omega_2}\right)$. ■

2.4 Généralisations du théorème de Schauder

Théorème du point fixe de Brouwer

En 1912, Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe. Ce théorème a beaucoup d'applications dans l'analyse.

Théorème 2.4.1 *[31] Soit C un sous ensembles non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$. Si l'application $F : C \to C$ est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans C.*

Théorème du point fixe de Schauder

Plus tard en 1930, Schauder a prolongé le théorème de Brouwer au cas de dimension infinie.

Théorème 2.4.2 (Théorème de Schauder [1]) *Soit X un espace de Banach réel, C une partie non vide, convexe, fermée bornée de X. Si l'application $F : C \to C$ est compacte, alors F admet au moins un point fixe dans C.*

Corollaire 2.4.1 *Soit C une partie non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X. Si l'application $F : C \to C$ est continue, alors F admet au moins un point fixe dans C.*

Plus tard ce théorème a été généralisé par Darbo pour une nouvelle classe d'application définie par la mesure de non compacité de Kuratowski.

Théorème du point fixe de Darbo

En 1955, Darbo a formulé la généralisation suivante du théorème de Shauder.

Théorème 2.4.3 (G.Darbo [23],[25]) *Soit X un espace de Banach, C une partie fermée, bornée, convexe et non vide de X et $F : C \to C$ une k-contraction stricte d'ensembles, alors F admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration. Soit la suite des ensembles $(A_n)_n$ définie par:

$$A_0 = C \text{ et } A_{n+1} = \overline{conv} F(A_n), \ \forall n \geq 0.$$

Evidemment, (A_n) est une suite de sous ensembles décroissante, convexes, fermés et vérifiant $F(A_n) \subset A_n \ \forall n$. Par conséquent $\widetilde{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ est un convexe fermé. Alors

$$\alpha(A_{n+1}) = \alpha(\overline{conv} F(A_n)) \leq k\alpha(A_n) \leq ... \leq k^n \alpha(C) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

D'après la proposition 1 (voir l'annexe) $\widetilde{A}$ est compact. De plus, $F : C \to C$ est continue. Par conséquent, le théorème de Shauder entraîne que F admet un point fixe $x \in \widetilde{A} \subset C$. D'où le résultat. ■

Théorème du point fixe de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les application condensante.

Théorème 2.4.4 *[7] Soit C un ensemble non vide, convexe, fermé, borné, d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application condensante.*

Alors, F admet un point fixe dans C.

Démonstration. Choisissons $m \in C$ et notons par Σ le système de tout les sous ensembles convexes fermés K de C vérifiant $m \in K$ et $F(K) \subset K$.

Posons $B = \bigcap\limits_{K \in \Sigma} K$ et $Q = \overline{conv}(F(B) \cup \{m\})$. On trouve que

$$B = Q. \tag{2.4.1}$$

En effet,

d'une part, on a $m \in B$ et $F(B) \subset B$, alors $Q = \overline{conv}(F(B) \cup \{m\}) \subseteq \overline{conv} B = B$.

D'autre part, $Q \subseteq B$ implique que $F(Q) \subseteq F(B) \subseteq Q$, donc $Q \in \Sigma$, et par conséquent, $B \subseteq Q$.

D'où,

$$\alpha(B) = \alpha(Q) = \alpha\left(\overline{conv}\left(F(B) \cup \{m\}\right)\right) = \max\left(\alpha(F(B)), \underbrace{\alpha(\{m\})}_{=0}\right) = \alpha(F(Q)). \tag{2.4.2}$$

Comme F est une application condensante, (2.4.1) et (2.4.2) entraînent que $\alpha(B) = 0$. Ce qui implique que B est compacte et convexe.

Par conséquent, le théorème de Shauder entraîne que F admet un point fixe $x \in C$. ■

Théorème du point fixe de Mönch

En 1980, Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadowski dans le théorème suivant:

Théorème 2.4.5 (*[1], page* 40) *Soit C un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach X avec $x_0 \in C$. Soit $F : C \to C$ une application continue vérifiant la propriété suivante*

$$\left(D \subset C,\ D \text{ dénombrable, } D \subset \overline{conv}\left(\{x_0\} \cup F(D)\right)\right) \Longrightarrow \overline{D} \text{ compact.} \tag{2.4.3}$$

Alors, F admet un point fixe dans C.

CHAPITRE 3

Applications

Dans ce chapitre nous étudions deux équations différentielles ordinaires dans un espace de Banach de différents ordres, l'une est associée à une condition initiale et l'autre à des conditions aux limites

3.1 Applications à un problème de Cauchy dans un espace de Banach

Soit E un espace de Banach.

Soit le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}b_1)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]0,1[, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \overline{B(x_0, r_0)} \to E$ est une application continue sur

$$R = \{(t,x) : t \in [0,1],\ x \in B(x_0, r_0) \text{ où } r_0 > 0, x_0 \in E\}.$$

Le lemme suivant nous donne une inégalité, qui nous sera utile pour la suite.

Lemme 3.1.1 *[2] Soit E un espace de Banach et $\Omega \subset \mathcal{C}([0,1], E)$ un sous-ensemble équicontinu . Supposons que f est une fonction uniformément continue sur R et pour tout $M \subset B(x_0, r_0)$ et tout $t \in [0,1]$, f vérifie la condition suivante*

$$\alpha(f(t \times M)) \leq k\alpha(M).$$

Alors, on a l'inégalité

$$\alpha\left(\left\{x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \ : x(.) \in \Omega\right\}\right) \leq k \max_{s\in[0,1]} \alpha(\Omega(s)).$$

Démonstration. La famille des fonctions $\{f(.,y(.)),\ y\in\Omega\}$ est équicontinue.

D'autre part

$$\int_0^t f(s,y(s))\,ds \simeq \frac{t}{n}\sum_{i=1}^n f(s_i,y(s_i)),\quad s_i=i\frac{t}{n},\quad y\in\Omega.$$

L'invariance par translation et l'homogénéité de MNC α entraînent que

$$\begin{aligned}\alpha\left(\left\{x_0+\int_0^t f(s,x(s))\,ds\ :x(.)\in\Omega\right\}\right) &\le \alpha\left(\int_0^t f(s,x(s))\,ds\ :x(.)\in\Omega\right)\\ &= \alpha\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n f(s_i,x(s_i))\ \ s_i=i\frac{t}{n},\ x\in\Omega\right)\\ &= t\alpha\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(s_i,x(s_i))\right).\end{aligned}$$

Alors, pour démontrer ce lemme il suffit de vérifier que

$$\alpha(\Gamma_n)\le k\max_{s\in[0,1]}\alpha(\Omega(s))$$

où

$$\Gamma_n=\left\{z:z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(s_i,y(s_i)),\ y\in\Omega\right\}.$$

D'après la monotonie, l'invariance par passage à l'enveloppe convexe et la semi-additivité de α, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_n &\subset convQ_n,\ \text{où } Q_n=\bigcup_{i=1}^n f(s_i,y(s_i)),\\ \alpha(\Gamma_n) &\le \alpha(convQ_n)=\alpha\left(conv\left(\bigcup_{i=1}^n f(s_i,y(s_i))\right)\right)=\alpha\left(\bigcup_{i=1}^n f(s_i,y(s_i))\right)\\ &\le k\max_{s_i\in[0,1]}\alpha(f(s_i,y(s_i))),\quad s_i=i\frac{t}{n},\ x\in\Omega,\ i=1..n\\ &\le k\max_{s\in[0,1]}\alpha(\Omega(s)).\end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.1 *([24], [2]) Soit E un espace de Banach et f une fonction uniformément continue sur $R=\{(t,x):t\in[0,1],\ x\in B(x_0,r_0)\ \text{où}\ r_0>0,x_0\in E\}$, vérifiant la condition suivante*

$$\alpha(f(t\times M))\le k\alpha(M),\ \forall M\subset B(x_0,r_0),\ t\in[0,1]\quad \text{où } k\in\left]0,1\right[. \qquad (\mathcal{H}_C)$$

Alors, il existe $t_0\in\left]0,1\right]$ tel que le problème $(\mathcal{P}b_1)$ admet une solution dans $\mathcal{C}^1([0,t_0],E)$.

Démonstration. On va appliquer le théorème du point fixe de Darbo. Posons

$$M = \sup\left\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in [0,1] \times \overline{B(x_0, r_0)}\right\} \text{ et } t_0 = \min\left\{1, \frac{r_0}{M}\right\}.$$

★ Le problème $(\mathcal{P}b_1)$ est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds. \tag{$\mathcal{Q}$}$$

En effet, d'une part on intègre l'équation du problème $(\mathcal{P}b_1)$ entre 0 et t, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t x'(s) ds &= \int_0^t f(s, x(s))\, ds \\
[x(s)]_0^t &= \int_0^t f(s, x(s))\, ds \\
x(t) - x(0) &= \int_0^t f(s, x(s))\, ds \\
x(t) &= x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, on dérive l'équation $\mathcal{Q}$ deux fois en utilisant

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(s)\, ds\right) = b'(t)f(t) - a'(t)f(t),$$

on aura le résultat.

★ Posons $X = \mathcal{C}([0, t_0], E)$ muni de la norme $\|x\|_X = \max\{\|x(t)\|_E : t \in [0,1]\}$.

X est un espace de Banach. En effet,

X est un espace vectoriel normé donc il reste à montrer qu'il est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X.

D'une part pour tout $t \in [0, t_0]$, $(x_n(t))_n$ est une suite de Cauchy dans E car:

$$\|x_n\|_X = \max\{\|x_n(t)\|_E : t \in [0, t_0]\}.$$

Comme E est un espace de Banach, alors $\forall t \in [0, t_0]$, $\exists x(t) \in E$ tel que $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ dans E. D'où, $\max\limits_{t\in[0,t_0]} \|x_n(t) - x(t)\| \to 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

★ Soit

$$K = \{x \in X : x(0) = x_0,\ \ \|x(t) - x(0)\| \leq r_0\} \subset B(x_0, r_0)$$

Alors, K est un sous-ensemble convexe fermé borné de X. En effet,

⧫ K est convexe.

Soient $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, montrons que $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$. On a

$$x \in K \text{ alors } x \in X : x(0) = x_0 \text{ et } \|x(t) - x(0)\|_{\mathcal{C}} \leq r_0, \tag{3.1.1}$$

et

$$y \in K \text{ alors } y \in X : y(0) = x_0 \text{ et } \|y(t) - y(0)\|_{\mathcal{C}} \leq r_0 \tag{3.1.2}$$

On multiplie l'équation (3.1.1) par λ et l'équation (3.1.2) par $(1-\lambda)$, on obtient

$$\lambda x \in X,\ \ \lambda x(0) = \lambda x_0 \text{ et } \lambda \|x(t) - x(0)\|_{\mathcal{C}} \leq \lambda r_0 \tag{3.1.3}$$

$$(1-\lambda) y \in X,\ (1-\lambda) y(0) = (1-\lambda) x_0 \text{ et } (1-\lambda)\|y(t) - y(0)\|_{\mathcal{C}} \leq (1-\lambda) r_0. \tag{3.1.4}$$

Par sommation de (3.1.3) et (3.1.4) on obtient

$$\lambda x(t_0) + (1-\lambda) y(t_0) = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_0 = x_0$$

et

$$\|\lambda(x(t) - x(0)) + (1-\lambda)(y(t) - y(0))\| \leq \lambda \|x(t) - x(0)\| + (1-\lambda)\|y(t) - y(0)\|$$

$$\|(\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) - (\lambda x(0) + (1-\lambda) y(0))\| \leq \lambda r_0 + (1-\lambda) r_0 = r_0.$$

♦ K est borné, car pour tout $x \in K$, on a :

$$\|x - x_0\|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in [0,t_0]} \|x(t) - x(t)\|_{\mathcal{C}} \leq r_0$$

Ce qui donne que $K \subset \overline{B(x_0, r_0)}$.

♦ K est fermé, car K est une boule fermé de centre $x(0)$ et de rayon r_0.

Maintenant, on définit $\mathcal{T} : K \to X$ par

$$\mathcal{T} x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

★ $\mathcal{T}(K) \subset K$. En effet, soit $x \in K$.

D'une part, on a

$$(\mathcal{T} x)(0) = x_0 + \int_0^0 f(s, x(s))\, ds = x_0$$

et d'autre part, pour tout $t \in]0, t_0]$, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T} x)(t) - (\mathcal{T} x)(0)\| &= \left\| \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_0^{t_0} \|f(s, x(s))\|\, ds \\ &\leq M t_0 \\ &\leq M \frac{r_0}{M} = r_0. \end{aligned}$$

★ Maintenant, montrons que $\mathcal{T}$ est une k-contraction stricte d'ensembles.

♦ $\mathcal{T}$ est continue. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K, convergente vers un certain élément x.

$$(\mathcal{T}x_n)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds, \ \forall t \in [0,1].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(s, x_n(s)) \to f(s, x(s)), \ \forall s \in [0,t] \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|f(s, x_n(s))\|_E\, ds &\leq \sup_{s\in[0,1]} \|f(s, x_n(s))\|_E \int_0^t ds \\
&\leq tM \ \forall t \in [0,1] \\
&\leq M
\end{aligned}$$

Ensuite, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir Annexes) entraîne que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x\|_X &= \max_{t\in[0,t_0]} \|(\mathcal{T}x_n)(t) - (\mathcal{T}x)(t)\|_E \\
&= \max_{t\in[0,t_0]} \left\| \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds - \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right\|_E \\
& \max_{t\in[0,t_0]} \left\| \left[\int_0^t f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \right\|_E \\
&\leq \max_{t\in[0,t_0]} \int_0^t \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|_E\, ds \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,
\end{aligned}$$

ceci montre la continuité de $\mathcal{T}$ sur K.

♦ Soit B un sous ensemble bornée de X, $\exists k \in]0,1]$ tel que $\alpha(\mathcal{T}(B)) \leq k\alpha(B)$.

En effet, d'après le théorème 1.2.2, le lemme 3.1.1 et $(\mathcal{H}_C)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{T}(B)) &= \sup_{t\in[0,t_0]} \alpha(\{(\mathcal{T}x)(t) : x(.) \in B\}) \\
&= \sup_{t\in[0,t_0]} \alpha\left(\left\{ x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \ : x(.) \in B \right\}\right) \\
&\leq t_0 k\alpha(B) \\
&\leq k\alpha(B).
\end{aligned}$$

Conclusion

Comme $\mathcal{T} : K \longrightarrow K$ est une k-contraction stricte d'ensembles, et K est un ensemble convexe, fermé, borné de X, alors le théorème de Darbo (2.4.3) est applicable et par conséquent, $\mathcal{T}$ admet un point fixe dans K, c'est à dire que l'équation $\mathcal{Q}$ admet une solution, Donc, $(\mathcal{P}b_1)$ admet une solution locale dans $[0, t_0]$, d'où le résultat. ■

3.2 Applications à un problème aux limites dans un espace de Banach [12]

Considérons le problème aux limites du second ordre suivant

$$(\mathcal{P}b_2) \quad \begin{cases} -x''(t) = f(t, x(t)),\ t \in]0,1[\,, \\ \qquad x(0) = x(1) = \theta. \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}(I \times P, P)$, P un cône normal d'un espace de Banach E et $I = [0,1]$. Supposons que $f(t,\theta) \equiv \theta$, donc $x\,(t) \equiv \theta$ est une solution triviale du problème $(\mathcal{P}b_2)$.

Il est clair que, $Q = \{x \in \mathcal{C}(I,E)$ tel que $x\,(t) \geq \theta\ \forall t \in I\}$ est un cône de l'espace de Banach $\mathcal{C}(I,E)$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{C}}$ telle que $\|.\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{t\in I} \|x\,(t)\|_E$.

Une fonction $x(t) \in \mathcal{C}^2(I,E)$ s'appelle une solution positive du problème $(\mathcal{P}b_2)$ si elle satisfait au problème $(\mathcal{P}b_2)$ et que $x \in Q$, $x\,(t) \neq \theta$.

Nous établissons d'abord quelques lemmes utiles pour la suite

Lemme 3.2.1 *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times P, P)$. On définit sur Q l'application F par*

$$(Fx)\,(t) = \int_0^1 G\,(t,s)\, f\,(s, x\,(s))\, ds, \tag{3.2.1}$$

où la fonction de Green $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est donnée par:

$$G(t,s) = \begin{cases} t\,(1-s)\,,\ 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s\,(1-t)\,,\ 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Alors, l'application F: $Q \to \mathcal{C}^2(I,E) \cap Q$ et

(a) *Si $x(t) \in Q$ tel que $Fx = x$, alors $x(t) \in \mathcal{C}^2(I,E)$ et $x\,(t)$ est une solution du problème aux limites $(\mathcal{P}b_2)$;*

(b) *Si $x(t) \in \mathcal{C}^2(I,E) \cap Q$ est une solution du problème aux limites $(\mathcal{P}b_2)$, alors $Fx = x$.*

Démonstration. ♦ Montrons que $F\,(Q) \subset Q$.

Soit $x \in Q$, montons que $(Fx) \in Q$.

On a $x \in Q$ alors $x \in \mathcal{C}(I,E)$ se qui implique $(Fx) \in Q$. D'autre part

$$x \in Q \Longrightarrow x\,(t) \geq \theta \Longrightarrow x \in P \text{ et } f \in \mathcal{C}(I \times P, P)$$

c'est à dire

$$f\,(s, x\,(s)) \in P \Longrightarrow f\,(s, x\,(s)) \geq \theta \Longrightarrow (Fx) \geq \theta \Longrightarrow (Fx) \in Q$$

♦ Montrons le résultat (a).

Posons $y = Fx \ \forall x \in Q$, alors

$$y(t) = (1-t)\int_0^t s f(s, x(s))\, ds + t\int_t^1 (1-s) f(s, x(s))\, ds$$

On dérive y une fois, on aura

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\int_0^t s f(s, x(s))\, ds + (1-t)t f(t, x(t)) + \int_t^1 (1-s) f(s, x(s))\, ds - t(1-t) f(t, x(t)) \\ &= -\int_0^t s f(s, x(s))\, ds + \int_t^1 (1-s) f(s, x(s))\, ds. \end{aligned}$$

On dérive une deuxième fois, on obtient

$$y''(t) = -t f(t, x(t)) - (1-t) f(t, x(t)) = -f(t, x(t)).$$

De plus, on a $y(0) = y(1) = \theta$.

Par conséquent, on aura $y = Fx \in \mathcal{C}^2(I, E)$ et $x(t)$ est une solution du problème aux limites (Pb_2).

♦ Montrons le résultat (b).

Soit $x \in \mathcal{C}^2(I, E) \cap Q$ une solution du problème (Pb_2).

Par intégration par partie sur $[0, t]$, on obtient

$$x'(t) - x'(0) = -\int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

En intégrant une seconde fois par partie, on aura

$$\begin{aligned} -\int_0^t \left(\int_0^\tau f(s, x(s))\, ds\right) d\tau &= -\left(\left[\tau \int_0^\tau f(s, x(s))\, ds\right]_0^t - \int_0^t \tau f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right) \\ &= -t\left(\int_0^t f(s, x(s))\, ds - \int_0^t s f(s, x(s))\, ds\right) \\ &\quad -\int_0^t (t-s) f(s, x(s))\, ds. \end{aligned}$$

D'où,

$$x(t) - x'(0) = -\int_0^t (t-s) f(s, x(s))\, ds \tag{3.2.2}$$

Posons $t = 1$ dans (3.2.2) et du fait que $x(1) = \theta$, on obtient

$$x'(0) = \int_0^1 (1-s) f(s, x(s))\, ds \tag{3.2.3}$$

Maintenant, en remplaçant (3.2.3) dans (3.2.2), on aura finalement

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^1 t(1-s) f(s,x(s))\,ds - \int_0^1 (t-s) f(s,x(s))\,ds \\
&= \int_t^1 t(1-s) f(s,x(s))\,ds + \int_0^1 s(1-t) f(s,x(s))\,ds \\
&= \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\,ds \\
&= (Fx)(t).
\end{aligned}$$

■

Dans ce qui suit, les boules fermées dans les espaces E et $\mathcal{C}(I,E)$ sont notées par $T_l = \{x \in E \text{ tel que } \|x\|_E \leq l\}$ $(l > 0)$ et $B_l = \{x \in \mathcal{C}(I,E) \text{ tel que } \|x\|_{\mathcal{C}} \leq l\}$ $(l > 0)$, respectivement.

Lemme 3.2.2 (Propriété de la fonction de Green [12]) $\forall\ 0 < \alpha < \beta < 1$, *on a*

(a) $0 \leq G(t,s) \leq 1\ \forall\ t,s \in [0,1]$;

(b) $G(t,s) \geq \alpha(1-\beta),\ \forall\ t,s \in [\alpha,\beta]$;

(c) $G(t,s) \geq \alpha(1-\beta) G(u,s),\ \forall\ t \in [\alpha,\beta],\ u,s \in [0,1]$.

(d) $\max\limits_{t,s\in I} G(t,s) = \frac{1}{4},\ \forall\ t,s \in [0,1]$.

Lemme 3.2.3 *Soit $f \in \mathcal{C}(I \times P, P)$. Supposons que, $\forall l > 0$, f est une fonction bornée et uniformément continue sur $I \times (P \cap T_l)$ et il existe une constante L_l avec $0 \leq L_l \leq \frac{1}{2}$ tels que*

$$\alpha_E(f(t,D)) \leq L_l \alpha_E(D)\ \ \forall t \in I,\ \ D \subset P \cap T_l. \tag{3.2.4}$$

Alors, $\forall l > 0$, l'application F est une k_l-contraction stricte d'ensembles dans $Q \cap B_l$ i.e. il existe une constante k_l avec $0 \leq k_l < 1$ tel que $\alpha_{\mathcal{C}}(F(S)) \leq k_l \alpha_{\mathcal{C}}(S)$ $\forall S \subset Q \cap B_l$.

Démonstration. La continuité uniforme de f, (3.2.4) entraînent que

$$\alpha_E(f(I \times D)) = \max_{t\in I} \alpha_E(f(t,D)) \leq L_l \alpha_E(D)\ \ \forall D \subset P \cap T_l. \tag{3.2.5}$$

Puisque f est uniformément continue et bornée sur $I \times (P \cap T_l)$, on a d'après (3.2.1) que F est continue et bornée sur $Q \cap B_l$.

Maintenant, soit $S \subset Q \cap B_l$, alors on a l'ensembles des fonctions $\{Fx/\ x \in S\}$ est uniformément borné et équicontinu. En effet,

On a

$$\begin{aligned}
\|Fx\|_{\mathcal{C}} &= \max_{t\in[0,1]} \|Fx(t)\|_E = \max_{t\in[0,1]} \left\| \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\, ds \right\|_E \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G(t,s)| \, \|f(s,x(s))\|_E \, ds \\
&\leq \widetilde{k} \quad \text{où } \widetilde{k} = \max_{s,x(s)\in[0,1]\times P\cap T_l} \|f(s,x(s))\|_E
\end{aligned}$$

d'où $\{Fx|\ x \in S\}$ est uniformément bornée. Et

soit $x \in S$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
\|Fx(t_1) - Fx(t_2)\|_E &= \left\| \int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s)) f(s,x(s))\, ds \right\|_E \\
&\leq M \int_0^1 |(G(t_1,s) - G(t_2,s))| \, ds \\
&\rightarrow 0 \text{ quand } t_1 \rightarrow t_2 \text{ (car la fonction G est continue sur } [0,1]\times[0,1]).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\alpha_{\mathcal{C}}(F(S)) = \sup_{t\in I} \alpha_E(F(S(t))), \tag{3.2.6}$$

où

$$F(S(t)) = \{F(x(t)) \mid x \in S,\ t \text{ fixé}\} \subset P \cap T_l, \forall t \in I.$$

Comme $0 \leq G(t,s) \leq 1$, $\forall t, s \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\alpha_E(F(S(t))) &= \alpha_E\left(\int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\, ds \right), \\
&\leq \alpha_E\left(\overline{conv}\{G(t,s) f(s,x(s)) \mid s \in I, x \in S\}\right) \\
&\leq \alpha_E\left(\overline{conv}\{f(s,x(s)) \cup \theta|\ s \in I, x \in S\}\right) \\
&= \alpha_E(\{f(s,x(s)) \cup \theta|\ s \in I, x \in S\}) \\
&= \alpha_E(\{f(s,x(s)) \mid s \in I, x \in S\})
\end{aligned}$$

$$\alpha_E(F(S(t))) \leq \alpha_E(f(I \times B)) \leq L_l \alpha_E(B)\, \forall t \in I \tag{3.2.7}$$

où

$$B = \{x(s) \mid s \in I,\ x \in S\} \subset P \cap T_l.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ S_1, S_2, ..., S_n \subset Q \cap B_l$ tel que $S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$, avec

$$diam(S_j) \leq \alpha_{\mathcal{C}}(S) + \frac{\varepsilon}{3}; \forall j = 1, 2, ..., n \tag{3.2.8}$$

Maintenant, choisissons $x_j \in S_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ et une partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_j < ... < t_m = 1$ tels que

$$\left\|x_j(t) - x_j(\bar{t})\right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall j = 1, 2, ..., n; t, \bar{t} \in [t_{i-1}, t_i], ; i = 1, 2, ..., m \tag{3.2.9}$$

Soit $B = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} B_{ij}$, où $B_{ij} = \{x(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i], \ x \in S_j\}$.

Pour tout $x(t), \overline{x}(t) \in B_{ij}$ $\left(t, \bar{t} \in [t_{i-1}, t_i], x \in S_j\right)$, (3.2.8) et (3.2.9) entraînent que

$$\begin{aligned} \left\|x(t) - \overline{x}(\bar{t})\right\|_E &\leq \|x(t) - x_j(t)\|_E + \left\|x_j(t) - x_j(\bar{t})\right\|_E + \left\|x_j(\bar{t}) - \overline{x}(\bar{t})\right\|_E \\ &\leq \|x - x_j\|_{\mathcal{C}} + \frac{\varepsilon}{3} + \|x_j - \overline{x}\|_{\mathcal{C}} \\ &\leq 2diam(S_j) + \frac{\varepsilon}{3} < 2\alpha_{\mathcal{C}}(S) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que $diam(B_{ij}) \leq 2\alpha_{\mathcal{C}}(S) + \varepsilon$, et ainsi $\alpha_E(B) \leq 2\alpha_{\mathcal{C}}(S) + \varepsilon$. on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$\alpha_E(B) \leq 2\alpha_{\mathcal{C}}(S) \tag{3.2.10}$$

Par suite, $(3.2.6), (3.2.7)$ et $(3.2.10)$ entraînent que

$$\alpha_{\mathcal{C}}(F(S)) \leq 2L_l\alpha_{\mathcal{C}}(S) \ \ \forall S \subset Q \cap B_l,$$

et par conséquent, F est une k_l-contraction stricte d'ensembles dans $Q \cap B_l$ avec $k_l = 2L_l$, car $2L_l < 1$. ■

Résultats d'existence

Voici quelques conditions qui seront utiles pour assurer l'existence des solutions positives non triviales du problème (Pb_2)

$(\mathcal{H}_1)$ $f \in \mathcal{C}(I \times P, P)$ vérifiant $f(t, \theta) \equiv \theta$, est uniformément continue et bornée sur $I \times (P \cap T_l)$. De plus, il existe une constante L_l avec $0 \leq L_l \leq \frac{1}{2}$ telle que

$$\alpha(f(t, D)) \leq L_l\alpha(D) \ \ \forall t \in I, \ D \subset P \cap T_l.$$

$(\mathcal{H}_2)$ $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ uniformément pour $t \in I$ et $x \in P$.

$(\mathcal{H}_3)$ $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ uniformément pour $t \in I$ et $x \in P$.

$(\mathcal{H}_4)$ Il existe $0 < \alpha < \beta < 1$, et $\phi \in P^* = \{\phi \in E^*,\ \phi(x) \geq \theta,\ \forall x \in P\}$ (E^* le dual topologique de E) tel que $\phi(x) > 0$

$$\forall x > \theta \lim_{\|x\| \to 0} \frac{\phi(f(t,x))}{\phi(x)} = +\infty \text{ uniformément pour } t \in [\alpha, \beta] \text{.et } x \in P$$

$(\mathcal{H}_5)$ Il existe $0 < \alpha < \beta < 1$, et $\phi \in P^*$ tel que $\phi(x) > 0$, $\forall x > \theta$ et

$$\forall x > \theta \lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\phi(f(t,x))}{\phi(x)} = +\infty \text{ uniformément pour } t \in [\alpha, \beta] \text{.et } x \in P$$

$(\mathcal{H}_6)$ Il existe $\eta > 0$, tel que $\sup\limits_{t \in I, x \in P \cap T_l} \|f(t,x)\| < \frac{4\eta}{N}$.

Théorème 3.2.1 *Soit P un cône normal. Supposons que la condition $(\mathcal{H}_1)$ est satisfaite. Si les conditions $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_5)$, où $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$ sont satisfaites, alors le problème aux limites du second ordre $(Pb_2) aaumoinsunesolutionpositive$.*

Démonstration. Posons $K = \{x \in Q |\ x(t) \geq \alpha(1-\beta)x(s),\ \forall t \in [\alpha, \beta], s \in I\}$.

Il est clair que K est un cône de l'espace de Banach $\mathcal{C}(I, E)$ et $K \subset Q$.

★ $F(K) \subset K$. En effet,

soient $x \in Q$ et $t \in [\alpha, \beta]$, la condition (c) du lemme 3.2.2 entraîne que

$$\begin{aligned}(Fx)(t) &= \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds \\ &\geq \alpha(1-\beta) \int_0^1 G(u,s) f(s, x(s))\, ds \\ &= \alpha(1-\beta) F(x(u)) \ \ \forall u \in I.\end{aligned}$$

Par conséquent ,$F(x(t)) \in K$, et alors

$$F(K) \subset K \tag{3.2.11}$$

Supposons tout d'abord que les deux condition $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_5)$ sont verifiée. Choisissons une constante M telle que

$$M > [\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)]^{-1} \tag{3.2.12}$$

et par $(\mathcal{H}_5)$ il existe $\tau > 0$ tel que

$$\phi(f(t,x)) \geq M\phi(x), \quad \forall x \in P, \|x\|_E \geq \tau,\ t \in [\alpha, \beta] \tag{3.2.13}$$

Maintenant, pour tout

$$R > N\tau[\alpha(1-\beta)]^{-1} \tag{3.2.14}$$

où N est la constante de normalité de P.

★ Montrons que

$$F(x) \nleq x, \quad \forall x \in K, \|x\|_{\mathcal{C}} = R. \tag{3.2.15}$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ avec $\|x_0\|_{\mathcal{C}} = R$ tels que $Fx_0 \leq x_0$, alors

$$x_0(t) \geq \alpha(1-\beta)\, x_0(s),$$

la normalité de P donne

$$\|\alpha(1-\beta)\, x_0(s)\| \leq N \|x_0(t)\|,$$

donc

$$N \|x_0(t)\| \geq \alpha(1-\beta)\|x_0\|, \ \forall t \in [\alpha, \beta], s \in I$$

ce qui implique, par (3.2.14) ,

$$\min_{t\in[\alpha,\beta]} \|x_0(t)\| \geq \frac{\alpha(1-\beta)}{N}\|x_0\|_{\mathcal{C}} = \frac{\alpha(1-\beta)R}{N} > \tau. \tag{3.2.16}$$

D'autre part, par la condition (b) du lemme 3.2.2, on obtient

$$x_0(t) \geq F(x_0(t)) \geq \int_\alpha^\beta G(t,s)\, f(s, x(s))\, ds$$

$$\geq \alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta f(s, x_0(s))\, ds. \tag{3.2.17}$$

Alors, (3.2.13) , (3.2.16) et (3.2.17) entraînent que

$$\begin{aligned} \phi(x_0(t)) &\geq \alpha(1-\beta)\,\phi\left(\int_\alpha^\beta f(s, x_0(s))\, ds\right) \\ &= \alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta \phi(f(s, x_0(s)))\, ds \\ &\geq \alpha(1-\beta)\int_\alpha^\beta M\phi(x_0(s))\, ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta \phi(x_0(t))\, dt \geq \alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)\, M\int_\alpha^\beta \phi(x_0(s))\, ds \tag{3.2.18}$$

De plus, on a

$$\int_\alpha^\beta \phi(x_0(t))\, dt > 0 \tag{3.2.19}$$

En effet, $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \phi(x_0(t))\,dt = 0$ implique que $\phi(x_0(t)) = 0$, et ainsi $x_0(t) = \theta$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Comme $x_0 \in K$, alors $x_0(s) = \theta$ $\forall s \in I$, et par conséquent, $\|x_0\|_{\mathcal{C}} = 0$, ce qui est en contradiction avec $\|x_0\|_{\mathcal{C}} = R$. Par (3.2.18) et (3.2.19), on aura $\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)M \le 1$, ce qui contredit (3.2.12), d'où (3.2.15) est vraie.

D'autre part, en tenant compte de la condition $(\mathcal{H}_2)$ et $f(t,\theta) \equiv \theta$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|f(t,x)\| \le \left(\frac{2}{N}\right)\|x\|, \quad \forall x \in P, \ \ \|x\| < \delta, t \in I. \tag{3.2.20}$$

• Montrons que, pour tout $0 < r < \min(\delta, R)$,

$$F(x) \not\geq x, \quad \forall x \in K, \|x\|_{\mathcal{C}} = r. \tag{3.2.21}$$

Supposons qu'il existe $x_1 \in K$ avec $\|x_1\|_{\mathcal{C}} = r$ telle que $F(x_1) \ge x_1$. Alors par la condition (d) de la fonction de Green (voir le lemme 3.2.2) on a

$$\max_{t,s\in I} G(t,s) = \frac{1}{4}. \tag{3.2.22}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\theta &\le x_1(t) \le \int\limits_0^1 G(t,s)\, f(s, x_1(s))\,ds \\ &\le \frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(s,x_1(s))\,ds \quad \forall t \in I,\end{aligned}$$

ce qui implique en tenant compte de (3.2.20) que

$$\begin{aligned}\|x_1(t)\| &\le \frac{N}{4}\int\limits_0^1 \|f(s,x_1(s))\|\,ds \\ &\le \frac{N}{4}\int\limits_0^1 \frac{2}{N}\|x_1(s)\|\,ds \\ &\le \frac{1}{2}\|x_1\|_{\mathcal{C}} = \frac{r}{2}, \quad \forall t \in I,\end{aligned}$$

et ainsi $\|x_1\|_{\mathcal{C}} \le \frac{r}{2}$, ce qui contredit $\|x_1\|_{\mathcal{C}} = r$. Par conséquent, (3.2.3) est vrai.

Le lemme 3.2.3 donne que F est une $2L_l$-contraction stricte d'ensembles sur $K_{r,R} = \{x \in K | \ \ r \le \|x\|_{\mathcal{C}} \le R\}$. les conditions (3.2.11), (3.2.15) et (3.2.21) et le théorème 2.2.1 entraînent que F admet un point fixe sur $K_{r,R}$, ce qui est une solution positive du problème $(\mathcal{P}b_2)$ d'après le lemme 3.2.1. ■

Théorème 3.2.2 *Soit P un cône normal. Supposons que les conditions $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_4)$, $(\mathcal{H}_5)$ et $(\mathcal{H}_6)$ sont satisfaites. Alors, le problème $(\mathcal{P}b_2)$ a au moins deux solutions positive* *différentes x_1 et x_2 vérifiant:*

$$0 < \|x_2\|_{\mathcal{C}} < \eta < \|x_1\|_{\mathcal{C}} . \tag{3.2.23}$$

Démonstration. Supposons que $(\mathcal{H}_4)$ et $(\mathcal{H}_5)$ sont satisfaite pour tout $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta < 1)$, $\phi \in P^*$ et $[\alpha', \beta']$ $(0 < \alpha' < \beta' < 1)$, $\phi' \in P^*$ respectivement , posons

$$\begin{aligned}
K &= \{x \in Q \text{ tel que } x(t) \geq \alpha(1-\beta)x(s), \ \forall t \in [\alpha, \beta], s \in I\}, \\
K' &= \{x \in Q \text{ tel que } x(t) \geq \alpha'(1-\beta')x(s), \ \forall t \in [\alpha', \beta'], s \in I\}
\end{aligned}$$

• Comme dans la preuve du théorème 3.2.1, nous pouvons montrer que

$$F(K) \subset K, \text{ et } F(K') \subset K' \tag{3.2.24}$$

On peut choisir r, R avec $R > \eta > r > 0$ de sorte que

$$F(x) \not\leq x, \quad \forall x \in K, \|x\|_{\mathcal{C}} = R, \tag{3.2.25}$$

$$F(x) \not\geq x, \quad \forall x \in K, \|x\|_{\mathcal{C}} = r. \tag{3.2.26}$$

• Montrons que

$$F(x) \not\geq x, \quad x \in Q, \|x\|_{\mathcal{C}} = \eta. \tag{3.2.27}$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in Q$ avec $\|x_0\|_{\mathcal{C}} = \eta$ tels que $F(x_0) \geq x_0$, alors d'après la propriété d) de la fonction de Green on obtient

$$\begin{aligned}
\theta &\leq x_0(t) \leq \int_0^1 G(t,s) f(s, x_0(s))\, ds \\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^1 f(s, x_0(s))\, ds \quad \forall t \in I,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\|x_0(t)\| \leq \frac{N}{4}\int_0^1 \|f(s, x_0(s))\|\, ds \leq \frac{1}{4}NM \quad \forall t \in I, \tag{3.2.28}$$

en vertu de la condition $(\mathcal{H}_6)$ on a

$$M = \sup_{t \in I, x \in P \cap T_l} \|f(t,x)\| < \frac{4\eta}{N}. \tag{3.2.29}$$

Donc, (3.2.28) et (3.2.29) entraînent que

$$\eta = \|x_0\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{4}NM < \eta$$

d'où la contradiction. Par conséquent, $F(x) \not\geq x$, pour tout $x \in Q$, avec $\|x\|_{\mathcal{C}} = \eta$.

Par le lemme 3.2.3, on obtient que F est une k-contraction stricte d'ensembles sur $K_{\eta,R} = \{x \in K | \ \ \eta \leq \|x\|_{\mathcal{C}} \leq R\}$ et de même sur $K'_{r,\eta} = \{x \in K'_{\mathcal{C}} | \ \ r \leq \|x\|_{\mathcal{C}} \leq \eta\}$. En tenant compte des conditions (3.2.24)-(3.2.27) et en appliquant le théorème 2.2.1 à F, $K_{\eta,R}$ et F, $K'_{r,\eta}$, respectivement, on obtient qu'il existe un point fixe $x_1 \in K_{r,R}$, et $x_1 \in K'_{r,\eta}$ tels que $F(x_1) = x_1$ et $F(x_2) = x_2$ et d'après le lemme 3.2.1 x_1 et x_2 sont deux solutions positive du problème (Pb_2)$.Finalement,$(3.2.27) implique que $\|x_1\|_{\mathcal{C}} \neq \eta$, $\|x_2\|_{\mathcal{C}} \neq \eta$, ce qui nous donne $0 < \|x_2\|_{\mathcal{C}} < \eta < \|x_1\|_{\mathcal{C}}$. ■

Conclusion

Ce travail m' a permis de comprendre l'utilité de la théorie du point fixe et le lien de cette théorie avec la notion de l'indice du point fixe sur les cônes. J'ai pu aussi comprendre comment cette théorie a été utilisée dans la résolution de certains problèmes liés aux équations différentielles.

Nous avons cité à la fin de ce mémoire, quelques références bibliographiques permettant au lecteur intéressé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisés pour rédiger ce mémoire.

Comme perspectives, on peut penser à généraliser d'autres théorèmes du point fixe sur les cônes existant dans la littérature au cas des contractions strictes d'ensembles ainsi qu'aux applications condansentes. Ces généralisations nous permettrant de traiter une large classe de problèmes liés aux équations différentielles.

Annexes

Définition 1 (Espace vectoriel normé) On prend $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit E un $K-$espace vectoriel, une norme sur E est une application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} N1 &: \forall x \in E, \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ N2 &: \forall x \in E, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ N3 &: \forall x, y \in E, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

On dit alors que $(E, \|.\|)$ ou simplement E est un e.v.n.

Définition 2 (Ensemble convexe) Soit A un sous-ensemble de E, on dit que A est *convexe* si, pour chaque $x, y \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.

Définition 3 (Espace de Banach) On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite. Si $K = \mathbb{R}$ on dit que E est un espace de Banach réel, si $K = \mathbb{C}$ on dit que E est un espace de Banach complexe.

Définition 4 (Ensemble borné) On dit que A est un sous-ensemble borné de X si, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| < M$.

Théorèmes d'extension de Dugundji

Théorème 1 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée de X et $f : A \to Y$ une application continue. Alors f admet une extension continue $\widetilde{f} : X \to Y$ telle que $\widetilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.

Théorème 2 ([14], chapitre1, théorème 2.7)**:** Soient X et Y deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée bornée de X et $f : A \to Y$ une application complètement continue. Alors f admet une extension complètement continue $\widetilde{f} : X \to Y$ telle que $\widetilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.

Théorème des antipodes de Lyusternik-Shnirel'man-Borsuk

Théorème 3 Soit S une sphère dans un espace normé de dimension n et $(A_k)_{k=1,\ldots,n}$ un recouvrement de S par des fermés, alors au moins un des ensembles A_k contient deux points antipodaux ie $diam\,(A_k) \geq diam\,(S)$.

Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 4 : Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. H est uniformément borné, i.e.

$$\forall x \in X, \text{ l'ensemble } \{f(x) : f \in H\} \text{ est borné dans } Y.$$

2. H est équicontinu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \subset \mathcal{V}(x), \forall y \in X; y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

- Cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$.

Théorème 5 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}\left([a, b], \mathbb{R}\right)$ une suite vérifiant:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e.

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq c\,\|g\|\,.$$

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a, b] : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte.)

Proposition 1: Soit E un espace de Banach et $\{A_n\}$ une suite de sous-ensembles fermés bornés et non vides de E tels que:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Si $\alpha(A_n) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$, alors $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ et A est compact.

Proposition 2: Un espace métrique est précompact si et seulement si, pour tout nombre ε il peut être recouvert avec un nombre fini de boules de rayon ε, c'est à dire s'il est totalement borné.

Proposition 3: Si $A \subset B$, alors $diam\,(A) \leq diam\,(B)$ et $diam\left(\overline{A}\right) = diam\,(A)$.

Proposition 4: Soit E un espace de Banach et $A, B \subset E$, alors on a

1. $diam\,(\lambda B) = |\lambda|\, diam\,(B)$;

2. $diam\,(x + B) = diam\,(B)$;

3. $diam\,(A + B) \leq diam\,(A) + diam\,(B)$;

4. $diam\,(conv(B)) = diam\,(B)$.

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 6 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que :

1. $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω;

2. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

   Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Théorème 7 (Théorème de Mazur [1], page 47**)** L'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact dans un espace de Banach est compacte.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, New York, 2001.

[2] R. P. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, and A. E. Rodkina, B. V. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Aviv. University, Basel.Boston.Berlin (1992) .

[3] D. R. Anderson and R .I Avery, *Fixed Point Theorem of Cone Expansion and Compression of Functional Type*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 8 (2002), pp. 1073 – 1083.

[4] D. Anderson, R. Avery and R. Krueger, *An Extension of The Fixed Point Theorem of Cone Expansion and Compression of Functional Type*, Vol. 13 (2006), pp 15-26.

[5] L. E. J. Brouwer, *Uber Abbildungen Von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. Vol. 71 (1912) , pp 25-35.

[6] G. Darbo, *Punti Uniti in Transformazioni a Condominio Non Compatto*, Mat. Univ. Padova. Vol. 24 (1955) , pp 84-92.

[7] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Verlag-Berlin, Heidelberg New York , 1985.

[8] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1977.

[9] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University press, 1990.

[10] D. Guo, Y. I. Cho, and J. Zhu. *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Shangdon Science and Technology Publishing Press, Shangdon. 1985.

[11] D. Guo and W. Ge, *Positive Solutions for Three-Point Boundary Value Problems with Dependence on The First Order Derivative*, Journal of Mathematical Analysis and applications, 2004.

[12] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Multiple Solution of Two-Point Boundary Value Problems of Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Journal of Mathematical Analysis and applications. Vol. 129 (1988) , pp $211-222$.

[13] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[14] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, 1988.

[15] S. Ishikawa and H. Fujita, *Some Variants of Strict-Set-Contraction*. Vol. 11 (1972) pp 83-87.

[16] M. A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations* (Groningen, 1964).

[17] M.A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon, Elmsford, NY,1964.

[18] V. LakshmiKantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Space*, Pergamon, Oxford, 1981.

[19] K. Mebarki, *Quelques Théorèmes du Point Fixe sur les Cônes et Applications à des Équations Différentielles Ordinaires, Mémoire de Magistère*, Département de Mathématiques, E.N.S-Kouba, Alger, Algérie, 2006.

[20] F. Meiqiang , X. Zhang and G. Weigao, *Positive Fixed Point of Strict set Contraction Operators on Ordered Banach Spaces and Applications*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Vol. 10.1155 (2010) 439137 pp 1-13.

[21] H. Mönch, *Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations of Second Order in Banach Spaces*, Nonlinear Anal. Vol. 4 (1980) , 985-999.

[22] R. D. Nussbaum, *The Fixed Point Index for Local Condensing Maps*, Ann. Mat. Pura. Appl.Vol. 89 (1971) pp 217-258.

[23] D. O'regan, *Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators*, J.Math. Anal. Appl. Vol. 202 (1996) pp 413-432.

[24] D. O'Regan, Y. J. Cho and Y. Q. Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Copyright 2006 by Taylor and Francis Group.

[25] A. J. B. Potter, A Fixed Point Theorem For Positive k-Set Contractions Proceedings of the Edinburgh, Mathematical. Vol. 19 (1974), pp 93102.

[26] J. Sun, *A Generalization of Guo's Theorem and Applications*, Journal of Mathematical Analysis and applications. Vol. 126, 566-573 (1987).

[27] J.M.A. Toledaro, B. T. Dominguez and G.L. Acedo, *Measures of Non-Compactness in Metric Fixed Point Theory* (Operator theory:Advances and application) Hardeover,1997.

[28] J. S. Wong, M. Z. Nashed, *Some Variants of Fixed Point Theorem of Krasnoselskii and Application to Nonlinear Integral Equations.* J. Math. Mech. Vol. 18 (1966), pp 767-777.

[29] G. Zhang and J. Sun, *A Generalisation of The Cone Expansion and Compression Fixed Point Theorem and Applications,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.Vol.67 (2007), pp.579-586.

[30] L. Zhenbin, W. Yonghong and L.Lishan, *Infinite Boundary Value Problems for Nth-Order Implusive Integro-differential Equations in Banach Spaces*, Nonlinear Analysis. Vol. 67 (2007) , pp 2670-2679.

[31] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* Vol. I: Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.