MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE ABDERRAHMANE MIRA DE BEJAIA

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Mester en mathématiques

Spécialité : Statistique et Analyse Décisionnelle

Par

HADDADI Safia

CHABOUR Salima

THÈME

La densité spectrale

Soutenu publiquement, le 23/06/2015 devant le jury composé de :

Mme	**H. Tabti**	Université A-Mira de Béjaia.	Présidente.
Mme	**K. Timeredjine**	Université A-Mira de Béjaia.	Promotrice.
Mme	**F. Amri**	Université A-Mira de Béjaia.	Examinatrice.

Remerciements

Nous remercions Dieu, de nous avoir donné le courage et la patience afin de terminer ce travail.

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude envers notre promotrice, madame K.TIMERIJNE pour son soutien et la confiance qu'elle nous a accordé en nous proposant ce sujet, et nous a aidé plus qu'elle ne le pense. En nous écoutant patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et l'avancement de notre travail, elle nous a permis de synthétiser, comprendre et expliquer un grand nombre de questions. Ces conseils et sa gentillesse nous a apporté un précieux soutien, qu'elle soit chaleureusement remercie ici.

Nos remerciements sont aussi adressés à M^{me} TABTI. pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance et M^{me} AMRI qui a bien voulu examiner ce travail.

Nous remercions aussi tous les enseignants du département de mathématique qui nous ont permis d'améliorer notre formation.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chèrs parents avec toute ma reconnaissance.

Ma chère maman qui n'a jamais ménager ses effort, pour que j'atteigne ce niveau. Ni sacrifices, ni privation ne l'ont empêché d'accomplir son devoir de mère soucieuse de l'avenir de ses enfants; elle était toujours à mes côtés et n'a jamais cessé de me soutenir et de m'encourager. Jamais de simples mots ne me permettront de t'exprimer remerciements ma très chère maman.

Mon chèr papa qui a su se montrer patient, compréhensif et encourageant, sa chaleur paternelle a été et sera toujours pour moi d'un grand réconfort.

Mes deux frères Mourad et Khalede, mes sœurs.

Mon fiancé Rabie. Et toute ma belle famille.

Tous mes amis.

Mes très chères copines « Merieme, Baya, Taws, Kahina».

Ainsi qu'à tous ceux qui me sont chèrs. SAFIA

Dédicaces

Je dédie ce travail:

A mes très chers parents " MADJID et NORA"

A mon cher père,

A ma chère et adorable mère qui m'a toujours encouragé et soutenue durant mes études,

A mes très chère frères « LAHCEN, BRAHIM »

A mes très chères sœurs « DIDA, NEDJIMA et Fatiha»

A mes oncles et mes tentes

A mes très chères copines « KATIBA, HASSINA, Wiza, Nacira, Liza, Karima, AHLAM»

A tout mes cousin SALIMA

Table des matières

Introduction

Grâce au progrés spectaculaire des moyens de calcul offerts par l'informatique moderne, l'analyse spectrale des processus a connu récemment une évolution exceptionnelle. Les recherches dans ce domaine sont motivées par le fait que la théorie spectrale fournit un moyen incontournable pour explorer les caractéristiques statistiques des processus stochastiques étudiés. En effet, ces techniques ont prouvé leur efficacité dans l'étude de nombreux domaines non seulement de la nature comme en physique nucléaire et en astronomie mais aussi en traitement du signal et d'image, en économétrie dans la prédiction et l'explication de certains phénoménes liés à la variation des indices de prix...etc. La densité spectrale ou plus généralement la mesure spectrale est l'outil fondamental de l'analyse spectrale. En effet, elle représente la distribution, selon la fréquence, de l'énergie portée par le signal (processus). Ainsi, une valeur maximale de la densité, a une fréquence donnée, explique la présence d'un phénoméne se répétant à la même fréquence.

Cette fonction, révélatrice de la structure de tous les composants du signal, a suscité la curiosité des probabilistes et statisticiens qui lui ont accordé un grand intérét. Dans la pratique, il est impossible d'expliciter d'une maniére exacte la densité spectrale d'un processus stochastique. C'est pourquoi les chercheurs se sont penchés sur les techniques d'estimation de la densité spectrale à l'aide d'un nombre fini d'observations du processus. Parmi les travaux les plus fondamentaux dans ce domaine, on trouve les travaux pilotes de Parzen $[5, 22]$, dans le cas des processus stationnaires, Anderson[23]. Dans le cas des processus non stationnaires on trouve les travaux de Gladyshev[6], Preistley[12], Doukhan Lii et Rosenblatt[10] ...etc.

La densité spectrale est un outil mathématique permettant de représenter les différentes composantes spectrales d'un signal et d'en effectuer l'analyse harmonique. Elle est utilisée en particulier en physique, en ingénierie et en traitement du signal

L'analyse spectrale pour une série chronologique stationnaire est baseé sur l'estimation de la densité spectrale, qui cette deriviere dépend de la distribution asymptotique de périodogramme $(I_X(\omega_1)....,I_X(\omega_n))$. Sous les conditions plutôt générales, les $I_X(\omega_n)$, $i=1,...,n$ sont asymptotiquement indépendants de loi exponentielle de moyenne $2\pi f(\omega_i)$ où f est la densité spectrale du processus (X_t) [21].

Le travail proposé dans ce mémoire consiste à l'étude de la densité spectrale qui introduite les années 30, en parallèle aux Etats-Unis par Norbert Wiener ('generalised harmonic analysis ', 1930) et en Union Soviétique par Khintchine ('kncorrelations theorie derstationaren stochastichen prozesse', 1934). Le but est de mettre une relation bijective entre la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire, et sa densité spectrale.

$$.f_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma(h)\,e^{i\omega h}\quad \text{ou } \gamma(h)=\int_{-\pi}^{\pi}f_X(\omega)\,e^{-i\omega h}d\omega$$

Ce travail comprend trois chapitres. Le chapitre I est consacré, dans la première partie aux rappels de quelques notions de processus stochastique, (stationnarité, invisibilité, Fonction d'autocovariance, Fonction d'autocorrélation). Dans la deuxième partie nous donnons l'essentiel sur les processus .bruit blanc, AR(p), MA(q), ARMA(p,q).

Dans le chapitre II, nous avons introduit la densité spectrale, donner quelques notions de transformé de Fourier et déterminer la densité spectrale des processus cités dans le chapitre I.

Le troisième chapitre est consacré à l'estimation de la densité spectrale et les propriétés asymptotiques. Pour cela nous introduit le périodogramme et , Quelques notions et propriétés de espace vectoriel C^n, permettant d'introduire la notion de périodogramme. Ensuite l'estimation à fenêtre de la densité spectrale et quelques fenêtres . Enfin on termine notre travail par une conclusion et perspective.

CHAPITRE 1

Processus stochastique

1.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, dans une première partie quelques notion du processus stochastique. Dans la seconde partie on donne la définition du quelques processus aléatoires stationnaires $AR(p), MA\,(q)\,, ARMA\,(p,q)$ et leurs caractéristiques, qui serviront dans notre travaille.

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est une suite de variables aléatoires indexées par un paramètre $t \in T$ et sont définies sur un même espace de probabilité (Ω,T,P). T est dit espace des temps.*

La variable X_t représente l'etat du processus à l'instant t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable et appelée l'espace des états du processus.

Si $T = \mathbb{R}$, le processus est dit à temps continue.

Si $T = \mathbb{Z}$, le processus est dit à temps discret.

Dans tout ce travail nous sommes intéressé aux processus à temps discret.

1.3 Processus stationnaire

Définition 1.3.1 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au second ordre si :*

1) $\forall\ t \in \mathbb{Z}\ \ E(X_t) = \mu$, constante indépendante du temps.

2) $\forall\ t, s \in \mathbb{Z}\ \ cov\,(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$, dépend uniquement de la différence entre les instants t, s. En d'autre terme, invariant par translation dans le temps .

Si noté par $h = t - s$ alors $cov(X_t, X_{t+h})$ dépend uniquement de retard h, on pose alors

$$cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma\,(h)$$

1.4 Invérsibilité

Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit inversible s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des valeurs d'un autre processus (*bruit blanc*) , c'est à dire qu'il existe une suite $(\psi_i, i \in \mathbb{Z})$ et un processus $(\varepsilon_t)_{t\in T}$ tels que

$$\forall t \in T,\ X_t = \sum_{i\in T} \psi_i \varepsilon_t$$

1.5 Fonction d'autocovariance

Définition 1.5.1 *Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω,T,P), la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t\in T}$ est donneé par la fonction*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ &(t, s) \to cov(X_t, X_s) = E[(X_t - E\,(X_t))(X_s - E(X_s))] = \widetilde{\gamma}\,(t, s) \end{aligned}$$

Propriétés

La fonctoin d'autocovarince $\gamma\,(.)$ vérifie les propriétés suivante:

1) $\gamma\,(0) \geq 0$

2) $|\gamma\,(h)| \leq \gamma\,(0)$

3) $\gamma\,(h)$ est un fonction symétrique, i.e $h \in \mathbb{N}, \gamma\,(-h) = \gamma\,(h)$

4) $\gamma(h)$ est une fonction semi-définie positive, i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0$$

1.6 Fonction d'autocorrélation

Définition 1.6.1 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stochastique, on appelle fonction d'autocorrélation simple du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ la fonction défini*

$$\begin{aligned} \rho(t,s) &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to [-1,1] \\ &(t,s) \to \rho(t,s) = \tfrac{cov(X_t,X_s)}{\sqrt{var(X_t)var(X_s)}} \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 *Dans le cas d'un processus stationnaire on pose $h{=}t-s$, $\rho_{t,s} = \rho(h)$*

$$\begin{aligned} \rho(h) = cor(X_t, X_{t-h}) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \frac{cov(X_t, X_{t-h})}{var(X_t)} \end{aligned}$$

Propriétés

1) $\rho(0) = 1$

2) $|\rho(h)| \leq 1$

3) $\rho(h)$ est une fonction symetrique, $\forall h \in \mathbb{N} : \rho(h) = \rho(-h)$

4) $\rho(h)$ est une fonction semi-définie positive,

$$\forall n \geq 0, \forall (a_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho(i-j) \geq 0$$

Définition 1.6.2 *On appelle matrice d'autocorelation de $(X_t...X_{t-h+1})$ avec $\forall h \in \mathbb{N}^*$ une matrice donnèe par*

$$R_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & ... & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & \rho(1) \\ \rho(h-1) & ... & ... & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 Opérateur retard

L'operateur L décale le processus d'une unité de temps vers le passé

$$LX_t = X_{t-1}$$

Si on applique h fois cet opérateur, on décale le processus de h unité de temps

$$L(L(...L(X_t)...)) = L^h(X_t) = X_{t-h}$$

Remarque 1.7.1 *dans ce travail nous limitons au processus stationnaires.*

1.8 quelques modèles de processus stochastique usuels

1.8.1 Bruit blanc

Un processus stationnaire $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit bruit blanc si les variables aléatoires $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont identiquement distribuées, independant de moyenne nulle et de même variance.

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\gamma(h) = E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \begin{matrix} \sigma^2 & si & h = 0 \\ 0 & si & h \neq 0 \end{matrix}$$

1.8.2 Processus AR(p)

Définition 1.8.1 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit autorégressif d'ordre p $(p \in \mathbb{N}^*)$ s'il vérifie une relation de la forme*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} -, ..., -\phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t \tag{1.8.1}$$

$\phi_1 ... \phi_p$ sont des constantes réeles, $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de $(E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 < \infty)$

c.à.d. tout innovation est combinaison linéaire des réalisations du processus jusqu'à l'instant t-p

Considerons l'opérateur de retard L défini par

$$L^j X_t = X_{t-j} \qquad j \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{Z}$$

On peut alors écrire l'équation (1.7.1) sous forme

$$X_t - \phi_1 L X_t - \phi_2 L^2 X_t -, ..., -\phi_p L^P X_t = \varepsilon_t \ , \ t \in \mathbb{Z}$$

$$\Phi_p(L) X_t = \varepsilon_t$$

Φ_p est un polynôme de degré p à coefficients $\Phi_1 ... \Phi_p$.

Exemple 1.8.1 *Processus AR(1) autoregressif d'ordre* 1 *est vérifie l'equation stochastique*

$$(X_t - \phi_1 X_{t-1}) = \varepsilon_t$$

qui on peut écrire

$$(1 - \phi_1 L)\, X_t = \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}$$

Théorème 1.8.1 *Un processus autoregrissif* $AR(p)$ *est stationnaire si et selement si son polynôme* $\Phi(z)$ *admet des racine en dor le disque unite*

c-à-dire $|z| \geq 1$.

En d'autre mots , toutes les racines de $\Phi(z)$ sont de norme plus grand que 1.[19]

Fonction d'autocovariance et d'autocorrelation

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible de variance σ^2 et $(X_t)_{t \in Z}$ un processus AR(p) canonique $X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $\phi = (\phi_1, ..., \phi_p) \in \mathbb{R}^p$

Lemme 1.8.1 *on a* $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(i)}$ *et* $\rho(h) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(h - i)$ *pour tout* $h \in N^*$

Preuve.

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= cov(X_t, X_t) \\ &= cov(X_t, \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i cov(X_t, X_{t-i}) + cov(X_t, \varepsilon_t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(i) + cov(\sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t), \varepsilon_t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(i) \gamma(0) + cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(0) \rho(i) + \sigma^2\end{aligned}$$

■

On a de même :

Preuve.

$$\begin{aligned}\forall h \in \mathbb{N}^* : \gamma(h) &= cov(X_t, X_{t-h}) \\ &= cov(\sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, X_{i-h}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(h-i)\end{aligned}$$

On obtient finalement le systéme suivant, appelé équations de Yule-Walker

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(i)}$$

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ . \\ . \\ . \\ \rho(p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & . & . & . & .\rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ .\rho(p-1) & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \phi_p \end{pmatrix} = Rp$$

■

Les autocorrélations simples sont solution d'une équation de récurrence linéaire simple d'ordre p.

1.8.3 Processus MA(q)

Définition 1.8.2 *Un processus $(X_t)_{\ t\in\mathbb{Z}}$ est dit moyenne mobile d'ordre q $(q \in \mathbb{N}^*)$ s'il verifie l'equation stochastique suivante*

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} -, ..., -\theta_q\varepsilon_{t-q} \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

En utilisant l'opérateur retard L cette équation s'écrire:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 L\varepsilon_t - \theta_2 L^2\varepsilon_t -, ..., -\theta_q L^q\varepsilon_t$$

A tout instant t, X_t est la somme des inovations passées.

$$X_t = \Theta_q(L)\,\varepsilon_t$$

Avec Θ_q est un polynôme de degré q à coefficients $\theta_1...\theta_q$.

Exemple 1.8.2 *Le processus MA(1) est défini par la relation*

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$X_t = (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

Théorème 1.8.2 *Un processus à moyenne mobile $MA(q)$ est inversible si et selement si son polynome $\Phi(z)$ est telque*

$$\Phi(z) \neq 0 \text{ avec } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1$$

On note la ressemblance de cet énoncé avec le théoréme de stationnarité et de causalité pour les processus autorégressifs.[19]

Définition 1.8.3 *Un processus est dit causale s'il existe une suite (a_k) réel telque $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ et que*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varepsilon_{t-k}$$

parfois, lorsque l'on parle d'un processus causale, on dit que celui a une répresentation MA(∞).

Remarque 1.8.1 *Tout processus MA(q) est causale.*

Fonction d'autocovariance

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(X_t, X_{t-h}) \\ &= E((\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-h} - \theta_1\varepsilon_{t-h-1} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-h-q}))\end{aligned}$$

En posant $h = 1$ puis $h = 2, h = q$

$$\gamma(h) = \begin{cases} (-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + ... + \theta_{q-1}\theta_q)\,\sigma_\varepsilon^2 & si \quad h = 1 \\ (-\theta_2 + \theta_1\theta_2 + ... + \theta_{q-2}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2 & si \quad h = 2 \\ -\,\theta_q\sigma_\varepsilon^2 & si \quad h = q \\ 0 & si \quad h > q \end{cases}$$

Lorsque $h = 0$

$$\gamma(0) = E(y_t^2) = \left(1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

Fonction d'autocorrelation

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \begin{cases} \frac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + ... + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2} & si \quad h = 1, ..., q \\ 0 & \text{si} \quad h > q \end{cases}$$

Notion de filtre de moyenne mobile

L'opérateur de convolution au filtre linéare $\left(\sum_{j=0}^{P} a_j L^j\right)$ vérifie

$$\left(\sum_{j=0}^{P} a_j L^j\right) X_t = \sum_{j=0}^{P} a_j X_{t-j} = Y_t \tag{1.8.2}$$

effectuée par le filtre moyenne $(a_j)_{0 \le j \le p}$ sur le processus X au cours du temps se représente à l'aide de l'operateur de retard L

$$LY_t = Y_{t-1}$$

à

$$Y_t = \sum_{j=0}^{P} a_j L^j X_t = A(L) X_t$$

Ou $A(L)$ désigne le polynôme L

$$A(L) = \sum_{j=0}^{P} a_j L^j$$

Définition 1.8.4 *Soit U=$[-\pi, \pi[$, définie par :*

$$\begin{aligned} &R : U \to \mathbb{C} \\ &\quad \omega \to R(\omega) = \textstyle\sum_{j=0}^{P} a_j e^{-ij\omega} = A(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

$R(\omega)$ est appelé fonction réponce du filtre moyenne mobile $(a_j)_{0 \leq j \leq p}$. De plus si Y traverse un filtre moyenne de moyenne de polynôme

$$C(L) = \sum_{j=0}^{p'} C_j L^j,$$

le processus image Z définie par

$$Z_t = \sum_{j=0}^{p'} Y_{t-j} = C(L) Y_t$$

S'exprime à partir de X comme suite

$$Z_t = (A.C) L X_t$$

à l'aide du produit des deux polynome A et B

1.8.4 Processus ARMA (p, q)

Définition 1.8.5 *Les modèle ARMA (p, q) sont une combinaison des modèles autorégressif et moyen mobile.*

Un processus $(X_t)_{\ t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA (p,q) s'il verifie l'equation stochastique suivant

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-,...,-\phi_p L^p)X_t=\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-,...,-\theta_q L^q\right)\varepsilon_t$$

$$\Phi_p(L)X_t=\Theta_q\left(L\right)\varepsilon_t$$

pour ϕ_p et θ_q deux polynomes de degré respective p,q et à coefficient $\phi_1,..,\phi_q$ et $\theta_1,..,\theta_q$ respectivement.

Propriétés

stationnairité

Φ admette une inverse$\Rightarrow$module des racines de Φ différent de 1

$$X_t=\Phi\left(L\right)^{-1}\theta\left(L\right)\varepsilon_t=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\qquad\text{avec}\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi_j<\infty$$

Invisibilité

c'est-à-dire que la forme $AR\left(\infty\right)$ soit tournée vers le passé$\Rightarrow$ module des racines de Θ strictement supérieur à 1

$$\varepsilon_t=\theta\left(L\right)^{-1}\Phi\left(L\right)X_t=\sum_{j=0}^{+\infty}\pi_j X_{t-j}\qquad\text{avec}\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\pi_j<\infty$$

X_t peut s'écrire en fonction de son passé et de ε_t

causalité

c'est-à-dire que la forme $MA(\infty)$ soit tournée vers le passé $\Rightarrow$ module des racines de Φ strictement supérieur à 1

$$X_t=\Phi\left(L\right)^{-1}\theta\left(L\right)\varepsilon_t=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}$$

Alors, ε_t est le processus d'innovation de X_t

Fonction d'autocovariance

Autocorrélations d'un processus ARMA(p,q), on obtient à l'aide de la représentation MA(∞) :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \operatorname{cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= \operatorname{cov}(\varepsilon_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-h} + \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-h-j}) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_j \psi_{j+h} \quad \text{ou } \psi_0 = 1\end{aligned}$$

on a

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\gamma(h) - \phi_1 \gamma(h-1) - ... - \phi_p \gamma(h-p) \\ &= \operatorname{cov}(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}, X_{t-h}) \\ &= \operatorname{cov}\left(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-h-j}\right) \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \theta_{h+j} \psi_j & h = 1, ..., q \\ 0 & \text{si} \quad h > q \end{cases}\end{aligned}$$

les autocorrélations simples décroissent vers 0

*si $p > q$ la décroissance est de type exponentiel ou sinusoidal

*si $q \geq p$, les $q - p - 1$ premiére valeurs ont un comportement quelconque et les suivantes décroissent.

CHAPITRE 2

Densité spectrale

2.1 Introduction

La densité spectrale contient la même information que la fonction d'autocovariance, mais elle est définie dans le domaine des fréquences plutôt que dans le domaine du temps. Ce chapitre décrit les notions de base sur la densité spectrale et la densité spectrale de quelques processus usuelles.

Avant d'introduire la densité spectrale, nous avons besoin de la notion Transformée de Fourier et ses propriétes.

2.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est particulièrement adaptée aux signaux stationnaires

$$\forall j \in \{0, ..., n-1\} \qquad \overrightarrow{e_j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\omega_j} \\ e^{2i\omega_j} \\ . \\ e^{(n-1)i\omega_j} \end{pmatrix}$$

ou $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, i imaginaire $n \in \mathbb{N}^*$

Proposition 12.1 $(\overrightarrow{e_0},...,\overrightarrow{e_{n-1}})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ qui est appelée la base de Fourier discréte (ou parfois base de Fourier finie).

Définition 2.2.1 *On appelle $F_n x(.)$ transformée de Fourier discréte d'un vecteur $x = (x_0,..,x_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire de x avec un élement de la base $\mathbb{C}^n$:*

$$\forall j \in \{0,...,n-1\} \;,\; F_n x(j) = \langle \; \overrightarrow{e_j}, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{2ij\pi t}{n}} x_t$$

Quand il n'y a pas de risque de confusion avec un estimateur, on notera $\widehat{x}(.)$ à la place de $F_n x(.)$.

On a donc la formule d'inversion :

$$\forall j \in \{0,...,n-1\} \quad F_n x(j) = \langle \overrightarrow{e_j}, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=0}^{n-1} e^{\frac{2ij\pi t}{n}} \hat{x}((j))$$

Propriétés

La transformée de Fourier discréte posséde quelques propriétés remarquables.

1. Fréquence nulle
$$\widehat{x}(0) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \right)$$
2. si $x \in \mathbb{R}^n$ alors $\widehat{x}(j) = \overline{\widehat{x}(n-j)}$ $j \in \{0,...,n-1\}$
3. si $q = \frac{n}{q}$ divise n et que $x \in \mathbb{C}^n$ est périodique de période q alors :
$$\forall_j \in \{0,...,n-1\} \;\; j \notin \{0, q, 2q, ..., (k-1)q\} \Rightarrow \widehat{x}(j) = 0$$
4. Retard.
$$\forall_j \in \{0,...,n-1\} \;\; \left(\widehat{\Phi(L)x}\right)(j) = \widehat{x}(j)\,\Phi\left(e^{\frac{-2\pi ij}{n}}\right)$$

alors

$$\forall j \in \{0,...,n-1\} \qquad \widehat{L}x(j) = \widehat{x}(j)\,e^{\frac{-2\pi ij}{n}}$$

et pour tout polynome Φ :

$$\forall_j \in \{0,...,n-1\} \ \left(\widehat{\Phi(L)\,x}\right)(j) = \widehat{x}(j)\,\Phi\left(e^{\frac{-2\pi ij}{n}}\right)$$

Un exemple est celui de la dérivée discréte

On note $\nabla = Id - L$ l'opérateur de différentation discrète :

$$\forall t \in \{0,...,n-1\} \qquad (\ \nabla x) = x_t - x_{t-1}$$

Alors

$$\forall j \in \{0,...,n-1\} \qquad \widehat{\nabla x}(j) = \widehat{x}(j)\left(1 - e^{\frac{-2\pi ij}{n}}\right)$$

5. Convolution. On définit la convolution $x * y$ de deux vecteurs x et y de $\mathbb{C}^n$ par :

$$(x*y)_t = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=0}^{n-1} x(s)\,y(t-s)$$

alors

$$\forall j \in \{0,...,n-1\} \qquad \widehat{x*y}(j) = \widehat{x}(j)\,y$$

2.3 Densité spectrale

Définition 2.3.1 *Soit $(X_t)_{\ t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de fonction d'autocovaince $\gamma(h)$. On appelle densité spectrale de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ la transformation de Fourier discrète, f ,de la suite des autocovaince (lorsque elle existe).*

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)\,e^{i\omega h} \tag{2.1}$$

Proposition 2.3.1 *réciproquement si $f_X(\omega)$ et la densité spéctrale de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$*

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega)\,e^{-i\omega h}d\omega$$

Propriétés

1) définie fonction génératrice des moments la fonction de $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Gamma \qquad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\rightarrow \Gamma(z) \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) z^h \end{aligned}$$

2) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de la forme $X_t = m + \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et un bruit blanc et $\sum_{j=0}^{+\infty} |a_j| < +\infty$,

alors $\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h) < +\infty$

3) f est réelle

4) f est une fonction paire, continue, périodique de periode 2π. [1]

5) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire au seconde ordre, $(C_j)_{0\leq j\leq q}$ un filtre de moyenne mobile et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus définie par

$$Y_t = \sum_{j=0}^{q} C_j X_{t-j}$$

Alors la densité spéctrale de Y est

$$f_Y(\omega) = |R(\omega)|^2 f_X(\omega) = \left|C\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_X(\omega)$$

où $R(\omega)$ est la fonction réponse du filtre $(C_j)_{0\leq j\leq q}$ et f_X la densité spectrale. [1]

Preuve. 1

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_h \gamma(h) z^h \\ &= \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(e^{i\omega}\right) \end{aligned}$$

■

Preuve. 2

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}}|\gamma_X(h)|=\sum_{h\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{j,k}a_ja_k\gamma_\varepsilon(h+j-k)\right|$$

Or,comme $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc,

$$\gamma_\varepsilon(h+j-k)=\begin{cases}0 & si \quad h+j-k\neq 0\\ \sigma_\varepsilon^2 & si \quad h+j-k=0\end{cases}$$

et donc,

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}}|\gamma_X(h)|=\sum_{h\in\mathbb{Z}}\left|\sigma_\varepsilon^2\sum_j a_ja_{j+h}\right|\leq\sigma_\varepsilon^2\sum_{j,h}|a_j|\,|a_{j+h}|=\sigma_\varepsilon^2\left(\sum_j a_j\right)^2<+\infty$$

■

Preuve. 3On a

$$\gamma(-h)=\gamma(h)$$

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0)+\sum_{h=1}^{\infty}\gamma(h)\left(e^{i\omega h}+e^{-i\omega h}\right)\right]$$

on a

$$e^{i\omega h}+e^{-i\omega h}=2\cos\omega h$$

d'où

$$f(\omega)=\frac{\gamma(0)}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h)\cos\omega h$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h)\cos\omega h$$

■

2.4 Densité spectrale de quelques processus usuelles

2.4.1 bruit blanc

Proposition 2.4.1 *La densité spectrale d'un bruit blanc est constante est donnée par*

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

Preuve.

$$\gamma(h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \sigma^2 \qquad si \quad h = 0$$

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \sigma^2 e^{i\omega h} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{i\omega h}$$

on a

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{i\omega h} = \sum_{h \geq 1} (e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) = 1$$

■

Proposition 2.4.2 *Si la densité spéctrale d'un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est constante* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc*

Preuve.

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(\omega) e^{i\omega h} d\omega = k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} d\omega$$

■

Proposition 2.4.3 *La densité spectrale du processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est définie par:*

$$f_X(\omega) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{i\omega h} = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \cos(^{\omega h})$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h>0} \gamma(h) e^{i\omega h} + \sum_{h<0} \gamma(-h) e^{i\omega h} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h>0} \gamma(h) e^{i\omega h} + \sum_{h>0} \gamma(-h) e^{-i\omega h} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h>0} \gamma(h) \left(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}\right) \right] \quad \text{telle que } 2\cos(\omega h) = \left(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h \neq 0} \gamma(h) \cos(\omega h) \right]
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4.4 *Avec les notations précédentes, on a le théorème d'injectivité suivant*

$$\forall h \in \mathbb{Z} \quad \gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega h} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos(\omega h) d\omega$$

Preuve.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega h} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(k) e^{i\omega k} \right) e^{-i\omega h} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(k) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-h)} d\omega \right)$$

$$\text{d'aprés Fubini} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-h)} d\omega = \begin{cases} 0 & si \quad k \neq h \\ 2\pi & si \quad k = h \end{cases}$$

$$= \gamma(h)$$

■

2.4.2 La densité spectrale de AR(p)

Proposition 2.4.5 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus un AR(p), alors la densite spectrale de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, et donnée par*

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|\Phi(e^{iw})|^2}$$

Preuve. On a $\Phi(L) X_t = \varepsilon_t$ la densité spéctrale de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'après la propriété, (5) :

$$\begin{aligned} \Phi(L) X_t &= \varepsilon_t \\ f_X(\omega) \left|\Phi\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 &= f_\varepsilon(\omega) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \\ f_X(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|\Phi(e^{iw})|^2} \end{aligned}$$

■

Cas d'un AR(1):

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ AR(1) définit par :

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

On a

$$\Phi(L) = 1 - \phi L$$

La densité spéctrale et donc donnée par

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left(1-\phi e^{i\omega}\right)^{-1}\left(1-\phi e^{-i\omega}\right)^{-1} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi\left(1-2\phi\cos\omega+\phi^2\right)} \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *1) Pour $\phi < 1$ $f'(\omega) \geq 0 \Rightarrow f$ croissante.*

2) Pour $\phi > 1$ $f'(\omega) \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante.

$$f'(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{(-2\phi\sin\omega)}{\left(1-2\phi\cos\omega+\phi^2\right)^2}$$

telle que $\omega \in [0, \pi]$.

2.4.3 La densité spectrale de MA(q):

Proposition 2.4.6 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processuce stationnaire MA(q), $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ l'équation stochastique:*

$$X_t = \Theta_q(L)\,\varepsilon_t$$

d'après la proprieté (5) , on a

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2$$

Cas d'un MA(1):

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(1), donneé par l'équation stochastique soit $\omega \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \\ &= (1-\theta L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

On a d'aprés la propriéte (5)

$$f_{\ X}(\omega) = \left|1-\theta e^{i\omega}\right|^2 f_\varepsilon(\omega)$$

Alors

$$\begin{aligned} f_{\ X}(\omega) = \quad & \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1-\theta e^{i\omega}\right)\left(1-\theta e^{-i\omega}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}(1-\theta(e^{i\omega}+e^{-i\omega})+\theta^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}(1-2\theta\cos\omega+\theta^2) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.2 *1) pour* $\theta < 0$, $f'(\omega) \geq 0 \Rightarrow f$ *croissante.*

2) pour $\theta < 0$, $f'(\omega) \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante

$$f'(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}(2\theta\sin\omega)$$

2.4.4 La densité spectrale de ARMA(p,q)

Définition 2.4.1 *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processuse ARMA(p,q)* $p,q \in \mathbb{N}$

$$\Phi_q(L)\,X_t = \Theta_q(L)\,\varepsilon_t$$

La densité spéctrale est

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{\left|\Theta\left(e^{iw}\right)\right|^2}{\left|\Phi\left(e^{iw}\right)\right|^2}$$

Preuve. d'apres la propriéte (5)

$$\left|\Phi\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_X(\omega) = f_\varepsilon(\omega)\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2$$

$$f_X(\omega) = f_\varepsilon(\omega)\frac{\left|\Theta\left(e^{iw}\right)\right|^2}{\left|\Phi\left(e^{iw}\right)\right|^2}$$

$$d'ou \qquad f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{\left|\Theta\left(e^{iw}\right)\right|^2}{\left|\Phi\left(e^{iw}\right)\right|^2}$$

■

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ARMA(1,1) définie par

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

$$X_t = \frac{(1-\theta L)}{(1-\phi L)}\varepsilon_t$$

$$f(\omega) = \frac{1-2\theta\cos\omega+\theta^2}{1-2\phi\cos\omega+\phi^2}$$

CHAPITRE 3 Estimation de la densité spectrale et propriétés asymptotiques

3.1 Introduction

Parmi les outils les plus utilisés dans les techniques d'estimation spectrale, on trouve le périodogramme qui représente un outil important pour l'estimation de la densité spectrale : ce qui revient à estimation des coefficients de Fourier à partir des observations d'un processus d'une serie chronologique . Le périodogramme a été introduit à la fin du 19éme siècle et a été utilisé pour détecter les périodicités cachées dans les observations des fameuses taches solaires. Parmi les travaux les plus influents en matière d'estimation spectrale des processus du second ordre stationnaires, nous trouvons Parzen [5], Rosenblatt, Anderson, Masry, Priestley.[2]

D'autres méthodes ont été developper dans l'estimation de la densité spectrale, citons la methode d'estimation de la fenétre [21] .

3.2 Le périodogramme

$v = (v_1, ..., v_n)$ et $u = (u_1, ..., u_n)^{'}$ sont définit le produit scalaire de v et u par:

$$\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i.u_i \qquad\qquad \text{pour } u, v \in \mathbb{C}^n \tag{3.1}$$

Considérons un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(X_1, ..., X_n)$ une réalisation de longueur n de (X_t) , à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose $(X_1, ..., X_n)$ le vecteur n dimensionnel dans l'espace $\mathbb{C}^n$.

$X_1, ..., X_n$ est dite série choronologique stationnaire

En supposant que les données $X_1, ..., X_n$ sont des valeurs d'une fonction de période n, chacune des valeurs X_t peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j\in F_n} a_j e^{it\frac{2\pi j}{n}} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \left\{ j \in \mathbb{Z} \qquad -\pi < \frac{2\pi j}{n} \leq \pi \right\} \\ &= \left\{ -\left[\frac{n-1}{2}\right], ..., \left[\frac{n}{2}\right] \right\} \end{aligned}$$

avec $[X]$ la partie entiére de X :

Les fréquences $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, avec $-\pi < \omega_j \leq \pi$ sont appelées les fréquences de fourie de la suit $(X_1, ..., X_n)$.

la représentation (3.2) peut s'écrire sous forme vectorielle comme suit:

$$X = \sum_{j\in F_n} a_j e_j \tag{3.3}$$

$$e_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{i\frac{2\pi j}{n}}, ..., e^{in\frac{2\pi j}{n}} \right) \qquad j \in n \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.1 *On vérifie facilement que les vecteurs donnés par (3.4) constituent une base orthonormale dans* $\mathbb{C}^n$.

Soit $X \in \mathbb{C}^n$

$$X = \sum_{j\in F_n} a_j e_j \tag{3.5}$$

On pose

$$a_j = \langle X, e_j \rangle \tag{3.6}$$

On a

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\frac{2\pi j}{n}} \qquad j \in F_n$$

La suite $(a_j)_{j \in F_n}$ est la transformée de Fourie discréte de $X \in \mathbb{C}^n$.

Définition 3.2.1 *:On appelle le périodogramme de $(X_1, ..., X_n)'$ en $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $, j \in F_n$ la quantité $I_j(\omega_j)$ donnée par*

$$I(\omega_j) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega} \right|^2 \tag{3.7}$$

Remarque 3.2.2 $\frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega} \right|^2 = \left| \langle X, e_j \rangle \right|^2 = |a_j|^2$

Où a_j est la transformée de fourrier discréte de $(X_1, ..., X_n)'$.

Remarque 3.2.3 *puisque*

$$\begin{aligned} ||X||^2 &= \sum_{j \in F_n} |\langle X, e_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j \in F_n} I(\omega_j) \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'expression du périodogramme peut également s'écrire en fonction de la fonction d'autocovariance empirique de la série stationnaire.

En effet

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \left(X_{t+h} - \bar{X} \right) \left(X_t - \bar{X} \right) \qquad h = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.9}$$

$$\textit{avec} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t \quad \textit{et} \quad \widehat{\gamma}(h) = \overline{\gamma(-h)} \quad \text{pour} \quad h < 0$$

Proposition 3.2.1 *Soit $X = (X_1, ..., X_n)' \in \mathbb{C}^n$, $\widehat{\gamma}(h)$ la fonction d'autocovariance empirique d'ordre h définie par (3.9).*

Si ω_j sont les fréquences de Fourier, alors le périodogramme de $(X_1, ..., X_n)$

$$I(\omega_j) = \sum_{|k|<n} \widehat{\gamma}(h) e^{-ih\omega_j} \tag{3.10}$$

Preuve. par définition:

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j} \right|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j} \right) \left(\sum_{s=1}^{n} \overline{X_s} e^{is\omega_j} \right) \end{aligned}$$

Par ailleur

$$\sum_{t=1}^{n} e^{-it\omega_j} = \sum_{s=1}^{n} e^{-is\omega_j} = 0 \qquad si \qquad \omega_j \neq 0$$

ainsi

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left(X_t - \overline{X} \right) \left(\overline{X_s} - \overline{\overline{X}} \right) e^{-i(t-s)\omega_j} \\ &= \sum_{|h|<n} \widehat{\gamma}(h) e^{-ih\omega_j} \qquad en \;\; posant \quad h = t - s \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.4 *si* $\gamma(h)$ *et la fonction d'autocovariance d'ordre* h *d'un processus stationnaire* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *avec* $\sum_{h} |\gamma(h)| < \infty$ *, alors sa densité spectrale peut être écrite sous la forme:*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\omega_j} \qquad -\pi < \omega < \pi$$

Ainsi, d'aprés l'expression (3.10), $\frac{I(\omega_j)}{2\pi}$ peut être pris comme estimateur naturel de $f(\omega_j)$

3.3 Propriétés asymptotiques du périodogramme

L'objet de cette partie est de donner les propriétés asymptotiques du périodogramme de la serie $(X_1, ..., X_n)$ extraite processus stationnaire du second ordre de moyenne μ et de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$ absolument sommable . Sous ces conditions, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ a une densité spectrale continue, donnée par :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\omega_j} \qquad -\pi < \omega < \pi \tag{3.11}$$

Le périodogramme de $(X_1, ..., X_n)$ est défini en $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in [-\pi, \pi]$ (Férquence de Fourier), par

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-ih\omega_j}\right|^2$$

à la fréquence $\omega_0 = 0$, le périodogramme s'écries

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t\right|^2 \\ &= \frac{1}{n}\left|n\overline{X}\right|^2 = n\left|\overline{X}\right|^2 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} n\left|\overline{X}\right|^2 & si \quad j = 0 \\ \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-ih\omega_j}\right|^2 & sinon \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t+h} - \overline{X}\right)$$

Proposition 3.3.1 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre de moyenne μ et de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$ absolument sommable $\left(\sum_k |\gamma(h)| < \infty\right)$, alors, quand $n \to \infty$ on a*

$i) E(I_n(0)) - n\mu^2 \to 2\pi f(0)$

$ii) E(I_n(\omega_j)) \to 2\pi f(\omega_j) \qquad \text{si} \quad \omega_j \neq 0$

Remarque 3.3.1 *Si* $\mu = 0$ *alors* $E(I_n(\omega_j))$ *converge uniformement vers* $2\pi f(\omega_j), \forall \omega_j \in [-\pi, \pi]$ *.*

Preuve. De la proposition 3.3.1

$i)$D'aprés la relation (3.12) on a

$$I_n(0) = n\left|\overline{X}\right|^2$$

et

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{|h|\prec n} \widehat{\gamma}(h)\, e^{-ih\omega_j} \qquad\qquad \omega_j \neq 0$$

Donc

$$\begin{aligned} E(I_n(0)) = &\ nE\left(\left|\overline{X}\right|^2\right) \\ &= n\left[var\left(\overline{X}\right) + \left(E\left(\overline{X}\right)\right)^2\right] \\ &= n\ var\left(\overline{X}\right) + n\mu^2 \end{aligned}$$

Où encore

$$E(I_n(0)) - n\mu^2 = nvar\left(\overline{X}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} var(\bar{X}\ ) = &\ \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{j=1}^{n} X_t\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_t) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) \quad \text{ et } i \neq j \end{aligned}$$

Par ailleur

$$\begin{aligned} n\ var\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov\left(X_i, X_j\right) \\ &= \sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\ \gamma\left(h\right) \end{aligned}$$

Si $\sum_{-\infty}^{+\infty}|\gamma\left(h\right)| < \infty$ alors d'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nVar\left(\overline{X}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma\left(h\right) \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty}\gamma\left(h\right) \\ &= 2\pi f\left(0\right) \end{aligned}$$

D'après (3,11) ■

Preuve. De la proposition $ii)$

D'après la relation (3.11)

Si $\omega_j \in \left]-\pi,\pi\right]$, pour montre la propriété asymptotique de $I_n\left(.\right)$, nous allons remplacer dans (3,10) $\hat{\gamma}$ par son expresion donneé en (3,9) on obtient:

$$I_n\left(\omega_j\right) = \sum_{|h|<n}\frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n-|h|}\left(X_t-\bar{X}\ \right)\left(X_{t+|h|}-\bar{X}\ \right)\right]e^{-ih\omega_j}$$

Ainsi

$$E\left(I_n\left(\omega_j\right)\right) = \sum_{|h|<n}\frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n-|h|}\left(X_t-\mu\right)\left(X_{t+|h|}-\mu\right)\right]e^{-ih\omega_j}$$

on a

$$\begin{aligned} &E\left(\left(X_t-\overline{X}\right)\left(X_{t+h}-\overline{X}\right)\right) \\ &= E\left(X_t.X_{t+h}\right)-\left(E\left(\overline{X}\right)\right)^2 \\ &= E\left(X_t.X_{t+h}\right)-\mu^2 = cov(X_t.X_{t+h}) = \gamma\left(h\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(I_n\left(\omega_j\right)\right) &= \sum_{|h|<n}\frac{1}{n}\left(n-|h|\right)\gamma\left(h\right)e^{-ih\omega_j} \\ &= \sum_{|h|<n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma\left(h\right)e^{-ih\omega_j} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| < \infty$ et d'aprés, le théoreme de convergence dominé on a:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E\left(I_n\left(\omega_j\right)\right) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(h)\, e^{-ih\omega_j} \\ &= 2\pi f\left(\omega_j\right)\end{aligned}$$

■

Remarque 3.3.2 *Notons que le périodogramme $I_n(\omega_j)$ et peut se s'écrire sous la forme*

$$I_n\left(\omega_j\right) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2\left(\omega_j\right) + \beta^2\left(\omega_j\right)\right] \qquad j = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \alpha\left(\omega_j\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum\limits_{t=1}^{n} X_t \cos\left(\omega_j t\right) \ , & t = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right] \\ \beta\left(\omega_j\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum\limits_{t=1}^{n} X_t \sin\left(\omega_j t\right) \ , & t = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right] \end{cases} \tag{3.13}$$

Donc si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, alors les variables aléatoires $\alpha(\omega_j)$ et $\beta(\omega_j)$ sont indépendantes de loi normale $N(0, \sigma^2)$, car $\left\{C_j, S_j, j = ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]\right\}$, est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^n$, où

$$C_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\cos\omega_j, \cos 2\omega_j, ..., \cos n\ \omega_j\right)'$$

et

$$S_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\sin\omega_j, \sin 2\omega_j, ..., \sin n\ \omega_j\right)'$$

'Ainsi la suite de périodogrammes

$$I_n\left(\omega_j\right) = \frac{1}{n}\left[\alpha^2\left(\omega_j\right) + \beta^2\left(\omega_j\right)\right] \qquad j = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

est une suite de variable aléatoire indépendants de loi exponentielle de moyenne $\sigma^2 = 2\pi f_X(\omega_j)$ où f_X est la densité spectrale du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Le même résultat peut être établi dans le cas où les variables X_t sont i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2 formulé dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.2 *soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus de bruit blanc i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2 et $I_n(\omega_j)$ le périodogramme de $(X_{1,\ldots,}X_n)$.*

$i)$pour tout $j = 1, ..., n$.

le vecteur aléatoire$\left(I_n(\omega_1), I_n(\omega_2), ..., I_n(\omega_n)\right)'$converge en loi vers un vecteur de variables aléatoires indépandantes de même loi exponentielle de moyenne σ^2. (l'orsque $n \to \infty$)

$ii)$ Si $E(X_1^4) = \eta\sigma^4 < \infty$ et pour $j = 0, ..., n$

$$var\left(I_n(\omega_j)\ \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + 2\sigma^4 & si \quad \omega_j = 0 \quad \text{ou} \quad \pi \\ \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + 2\sigma^4 & si \quad 0 < \omega_j < \pi \end{cases}$$

$$cov(I_n(\omega_j), I_n(\omega_h)) = \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 \qquad si\ \omega_j \neq \omega_h$$

Remarque 3.3.3 *$X_1 \to N(0,\sigma^2)$, alors $\eta = 3$, Ainsi $I_n(\omega_j)$ et $I_n(\omega_h)$ non corrélées pour $j \neq h$*

Preuve. Proposision (3.3.2)

$i)$ Soit $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in]0,\pi[\quad j = 1, ..., n$ puisque

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2(\omega_j) + \beta^2(\omega_j)\right]$$

Où $\alpha(\omega_j)$ et $\beta(\omega_j)$ sont doneés par (3.13) il suffit de montrer que$(\alpha(\omega_1), \beta(\omega_1), ..., \alpha(\omega_n), \beta(\omega_n))$ est un vecteur asymptotiquement normale centré et de matrice de variance –covariance $\sigma^2\ I_{2m}$, avec I_{2m} la matrice identité $(2m \times 2m)$ on a

$$\sum_{t=1}^{n}\cos^2\left(\frac{2\pi ht}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

pour tout $0 < h < \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} var\left(\ \alpha(\omega_j)\right) &= \sigma^2\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\cos^2(\omega_j t) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(\cos^2(\omega_j t)\, X_t^2 1_{\left\{|\cos(\omega_j t) X_t| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(X_t^2 1_{\left\{|X_t| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right) \\
&= E\left(X_t^2 1_{\left\{|X_t| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right) \to 0 \text{ quand } \mathrm{n} \to \infty
\end{aligned}$$

Ce qui entraine, d'après la condition de Lindeberg, que $\alpha(\omega_j)$ suit asymptotiquement une loi normale $N(0, \sigma^2)$ quand $n \to \infty$.

De même, en utilisant le fait que

$$\sum_{t=1}^{n} \sin^2\left(\frac{2\pi h t}{n}\right) = \frac{n}{2}$$

pour tout $0 < h < \frac{n}{2}$, et

$$\sum_{t=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi h t}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi h t}{n}\right) = 0$$

Pour tout $h,\ j = 1 \ldots n$

On montre que $\beta(\omega_j)$ également asymptotiquement une loi normale $N(0, \sigma^2)$, quand $n \to \infty$ que la matrice des covariances de $(\alpha(\omega_1), \beta(\omega_1), ..., \alpha(\omega_n), \beta(\omega_n))'$ et $\sigma^2 I_{2m}$.

Ainsi, d'après le principe de Cramer-Wold, on a la convergence en loi de $(\alpha(\omega_1), \beta(\omega_1), ..., \alpha(\omega_n), \beta(\omega$ un vecteur de variables aléatoires dont chacune des composantes suit une loi exponentielle de moyenne $\sigma^2.ii)$Par dénition

$$\begin{aligned}
I_n(\omega_j) &= \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j}\right|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(X_s e^{-is\omega_j}\right)\left(\overline{X_t e^{-it\omega_j}}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} X_s X_t e^{i\omega_j(s-t)}$$

ainsi

$$E(I_n(\omega_j)\, I_n(\omega_h)) = \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} E\left(X_s X_t X_u X_v\right) e^{i\omega_j(s-t)} e^{i\omega_h(u-v)}$$

Or $$E\left(X_s X_t X_u X_v\right) = \begin{cases} \eta\sigma^4 & si \quad s=t=u=v \\ \sigma^4 & si \quad t \neq u = v \\ 0 & si \quad s \neq t, s \neq v \end{cases}$$

$$E(I_n(\omega_j), I_n(\omega_h)) = \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + \sigma^4\left(1 + \frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j+\omega_h)t}\right|^2 + \frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j-\omega_h)t}\right|^2\right)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} E(I_n(\omega_j)) &= \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} E(X_s X_t) e^{i\omega_j(s-t)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E(X_t^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Donc

$$cov(I_n(\omega_j), I_n(\omega_h)) = \frac{1}{n}(\eta-3)\sigma^4 + \frac{\sigma^4}{n^2}\left(1 + \left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j+\omega_h)t}\right|^2 + \left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j-\omega_h)t}\right|^2\right)$$

Ce qui entraine les expressions de $var\left(I_n(\omega_j)\right)$ et de $cov(I_n(\omega_j), I_n(\omega_h))$ donnée en $ii)$ de la proposition (3.3.2) ■

3.4 Extension à un processus linéaire

Les résultats de la proposition (3.3.2) peuvent être étendus à un modèle linéaire de la forme

$$X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \tag{3.14}$$

Où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus de bruit blanc et tel que $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < \infty$

Les modèles AR, MA, ARMA peuvent se mettre sous la forme (3.14), sous certaines conditions sur paramètres.

On sait que la densité spectrale $f_X(.)$ du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est reliée à celle du processus $f_\varepsilon(.)$ de bruit blanc par

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \left|\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\omega) && \text{-}\pi < \omega < \pi \\ \psi(Z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_j Z^j \\ f_\varepsilon(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} I_n^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} I_n(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|<n} \widehat{\gamma}(h)\, e^{-ih\omega} \end{aligned}$$

d'après la relation (3.12), est qui peut être considérée comme une version empirique de la densité spectrale

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma(h)\, e^{-ih\omega} \qquad \text{-}\pi < \omega < \pi$$

$I_n^*(\omega_j)$ peut être défini comme étant «le périodogramme modifié» (ou simplement périodo-gramme lorsqu'il n'y a pas de confusion).

Il serait donc intéressant d'établir une relation similaire à celle de (3.15) qui relie le périodogramme de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et celui de $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Nous allons maintenant donner dans le théorème suivant la loi asymptotique du vecteur aléatoire $(I_n(\omega), I_n(\omega_2), ..., I_n(\omega_n))'$, où $I_n(\omega_1)$ est le prédiodogramme d'un processus linéaire donné par la relation (3.14).

Théorème 3.4.1 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire de la forme (3.14). On note par $I_{n,X}(\omega)$ et $I_{n,\varepsilon}(\omega)$ les périodogrammes respectivement de $(X_1, ..., X_n), (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)'$.*

i) Si $\omega_h = \frac{2\pi h}{n} \in [0, \pi]$, on a alors

$$I_{n},_{X}(\omega) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}(\omega_h) + R_n(\omega_h)$$

Où

$$\max_{\omega_{h\in[0,\pi]}} E\left|R_n(\omega_h)\right| \to 0 \text{ quand } \; n \to \infty$$

Si en plus

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left|\psi_j\right| |j|^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ et } \; E\left|\varepsilon_1^4\right| < \infty$$

Alors

$$\max_{\omega_{h\in[0,\pi]}} E\left|R_n(\omega_h)\right|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ii) Si la densité spectrale du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $f(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$ et si $0 < \omega_1 < ... < \omega_n < \pi$ alors le vecteur aléatoire des péiodogrammes $(I_{n,X}(\omega), ..., I_{n,X}(\omega_m))'$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)'$ dont les composantes $\varepsilon_t, i = 1, ..., m$ sont indépendantes et de loi exponentielle avec ε_t de moyenne $2\pi f(\omega_i)$, $i = 1, ..., m$.

Preuve. *i*) soit $\omega_h = \frac{2\pi h}{n}\omega$, $J_X(\omega_h)$ et $J\varepsilon(\omega_h)$ les transformées de Fourier discrètes respectivement de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et , $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

c'est-à-dire

$$J_X(\omega_h) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{\infty} X_t e^{-it\omega_h}$$

et

$$J\varepsilon(\omega_h) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t e^{-it\omega_h}$$

On a

$$\begin{aligned}
J_X(\omega_h) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ji\omega_h} \left(\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-j} e^{-i(t-j)\omega_h} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ji\omega_h} \left(\sum_{t=1-j}^{n-j} \varepsilon_t e^{-it\omega_h} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ji\omega_h} \left(\sum_{t=1-j}^{n-j} \varepsilon_t e^{-it\omega_h} + S_{nj} \right) \\
S_{nj} &= \sum_{t=1-j}^{n-j} \varepsilon_t e^{-it\omega_h} - \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{-it\omega_h}
\end{aligned}$$

la transformée de Fourier discrète $J_X(\omega_h)$ s'écrit encore sous la forme

$$J_X(\omega_h) = \psi\left(e^{-i\omega_h}\right) J\varepsilon(\omega_h) + Z_n(\omega_h)$$

Où

$$Z_n(\omega_h) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ji\omega_h} S_{nj}$$

Remarquons que si $|j| < n$, alors S_{nj} est une somme de $2|j|$ variables aléatoires indépendantes, tandis que si $|j| \geq n$, S_{nj} est une somme de $2n$ variables aléatoires indépendantes. Ce qui entraine que

$$E|S_{nj}|^2 \leq 2\min(|j|, n)\,\sigma^2$$

Donc

$$\begin{aligned}
E|Z_n(\omega_h)|^2 &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{E|S_{nj}|^2} \right)^2 \\
&\leq 2\sigma^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)} \right)^2 .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Soit m un nombre entier positif fixé, on a pour tout $n > m$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{|j| \leq m} |\psi_j| |j|^{\frac{1}{2}} + \sum_{|j|>m} |\psi_j|$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)} \leq \sum_{|j|>m} |\psi_j|$$

m etant choisi arbitraire, il s'ensuit d'après (3.17) que $E\left|Z_n\left(\omega_h\right)\right|^2 \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Par ailleurs, on a

$$I_{n,X}\left(\omega\right) = J_X\left(\omega_h\right) J_X\left(-\omega_h\right)$$
$$et$$
$$I_{n,\varepsilon}\left(\omega\right) = J\varepsilon\left(\omega_h\right) J_\varepsilon\left(-\omega_h\right)$$

et d'après (3.16)

$$I_{n,X}\left(\omega\right) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}\left(\omega_h\right) + R_n\left(\omega_h\right)$$

Où

$$R_n\left(\omega_h\right) = \psi\left(e^{-i\omega_j}\right) J\varepsilon\left(\omega_h\right) Z_n\left(-\omega_h\right) + \psi\left(e^{+i\omega_j}\right) J\varepsilon\left(-\omega_h\right) Z_n\left(\omega_h\right) + \left|Z_n\left(\omega_h\right)\right|^2$$

Puisque

$$\left|\psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| < \infty,$$
$$E\left|J\varepsilon\left(\omega_h\right)\right|^2 = E\left(J\varepsilon, n\left(\omega_h\right)\right) = \sigma^2$$

Et que la borne dans la relation (3.17) ne dépend pas de ω_h d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\max_{\omega_h \in [0,\pi]} E\left(R_n\left(\omega_h\right)\right) \to 0$$

quand $n \to \infty$ par ailleurs si

$$E\left(\varepsilon_1^4 < \infty\right) \quad \text{et} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| \left|j\right|^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$E\left|S_{nj}\right|^4 \le 2\left|j\right| E\left(\varepsilon_1^4\right) + 3(2\left|j\right|\sigma)^2$$

Alors

$$\begin{aligned} E\left|Z_n\left(\omega_h\right)\right|^2 &\le \left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| \left[2\left|j\right|^2 E\left(\varepsilon_1^4\right) + 12\left|j\right|^2 \sigma^4\right]^{\frac{1}{4}}\right)^4 \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwaz et la Proposition 3.3.2 à chaque terme de $R_n(\omega_h)$ on obtient

$$\max_{\omega_h\in[0,\pi]} E\left(\left|R_n(\omega_h)\right|^2\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$ii)$ D'après le résultat précédent $i)$, on a

$$I_{n},_X(\omega) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}(\omega_h) + R_n(\omega_h)$$

avec $R_n(\omega_h) \to 0$ quand $n \to \infty$ or la densité spectrale du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est reliée à la densité spectrale du processus de bruit blanc ε_t, d'après la relation (3.15) par

$$f_{n,X}(\omega_h) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_j}\right)\right| f_\varepsilon(\omega_h)$$

pour tout $\omega \in [-\pi,\pi]$,avec $f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ donc la relation reliant $I_{n},_X$ et $I_{n},_\varepsilon$ peut encore s'écrire

$$I_{n},_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} f_X(\omega)\, I_{n},_\varepsilon + R_n(\omega_h)$$

avec $R_n(\omega_h) \overset{P}{\to} 0$ quand n$\to \infty$

En utilisant (i) de la proposition (3.3.2), C'est-à-dire que $(I_{\varepsilon,n}(\omega_1), ..., I_{\varepsilon,n}(\omega_m))'$ converge en loi vers un vecteurs aléatoire $(\tau_1, ..., \tau_m)'$ dont les composantes τ_i sont indépendantes et que τ_i suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\sigma^2}$ (ou de moyenne σ^2)

Et en utilisant le fait que $R_n(\omega_h) \overset{P}{\to} 0$ quand $n \to \infty$, en déduit que le vecteur aléatoire $((I_{n,X}(\omega_1), ..., I_{n,X}(\omega_m))'$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $(\xi_1, .., \xi_m)'$ dont les composants ξ_i sont indépendantes et que ξ_i suite une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\pi f(\omega_i)}$ (où de moyenne $2\pi f(\omega_i)$, $i = 1, \ldots, m$. ■

3.5 Estimation à fenêtre de la densité spectrale

Considérons le processus linéaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, définir par:

$$X_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_t \tag{3.18}$$

Où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est bruit blanc dont les coefficients vérifie la condition

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mid \psi_j \mid\mid j \mid^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Nous avons, vu dans les sections précédentes que le périodogramme de $X_1, ..., X_n$ au fréquances $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} n \mid \overline{X} \mid & \text{si } \omega_j = 0 \\ \sum_{|h|<n} \widehat{\gamma}(h)\, e^{-ih\omega_j} & \text{si } \omega_j \neq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

où

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

Et d'aprés (3.9)

La quantité

$$\begin{aligned} I_n^*(\omega_j) &= \frac{1}{2\pi} I_n(\omega_j) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n} \widehat{\gamma}(h)\, e^{-ih\omega_j}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

Qui considéré comme une version empirique de la densité spectrale du processus (X_t)

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h)\, e^{-i\omega h}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Remarque 3.5.1 *On remarque que $I_n^*(\omega_j)$ et $f(\omega)$ s'écrivent essentiellement avec la même fonction respectivement des autocovariances $\widehat{\gamma}(h)$ et des autocovariances théorique $\gamma(h)$, mais paradoxalement n'est pas un $I_n^*(\omega_j)$ estimateur consistantant de $f(\omega)$.*

Certains auteurs expliquent la non consistance par le fait que $I_n^*(\omega_j)$ tient compte de toutes les autocovariances empiriques $\widehat{\gamma}(h)$ d'ordre $h = 0$ à $h = (n-1)$, mais $\widehat{\gamma}(h)$ pour h proche de $(n-1)$ ne contiennent pas assez d'informations sur l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.

Pour cela, on considère un estimateur tronqué de la forme

$$\widehat{f}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-m}^{m} \widehat{\gamma}(h)\, e^{-i\omega h}, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{3.21}$$

Où m est un entier naturel inferieur strictement à n-1.

Un tel estimateur $\widehat{f}_0(\omega)$ est appelé « périodogramme tronqué » et m appelé « point de troncature».

Notons que (voir Peiestly (1981), chapitre 6)

$$E\left(\widehat{f}_0(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-m}^{m}\left(1 - \frac{\mid h \mid}{m}\right)\gamma(h)\, e^{-i\omega h}$$

Quand $m \to \infty$,

$$E\left(\widehat{f}_0(\omega)\right) \to f(\omega)$$

Et que

$$Var\left(\widehat{f}_0(\omega)\right) = O\left(\frac{m}{n}\right).$$

Ainsi, si nous posons $m = m(n)$ tel que $m \to \infty$ quand $n \to \infty$ avec la condition $\frac{m}{n} \to \infty$, quand $n \to \infty$, alors le biais et la variance de l'estimateurt $\widehat{f}_0(\omega)$ tendant vers zéro quand $n \to \infty$. il suffit de prendre $m = \sqrt{n}$ ou plus genéralement $m = n^a$

avec $0 < a < 1$

L'estimateur $\widehat{f}_0(\omega)$ peut être considéré comme un cas particulier de l'estimateur plus général

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}\lambda(h)\,\widehat{\gamma}(h)\, e^{-i\omega h} \tag{3.22}$$

Où

$$\lambda(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } |h| \leq m \\ 0 & \text{si } |h| > m \end{cases} \tag{3.23}$$

Les estimateurs de la forme générale (3.22) sont introduits par Grenander et Rosemblatt(1953).

Il y a différentes forme de la fonction $\lambda(h)$. [12]

Apartir de l'expression de

$$I_n^*(\omega_j) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}\widehat{\gamma}(h)\, e^{-ih\omega}$$

Et par un argument d'inversion, on a pour $\mid h \mid < n$

$$\widehat{\gamma}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta)\, e^{-ih\omega} d\theta \tag{3.24}$$

En remplaçant l'expression de $\widehat{\gamma}(h)$ dans celle de $\widehat{f}(\omega)$ de (3.22) , on obtient

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|<n} \lambda(h)\, e^{-ih(\omega-\theta)} \right\} d\theta$$

C'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta)\, W(\omega-\theta)\, d\theta \tag{3.25}$$

Où

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|<n} \lambda(h)\, e^{-ih(\theta)} \tag{2.26}$$

Ainsi, l'estimateur $\widehat{f}(\omega)$ s'écrit comme une intégrale pondérée de $I_n^*(\theta)$, la où fonction poids $W(\theta)$ est la transformée de Fourier de la suite $\{\lambda(h)\}$. On utilise, en générale, la fonction $W(\theta)$ fortement concentrée autour de $\theta = 0$.

Dans l'expression de $\widehat{f}(\omega)$ de la relation (3.22), la suite $\{\lambda(h)\}$ est appelée « fenêtre de décalage » où le terme utilisé dans la littérature onglo -saxonne « Lag window » qui peut être simplement considérée comme une « suite de poids » et qui agit sur le « décalage »(ou « l'ordre ») (« lag »). Le mot fenêtre est introduit pour la premier fois par Bachmanet Tukey(1959).

3.6 Quelques fenêtres usuelles

3.6.1 La fenêtre « périodogramme tronqué » (ou fenêtre rectangulaire)

La « suite de poids » $\{\lambda(h)\}$ est la forme

$$\lambda\left(h\right)=\begin{cases}1 \text{ si } \mid h\mid\leq m,\\ 0 \text{ si } \mid h\mid > m,\end{cases}$$

où m<n-1, Le « paramètre fenêtre » est la valeur de la troncature dans la somme de la relation (2.21).

La fenêtre spectrale $W\left(\theta\right)$ correspondante est donné par

$$W\left(\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-m}^{m}e^{-ih\theta}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}=D_m\left(\theta\right) \tag{3.27}$$

La fonction $D_m\left(\theta\right)$ est appelée « le noyau de Dirichlet ».

on a , quand $n\rightarrow\infty$, (Voir Brochwelle et david (1991) , chapitre 10)

$$var\left(\widehat{f}\left(\omega\right)\right)\simeq\frac{2m}{n}f^2\left(\omega\right),\text{ pour } 0<\omega<\pi.$$

3.6.2 La fenêtre de Bartlett(ou fenêtre triangulaire)

Bartlett(1950) a proposé un estimateur de la densité spectrale $f\left(\omega\right)$ avec une fenêtre $\lambda\left(h\right)$ de la forme

$$\lambda\left(h\right)=\begin{cases}1-\frac{|h|}{m} \text{ si } \mid h\mid\leq m,\\ 0 \text{ si } \mid h\mid > m.\end{cases}$$

La fenêtre spectrale correspondante est donnée par le noyau de Fejer d'ordre m,

$$W\left(\theta\right)=\frac{1}{2\pi m}\frac{\sin(\frac{m\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}=F_m(\theta). \tag{3.28}$$

Puisque $W\left(\theta\right)\geq 0$, cette fenêtre donne toujours un estimateur de la densité spectrale no négatif.

En plus, quand $n\rightarrow\infty$, on a

$$var\left(\widehat{f}\left(\omega\right)\right)\simeq\frac{2m}{3n}f^2\left(\omega\right),0<\omega<\pi. \tag{3.29}$$

La variance asymptotique est donc plus petite que l'estimateur utilisant la fenêtre rectangulaire.

3.6.3 La fenêtre de Daniel

Daniel (1946) est l'un des premières auteur à considérer le problème de l'estimateur de la densité spectrale en suggérant que l'on peut estimer $f(\omega)$, on prenant la moyenne sur un petit intervalle centré en ω, c'est-à-dire $\left(\omega - \frac{\pi}{m}, \omega + \frac{\pi}{m}\right)$.

L'estimateur $f(\omega)$ proposer par Daniel est donné par

$$\widehat{f}_D(\omega) = \frac{m}{2\pi} \int_{\omega-\frac{\pi}{m}}^{\omega+\frac{\pi}{m}} I_n^*(\theta)\, d\theta. \tag{3.30}$$

(Pour les valeur proche de $\pm\pi$, on fait une extension $I_n^*(\theta)$, en utilisant sa périodicité de période 2π).

La fenêtre spectrale correspondante $W(\theta)$ est périodique de période 2π, est sur , $]-\pi, +\pi[$, la fonction $W(\theta)$ a la forme rectangulaire

$$W(\theta) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \text{ si } & \frac{-\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A partir de la relation (3.26), on peut écrire la fenêtre

$$\begin{aligned} \lambda(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega)\, e^{-ih\omega} d\omega, \\ &= \int_{\frac{-\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} \frac{m}{2\pi} e^{-ih\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$\lambda(h) = \frac{m}{2\pi} \sin\left(\frac{h\pi}{m}\right), \mid h \mid \leq m.$$

La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale basée sur cette fenêtre est donnée par

$$var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \approx \frac{m}{n} f^2(\omega), 0 \leq \omega \leq \pi$$

3.6.4 La fenêtre de Backman –Tukey

Tukey avec Bartlett et Daniell fut l'un des pionniers de la théorie spectrale, a suggéré un estimateur basé sur la fenêtre

$$\lambda(h) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\left(\frac{\pi h}{n}\right) & \mid h \mid \leq m \ , \\ 0 & \mid h \mid > m. \end{cases}$$

La fenêtre spectrale correspondante est une combinaison linéaire pondérée des noyaux de Dirichlet,

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-m}^{m} \left[(1-2a) + a\left(e^{ih\frac{\pi}{m}} + e^{-ih\frac{\pi}{m}}\right)\right] e^{-ih\theta} \\ &= aD_M\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right) + (1-2a)\, D_m(\theta) + aD_m\left(\theta + \frac{\pi}{m}\right), \end{aligned}$$

Où le noyaux de Drichlet D_m est définit par (3.27).

La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale correspondant est

$$var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \approx \frac{2m}{n}\left(1 - 4a + 6a^2\right) f^2(\omega)\,,\ 0 < \omega < \pi$$

Les fenêtres de Balackman-Tukey, avec $a = 0.23$ et $a = 0.25$ sont, en générale, appelées les fenêtres respectivement de Tukey-Hamming et Tukey Hanning.

3.6.5 La fenêtre de parzen

parzen (1961 b) propose la fenêtre

$$\lambda(h) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 6\left(\frac{|h|}{m}\right)^3 & \text{si} \quad \mid h \mid \leq \frac{m}{2} \ , \\ 2\left(1 - \frac{|h|}{m}\right)^3 & \text{si} \quad \frac{m}{2} \leq \mid h \mid \leq m \ . \\ 0 & \text{si} \quad \mid h \mid \ > m \ . \end{cases}$$

La fenêtre spectrale de parzen correspondante est donnée par (en supposant m paire).

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}\left[1-6\left(\frac{h}{m}\right)^2+6\left(\frac{|h|}{m}\right)^3\right]\cosh\theta + 2\sum_{\frac{m}{2}<h\leq m}\left(1-\frac{|h|}{m}\right)^3\cosh\theta\right\},$$
$$= \frac{3}{8\pi m^3}\left(\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^4\left[1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

(Voir parzen (1963 a))

Pour m grand, le second terme est négligeable par rapport au premier terme au voisinage de $\theta = 0$, ce qui donne un approximation de $W(\theta)$ donnée par

$$W(\theta) \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^4.$$

La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale correspondant est

$$var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \approx 0.539\frac{m}{n}f^2(\omega), \qquad 0<\omega<\pi$$

3.7 Propriétés asymptotiques de l'estimateur à fenêtre de la densité spectrale

Considérons un estimateur $\widehat{f}(\omega)$ de la densite spectrale de la forme donnée par (3.22) C'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}\lambda(h)\widehat{\gamma}(h)e^{-i\omega h} \tag{3.31}$$

qui peut encore s'écrire d'après (3 .25) sous la forme

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^* W_n(\omega-\theta)\,d\theta, \tag{3.32}$$

Où

$$W_n(\theta) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h|<n}\lambda_n(h)e^{-i\theta h}$$

On attache l'indice n aux fonction $\lambda(h)$ et $W(\theta)$ pour souligner la dèpendance de ces fonction de n.

Supposons que $\lambda_n(h)$ est une suite paire, pour tout n, ainsi $W_n(\theta)$ est egalement une fonction paire de θ.

Supposons, en autre, que $\lambda_n(h)$ est telle que les conditions suivantes vérifiées;

1. $W_n(\theta) \geq 0\ \forall n, \theta$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta)\, d\theta = 1$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta)\, d\theta < \infty, \forall n$
4. $\forall\ \varepsilon > 0$, $W_n(\theta) \to \infty$ uniformément quand $n \to \infty$ pour $\mid \theta \mid > \varepsilon$,
5. $\frac{\sum_{h|<n} \frac{|h|}{n} \lambda_n^2(h)}{\sum_{h|<n} \lambda_n^2(h)} \to 0$ quand $n \to \infty$.

La condition (4) assure que, quand $n \to \infty$ $W_n(\theta)$ devient de plus concentrée autour de $\theta = 0$ et la condition (2), $W_n(\theta)$ a une forme limite d'une fonction de Dirac. [12]

on a

$$E\left(\widehat{f}(\omega)\right) \sim \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) W_n(\omega - \theta)\, d\theta = \widetilde{f}(\omega). \tag{3.33}$$

Par ailleurs ,en utilisant le fait que (Voir Piestley(1981)) ,page 418), si f satisfait la condition de Lipchitz d'ordre 1,

$$(\mid f(\omega_1) - f(\omega_2) \mid < \mid \omega_1 - \omega_2 \mid \text{ quand } \mid \omega_1 - \omega_2 \mid) \to 0,$$

$$\begin{aligned} E\left(I_n^*(\omega)\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, F_n(\theta - \omega)\, d\pi \\ &= f(\omega) + O\left(\frac{\log\ n}{n}\right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

Où

$$F_n(\theta) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2$$

$O\left(\frac{\log\ n}{n}\right)$ réperesenté le biais de l'estimateur $I_n^*(\omega)$. et si $f(\omega)$ a une dérivée bornée, on a

$$E\left(\widehat{f}(\omega)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) W_n(\omega - \theta) d\theta + O\left(\frac{\log\ n}{n}\right) \tag{3.35}$$

Puisque f est supposé continue pour tout θ, les conditions (1) et (4) sur $(W_n(\theta))$ donnent

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\widehat{f}(\omega)\right] = f(\omega), \forall\omega \tag{3.36}$$

Montrant que $\widehat{f}(\omega)$ est asymptotiquement sans biais.[12]

Par ailleurs

$$var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \approx (1+\delta_{\omega,0,\pi}) f^2(\omega) \frac{1}{n} \sum_{h|<} \lambda_n^2(h). \tag{3.37}$$

Où

$$\delta_{\omega,0,\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \pm\pi, \\ 0 & \text{si } \omega \neq \pm\pi, \end{cases}$$

3.7.1 Expressions approximatives du bais

Posons

$$b(\omega) = E\left(\widehat{f}(\omega) - f(\omega)\right).$$

puisque

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta)\, d\theta = 1$$

d'aprés(3.35),on a

$$b(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - f(\omega)]\, W_n(\omega-\theta)\, d\theta + O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{3.39}$$

Le second terme $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ est le biais du au periadogramme lui-même, il est, en général, plus petit que le premier terme qui représente le bais du au lissage.

Donc, tenant compte uniquement du premier terme, on obtient

$$b(\omega) \sim \int_{-\pi}^{\pi} [f(\omega-\theta) - f(\omega)] W_n(\theta)\, d\theta. \tag{3.40}$$

Supposons que $f(\omega)$ est deux fois différentiable avec une second dérivée bornée, et pour θ proche de zéro,

$$f(\omega-\theta)\sim f\ \ (\omega)-\theta f'(\omega)+\frac{\theta^2}{2}f''(\theta)+O\left(\theta^2\right). \tag{3.41}$$

En remplaçant (3.41) dans (3.40),on obtient

$$b(\omega)\approx\frac{1}{2}f''(\theta)\int_{-\pi}^{\pi}\theta^2W_n(\theta)\,d\theta. \tag{3.42}$$

On peut utiliser une autre approche du biais, en remplaçant $\lambda_n(h)=\mu\left(\frac{h}{m}\right)$ dans la relation (3.22) c'est à dire

$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}u\left(\frac{h}{m}\right)\widehat{\gamma}(h)\,e^{-i\omega h}$$

et en prenant l'espérance,ona

$$\begin{aligned}b(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}\left[u\left(\frac{h}{m}\right)\left(1-\frac{|h|}{m}\right)-1\right]\gamma(h)\,e^{-i\omega h}-\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|\geq n}\gamma(h)\,e^{-i\omega h}\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|<n}\left[u\left(\frac{h}{m}\right)-1\right]\gamma(h)\,e^{-i\omega h}-\frac{1}{2\pi n}\sum_{|h|<n}|h|\,u\left(\frac{h}{m}\right)\gamma(h)\,e^{-i\omega h}-\frac{1}{2\pi}\sum_{|h|\geq n}\gamma(h)\,e^{-i\omega h}\end{aligned}$$

soit r le plus grand entier positif tel que

$$u_{(r)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-u(h)}{|x|^r}\right)$$

existe, finie et non nulle.

Supposant que $\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|h|^q\,|\gamma(h)|<\infty$ pour $q\leq r$ et que $\frac{n}{m^r}\to 0$ quand $n\to 0$

Alors, en prenant la limite de l'expression pour $b(\omega)$, quand $n\to 0$, on remarque que le osecond et troisième termes tendent vers zéro de l'ordre $O\left(\frac{1}{m^r}\right)$,uniformément en ω, tandis que le premier terme est asymptotiquement

$$-u_{(r)}m^{-r}f_{(r)}(\omega)$$

où

$$f_{(r)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|h|^r\,\gamma(h)\,e^{-i\omega h}$$

appelé par Parzen « la $r^{iéme}$ dérivée généralisée » de $f(\omega)$.

Ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to\infty}(m^r)\, b(\omega) = -u_{(r)} f_{(r)}(\omega)$$

Le biais asymptotique et donneé par

$$b(\omega) \backsimeq -\frac{u_{(r)}}{m^r} f_{(r)}(\omega) \tag{2.43}$$

Conclusion

Nous avons présenté la densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire, et par la suite nous avons déterminé pour les modèles AR(p), MA(q), ARMA(p,q) comme nous avons donnée des exemples et démonstrations.

Nous avons aussi présenté l'estimation de la densité spectacle et ses propriétés asymptotiques a l'aide d'un périodogramame $I_n(\omega_j)$.

L'expression du périodogramme peut s'écrire en fonction de la fonction d'autocovaince empirique de la série stationnaire, ainsi $\frac{I(\omega_j)}{2\pi}$ peut être pris comme estimateur naturel de $f(\omega_j)$.

$E(I_n(\omega_j))$ Converge uniformément vers $2\pi\ f(\omega_j)$ si $u = 0$, $\forall\ \omega_j \in [-\pi, \pi]$

Nous avons cité les modèles de quelques fenêtre usuelle (Backman –Tukey, Daniel, Bartlett, parzen) pour estimer la densité spectrale est étudier les propretés asymptotiques de l'estimateur à fenêtre de densité spectrale, en donnant une expression approximative du bais.

Perspectives

Dans notre travail, nous avons étudié la densité spectrale des processus stationnaires de courte mémoire. Il serait intéressant d'élargir cette notion aux processus fractionnaires et fractionnaire périodiques (qui ne sont pas stationnaires).

L'estimateur à fenêtre dépend du paramètre de lissage h il est intéressant de considère h=h(n) avec n la longueur de la série.

Bibliographie

[1] A. Charpentier, Modèles de prévision Séries temporelles, UQAM, ACT642, 2011.

[2] A. Charpentier, Cours Des Series Temporelles Theorie Et Aplication, Université de Paris.

[3] C. Perraudin, Sries Chronologiques, Université de Paris, Magistére d'Economie, 2005.

[4] Cours de statistique et Analyse des Données, école nationale des Ponts et Chaussées, Année universitaire, 2007.

[5] E. Parzen, On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series, The Annals of Mathematical Statistics, 1957.

[6] E. G. Gladyshev, Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter, Theory Prob, and appl 1963.

[7] F. Comets et T.Meyre, Calcule Stochastique et Modéle de Diffusion, édition Dunod, 2006.

[8] J. Bardet, Cours de Mise à niveau en série chronologique, Master E.T.E.Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

[9] J. Philippe, Séries chronologiques, université paris 1, Septembre 2007.

[10] K. S. Lii and M. Rosenblatt, Spectral analysis for harmonizable processes, Annals of Statstics, 2002.

[11] M. Bautahar, Series temporelles Estimation Parametrique Et Non Prametrique Avec Le Logiciele R, Département De Mathématiques Cace 901, Faculté Des Sience De Luming.163 AV.De Luming 13288 Marselle Cedex 9,4, 2007.

[12] M. B. Priestley, Spectral analysis and time series, Academic Press New York, 1981.

[13] Michel Prenat, Series Cronologiques, Université Paris-Sud, Master Ingénierie Mathématheques, 2011.

[14] M. B. Prisetley, spectrale Analysis and time series. Vol 1. N.Y: Academie Press.

[15] N. Azizou et N.Haroun, les outils de maitrise des consequences des black-outs" , Master en Electrotechnique, 2014.

[16] N. Azzaoui, Analyse et Estimations Spectrales des Processus alpha-Stables non-Stationnaires, Mathematics. Universit e de Bourgogne, 2006.

[17] O. Roustant, Introduction Aux Series Chronologique, Novembre 2008.

[18] O. Riaul, Modulation numéraques notes de cours densite spectrale de puisance

[19] P .J . Brockwell, R, A .Davis:Time series théorey and methods, 1991.

[20] Raphael Rossignol, Analyse Spectrale Et Séries Chronologiques, M1 BBBS Orsay, 2011.

[21] S. Adjmla, Le Processus AR(p) , Université de Main, Gains And Cepremap, 2008.

[22] S. Oualid, Memoire sur Etude Du Modéle autoregréssif Fractionnaire D'ordre 1, Memoire de classe des sciences Mathématiques, 2014.

[23] S. Zetili, Inférence Statistique dans les processus ARMA fractionnaires, Magister en Mathématiques Appliquées, université mentouri constantine.

[24] S.Fourtie, Les modéles MA, AR, et ARMA multidimennsionnele, estimation et causalité

[25] Time series analysis papers, Holden-Day, 1967.

[26] T. W. Anderson, The Statistical Analyis of Time Series, Wiley and Sons, 1971.