

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane MIRA-Béjaïa

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

Mémoire :

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Mécanique

*Option : **Energétique.***

THEME

***Etude de la convection
thermosolutale
dans une cavité rectangulaire.***

Présenté par :

M^r : Habouche Mounir

M^r : Hanat Lotfi

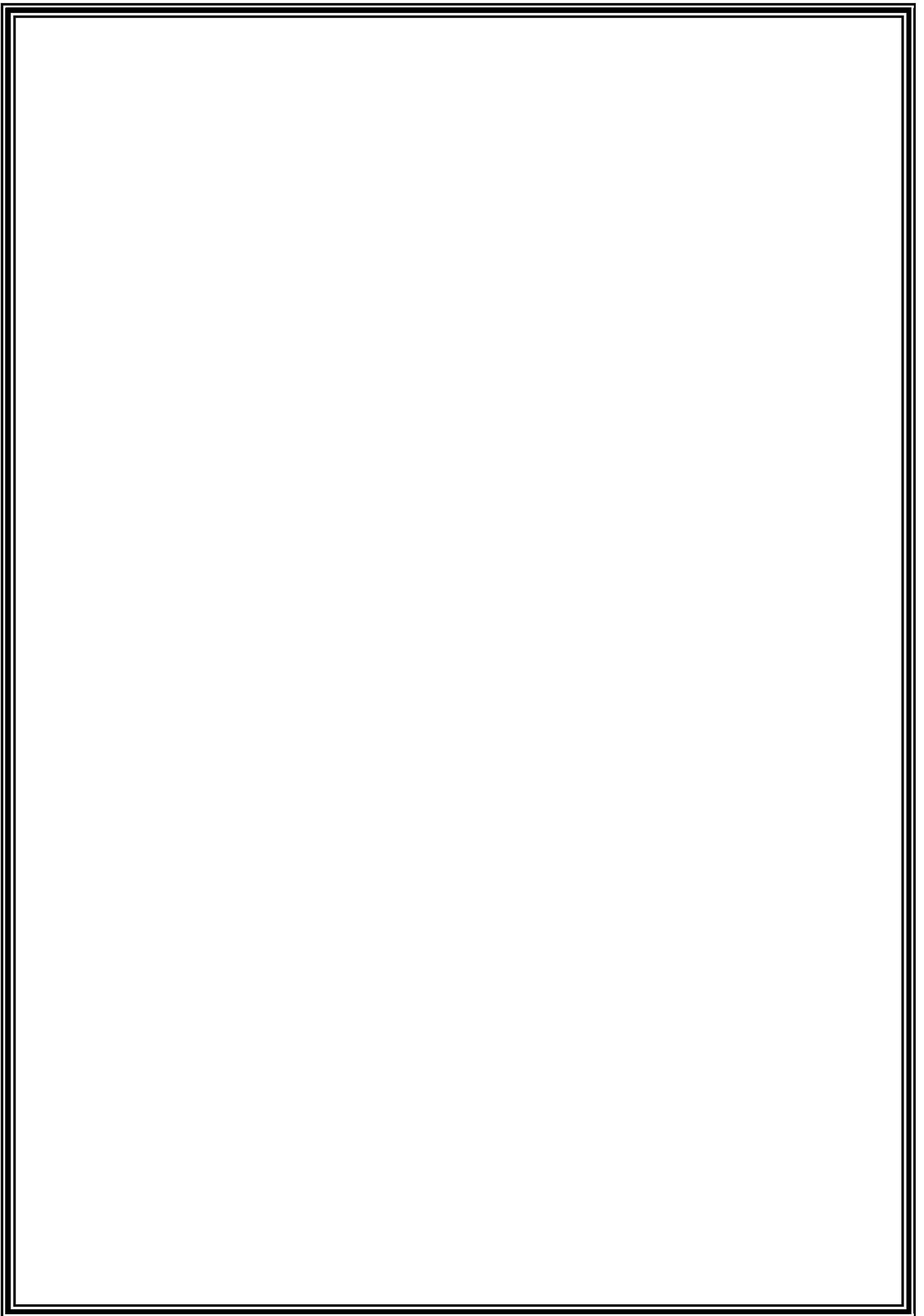
suivi par :

M^r : F. Nait Bouda.

Soutenu le : 23/ 06/ 2013

Devant le jury composé de :

<i>M^r : D. SADAoui :</i>	<i>Président</i>	<i>Université Abderrahmane MIRA-Béjaïa</i>
<i>M^r : F. NAIT BOUDA:</i>	<i>Rapporteur</i>	<i>Université Abderrahmane MIRA-Béjaïa</i>
<i>M^r : A. HAMOUche:</i>	<i>Examineur</i>	<i>Université Abderrahmane MIRA-Béjaïa</i>
<i>M^r : M. ALLOUche:</i>	<i>Examineur</i>	<i>Université Abderrahmane MIRA-Béjaïa</i>



Remerciements

Avant de remercier toute créature on remercie le créateur qui nous a donné la bonne santé, la capacité à réfléchir et le courage de mener à bien nos études.

On tient à remercier Monsieur A. DJERRADA notre enseignant et chef de département pour ses encouragements et ses qualités d'enseignant.

On tient à exprimer nos vifs remerciements à Monsieur NAIT BOUDA F. notre encadreur pour avoir proposé ce thème et qui nous a ouvert les portes de la recherche scientifique.

On tient à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements au Professeur M. AFRID et son étudiant K. ZEARAI de l'université Mentouri Constantine pour leurs contributions dans la partie programmation et leurs disponibilités.

On remercie chaleureusement Monsieur A. HAMOUCHE pour son aide, ses conseils et pour le temps qu'il nous a consacré.

On remercie très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.

On remercie tous les enseignants du département du génie mécanique en particulier M^{lle} BOUZIDI, M^r HASSANI, M^r Boutalbi et M^r ALI AGHA.

Nous remercions aussi tous nos amis particulièrement DAVID, LAMIN, KHALED, BELBESSAY et MOUMOU.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

À ma mère qu'est l'âme de ma vie.

À mon père qui m'a toujours soutenue.

À mes sœurs et frères en particulier SAMOU et KAROU.

À ma sœur ZAHOU, son marié et les oiseaux RAHOU et DIDOU.

À mes tentes et oncles : khalî KARIM et HAKIM.

À mes cousins.

À tous ceux qui m'ont enseigné exceptionnellement M^r. GERAR.

À tous mes amis.

À toutes personnes qui nous ont aidés pour la réalisation de ce mémoire.

À tous les athlètes de section SHOTOKAN AIT SMAIL et mes enseignants de KARATE-DO : cheikh HERRAOUI ALI, KERRACHE FATEH et MOUSSAOUI LARBI.

À mon frère et binôme LOTFI et à toutes sa famille.

NOMENCLATURE

NOMENCLATURE

A	Rapport de forme	
D	Coefficient de diffusion	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
g	Accélération de pesanteur	$[m \cdot s^{-2}]$
H	Hauteur de la cavité	[m]
L	Longueur de la cavité	[m]
P	Pression adimensionnelle	
t	Temps dimensionnel	[s]
u	vitesse horizontale	[m/s]
U	vitesse horizontale adimensionnelle	
v	vitesse verticale	[m/s]
V	vitesse verticale adimensionnelle	
x	Coordonnée horizontale dimensionnelle	[m]
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle	
y	Coordonnée verticale dimensionnelle	[m]
Y	coordonnée verticale adimensionnelle	
ρ	Masse volumique	$[kg \cdot m^{-3}]$
c	Concentration dimensionnelle	$[mol \cdot l^{-1}]$
c_s	Concentration dimensionnelle sur la paroi	$[mol \cdot l^{-1}]$
c_∞	Concentration dimensionnelle loin de la paroi	$[mol \cdot l^{-1}]$
Δc	Écart de concentration = $c_h - c_b$	$[mol \cdot l^{-1}]$
C	Concentration adimensionnelle	
T	Température dimensionnelle	[K]
T_p	Température dimensionnelle sur la paroi	[K]
T_∞	Température dimensionnelle loin de la paroi	[K]
ΔT	Écart de température = $T_c - T_f$	[K]
$\Delta \tau$	Incrément de temps	
ΔX	Longueur d'un volume de contrôle dans la direction X	

ΔY	Longueur d'un volume de contrôle dans la direction Y
dX	Distance entre deux centres de volume consécutifs dans la direction X
dY	Distance entre deux centres de volume consécutifs dans la direction Y

Symboles Grecs :

α	Coefficient de diffusion thermique $[m^2 \cdot s^{-1}]$
λ	Conductivité thermique $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$
β_S	Coefficient d'expansion solutal $[m^3 \cdot kg^{-1}]$
β_t	Coefficient d'expansion thermique $[K^{-1}]$
μ	Viscosité dynamique $[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$
ν	Viscosité cinématique $[m^2 \cdot s^{-1}]$
$\Delta\tau$	Incrément de temps adimensionnel
θ	Température adimensionnel
δ	Epaisseur de couche limite $[m]$
\emptyset	Variable de transport

Nombres adimensionnels :

Gr_s	Nombre de Graschof solutal
Gr_t	Nombre de Graschof thermique
Sh	Nombre de Sherwood local
\overline{Sh}	Nombre de Sherwood moyen
Le	Nombre de Lewis
N	Rapport des forces de volume solutale et thermique
Nu	Nombre de Nusselt local
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
Pr	Nombre de Prandtl

Sc Nombre de Schmidt

Exposant :

τ Relatif au temps τ

$\tau + \Delta\tau$ Relatif au temps $\tau + \Delta\tau$

Indices :

P Point au centre du volume fini

E Point à l'est du point P

W Point à l'ouest du point P

N Point au nord du point P

S Point au sud du point P

t Thermique

s Solutale

c Paroi chaude

f Paroi froide

h Haute concentration

b Basse concentration

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	
DEDICACES	
SOMMAIRE	
NOMENCLATURE	
INTRODUCTION GENERALE	1

Chapitre I : GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 : Généralités.....	3
I.1.1 : transfert thermique.....	3
I.1.1. 1 : transfert par conduction “ loi de Fourier ”	3
I.1.1. 2 : transfert par convection.....	3
I.1.2 : transfert massique.....	3
I.1.2.1 : mécanisme de transport de matière.....	3
I.1.2.2 : le transport diffusive “ loi de fick ”	4
I.1.2.3 : le transport convectif	4
I.1.3 : Effet de Soret ou Ludwig.....	5
I.1.4 : Effet de Dufour 1872.....	5
I.2 : Revue bibliographique.....	5

CHAPITRE II : GÉOMÉTRIE ET MODÈLE MATHÉMATIQUE

II.1 : Introduction.....	19
II.2 : Description et modélisation mathématique du problème à étudier.....	19
II.3 : Les hypothèses simplificatrices.....	19
II.4 : Equation régissant le champ hydrodynamique, thermique et massique.....	20
II.5 :Adimensionnement des équations.....	21

II.5.1. Les grandeurs caractéristiques.....	21
II.5.2 : Les variables réduites.....	21
II.5.3 : Les équations sans dimensions.....	21
II.6 : Les conditions initiales.....	22
II.7 : les conditions aux limites sans dimension initiales	23
II.8 : Les nombres sans dimensions caractérisant le problème.....	23

CHAPITRE III : MÉTHODE NUMÉRIQUE

III.1 : Introduction.....	25
III.2 : Méthode des volumes finis.....	25
III.3 : Discrétisation du domaine physique.....	25
III.4 : Le maillage typique et décalé.....	26
III.5 : Discrétisation des équations.....	27
III.5.1 : La discrétisation temporelle en second ordre.....	27
III.5.2 : La discrétisation spatiale en second ordre.....	28
III.5.3 : Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant X.....	29
III.5.4 : Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant Y.....	31
III.5.5 : Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	32
III.5.6 : Discrétisation de l'équation de transfert de matière.....	35
III.6 : Résolution du système des équations de vitesse.....	36
III.6.1 : Discrétisation de l'équation de continuité.....	36
III.6.2 : Discrétisation de l'équation de la pression.....	40
III.7 : Méthode de résolution.....	42
III.8 : La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation.....	43
III.10 : Critère de convergence.....	43

III.11 : Détails numériques.....	44
----------------------------------	----

CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1 : Introduction.....	45
IV.2 : Effet de maillage.....	45
IV.3 : Validation du code de calcul.....	46
IV.4 : Résultats et discussions.....	48
IV.4.1 : Partie 1 Canal Horizontal	48
IV.4.1.1 : Influence de la variation du nombre de Grashof solutal.....	50
IV.4.1.1.1 : Isothermes.....	50
IV.4.1.1.2 : Isoconcentrations.....	52
IV.4.1.1.3 : Lignes de courant.....	53
IV.4.1.1.4 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche.....	55
IV.4.1.1.5 : Taux de transfert de chaleur et de masse.....	56
Partie 2 Canal Horizontal.....	57
IV.4.2 : Influence de la variation du nombre de Schmid « Lewis ».....	57
IV.4.2.1 : Les isothermes.....	57
IV.4.2.2 : Les isoconcentrations.....	59
IV.4.2.3 : Les lignes de courant.....	62
IV.4.2.4 : Taux de transfert de chaleur et masse.....	64
Partie 3 Canal vertical.....	65
IV.4.3.1 : Variation de U aux milieux de la cavité en fonction de y.....	67
IV.4.3.2 : Influence de la variation du rapport de forme.....	68
IV.4.3.2.1 : Les isothermes.....	68
IV.4.3.2.2 : Les isoconcentrations.....	70
IV.4.3.2.3 : Les lignes de courant.....	72

IV.4.3.3 : Variation du nombre de Nusselt et Sherwood local sur la paroi gauche.....	74
IV.4.3.4 : Variation du nombre de Nusselt et Sherwood moyens en fonction du rapport de forme.....	75
Conclusion et recommandations.....	76

ANNEXES

Références bibliographiques

Liste des figures

Figure II.1: Description de la géométrie du problème.....	19
Figure III .1 : Maillage typique uniforme suivant X et suivant Y.....	26
Figure III.2 : Maillage typique et maillages décalés.....	27
Figure III.3 : L'interface n entre les points P et N dans maillage uniforme suivant Y.....	28
Figure IV.1 : variation du nombre de Nusselt et Sherwood moyen en fonction du maillage.....	46
Figure IV.2 : Comparaison entre les isothermes et les isoconcentrations.....	47
Figure IV.3 : variation du nombre de Nusselt local sur la paroi verticale gauche ou Nu représente nos résultats et Nur ceux de Beghein et al.....	47
Figure IV.4 : Présentation des isothermes(a), des isoconcentrations(b) et des lignes de courant(c) pour $Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^5, Pr = 0.71, Sc=0.65$ et $A=2$	48
Figure IV.5 : Profil de la composante U à $X=1$	49
Figure IV.6 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal: $Gr_t = 10^5, Pr = 0.71, Sc = 0.65$	50
Figure IV.7 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal : $Gr_t = 10^5, Pr = 0.71, Sc = 0.65$	52

Figure IV.8 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas : $G_{rt} = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$	53
Figure IV.9 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche en fonction de y pour différents valeurs du Grashof solutal.....	54
Figure IV.10: Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction de Grashof Solutal.....	55
Figure IV.11 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Schmidt: $G_{rt} = 10^5$, $G_{rs} = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$	57
Figure IV.12 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Schmidt: $G_{rt} = 10^5$, $G_{rs} = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$	59
Figure IV.13 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood sur la paroi gauche en fonction de y pour différentes valeurs du Schmidt.....	60
Figure IV.14 : Structure de l'écoulement pour différents valeurs du nombre de Schmidt $G_{rt} = 10^5$, $G_{rs} = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$	62
Figure IV.15 : Profil de la composante U à $X=1$	63
Figure IV.16 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du nombre Schmidt.....	64
Figure IV.17 : Présentation des isothermes(a), des isoconcentrations(b) et des lignes de courant(c) pour $G_{rt} = 10^5$, $G_{rs} = 10^3$, $Pr = 0.71$, $Sc=0.65$ et $A=0.25$	65
Figure IV.18 : Profil de la composante U au milieu des cavités.....	66

Figure IV.19 : Distribution de la température pour différentes valeurs du rapport de forme:
Grt = 10^5 , Grs = 10^3 , Pr = 0.71, Sc = 0.65.....68

Figure IV.20 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du rapport de forme :
Grt = 10^5 , Grt = 10^3 , Pr = 0.71, Sc = 0.65.....70

Figure IV.21 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du rapport de forme:
Grt = 10^5 , Grt = 10^3 , Pr = 0.71, Sc = 0.65.....72

Figure IV.22 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche en
fonction de y pour différentes valeurs du rapport de forme.....73

Figure IV.23 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du
rapport de forme.....74

Liste des tableaux

Tableau IV.1: Effet du maillage sur les caractéristiques de l'écoulement.....45

Tableau IV.2 : valeurs du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen pour différents nombres
Grashof solutal.....56

Tableau IV.3 : Valeurs de Nusselt moyen et Sherwood moyen pour différents nombres de
Schmidt.....64

Tableau IV.4 : Valeurs de Nusselt et de Sherwood moyen pour différents rapport de
forme.....75

Introduction générale :

Au cours des dernières années, les études théoriques, numériques et expérimentales portant sur la convection naturelle ont été si nombreuses, Il s'ensuit que la convection naturelle signifie souvent convection d'origine thermique, ce qui est effectivement l'origine dominante de la convection dans de nombreuses applications liées à notre environnement. Par contre, les phénomènes solutaux jouent un rôle dominant dès que deux fluides miscibles de masses volumiques différentes sont mis en contact, que ce soient des gaz (air, vapeur d'eau...) ou des liquides (eau, alcool...). Ce type de convection naturelle a suscité un grand intérêt, notamment sur le plan industriel et, plus particulièrement, en métallurgie et procédés mettant en jeu des mélanges de fluides. Si les méthodes et approches développées en convection thermique ont pu être transposées à la convection solutale, il n'en demeure pas moins que le problème solutal est beaucoup plus compliqué que le problème thermique.

Un autre type de transport convectif en milieux fluides ou poreux attire l'attention des chercheurs, c'est la convection double diffusive ou thermosolutale qui est due à la présence simultanée de gradients de température et de concentration. Ces gradients causent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Le phénomène de la convection thermosolutale est fréquemment rencontré aussi bien dans la nature que dans l'industrie.

Dans la nature les exemples sont multiples et nous pouvons en citer quelques-uns :

- Les mouvements convectifs dans les océans qui sont dus d'une part à la présence de gradient de température et d'autre part à la distribution non uniforme de la concentration du sel.
- la dispersion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs) et dans le sol (déchets nucléaires) et la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans les sols.

Les domaines d'applications industrielles sont nombreux et variés, ce phénomène intervient, par exemple, lors des mécanismes de changement de phases des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermo-physiques des alliages, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, au cours de divers procédés thermochimiques et électrochimiques, lors du stockage des gaz liquéfiés, dessalement de l'eau de mer...

Introduction générale

Ce mémoire fait l'objet d'une étude numérique qui porte sur la convection thermosolutale, il est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner quelques généralités relatives au transfert de chaleur et de masse et une revue bibliographique sur le phénomène de la convection thermosolutale dans les milieux fluides et poreux.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition de la géométrie du problème et sa modélisation mathématique.

Le troisième chapitre est consacré à la discrétisation des équations gouvernantes par la méthode des volumes finis.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation et l'analyse des résultats.

Enfin une conclusion générale retraçant les principaux résultats trouvés le long de cette étude ainsi que les perspectives futures.

INTRODUCTION

GENERALE

Chapitre I :

GENERALITES

ET REVUE

BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 : Généralités :**I.1.1 : transfert thermique :**

Le transfert de chaleur se caractérise par la densité du flux de chaleur q en W.m^{-2} . Cette quantité de chaleur peut être échangée par différents mécanismes développés ci-dessous :

I.1.1.2 : transfert par conduction « loi de Fourier » :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière sous l'influence d'une différence de température. La propagation de chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts: une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier; le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$\vec{q}_t = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Où λ est la conductivité thermique du milieu considéré.

I.1.1.3 : transfert par convection « loi de Newton » :

La convection est un processus physique de transmission de chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière. On ne peut donc avoir de convection que dans les liquides et les gaz. La densité de flux de chaleur transmise par convection, entre une paroi à température T_s et un fluide à température T_∞ (température mesurée loin de la paroi), peut s'écrire sous la forme : $\varphi = h_c(T_p - T_\infty)$, appelée loi de Newton, où h_c est le coefficient d'échange par convection.

I.1.2 : transfert massique :**I.1.2.1 : mécanisme de transport de matière :**

Différents phénomènes sont responsables et agissent sur le transport de la matière, cette dernière peut être transportée par convection et par diffusion. Le transport de matière est

quantifié par une densité de flux \vec{j} qui représente la masse (ou le nombre de moles) qui passe à travers une unité de surface par unité de temps ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ou $\text{kmol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$).

I.1.2.2 : le transport diffusif « loi de Fick » :

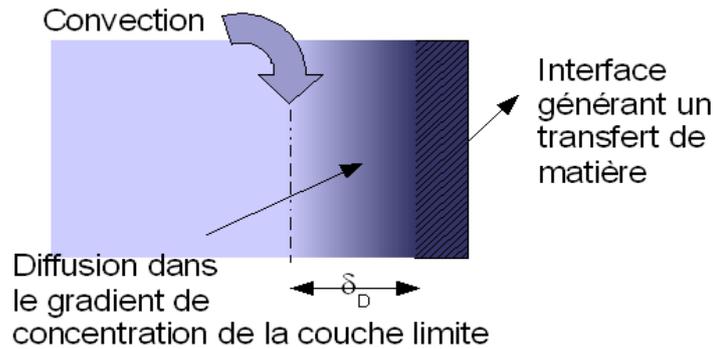
La diffusion est le mécanisme de transport des zones concentrées en matière vers les zones moins concentrées. Il y a donc diffusion dès qu'il y a différence de concentration. C'est un phénomène spontané et inévitable conduisant à un équilibre. La cinétique du phénomène est quantifiée par la diffusivité ou coefficient de diffusion. La densité de flux de matière engendrée par ce phénomène est d'après la loi de Fick proportionnelle au gradient de concentration par l'intermédiaire du coefficient de diffusion :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} c$$

I.1.2.3 : le transport convectif :

Le mouvement de la solution génère automatiquement un transport de matière, le mouvement peut être voulu et créé par une pompe par exemple (convection forcée) ou induit par une différence de masse volumique. La variation de masse volumique peut être causée par un gradient de température on parle alors de convection naturelle thermique pure ou par un gradient de concentration dans le cas de la convection naturelle massique pure et en fin cette variation peut être induite simultanément par les deux gradients dans le cas de la convection thermosolutale.

Les transferts convectifs ont souvent lieu à une interface qui peut être chimiquement réactive (électrode en électrochimie, catalyseur, adsorbant ...), physiquement responsable d'une libération de matière (solubilisation, évaporation...) ou d'une consommation (absorption, condensation...). Afin que le transfert dans un tel processus soit important, l'interface est souvent balayée par un écoulement.



A une interface, la densité de flux de matière peut s'écrire :

$$q_m = h_m(c_s - c_\infty)$$

h_m est le coefficient de transfert de matière (m/s) encore appelé vitesse de diffusion.

I.1.3 : Effet de Soret ou Ludwig :

Lorsque un fluide est soumis à un gradient de température il apparaît un gradient de concentration qui est dû à ce dernier, ce phénomène est connu sous l'effet Soret (1879) ou bien effet Ludwig (1856), généralement le nom "thermodiffusion" désigne cet effet en milieu gazeux, alors que l'expression effet Soret ou effet Ludwig est plus utilisée dans les liquides. Dans le champ de pesanteur, la convection au sein d'un fluide pur est due aux changements locaux de la masse volumique qui dépend non seulement de la température mais également de sa composition.

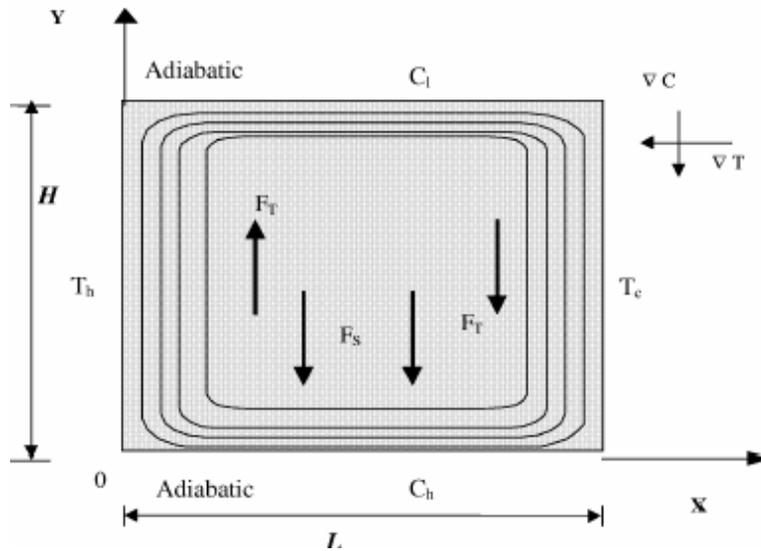
I.1.4 : Effet de Dufour 1872 :

C'est l'effet inverse de l'effet Soret qui consiste en l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration. Toutefois, cet effet est négligeable en dehors des phases gazeuses.

I.2 : Revue bibliographique :

Dans cette partie on va présenter les travaux de quelques chercheurs qui ont étudié la convection thermosolutale :

Bennacer R. et al. [1]: ont étudié numériquement et analytiquement la transition de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité rectangulaire avec $A=2$, $Pr=7$, $Le=100$ et le nombre de Rayleigh thermique qui varie entre 7×10^5 et 7×10^7 . Les parois verticales sont différentiellement chauffées et le gradient solutal est imposé verticalement comme le montre la figure ci-dessous.



Trois régimes sont distingués:

- Un régime thermique convectif pour des valeurs relativement petites de N ($N < 1$).
- Un régime diffusif thermique et solutal pour des valeurs élevées de N ($N > 8$).
- Une cellule convective thermosolutale pour N modéré ($1 < N < 8$).

Gobin et Bennacer [2]: ont étudié la convection thermosolutale dans le cas coopérant dans une cavité remplie avec un gaz binaire. Les parois verticales sont soumises à des gradients de concentration et de température. Les résultats montrent que le transfert de chaleur décroît avec l'augmentation du rapport de forme et cela est dû à la formation de zones stratifiées en bas et en haut de la cavité pour de faibles vitesses et au transfert qui est due principalement à la diffusion.

La déstabilisation des zones stratifiées peuvent conduire sous certaines conditions à l'apparition de quatre régimes suivant:

- Un régime monocellulaire où l'écoulement est dominé par l'effet thermique (N faible).
- Un régime multicellulaire, où l'effet thermique et solutal sont comparables (N modéré).

- L'écoulement est globalement conduit par la force de volume solutal, avec une cellule thermique qui persiste au centre de la cavité.
- Un régime monocellulaire où l'écoulement est dominé par l'effet solutal (N élevé).

Béghein C. et al. [3]: Ont étudié numériquement la convection thermosolutale en régime stationnaire dans une cavité carrée remplie avec un mélange homogène (air +polluant) soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. La première partie de leur simulation consiste à étudier l'influence de la force de poussée solutal sur le transfert de chaleur et de masse avec les nombres de Lewis et de Rayleigh thermique constants ($Le = 1$, $Ra_t = 10^7$) et le nombre de Rayleigh (Ra_s) solutal qui varie de 10^5 à $5 \cdot 10^7$. La deuxième partie de la simulation se rapporte à l'analyse de l'influence du nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement dans le cas où la poussée thermique est dominante ($Ra_t = 10^7$, $Ra_s = 0$) et dans le cas où la poussée solutal dominante ($Ra_t = 0$, $Ra_s = 10^7$) avec le nombre de Lewis qui varie de 0.3 à 5.

Akrou D. et al. [4]: ont étudié numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire. Les parois verticales gauche et droite de l'enceinte sont maintenues à des températures respectivement T_h et T_c ($T_h > T_c$) et les parois horizontales inférieure et supérieure sont maintenues à des concentrations C_h et C_l où la paroi inférieure est saturée en sel tandis que la paroi supérieure est moins concentrée.

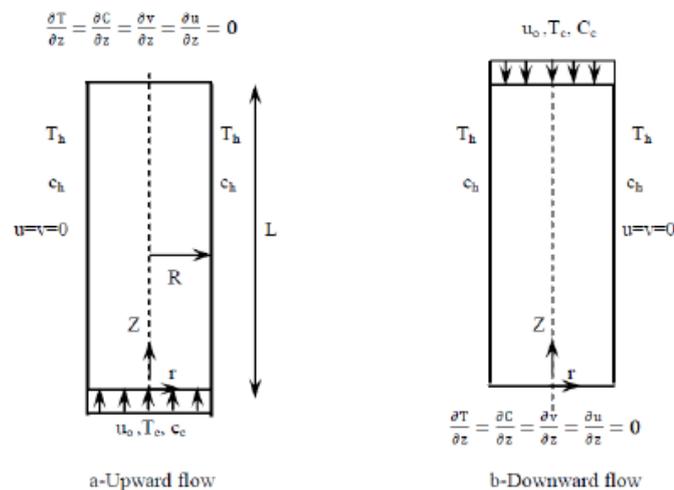
Ils ont examiné essentiellement le cas d'une cavité de rapport de forme $N=2$ dans un milieu fluide de nombre de Prandtl $Pr = 7$, pour un nombre de Lewis égal à 100 et le nombre de Grashof thermique varie entre 10^3 et 10^5 .

Les principales conclusions tirées à partir de leurs résultats sont:

- L'apparition de trois régimes d'écoulement distincts, pour les faibles valeurs de N , des cellules convectives dues essentiellement aux forces thermiques se mettent en place et pour des valeurs de N plus élevées, le transfert est diffusif et la stratification stable en concentration bloque l'écoulement. Pour des valeurs intermédiaires de N (N modérés) le transfert diminue avec l'accroissement de N .
- Dans la zone de transition la solution numérique dépend de la condition initiale et un effet d'hystérésis est donc observé. Dans cette situation, deux solutions distinctes sont présentées pour le même rapport de poussée N .

Ce phénomène d'hystérésis est souvent accompagné d'un écoulement oscillatoire qui s'installe au dépend d'un écoulement stationnaire.

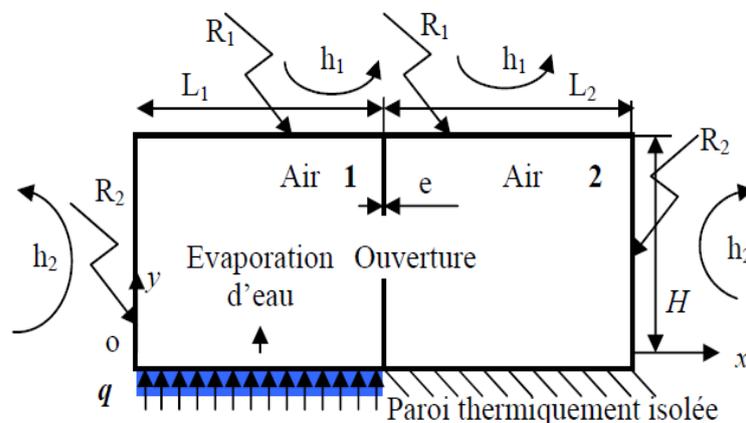
Mohamed A. Teamah et al. [5]: leur étude concerne la convection mixte double diffusive dans un tube vertical sous l'effet de la double poussée due à la diffusion thermique et massique qui est étudiée en deux configurations, l'une est un écoulement ascendant et l'autre descendant en régime laminaire, cette étude numérique est adoptée pour différents intervalles du nombre de Richardson Ri ($10^{-2} \leq Ri \leq 10$), le rapport de forme est compris entre 2,5 et 20, le rapport de poussée ($-10 \leq N \leq 10$) et le nombre de Lewis ($0,1 \leq Le \leq 100$) avec un nombre de Grashof $Gr=10^5$ et un nombre de Prandtl $Pr=0,71$.



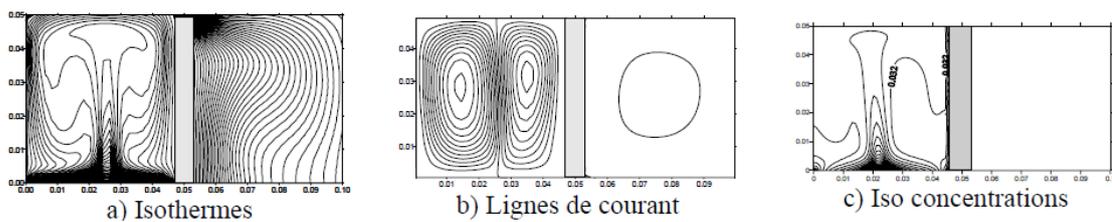
Les résultats obtenus sont les suivants :

- Pour les deux configurations le transfert de masse et de chaleur décroissent avec l'augmentation de Ri .
- Le nombre de Nu et de Sh moyen décroissent avec l'augmentation du rapport de forme.
- Le transfert de masse augmente avec l'augmentation du nombre de Le et cela n'a aucun effet sur le transfert de chaleur.
- Pour un écoulement descendant à $N < 0$ donne un grand transfert de chaleur et de masse et pour ascendant à $N > 0$ donne un grand transfert de chaleur et de masse.

Rayane T. et al. [6]: ont présenté une étude numérique des transferts couplés de chaleur et de masse en convection naturelle qui se déroulent au sein de deux cavités rectangulaires horizontales. La base de l'une des enceintes est soumise à un flux de chaleur de densité constante et à une diffusion de vapeur d'eau dans l'air. La base de la seconde est thermiquement isolée. Les faces externes de ces cavités échangent de la chaleur par conduction, convection et rayonnement avec le milieu environnant. Dès que les régimes permanents des écoulements au sein des enceintes sont obtenus, le transvasement s'effectue à travers un orifice situé dans la paroi commune. Cette paroi commune est en outre soumise à un transfert de chaleur par conduction.

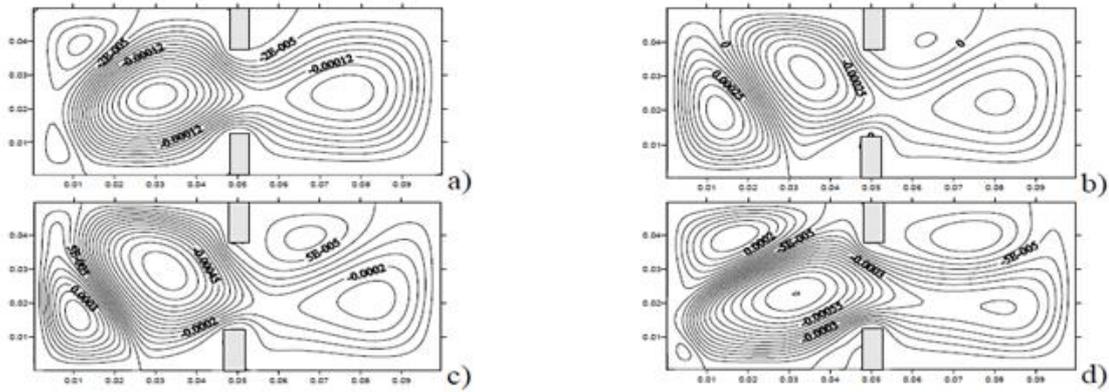


Aux premiers instants, sans transvasements les écoulements sont respectivement bicellulaires au sein de l'enceinte 1 et monocellulaire au sein de l'enceinte 2 comme le montre la figure ci-dessous.



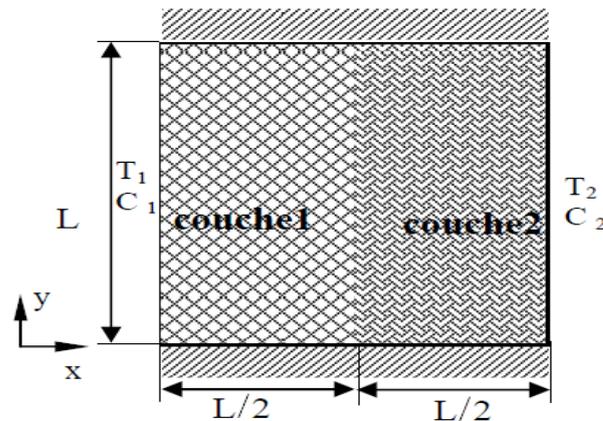
Régime Permanents – $q = 100 \text{ W/m}^2$ - Sans transvasements.

Pour le cas avec transvasement les conditions imposées sur la base de l'enceinte 1 influent notablement sur la structure de l'écoulement au sein de l'enceinte 2. La convection naturelle au sein des enceintes est d'autant plus intense que la densité du flux de chaleur imposée à la base de l'enceinte 1 est élevée comme le montre la figure ci-dessous.



Lignes de courant pour : a) $q=10\text{ W / m}^2$. b) 50 W / m^2 . c) 100 W / m^2 . d) 150 W / m^2 .

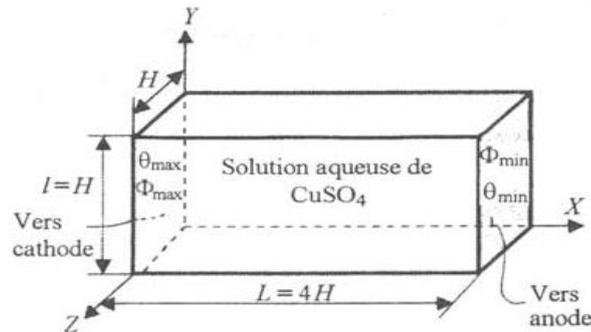
Hadidi N.et al. [7]: leur travail concerne l'étude de la convection en double diffusion générée dans une cavité poreuse qui contient deux couches poreuses disposées verticalement. Chaque couche poreuse est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide. Les parois verticales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables comme le montre la figure ci-dessous.



Ils ont montré à travers leur étude que la variation de la perméabilité des deux couches a un effet très appréciable sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse. Ils ont identifié trois régimes d'écoulement :

- un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de R_K (rapport des perméabilités des deux couches poreuses $R_K = \frac{K_2}{K_1}$).
- un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de R_K (pour R_K modéré).
- un autre régime complètement couche limite indépendant de R_K (pour des valeurs de R_K élevées).

Benissaad S. et Afrid M. [8]: ont étudié la convection thermosolutale à gradients opposés dans une enceinte parallélépipédique remplie avec une solution aqueuse.



Leur travail a pour but d'examiner l'influence de la variation du nombre de Grashof solutal sur la structure de l'écoulement, le transfert de chaleur et de masse.

Lors de cette étude les paramètres suivants sont fixes $Pr = 7$, $Sc = 240$ $Gr_t = 2,2 \cdot 10^5$ tandis que le Gr_s varie de 10^4 à 10^7 .

Plusieurs régimes qui dépendent de Gr_s sont observés :

- Régime permanent pour $10^5 < Gr_s < 2,2 \cdot 10^5$ et $6 \cdot 10^5 < Gr_s < 10^7$.
- Régime transitoire et périodique $3 \cdot 10^5 < Gr_s < 5 \cdot 10^5$.
- Ecoulement monocellulaire $10^4 < Gr_s < 2,2 \cdot 10^5$.
- Ecoulement multicellulaire $6 \cdot 10^4 < Gr_s < 8 \cdot 10^5$.
- Ecoulement monocellulaire $Gr_s > 9 \cdot 10^6$.

Trevisan O. V. et al. [9]: ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection double diffusive dans une cavité carrée poreuse avec des parois verticales maintenues à des températures et des concentrations constantes et des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse d'échelle a été utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques et de dégager les divers effets qui influencent les résultats globaux de transfert de chaleur et de masse. Ils ont trouvé que l'écoulement du fluide était possible au-delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand $Le \sim 1$. Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour

$Le = 1$ et $N = -1$.

Amahmid A. et al. [10]: ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Ils se sont intéressés particulièrement au cas où les forces de volume thermique et solutale sont opposées et de même intensité. Les nombres de Rayleigh critiques caractérisant l'apparition des mouvements convectifs sont calculés analytiquement en fonction des nombres de Lewis et de Darcy.

L'essentiel des résultats obtenus sont:

- Le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque Da augmente ou lorsque Le tend vers l'unité.
- L'augmentation de Da induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et des transferts thermique et massique.
- L'augmentation du nombre de Rayleigh cause l'augmentation monotone de l'intensité de l'écoulement.

Marcoux et al. [11]: ont étudié la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Des flux constants de chaleur et de masse sont imposés sur les parois verticales. Les parois horizontales sont isolées. Lorsque le rapport de poussée est égale à -1 , un régime de double diffusion pure est solution du problème. Ce régime est linéairement stable si le nombre de Rayleigh thermique est inférieur à une valeur critique Ra_c fonction du rapport de forme et du nombre de Lewis. Ces résultats de stabilité linéaire sont en très bon accord avec ceux obtenus par simulation numérique directe. L'étude numérique montre l'existence de solutions convectives sous-critiques, qui cessent d'exister pour un nombre de Rayleigh thermique $Ro < Ra_c$, fonction du rapport de forme et du nombre de Lewis. Pour des valeurs du nombre de Rayleigh thermique inférieures à Ro , seule la solution de double diffusion pure est stable.

Kamakura K. et al. [12]: ont présenté les résultats d'une étude combinée expérimentale et numérique de la convection naturelle à double diffusion avec un gradient horizontal de température et un gradient vertical de concentration, ce gradient est distribué linéairement de $0,5$ aux parois inférieure à $-0,5$ à la surface supérieure. Les calculs ont été portés pour les valeurs des paramètres suivantes: $A=4$, $Pr = 6$, $Le= 100$, $Ra = 10^6$ et un rapport de poussée $N= 10$ et 20 . Les résultats obtenus sont :

- Pour $N=10$:

- Au début, il y a formation de deux cellules juste au-dessous de la surface supérieure et au-dessus de la surface inférieure.
- Après un certain temps d'autres cellules apparaissent.
- A $\tau = 0,6$ il y a quatre cellules mais après un temps plus long ces cellules se confondent pour converger vers une cellule unique.

➤ Pour $N=20$:

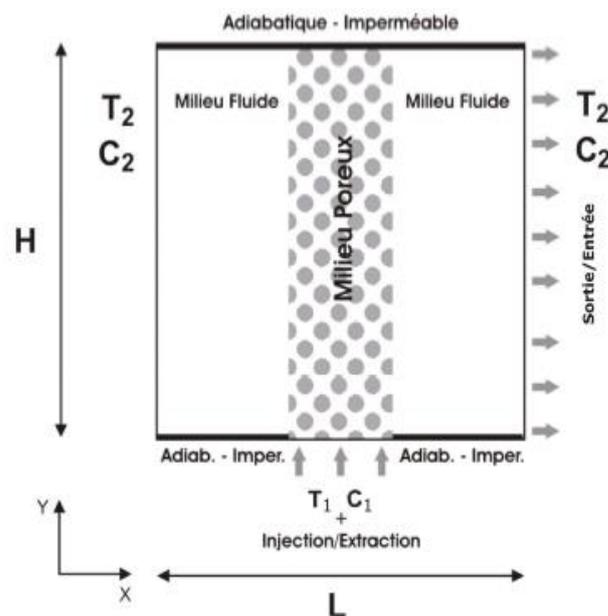
- Au début, il y a formation de deux cellules juste au-dessous de la surface supérieure et au-dessus de la surface inférieure.
- Avec le temps les deux cellules se développent pour devenir encore plus grande.

Mharzi et al. [13]: ont étudié la convection naturelle thermosolutale dans une cavité allongée suivant l'axe horizontal, divisée par une couche verticale poreuse. Les résultats montrent que:

- Le transfert de chaleur est sous l'influence du rapport de conductibilité thermique R_k , tandis que le transport solutal est essentiellement sensible au rapport de la diffusivité solutale R_d .
- L'augmentation de R_k (diminution de R_d) augmente l'échange thermique par conduction dans la couche poreuse (l'échange diffusif solutal). En outre, leurs effets globaux sur la convection thermosolutale sont inférieurs à ceux de Ra et Da .
- L'augmentation du nombre de Lewis augmente successivement l'échange solutal moyen (\overline{Sh}) tandis que le nombre de Nusselt est exposé à une petite diminution. Cependant, quand les forces de poussée thermiques et solutales sont opposées ($N < 0$), l'augmentation du nombre de Lewis produit une réduction importante de l'échange de chaleur moyen (Nu).
- Quand $N = -1$ et $Le = R_k = R_d = 1$ l'écoulement convective dans la cavité est complètement réprimée, par conséquent le nombre de Nusselt et Sherwood moyen en fonction N est une courbe en forme de V symétrique par rapport à la valeur $N = -1$. Pour $Ra=10^4$ et $-3 \leq N \leq -0.5$ de plus si au moins un des trois paramètres (R_k , R_d et Le) diffère de l'unité un écoulement multicellulaire peut être observé dans la cavité.

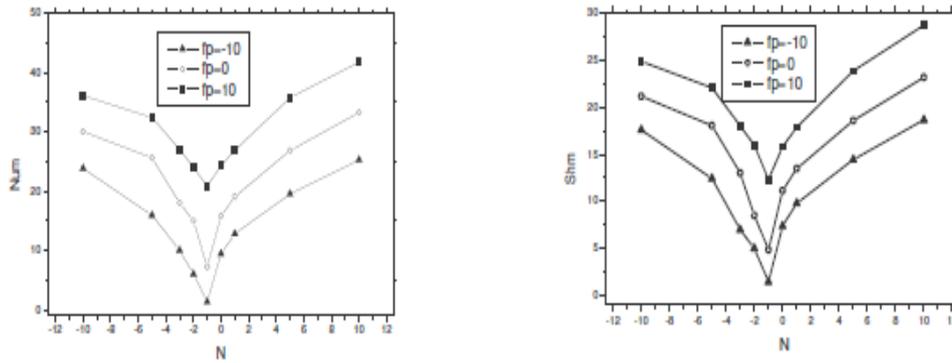
Outaleb Y. et al. [14]: l'objet de leur étude est d'analyser le comportement des échanges thermiques et massiques générés par une convection thermosolutale dans un milieu confiné.

Le domaine d'étude considéré est en un premier temps une cavité rectangulaire, divisée en deux parties égales par une cloison verticale poreuse. Les deux espaces gauche et droite sont occupés par un même fluide, les parois inférieure et supérieure sont adiabatiques et imperméables, sauf sur la partie inférieure qui coïncide avec l'épaisseur et la position de la cloison poreuse. Cette zone de paroi est soumise à une température T_1 et à une concentration C_1 imposées. Le même fluide Newtonien qui sature la cavité poreuse est injecté dans l'enceinte (ou extrait) à travers cette partie de la paroi inférieure, avec une vitesse d'injection verticale non nulle et supposée constante. Ils ont admet que la sortie (ou entrée) du fluide injecté (ou extrait) se fait à travers l'une des parois verticales qui sont soumises à une température T_2 et à une concentration C_2 avec $T_2 < T_1$ et $C_2 < C_1$.



Les résultats qui suivent sont relatifs à une cavité supposée carrée ($H=L$), pour des rapports de viscosités et de conductivités thermiques unitaires:

- Les échanges thermiques et solutaux augmentent avec l'augmentation du rapport de poussées en valeur absolue ($|N|$); cet accroissement du nombre de Nusselt et Sherwood moyen est d'autant plus important que l'on passe de l'injection ($fp < 0$) vers l'extraction ($fp > 0$) comme le montre la figure ci-dessous:



Variation du nombre de Nusselt et Sherwood moyen en fonction de N

Pour $Ra=10^5$, $E=0.33$, $R_k=R_v=1$, $Pr=0.71$, $e = 0.5$, $Le=1$, $Da=10^{-3}$.

- Les échanges thermiques sont plus importants lorsque la partie poreuse soumise à l'injection/extraction est placée au milieu de la cavité ainsi que le transfert de masse est amélioré lorsque la matrice poreuse est placée aux extrémités de la cavité.

Jer-Huan Jang et al. [15]: ils ont étudié numériquement la convection naturelle avec transfert de chaleur et de masse sur une surface ondulée maintenue à une température et une concentration constantes.

Les principales conclusions tirées de leur investigation sont les suivantes :

- Les propriétés de l'écoulement changent périodiquement et la longueur d'onde de ces propriétés est la moitié de celle de la surface ondulée.
- Un plus grand rapport amplitude –longueur d'onde augmente la fluctuation du champ de vitesse, température et de concentration alors que le nombre de Nusselt et de Sherwood locaux sont petits.
- Le nombre de Nusselt et de Sherwood croissent avec l'augmentation de N.
- L'augmentation du nombre de Schmidt réduit le nombre Nusselt mais fait augmenter le nombre de Sherwood local en d'autres termes l'augmentation du nombre de Schmidt augmente le transfert de masse et diminue le transfert de chaleur.

Wang et Chen [16]: Ont montré expérimentalement l'influence du rapport des forces de volume N sur la structure de l'écoulement dans le cas où les forces de volumes sont opposantes. Ils ont observé une seule cellule principale avec deux cellules secondaires pour $N= 1,68$ et trois cellules pour $N=10,7$. Dans une autre expérience, **Wang et Chen [17]** ont utilisé un système

électrochimique pour étudier la convection thermosolutale avec la combinaison horizontale des gradients de température et de concentration dans une cavité rectangulaire avec un rapport de forme élevé. Les résultats obtenues montrent trois cellules dans le cas coopérant, avec les paramètres suivants : $A=3$, $Gr_t=1,94 \times 10^8$, $Gr_s=3,89 \times 10^8$, et une cellule principale avec une cellule secondaire avec $A=7$, $Gr_t=1,34 \times 10^8$, $Gr_s=1,28 \times 10^9$. Dans le cas opposant où $A=7$, $Gr_s=3,89 \times 10^8$ et le nombre Grashof thermique qui varie les résultats montrent l'apparition de quatre cellules pour $Gr_t=7,75 \times 10^7$ et six cellules ou plus pour $Gr_t=4,84 \times 10^8$.

Bouneker [18]: son étude concerne l'effet du nombre de Rayleigh thermique et solutal sur la structure de l'écoulement, le transfert de chaleur et de mass, lorsque le rapport des deux nombres de Rayleigh est fixé à 10. L'écoulement est constitué de deux cellules tournant dans le sens d'orientation de la poussée thermique. Le transfert convectif de chaleur et de masse s'intensifie avec l'augmentation des deux nombres de Rayleigh. L'analyse de la stabilité de l'écoulement montre que l'état instable prend naissance avec le couple ($Ra_t=10^6$, $Ra_c=10^5$). Lorsque le nombre de Ra_t est fixé à 10^5 et le nombre de Ra_c est varié entre 10^4 et 10^6 , la structure d'écoulement est bicellulaire, symétrique et stable pour Ra_c inférieur ou égal à 5×10^5 et devient multicellulaire, asymétrique et instable lorsque Ra_c est égale à 10^6 .

Wang et al. [19]: ont fait une étude expérimentale sur la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire en présence de gradients horizontaux de température et de concentration en employant un système électrochimique. L'objectif principal de leur travail est d'étudier l'écoulement près des deux parois verticales. Ils ont utilisé la gamme des paramètres suivants: $Sc=2200$, $Pr=4 \div 7$, $Gr_t=2,50 \times 10^6 \div 5,01 \times 10^7$, $A=0,61 \div 3$ et $N=0,05 \div 54,8$.

Les résultats expérimentaux obtenus pour cette gamme montrent :

- Dans un premier type de test ($A=3$; $Gr_t=5,01 \times 10^7$; $N=0,30$) l'interaction entre les champs thermique et massique peut causer l'apparition des petites cellules secondaires, près des deux parois chaude et froide, dans la structure de l'écoulement. Si ces petites cellules apparaissent le long de la plaque en cuivre, leurs positions sont dépendantes du rapport des forces de volume lorsque le rapport de forme le nombre de Grashof solutal sont fixés.
- Dans un deuxième type de test ($A=0,96$; $N=54,8$; $Gr_t=2,5 \times 10^6$), il apparaît une série de couches multicellulaires séparées par des interfaces très minces, l'épaisseur de ces cellules est beaucoup plus mince que celle du premier test.

Akrou D. et Kalache D. [20]: ont étudié numériquement la convection thermosolutale, dans le cas coopérant dans une cavité rectangulaire. ils ont étudié l'influence des forces de volume et le nombre de Lewis sur le transfert de masse, le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement. Les résultats trouvés montrent que le transfert de chaleur à des nombres de Lewis élevés, diminuent avec l'augmentation du rapport de poussée par contre le nombre de Sherwood augmente considérablement avec N .

Séveléder V. et Petit J.P. [21]: ils se sont intéressés à l'influence des conditions aux limites (température et concentration) sur la structure de l'écoulement dans le cas de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec les paramètres suivants :

$Pr = 2,2$, $Sc = 130$, $Ra_t = 5,5 \times 10^5$, $Ra_s = 1,3 \times 10^5$, qui correspondent à un gaz liquéfié. Les résultats montrent l'apparition d'une seule cellule à cause de la condition de température et de concentration uniforme sur les parois verticales, mais la condition de la variation linéaire de température et de concentration fait apparaître quatre cellules.

Lee et al. [22]: ont étudié la convection à double diffusion dans une cavité rectangulaire. Les résultats obtenus montrent dans le cas opposant quand N est modéré que la structure de l'écoulement est multicellulaire. Le nombre de Nusselt et de Sherwood moyen varient en fonction des valeurs de N . Lorsque N augmente depuis une faible valeur, Nu décroît de façon monotone jusqu'à une valeur caractéristique de la conduction ; néanmoins Sh atteint une valeur minimale quand N prend une valeur modérée $N=3$.

CHAPITRE II :

GÉOMÉTRIE

ET MODÈLE

MATHÉMATIQUE

II.1 : Introduction :

La présence de gradients de température et de concentration dans un milieu confiné fluide ou poreux saturé par un fluide engendre une distribution non uniforme de la densité du mélange qui génère à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Ces deux gradients peuvent agir ensemble ou en opposition.

Dans notre travail on se limitera à l'étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire dans le cas où les poussées (thermique et solutale) travaillent en coopération.

II.2 : Description et modélisation mathématique du problème :

Le modèle physique à étudier est une cavité rectangulaire dont les parois verticales sont soumises à des concentrations et des températures constantes tandis que les parois horizontales sont imperméables et adiabatiques. La figure ci-dessous décrit la géométrie du problème à étudier.

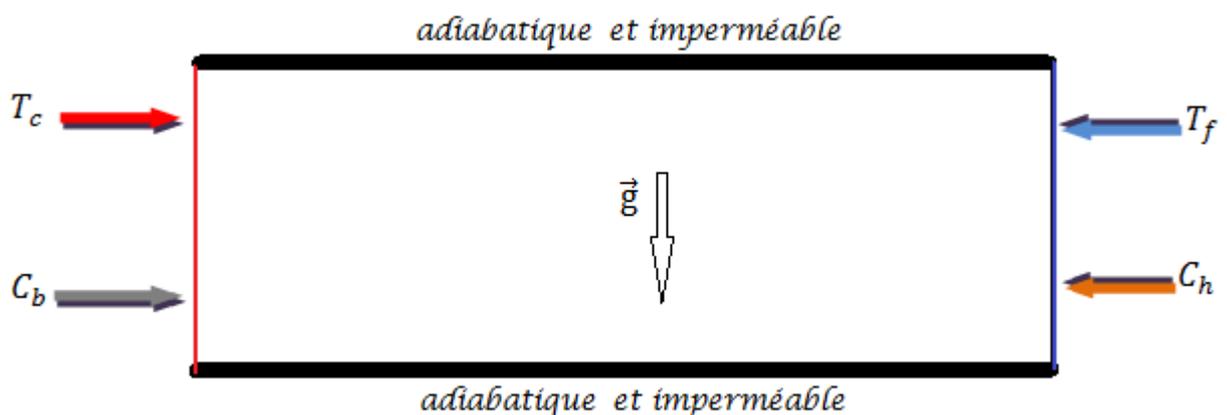


Figure II.1: Description de la géométrie du problème.

II.3 : Les hypothèses simplificatrices :

Pour l'étude de ce phénomène on adoptera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Fluide newtonien et incompressible.
- L'écoulement est laminaire, bidimensionnel.
- La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables.

- L'effet de Soret et Dufour sont négligeables.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligé.
- Pas de réactions chimiques.
- Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes et déterminées à partir de la température et de la concentration. Par contre la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température et la concentration selon l'approximation de Boussinesq, Cette variation est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_t(T - T_f) - \beta_s(c - c_b)]$$

Où ρ_0 est la densité à température et la concentration de référence, β_t est le coefficient d'expansion thermique et β_s le coefficient d'expansion solutal .

Avec
$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,c} \quad \text{et} \quad \beta_s = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{p,T}$$

II.4: Equation régissant le champ hydrodynamique, thermique et massique:

En adoptant les hypothèses simplificatrices signalées dans le paragraphe précédent, les équations qui régissent les transferts de chaleur et de masse sont:

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- **Equation de quantité de mouvement :**

Selon x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Selon y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta_T(T - T_f) + g\beta_s(c - c_b)$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

- L'équation de concentration :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)$$

II.5 : Adimensionnement des équations :

II.5.1 : Les grandeurs caractéristiques :

- H : Longueur caractéristique.
- $U^* = \frac{v}{H}$: vitesse caractéristique.
- $P^* = \rho_0 U^{*2}$: Pression caractéristique.
- $T_c - T_f$: Température caractéristique.
- $c_h - c_b$: Concentration caractéristique.
- $\tau^* = \frac{H^2}{\nu}$: temps caractéristique.

II.5.2. Les variables réduites:

$X = \frac{x}{H}$	$U = \frac{u}{U^*}$	$\theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$	$\tau = \frac{t}{\tau^*}$
$Y = \frac{y}{H}$	$V = \frac{v}{u_0}$	$C = \frac{c - c_b}{c_h - c_b}$	$P = \frac{p}{P^*}$

II.5.3 : Les équations sans dimensions:

Le système d'équations définissant le système d'écoulement s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

- Equation de quantité de mouvement:

Selon x :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

Selon y :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Gr_t \cdot \theta + Gr_s \cdot C$$

- Equation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

- Equation de concentration:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{Sc} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right)$$

II.6 : Les conditions initiales :

- A $\tau = 0$: $\begin{cases} U = V = 0 \\ C = \theta = 0 \end{cases}$

II.7. Les conditions aux limites sans dimension:

	U	V	C	θ	$\frac{\partial C}{\partial Y}$	$\frac{\partial \theta}{\partial Y}$
X=0	0	0	0	1	-	-
$X=\frac{L}{H}$	0	0	1	0	-	-
Y=0	0	0	-	-	0	0
Y=1	0	0	-	-	0	0

II.8 : Les nombres sans dimensions caractérisant le problème :

- **Nombre de Grashof thermique :**

C'est le rapport entre les forces d'Archimède d'origine thermique et celle de viscosité.

$$Gr_T = \frac{g\beta_T H^3 (T_c - T_f)}{\nu^2}$$

- **Nombre de Grashof solutal :**

C'est le rapport entre les forces d'Archimède d'origine massique et celle de viscosité.

$$Gr_s = \frac{g\beta_s H^3 (c_h - c_b)}{\nu^2}$$

- **Le rapport de flottabilité (de poussée) :**

Il est défini comme étant le rapport entre le Grashof solutal et le Grashof thermique.

$$N = \frac{Gr_s}{Gr_t}$$

- **Le nombre de Prandtl :**

Il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

- **Nombre de Schmidt :**

Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et de la diffusivité massique. Il est utilisé pour caractériser les écoulements de fluides dans lesquels interviennent simultanément la viscosité et le transfert de matière, il est défini de la manière suivante :

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

- **Le nombre de Lewis :**

C'est un nombre qui est utilisé pour caractériser les écoulements de fluides dans lesquels ont lieu simultanément un transfert de masse et de chaleur pour comparer la diffusivité massique avec la diffusivité thermique.

$$Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{Sc}{Pr}$$

- **Le nombre de Nusselt :**

Il caractérise l'importance de la convection par rapport à la conduction :

$$Nu = \frac{h \cdot H}{\lambda}$$

- **Le nombre de Sherwood :**

Il représente le rapport entre le transfert de masse convectif sur le transfert diffusif

$$Sh = \frac{h_m \cdot H}{D}$$

CHAPITRE III :

MÉTHODE

NUMÉRIQUE

III.1 : Introduction :

La complexité voir même l'impossibilité de résoudre analytiquement les équations différentielles qui régissent le transfert de chaleur et de mass ainsi que les écoulements de fluide nous amène à faire recours aux méthodes numériques. Il existe trois grandes familles de méthode qui traitent ce genre de phénomènes :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.

Dans la présente étude on utilisera la méthode des volumes finis.

III.2 : Méthode des volumes finis :

Comme introduite par Patankar [25] la méthode des volumes finis repose sur le fait que les équations qui décrivent les écoulements du fluide sont des équations de conservation dont la forme fondamentale est une forme intégrale. La méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini de volumes de contrôle ou mailles (Figure III.1) et intégrer les équations sur chaque volume de contrôle pour obtenir des équations discrétisées. Le maillage est structuré et uniforme. Un maillage décalé est employé pour discrétiser les équations de Navier – Stokes, autrement dit les composantes de la vitesse sont stockées aux interfaces des volumes de contrôle, alors que la pression, la température et la concentration sont stockées aux centres des volumes.

III.3 : Discrétisation du domaine physique :

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes de control aux centres desquels sont placés les points intérieurs du maillage (Figure III.1). Les points limites sont centrés aux faces limites. Pour rendre le nombre de volumes de control égal à celui des points du maillage on considère que les points sur les limites gauche et droite du domaine de calcul sont centrés dans des volumes de control ayant des dimensions horizontales nulles, aussi les points sur les limites inférieure et supérieure du domaine de calcul sont centrés dans des volumes avec des dimensions verticales nulles.

Le centre d'un volume de control typique est dénommé P. Chaque volume de control à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes de control voisins. Les centres des volumes de control voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume de control typique sont noté E, W, N et S respectivement. Les positions des faces séparant le volume de control typique de ses voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud sont notées e, w, n et s respectivement.

Les dimensions horizontales des volumes de control sont dénommées ΔX Ainsi que les dimensions horizontales des volumes de control englobant les points P, N et S sont notées ΔX_P , et celles des volumes de control englobant les points E, W sont notées ΔX_E et ΔX_W respectivement. Les dimensions verticales des volumes de control sont appelées ΔY donc les dimensions verticales des volumes de control englobant les points P, E et S sont notées ΔY_P et celles des volumes de control englobant les points N, S sont notées ΔY_N et ΔY_S respectivement. On appelle les distances entre le point P et les points E, W, N et S dX_e, dX_w, dY_n et dY_s respectivement.

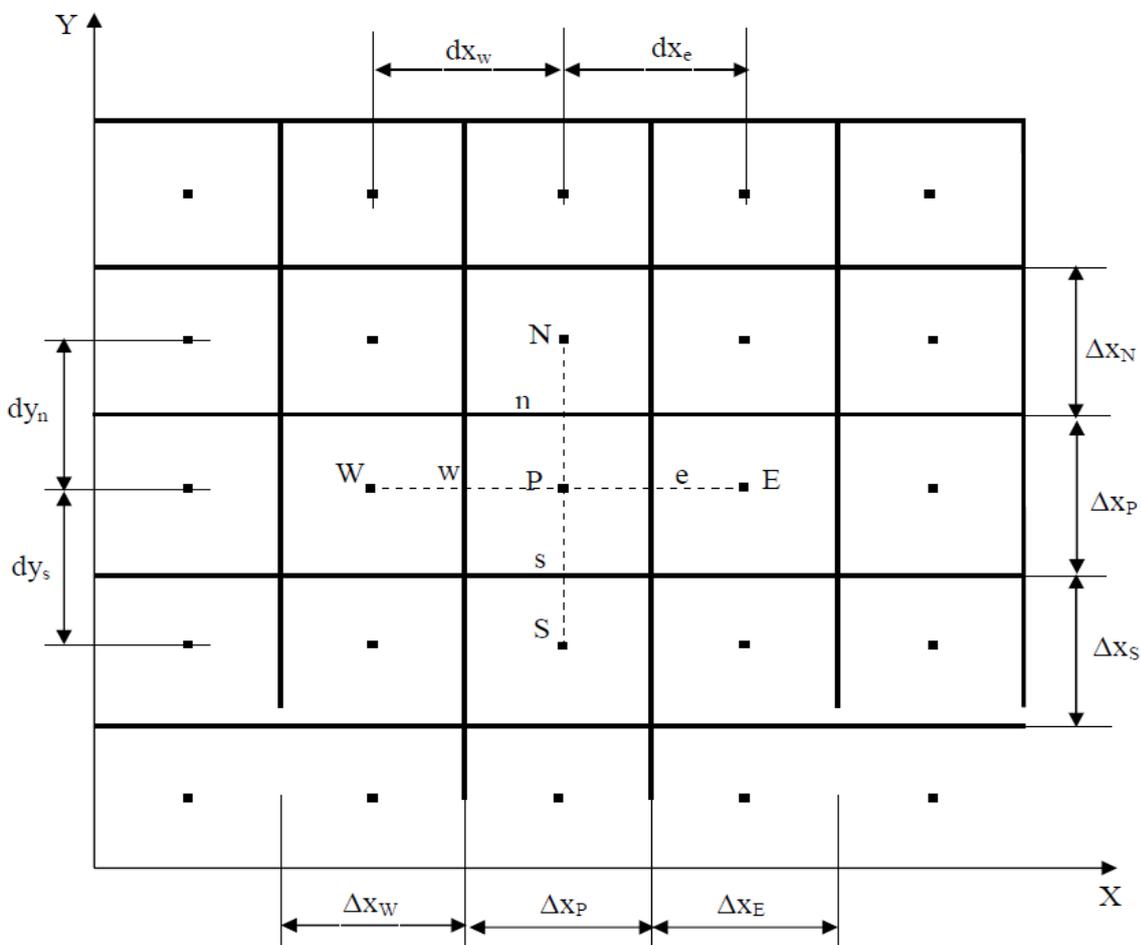


Figure III .1 : Maillage typique uniforme suivant X et suivant Y.

III.4 : Le maillage typique et décalé :

Le maillage typique décrit sera utilisé pour la discrétisation des équations des variables scalaires: la pression, la température et la concentration. Cependant pour les variables

vectérielles (les composantes du vecteur de vitesse) il est nécessaire et recommandé d'utiliser des maillages décalés.

La composante horizontale de la vitesse est décalée à droite et la verticale vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales et des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes de control typiques. Une telle configuration est illustrée dans la figure III.2.

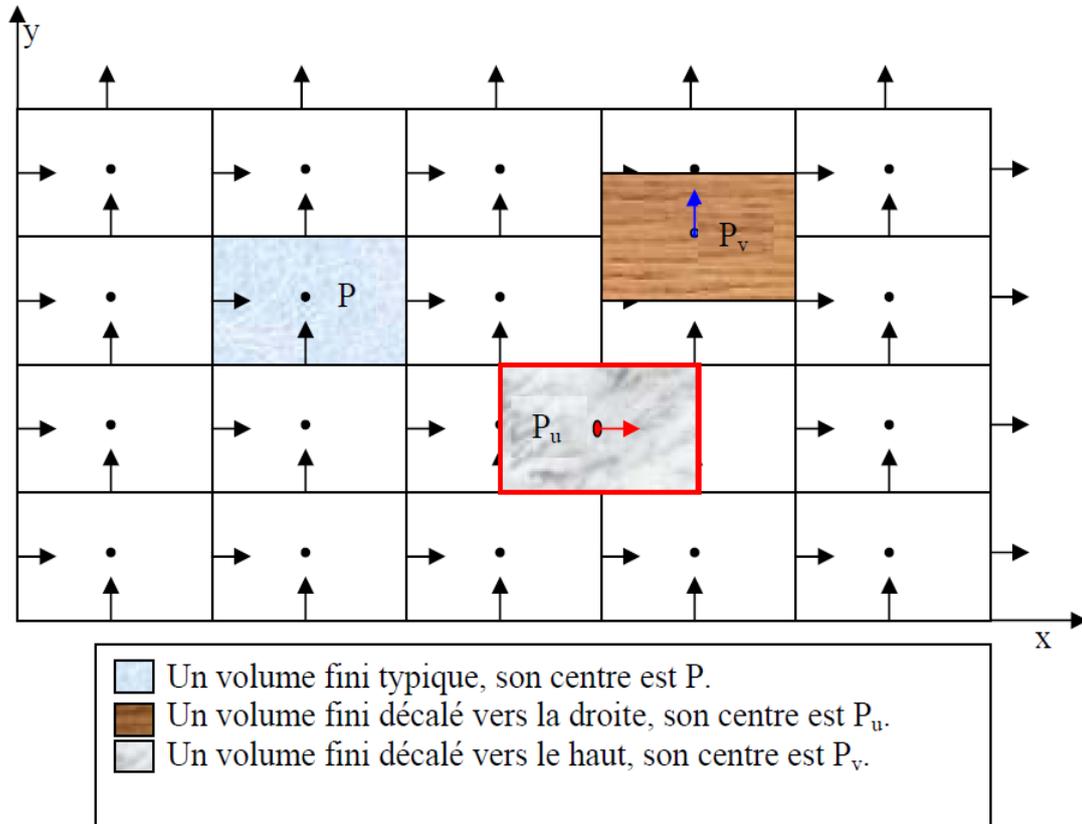


Figure III.2 : Maillage typique et maillages décalés.

III.5 : Discrétisation des équations :

III.5.1 : La discrétisation temporelle en second ordre :

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable ϕ dépendante du temps:

$$\phi^\tau = \phi^{\tau+\Delta\tau} - \frac{\Delta\tau}{1!} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} \Big|_{\tau+\Delta\tau} - \frac{(\Delta\tau)^3}{3!} \frac{\partial^3\phi}{\partial\tau^3} \Big|_{\tau+\Delta\tau} + O(\Delta\tau)^4 \dots \dots \dots (3.1)$$

Aussi :

$$\phi^{\tau-\Delta\tau} = \phi^{\tau+\Delta\tau} - \frac{(2.\Delta\tau)}{1!} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} + \frac{(2.\Delta\tau)^2}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} \Big|_{\tau+\Delta\tau} - \frac{(2.\Delta\tau)^3}{3!} \frac{\partial^3\phi}{\partial\tau^3} \Big|_{\tau+\Delta\tau} + O(\Delta\tau)^4 \dots \dots (3.2)$$

Si l'équation (3.2) est diminuée de l'équation (3.1) multipliée par 4 on obtient :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|^{\tau+\Delta\tau} \approx \frac{3.\phi^{\tau+\Delta\tau} - 4.\phi^{\tau} + \phi^{\tau-\Delta\tau}}{2.\Delta\tau} + O(\Delta\tau)^2 \dots\dots\dots (3.3)$$

Et donc, une discrétisation de la variation temporelle locale, avec une erreur de troncature d'ordre deux $(\Delta t)^2$:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|^{\tau+\Delta\tau} \approx \frac{3.\phi^{\tau+\Delta\tau} - 4.\phi^{\tau} + \phi^{\tau-\Delta\tau}}{2.\Delta\tau} \dots\dots\dots (3.4)$$

Cette discrétisation est appelée : Second Order Euler Backward.

Aussi, si on multiplie l'équation (3.1) par 2 et on retranche du produit l'équation (3.2) on obtient :

$$\phi^{\tau+\Delta\tau} = 2.\phi^{\tau} - \phi^{\tau-\Delta\tau} + O(\Delta\tau)^2 \dots\dots\dots (3.5)$$

Et donc, une approximation temporelle avec une erreur de troncature d'ordre deux d'une variable $\phi^{\tau+\Delta\tau}$ est :

$$\phi^{\tau+\Delta\tau} = 2.\phi^{\tau} - \phi^{\tau-\Delta\tau} \dots\dots\dots (3.6)$$

Cette discrétisation est celle d'Adams –Bashforth.

III.5.2 : La discrétisation spatiale en second ordre :

Nous allons démontrer que le schéma des différences centrées utilisé pour la discrétisation des dérivées spatiales d'une variable est d'ordre deux si le maillage est uniforme. Il suffit de faire cette démonstration pour les valeurs de ϕ et une de ses dérivées premières à l'interface d'un volume de control. Soit ϕ_n la valeur de ϕ et $\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n$ la valeur de sa dérivée première à l'interface n au milieu de la distance entre les points P et N (suivant l'axe Y). Cette distance est ci-après dénommée dY_n (voir la figure III.3 ci-dessous).

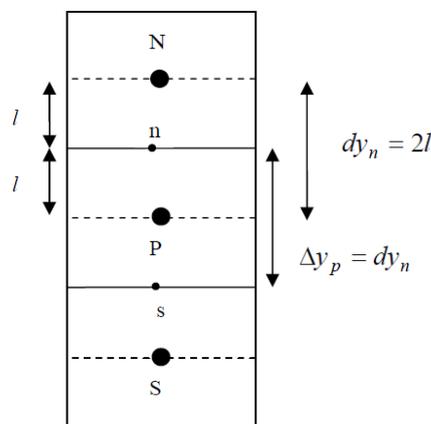


Figure III.3 : L'interface n entre les points P et N dans maillage uniforme suivant Y.

Considérons les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_P = \phi_n - \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \Big|_n - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} \Big|_n + \dots \dots \dots (3.7)$$

$$\phi_N = \phi_n + \frac{1}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \Big|_n + \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} \Big|_n + \dots \dots \dots (3.8)$$

En retranchant l'équation (3.7) de (3.8) on trouve :

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dY_n} - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} \Big|_n (dY_n)^2 + \dots \dots \dots (3-9)$$

Donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dY_n} \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dY_n)^2.$$

Dans ce qui suit on va utiliser une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta\tau)^2$ et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta X)^2$ et $(\Delta Y)^2$.

Concernant la discrétisation temporelle, les dérivées temporelles seront discrétisées comme précisé par l'équation (3.4), tous les termes convectifs et non linéaires seront approchés par la discrétisation d'Adam-Bashforth précisée par l'équation (3.6) par contre tous les gradients de pression et tous les termes diffusifs seront évalués sans approximation au temps $(\tau + \Delta\tau)$.

Les termes de poussées thermique et solutale seront approchés par la discrétisation d'Adams-Bashforth.

Concernant la discrétisation spatiale le schéma des différences centrées sera utilisé.

III.5.3 : Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant X :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant X sont multipliés par $dX \cdot dY$ et doublement intégrés entre les limites du volume de control décalé vers la droite.

- **Terme de la variation temporelle :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX \cdot dY = \left[\frac{3 \cdot U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - 4 \cdot U_{P_u}^{\tau} + U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2 \cdot \Delta\tau} \right] dX_e \Delta Y_p \dots \dots \dots (3.10)$$

- **Termes de transport convectif :**

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(U \cdot U)}{\partial X} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX \cdot dY = 2 \cdot \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(U \cdot U)}{\partial X} \Big|_{\tau} dX \cdot dY - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(U \cdot U)}{\partial X} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX \cdot dY =$$

$$[2 \cdot (U_{e_u}^{\tau} U_{e_u}^{\tau} - U_{w_u}^{\tau} U_{w_u}^{\tau}) - (U_{e_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{e_u}^{\tau-\Delta\tau} - U_{w_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{w_u}^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_p \dots \dots \dots (3.11)$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(V.U)}{\partial Y} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(V.U)}{\partial Y} \Big|_{\tau} dX. dY - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(V.U)}{\partial Y} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$[2. (V_{n_u}^{\tau} U_{n_u}^{\tau} - U_{s_u}^{\tau} U_{s_u}^{\tau}) - (V_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} - V_{s_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau})]. dX_e \dots \dots \dots (3.12)$$

• Termes de transport diffusif :

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \left(\frac{U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dy_n} - \frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dy_s} \right) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.13)$$

• Terme source :

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \left(-\frac{\partial P}{\partial X} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.14)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + S_U \dots \dots \dots (3.15)$$

Avec :

$$A_E = \frac{\Delta y_P}{\Delta x_E}, \quad A_W = \frac{\Delta y_P}{\Delta x_P}$$

$$A_N = \frac{\Delta x_P}{dy_n}, \quad A_S = \frac{\Delta x_P}{dy_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3.\Delta y_P.dxe}{2.\Delta t} \dots \dots \dots (3.16)$$

$$S_u = \left[\frac{4. U_{P_u}^{\tau} - U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2. \Delta t} \right] dx_e \Delta y_p - [2. (U_{e_u}^{\tau} U_{e_u}^{\tau} - U_{w_u}^{\tau} U_{w_u}^{\tau}) - (U_{e_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{e_u}^{\tau-\Delta\tau} - U_{w_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{w_u}^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_P$$

$$- [2. (V_{n_u}^{\tau} U_{n_u}^{\tau} - U_{s_u}^{\tau} U_{s_u}^{\tau}) - (V_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} - V_{s_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau})]. dX_e +$$

$$(P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.17)$$

On remarque que : A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients.

Cependant le terme source S_u est composé de la somme algébrique de plusieurs termes; peut être positive, négative ou nulle mais cela ne pose aucun problème sachant que $U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}$ peut être positive, négative ou nulle.

III.5.4 : Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant Y :

Tous les termes de l'équation de quantité de mouvement suivant Y sont multipliés par dX. dY et doublement intégrés entre les limites du volume de control décalé.

- **Terme de la variation temporelle :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial V}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \left[\frac{3.V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - 4.V_{P_v}^{\tau} + V_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}}{2.\Delta\tau} \right] \Delta X_e dY_n \dots \dots \dots (3.18)$$

- **Termes de transport convectif :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(U.V)}{\partial X} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(U.V)}{\partial X} \Big|_{\tau} dX. dY - \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(U.V)}{\partial X} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$\left[2. (U_{e_v}^{\tau} V_{e_v}^{\tau} - U_{w_v}^{\tau} V_{w_v}^{\tau}) - (U_{e_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{e_v}^{\tau-\Delta\tau} - U_{w_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{w_v}^{\tau-\Delta\tau}) \right] dY_n \dots \dots \dots (3.19)$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(V.V)}{\partial Y} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(V.V)}{\partial Y} \Big|_{\tau} dX. dY - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(V.V)}{\partial X} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$\left[2. (V_{e_v}^{\tau} V_{e_v}^{\tau} - V_{w_v}^{\tau} V_{w_v}^{\tau}) - (V_{e_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{e_v}^{\tau-\Delta\tau} - V_{w_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{w_v}^{\tau-\Delta\tau}) \right] \Delta X_p \dots \dots \dots (3.20)$$

- **Termes de transport diffusif :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \left(\frac{V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dX_e} - \frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dX_w} \right) dY_n \dots \dots \dots (3.21)$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \left(\frac{V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta Y_N} - \frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - U_{S_v}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta Y_P} \right) \Delta X_p \dots \dots \dots (3.22)$$

- **Terme source :**

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \left(-\frac{\partial P}{\partial Y} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_p \dots \dots \dots (3.23)$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_t. \theta \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_t. \theta \Big|_{\tau} dX. dY - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_t. \theta \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$2. Gr_t. \left[\frac{\theta_P^{\tau} + \theta_N^{\tau}}{2} \right]. \Delta X_p. dY_n - Gr_t. \left[\frac{\theta_P^{\tau-\Delta\tau} + \theta_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right]. \Delta X_p. dY_n \dots \dots \dots (3.24)$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_s. C \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_s. C \Big|_{\tau} dX. dY - \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Gr_s. C \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$2. Gr_s. \left[\frac{C_P^{\tau} + C_N^{\tau}}{2} \right]. \Delta X_p. dY_n - Gr_s. \left[\frac{C_P^{\tau-\Delta\tau} + C_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right]. \Delta X_p. dY_n \dots \dots \dots (3.25)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + S_v \dots \dots \dots (3.26)$$

Avec :

$$A_E = \frac{dY_n}{dX_e} \qquad A_W = \frac{dY_n}{dX_w}$$

$$A_N = \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_n} \qquad A_S = \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_P}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3 \Delta X_e \cdot dY_w}{2 \Delta \tau} \dots \dots \dots (3.27)$$

$$S_v = \left[\frac{4 \cdot V_{P_v}^{\tau} - V_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}}{2 \Delta \tau} \right] \Delta X_e dY_n - [2 \cdot (U_{E_v}^{\tau} V_{E_v}^{\tau} - U_{W_v}^{\tau} V_{W_v}^{\tau}) - (U_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} - U_{W_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau})] dY_n -$$

$$[2 \cdot (V_{E_v}^{\tau} V_{E_v}^{\tau} - V_{W_v}^{\tau} V_{W_v}^{\tau}) - (V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} - V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P + 2 \cdot Gr_{\tau} \cdot \left[\frac{\theta_P^{\tau} + \theta_N^{\tau}}{2} \right] \cdot \Delta Y_P \cdot dY_n -$$

$$Gr_{\tau} \cdot \left[\frac{\theta_P^{\tau-\Delta\tau} + \theta_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n + 2 \cdot Gr_S \cdot \left[\frac{C_P^{\tau} + C_N^{\tau}}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n - Gr_S \cdot \left[\frac{C_P^{\tau-\Delta\tau} + C_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n +$$

$$(P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.28)$$

On remarque que : A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients.

Cependant le terme source S_v est composé de la somme algébrique de plusieurs termes; il peut être positive, négative ou nulle mais cela ne pose aucun problème sachant que $V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}$ peut être positive, négative ou nulle.

III.5.5 : Discrétisation de l'équation de l'énergie :

Tous les termes de l'équation de l'énergie sont multipliés par $dX \cdot dY$ et doublement intégrés entre les limites d'un volume de control typique.

• Terme de la variation temporelle :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX \cdot dY = \left[\frac{3\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - 4\theta_P^{\tau} + \theta_P^{\tau-\Delta\tau}}{2 \Delta \tau} \right] \Delta X_P \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.29)$$

• Termes de transport convectif :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial(U.\theta)}{\partial X} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX.dY = 2. \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(U.\theta)}{\partial X} \Big|_{\tau} dX.dY - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(U.\theta)}{\partial X} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX.dY =$$

$$[2.(U_e^\tau \theta_e^\tau - U_w^\tau \theta_w^\tau) - (U_e^{\tau-\Delta\tau} \theta_e^{\tau-\Delta\tau} - U_w^{\tau-\Delta\tau} \theta_w^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.30)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V.\theta)}{\partial Y} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX.dY = 2. \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V.\theta)}{\partial Y} \Big|_{\tau} dX.dY - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V.\theta)}{\partial Y} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX.dY =$$

$$[2.(V_n^\tau \theta_n^\tau - V_s^\tau \theta_s^\tau) - (V_n^{\tau-\Delta\tau} \theta_n^{\tau-\Delta\tau} - V_s^{\tau-\Delta\tau} \theta_s^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.31)$$

• Termes de transport diffusif :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX.dY = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - \theta_P^{\tau+\Delta\tau}}{dX_e} - \frac{\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - \theta_W^{\tau+\Delta\tau}}{dX_w} \right) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.32)$$

$$\int_w^e \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX.dY = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\theta_N^{\tau+\Delta\tau} - \theta_P^{\tau+\Delta\tau}}{dY_n} - \frac{\theta_P^{\tau+\Delta\tau} - \theta_S^{\tau+\Delta\tau}}{dY_s} \right) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.33)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation discrétisation algébrique :

$$A_P \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + S_\theta \dots \dots \dots (3.34)$$

Tel que :

$$A_E = \frac{1}{Pr} \frac{dY_n}{dX_e} \qquad A_W = \frac{1}{Pr} \frac{dY_n}{dX_w}$$

$$A_N = \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_n} \qquad A_S = \frac{1}{Pr} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_p}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3.\Delta X_P.\Delta Y_P}{2.\Delta t} \dots \dots \dots (3.35)$$

$$S_\theta = \left[\frac{4\theta_P^\tau - \theta_P^{\tau-\Delta\tau}}{2.\Delta\tau} \right] \Delta X_P \Delta Y_P - [2.(U_e^\tau \theta_e^\tau - U_w^\tau \theta_w^\tau) - (U_e^{\tau-\Delta\tau} \theta_e^{\tau-\Delta\tau} - U_w^{\tau-\Delta\tau} \theta_w^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_P -$$

$$[2.(V_n^\tau \theta_n^\tau - V_s^\tau \theta_s^\tau) - (V_n^{\tau-\Delta\tau} \theta_n^{\tau-\Delta\tau} - V_s^{\tau-\Delta\tau} \theta_s^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.36)$$

On remarque que A_P , A_E , A_W , A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients, cependant le terme source S_θ , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, il peut être positive, négative ou nulle mais cela peut poser un problème car $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$ ne peut être que positive ou nulle donc il faut trouver une autre reformulation de

l'équation de discrétisation pour que les valeurs de $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$ ne soient que positives ou nulles comme suit :

Notons que la source S_θ qu'est positive, négative ou nulle peut être écrite comme la différence de deux termes positifs ou nuls :

$$S_\theta = |S_\theta| - \max(-2S_\theta, 0) \dots \dots \dots (3.37)$$

Notons que le terme $|S_\theta|$ est positif donc il est maintenu comme une source alors que $-\max(-2S_\theta, 0)$ est réécrit sous la forme :

$$-\max(-2S_\theta, 0) = - \left[\frac{\max(-2S_\theta, 0)}{\theta_P^{\tau+\Delta\tau}} \right] \theta_P^{\tau+\Delta\tau} \dots \dots \dots (3.38)$$

Ce terme est négatif et il est considéré comme un coefficient multiplié par $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$, ce terme est donc ramené à gauche de l'équation de discrétisation qui devient :

$$\left[A_P + \frac{\max(-2S_\theta, 0)}{\theta_P^{\tau+\Delta\tau}} \right] \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + |S_\theta| \dots \dots \dots (3.39)$$

Où :

$$A_P^* \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + |S_\theta| \dots \dots \dots (3.40)$$

Avec :

$$A_P^* = A_P + \frac{\max(-2S_\theta, 0)}{\theta_P^{\tau+\Delta\tau}} \dots \dots \dots (3.41)$$

Notons qu'à droite de la nouvelle équation de discrétisation, la source est toujours positive ou nulle. Cependant à gauche de cette équation on a un problème :

Le coefficient A_P^* contient une inconnue qu'est la variable calculée à $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$ cette dernière peut être remplacée par l'approximation $\theta^{\tau+\Delta\tau} = 2 \cdot \theta^\tau - \theta^{\tau-\Delta\tau}$ seulement la différence

$2 \cdot \theta^\tau - \theta^{\tau-\Delta\tau}$ peut être négative pendant le calcul et donc peut causer un problème! Pour éviter ce problème, on envisage une solution itérative de l'équation de discrétisation non linéaire :

$$\left[A_P + \frac{\max(-2S_\theta, 0)}{\theta_P^{\tau+\Delta\tau}} \right] \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + |S_\theta| \dots \dots \dots (3.42)$$

Durant la première itération de la solution de cette équation, on considère sa forme linéarisée comme suit:

$$\left[A_P + \frac{\max(-2S_\theta, 0)}{\theta_P^\tau} \right] \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + |S_\theta| \dots \dots \dots (3.43)$$

C'est comme si θ_P^τ représente une initialisation pour $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$.

Durant les autres itérations, on considère la solution de l'équation

$$\left[A_P + \frac{\max(-2S_\theta, 0)}{(\theta_P^{\tau+\Delta\tau})^*} \right] \theta_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \theta_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \theta_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \theta_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \theta_S^{\tau+\Delta\tau} + |S_\theta| \dots \dots \dots (3.44)$$

Où : $(\theta_P^{\tau+\Delta\tau})^*$ est la valeur de $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$ obtenue de l'itération précédente.

Et avec plusieurs itérations, on obtient la valeur de $\theta_P^{\tau+\Delta\tau}$ qui satisfait l'équation non linéaire.

III.5.6 : Discrétisation de l'équation de transfert de matière :

Tous les termes de l'équation de transfert de matière sont multipliés par dX . dY et doublement intégrés entre les limites d'un volume de control typique.

- **Terme de la variation temporelle S :**

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial C}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \left[\frac{3C_P^{\tau+\Delta\tau} - 4C_P^\tau + C_P^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \right] \Delta X_P \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.45)$$

- **Termes de transport convectif :**

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial (U.C)}{\partial X} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_w^e \int_s^n \frac{\partial (U.C)}{\partial X} \Big|^\tau dX. dY - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial (U.C)}{\partial X} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$[2. (U_e^\tau C_e^\tau - U_w^\tau C_w^\tau) - (U_e^{\tau-\Delta\tau} C_e^{\tau-\Delta\tau} - U_w^{\tau-\Delta\tau} C_w^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.46)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial (V.C)}{\partial Y} \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = 2. \int_w^e \int_s^n \frac{\partial (V.C)}{\partial Y} \Big|^\tau dX. dY - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial (V.C)}{\partial Y} \Big|_{\tau-\Delta\tau} dX. dY =$$

$$[2. (V_n^\tau C_n^\tau - V_s^\tau C_s^\tau) - (V_n^{\tau-\Delta\tau} C_n^{\tau-\Delta\tau} - V_s^{\tau-\Delta\tau} C_s^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.47)$$

- **Termes de transport diffusif :**

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \frac{1}{Sc} \left(\frac{C_E^{\tau+\Delta\tau} - C_P^{\tau+\Delta\tau}}{dX_e} - \frac{C_P^{\tau+\Delta\tau} - C_W^{\tau+\Delta\tau}}{dX_w} \right) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.48)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} dX. dY = \frac{1}{Sc} \left(\frac{C_N^{\tau+\Delta\tau} - C_P^{\tau+\Delta\tau}}{dY_n} - \frac{C_P^{\tau+\Delta\tau} - C_S^{\tau+\Delta\tau}}{dY_s} \right) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.49)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation discrétisation algébrique :

$$A_P C_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E C_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W C_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N C_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S C_S^{\tau+\Delta\tau} + S_c \dots \dots \dots (3.50)$$

Avec :

$$A_E = \frac{1}{Sc} \frac{dY_n}{dX_e} \qquad A_W = \frac{1}{Sc} \frac{dY_n}{dX_w}$$

$$A_N = \frac{1}{Sc} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_n} \qquad A_S = \frac{1}{Sc} \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_P}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3 \cdot \Delta X_P \cdot \Delta Y_P}{2 \cdot \Delta t} \dots \dots \dots (3.51)$$

$$S_\theta = \left[\frac{4C_P^\tau - C_P^{\tau-\Delta\tau}}{2 \cdot \Delta\tau} \right] \Delta X_P \Delta Y_P - [2 \cdot (U_e^\tau C_e^\tau - U_w^\tau C_w^\tau) - (U_e^{\tau-\Delta\tau} C_e^{\tau-\Delta\tau} - U_w^{\tau-\Delta\tau} C_w^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_P -$$

$$[2 \cdot (V_n^\tau C_n^\tau - V_s^\tau C_s^\tau) - (V_n^{\tau-\Delta\tau} C_n^{\tau-\Delta\tau} - V_s^{\tau-\Delta\tau} C_s^{\tau-\Delta\tau})] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.52)$$

On remarque que A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont toujours positifs et que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients. Cependant, le terme source S_C composé de la somme algébrique de plusieurs termes, il peut être positive, négatif ou nul; mais cela peut poser un problème car $C_P^{\tau+\Delta\tau}$ ne peut être que positive ou nulle. Pour éviter ce problème, on suit la même reformulation décrite pour le cas de l'équation de la température.

III.6 : Résolution du système des équations de vitesse :

Pour résoudre les systèmes d'équations de discrétisation de $U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}$ et $V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}$ il est nécessaire de connaître les valeurs de la pression aux points du maillage typique apparaissant dans les termes sources des équations de discrétisation citées. Donc il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention d'une telle équation est possible avec l'utilisation des équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

III.6.1 : Discrétisation de l'équation de continuité :

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right] \Big|^\tau \Big|^{\tau+\Delta\tau} dX \cdot dY = [U_e^{\tau+\Delta\tau} - U_w^{\tau+\Delta\tau}] \Delta Y_P +$$

$$[V_n^{\tau+\Delta\tau} - V_s^{\tau+\Delta\tau}] \Delta X_P = 0 \dots \dots \dots (3.53)$$

Nous avons déjà obtenu l'équation de discrétisation de $U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}$:

$$A_P U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + S_U \dots \dots \dots (3.54)$$

Avec :

$$A_E = \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_E} \quad A_W = \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P}$$

$$A_N = \frac{\Delta X_P}{dY_n} \quad A_S = \frac{\Delta X_P}{dY_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3 \cdot \Delta Y_P \cdot dX_e}{2 \cdot \Delta t} \dots \dots \dots (3.55)$$

$$S_u = \left[\frac{4 \cdot U_{P_u}^\tau - U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2 \cdot \Delta\tau} \right] dX_e \Delta Y_p - [2 \cdot (U_{E_u}^\tau U_{E_u}^\tau - U_{W_u}^\tau U_{W_u}^\tau) - (U_{E_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{E_u}^{\tau-\Delta\tau} - U_{W_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{W_u}^{\tau-\Delta\tau})] \Delta Y_p$$

$$- [2 \cdot (V_{N_u}^\tau U_{N_u}^\tau - U_{S_u}^\tau U_{S_u}^\tau) - (V_{N_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{N_u}^{\tau-\Delta\tau} - V_{S_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{S_u}^{\tau-\Delta\tau})] \cdot dX_e$$

$$+ (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.56)$$

L'équation de discrétisation peut être réécrite sous la forme:

$$A_P U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U$$

$$+ (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.57)$$

Avec :

$$S_U = B_U + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.58)$$

Aussi on remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position e du maillage typique. Et donc l'équation de discrétisation de $U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = U_e^{\tau+\Delta\tau}$

$$A_P U_e^{\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U$$

$$+ (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots \dots \dots (3.59)$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$U_e^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P}{A_P} \dots \dots \dots (3.60)$$

$$U_e^{\tau+\Delta\tau} = \hat{U}_e^{\tau+\Delta\tau} + d_e (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \dots \dots \dots (3.61)$$

$$\hat{U}_e^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U}{A_P} \dots \dots \dots (3.62)$$

Cette variable est appelée la pseudo vitesse suivant la direction x :

Avec :

$$d_e = \frac{\Delta Y_P}{A_P}$$

Si au point e on a l'équation :

$$U_e^{\tau+\Delta\tau} = \widehat{U}_e^{\tau+\Delta\tau} + d_e(P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \dots \dots \dots (3.63)$$

Certainement au point w on aura une équation similaire :

$$U_w^{\tau+\Delta\tau} = \widehat{U}_w^{\tau+\Delta\tau} + d_w(P_W^{\tau+\Delta\tau} - P_P^{\tau+\Delta\tau}) \dots \dots \dots (3.64)$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de $V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}$:

$$A_P V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + S_v \dots \dots \dots (3.65)$$

Avec :

$$A_E = \frac{dY_n}{dX_e} \qquad A_W = \frac{dY_n}{dX_w}$$

$$A_N = \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_n} \qquad A_S = \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_P}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{3 \cdot \Delta X_e \cdot dY_w}{2 \cdot \Delta \tau} \dots \dots \dots (3.66)$$

$$\begin{aligned} S_v = & \left[\frac{4 \cdot V_{P_v}^\tau - V_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}}{2 \cdot \Delta \tau} \right] \Delta X_e dY_n - \left[2 \cdot (U_{E_v}^\tau V_{E_v}^\tau - U_{W_v}^\tau V_{W_v}^\tau) - (U_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} - U_{W_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau}) \right] dY_n - \\ & \left[2 \cdot (V_{E_v}^\tau V_{E_v}^\tau - V_{W_v}^\tau V_{W_v}^\tau) - (V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{E_v}^{\tau-\Delta\tau} - V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{W_v}^{\tau-\Delta\tau}) \right] \Delta X_P + 2 \cdot Gr_\tau \cdot \left[\frac{\theta_P^\tau + \theta_N^\tau}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n - \\ & Gr_\tau \cdot \left[\frac{\theta_P^{\tau-\Delta\tau} + \theta_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n + 2 \cdot Gr_\tau \cdot \left[\frac{C_P^\tau + C_N^\tau}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n - Gr_\tau \cdot \left[\frac{C_P^{\tau-\Delta\tau} + C_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right] \cdot \Delta X_P \cdot dY_n + \\ & (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.67) \end{aligned}$$

L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} A_P V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = & A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + b_v + \\ & (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.68) \end{aligned}$$

$$S_v = b_v + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots \dots \dots (3.69)$$

On remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Et donc on peut écrire:

$$A_P V_n^{\tau+\Delta\tau} = A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + b_v + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots (3.70)$$

Qui peut être aussi écrite sous la forme:

$$V_n^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + b_v + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P}{A_P} \dots (3.71)$$

Avec :

$$V_n^{\tau+\Delta\tau} = \widehat{V}_n^{\tau+\Delta\tau} + d_n (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \text{ et } d_n = \frac{\Delta X_P}{A_P}$$

$$\widehat{V}_n^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + b_v}{A_P} \dots (3.72)$$

Cette variable est appelée la pseudo vitesse suivant la direction Y.

Si on a obtenu à la position n l'équation :

$$V_n^{\tau+\Delta\tau} = \widehat{V}_n^{\tau+\Delta\tau} + d_n (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.73)$$

On peut obtenir à la position s l'équation :

$$V_s^{\tau+\Delta\tau} = \widehat{V}_s^{\tau+\Delta\tau} + d_s (P_S^{\tau+\Delta\tau} - P_P^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.74)$$

Maintenant nous allons remplacer les quatre équations (3.63), (3.64), (3.73) et (3.74) dans

l'équation de discrétisation de continuité :

$$[U_e^{\tau+\Delta\tau} - U_w^{\tau+\Delta\tau}] \Delta Y_P + [V_n^{\tau+\Delta\tau} - V_s^{\tau+\Delta\tau}] \Delta X_P = 0 \dots (3.75)$$

Et obtient :

$$\begin{aligned} & [\widehat{U}_e^{\tau+\Delta\tau} + d_e (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau})] \Delta Y_P - \\ & [\widehat{U}_w^{\tau+\Delta\tau} + d_w (P_W^{\tau+\Delta\tau} - P_P^{\tau+\Delta\tau})] \Delta Y_P + \\ & [\widehat{V}_n^{\tau+\Delta\tau} + d_n (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau})] \Delta X_P - \\ & [\widehat{V}_s^{\tau+\Delta\tau} + d_s (P_S^{\tau+\Delta\tau} - P_P^{\tau+\Delta\tau})] \Delta X_P = 0 \dots (3.76) \end{aligned}$$

III.6.2 : Discrétisation de l'équation de la pression :

Discrétisation de continuité sous la forme d'une équation de discrétisation de la pression :

$$A_P P_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E P_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W P_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N P_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S P_S^{\tau+\Delta\tau} + S_P \dots \dots \dots (3.77)$$

Avec :

$$A_E = d_e \Delta Y_P \quad , \quad A_W = d_w \Delta Y_P$$

$$A_N = d_n \Delta X_P \quad , \quad A_S = d_s \Delta X_P$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \dots \dots \dots (3.78)$$

$$S_P = [\hat{U}_W^{\tau+\Delta\tau} - \hat{U}_E^{\tau+\Delta\tau}] \Delta Y_P + [\hat{V}_S^{\tau+\Delta\tau} - \hat{V}_N^{\tau+\Delta\tau}] \Delta X_P \dots \dots \dots (3.79)$$

A chaque point intérieur du maillage typique on a une équation algébrique de discrétisation de la pression. La solution de l'ensemble des équations de discrétisation nous donne la pression aux points du maillage typique. Cependant la solution du système d'équations de discrétisation de la pression nécessite la connaissance des pseudos vitesses présentes dans le terme source des équations citées. Le terme source de l'équation de discrétisation de pression est en fonction des pseudos vitesses qui sont en fonction des vitesses voisinant le point considéré. On constate que pour résoudre les équations de discrétisation des vitesses il nous faut la pression (qui n'est pas connue) et pour résoudre l'équation de discrétisation de la pression il nous faut les vitesses (qui ne sont pas connues).

Ce couplage des équations de discrétisation des vitesses et de pression nécessite une solution simultanée et itérative de ces équations. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections:

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$P = P^* + P'$$

Les variables étoilées sont les estimations et les variables primées sont les corrections.

Si on utilise ces définitions dans les équations de discrétisation de vitesse s :

$$A_P U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_S U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_E^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots (3.80)$$

$$A_P V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = A_E V_{E_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + b_v + (P_P^{\tau+\Delta\tau} - P_N^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots (3.81)$$

On obtient une équation de discrétisation des estimations :

$$A_P U_{P_u}^{*\tau+\Delta\tau} = A_E U_{E_u}^{*\tau+\Delta\tau} + A_W U_{W_u}^{*\tau+\Delta\tau} + A_N U_{N_u}^{*\tau+\Delta\tau} + A_S U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + B_U + (P_P^{*\tau+\Delta\tau} - P_E^{*\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots (3.82)$$

$$A_P V_{P_v}^{*\tau+\Delta\tau} = A_E V_{E_v}^{*\tau+\Delta\tau} + A_W V_{W_v}^{*\tau+\Delta\tau} + A_N V_{N_s}^{*\tau+\Delta\tau} + A_S V_{N_v}^{*\tau+\Delta\tau} + b_v + (P_P^{*\tau+\Delta\tau} - P_N^{*\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots (3.83)$$

On constate que les corrections des vitesses à un point sont fonctions des corrections de la pression et des corrections des vitesses aux points voisins. Donc si on a la correction de la pression, on peut résoudre les deux systèmes d'équations de discrétisation des corrections des vitesses pour obtenir ces dernières. Cependant on peut s'affranchir de la solution des deux systèmes cités si on redéfinit les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression:

$$A_P U_{P_u}'^{\tau+\Delta\tau} = (P_P'^{\tau+\Delta\tau} - P_E'^{\tau+\Delta\tau}) \Delta Y_P \dots (3.84)$$

$$A_P V_{P_v}'^{\tau+\Delta\tau} = (P_P'^{\tau+\Delta\tau} - P_N'^{\tau+\Delta\tau}) \Delta X_P \dots (3.85)$$

Avec ces définitions si on a la correction de la pression on calcule directement les corrections des vitesses. Maintenant il est temps de discuter la détermination de la correction de la pression. On peut démontrer facilement que:

$$U_e^{\tau+\Delta\tau} = U_e^{*\tau+\Delta\tau} + U_e'^{\tau+\Delta\tau} = U_e^{*\tau+\Delta\tau} + d_e (P_P'^{\tau+\Delta\tau} - P_E'^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.86)$$

$$U_w^{\tau+\Delta\tau} = U_w^{*\tau+\Delta\tau} + U_w'^{\tau+\Delta\tau} = U_w^{*\tau+\Delta\tau} + d_w (P_W'^{\tau+\Delta\tau} - P_P'^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.87)$$

$$V_n^{\tau+\Delta\tau} = V_n^{*\tau+\Delta\tau} + V_n'^{\tau+\Delta\tau} = V_n^{*\tau+\Delta\tau} + d_n (P_P'^{\tau+\Delta\tau} - P_N'^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.88)$$

$$V_s^{\tau+\Delta\tau} = V_s^{*\tau+\Delta\tau} + V_s'^{\tau+\Delta\tau} = V_s^{*\tau+\Delta\tau} + d_s (P_S'^{\tau+\Delta\tau} - P_P'^{\tau+\Delta\tau}) \dots (3.89)$$

On utilise ces quatre définitions dans l'équation de discrétisation de continuité:

$$[U_e^{\tau+\Delta\tau} - U_w^{\tau+\Delta\tau}]\Delta Y_p + [V_n^{\tau+\Delta\tau} - V_s^{\tau+\Delta\tau}]\Delta X_p = 0 \dots\dots\dots (3.90)$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned} & [U_e^{*\tau+\Delta\tau} + d_e(P_p'^{\tau+\Delta\tau} - P_E'^{\tau+\Delta\tau})]\Delta Y_p - \\ & [U_w^{*\tau+\Delta\tau} + d_w(P_w'^{\tau+\Delta\tau} - P_p'^{\tau+\Delta\tau})]\Delta Y_p + \\ & [V_n^{*\tau+\Delta\tau} + d_n(P_p'^{\tau+\Delta\tau} - P_N'^{\tau+\Delta\tau})]\Delta X_p - \\ & [V_s^{*\tau+\Delta\tau} + d_s(P_s'^{\tau+\Delta\tau} - P_p'^{\tau+\Delta\tau})] = 0 \dots\dots\dots (3.91) \end{aligned}$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la correction de la pression:

$$A_p P_p'^{\tau+\Delta\tau} = A_E P_E'^{\tau+\Delta\tau} + A_W P_W'^{\tau+\Delta\tau} + A_N P_N'^{\tau+\Delta\tau} + A_S P_S'^{\tau+\Delta\tau} + S_{p'} \dots\dots\dots (3.92)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_E &= d_e \Delta Y_p \quad , \quad A_W = d_w \Delta Y_p \\ A_N &= d_n \Delta X_p \quad , \quad A_S = d_s \Delta X_p \end{aligned}$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S \dots\dots\dots (3.93)$$

$$S_{p'} = [U_w^{*\tau+\Delta\tau} - U_e^{*\tau+\Delta\tau}]\Delta Y_p + [V_s^{*\tau+\Delta\tau} - V_n^{*\tau+\Delta\tau}]\Delta X_p \dots\dots\dots (3.94)$$

L'équation de discrétisation de la correction de la pression est similaire à celle de la pression la différence est que le terme source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression contient les estimations des vitesses alors que le terme source de l'équation de discrétisation de la pression contient les pseudos vitesses.

III.7 : Méthode de résolution :

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques peuvent classées en deux classes, directes (inversement d'une matrice, Gauss, Gauss Jordan avec Pivot; L.U.avec substitution) et indirectes ou itératives (Jacobi; Gauss- Seidel; méthode de Balayage). Bien sûr le plus souvent sont les méthodes itératives qui sont utilisées pour les problèmes non linéaires car les méthodes directes exigent une mémoire énorme et un temps de calcul plus grand. Pour notre cas nous avons utilisé la méthode de balayage (Sweeping) dite ligne by ligne (L B L) expliquée par S.V.Patankar avec l'algorithme de Thomas, qui est appelé aussi **TDMA** (Tri Diagonal Matrix Algorithm) [annexe A].

III.8 : La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation :

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations discrétisées et déterminer la distribution des vitesses, de la pression, de la température et de la concentration en chaque point du domaine de calcul et calculer les nombres de Nusselt et Sherwood, on a utilisé l'algorithme SIMPLER [annexe B].

L'ordre des opérations peut être énoncé comme suit :

1. On commence par une initialisation du champ de vitesse, de température et de concentration.
2. On calcule les coefficients des équations de quantité de mouvement et avec le champ de vitesse initial on calcule les pseudos vitesses \hat{U} et \hat{V} .
3. On calcule les coefficients de l'équation de la pression et avec les pseudos vitesses on peut calculer le terme source de cette équation et résoudre son système pour obtenir une estimation de la pression P^* .
4. L'estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses A pour obtenir les estimations des vitesses U^* et V^* .
5. On calcule d'abord le terme source de l'équation de la correction de la pression et avec les estimations des vitesses on peut résoudre son système et obtenir une estimation de la correction de la pression p' .
6. Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses U' et V' et on corrige le champ de vitesse en utilisant la correction de la pression avec la définition des variables correctes.
7. On résout le système d'équations de discrétisation de la température et on obtient le champ de température .
8. On résout le système d'équations de discrétisation de la concentration et on obtient le champ de concentration C .
9. On vérifie si le bilan de l'énergie et de la matière est vérifié pour arrêter le calcul sinon on augmente le nombre d'itérations.

III.9 : Critère de convergence :

Le critère de convergence retenu pour cette étude est la satisfaction du bilan global de l'énergie chaleur et de la matière en comparant les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens près des parois verticales entre deux incréments consécutifs de temps :

$$|\overline{Nu}_{X=0} - \overline{Nu}_{X=A}| \leq 10^{-3}.$$

$$|\overline{Sh}_{X=0} - \overline{Sh}_{X=A}| \leq 10^{-3}.$$

Le calcul des transferts de chaleur et de masse sont exprimés avec le nombre de Nusselt et de Sherwood local :

$$Nu = -A \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

$$Sh = -A \frac{\partial C}{\partial X}$$

On définit les nombres de Nusselt et Sherwood moyens par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu \cdot dY$$

$$\overline{Sh} = \int_0^1 Sh \cdot dY$$

III.10 : Détails Numériques :

L'algorithme précédent est écrit avec le langage Fortran 90 et exécuté sur plusieurs ordinateurs personnels (core I2, I3, I5 et I7). Les calculs numériques ont été effectués pour un maillage de 240×130 avec un pas de temps 10⁻⁶. Le temps de calcul est estimé à 2520 heures.

CHAPITRE IV :

RÉSULTATS

ET

DISCUSSIONS

IV.1 : Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter les résultats de la simulation numérique relatifs à la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire. Notre étude consiste à fixer le nombre de Grashof thermique Gr_t à 10^5 et le nombre de Prandtl Pr à 0.71 (air) et étudier l'effet de la variation des paramètres de contrôle.

Dans la première partie on va étudier l'effet de la variation du nombre de Grashof solutal Gr_s , dans la deuxième l'effet de la variation du nombre de Schmidt Sc et dans la troisième l'effet de la variation du rapport de forme A sur la structure de l'écoulement, les isothermes, les isoconcentrations et le taux de transfert de chaleur (Nusselt moyen) et de masse (Sherwood moyen).

IV.2 : Effet du maillage :

Avant de commencer notre étude on va faire un test de maillage pour déterminer l'influence de ce dernier sur la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur et de masse. Le test est réalisé avec les paramètres suivants : le rapport de forme $A=2$, le nombre de Prandtl $Pr=0.71$, le nombre de Schmidt $Sc=0.65$, le nombre de Grashof thermique $Gr_t=10^6$ ainsi le nombre de Grashof solutal $Gr_s = 10^3$.

Les maillages utilisés sont mentionnés dans le tableau ci-dessous :

Numéro du maillage	maillage	Nusselt moyen	Sherwood moyen
1	42x22	8.9139	9.6120
2	82x44	7.9476	7.5556
3	100x50	7.8147	7.4340
4	122x66	7.6892	7.3464
5	132x82	7.7194	7.3187
6	164x88	7.6346	7.2686
7	196x100	7.6035	7.2400
8	220x118	7.5878	7.2256
9	240x130	7.5784	7.2170
10	260x140	7.5712	7.2104

Tableau IV.1: Effet du maillage sur les caractéristiques de l'écoulement.

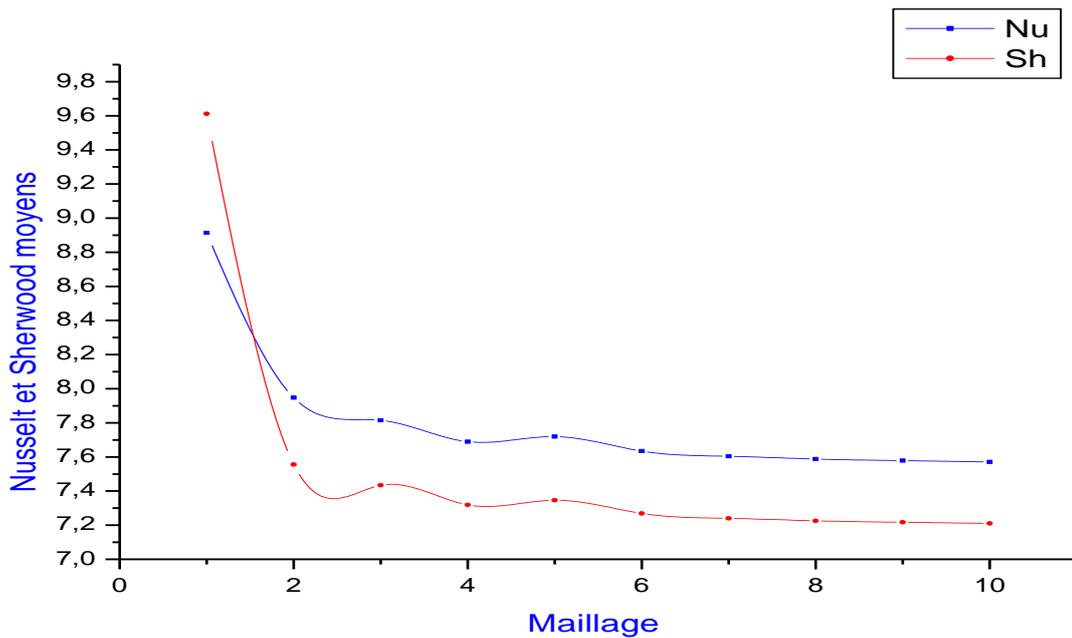


Figure IV.1 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du maillage.

Le tableau IV.1 montre la sensibilité des résultats numériques aux maillages, nous constatons que les maillages de 1 jusqu'à 6 donnent des résultats ayant des écarts relativement important par rapport aux maillages restants. La différence relative des résultats obtenus avec le maillage 9 par rapport au maillage 10 est de 0.09% pour Nu et Sh ce qui est largement admissible. D'après ces résultats le maillage 240×130 sera choisi dans toute notre étude.

IV.3 : Validation du code de calcul :

Afin de valider notre code de calcul et vérifier l'exactitude des résultats numérique de la présente étude nous avons choisi d'effectuer une comparaison avec les résultats obtenus par **Beghein et al. [3]** dans le cas de la convection naturelle à double diffusion avec les paramètres suivants : $A = H / L = 1$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.71$, $Gr_t = 1.24 \cdot 10^4$ et $Gr_s = 1.24 \cdot 10^4$. Un maillage de 240×130 et un pas de temps de 1×10^{-6} sont utilisés pour effectuer cette comparaison.

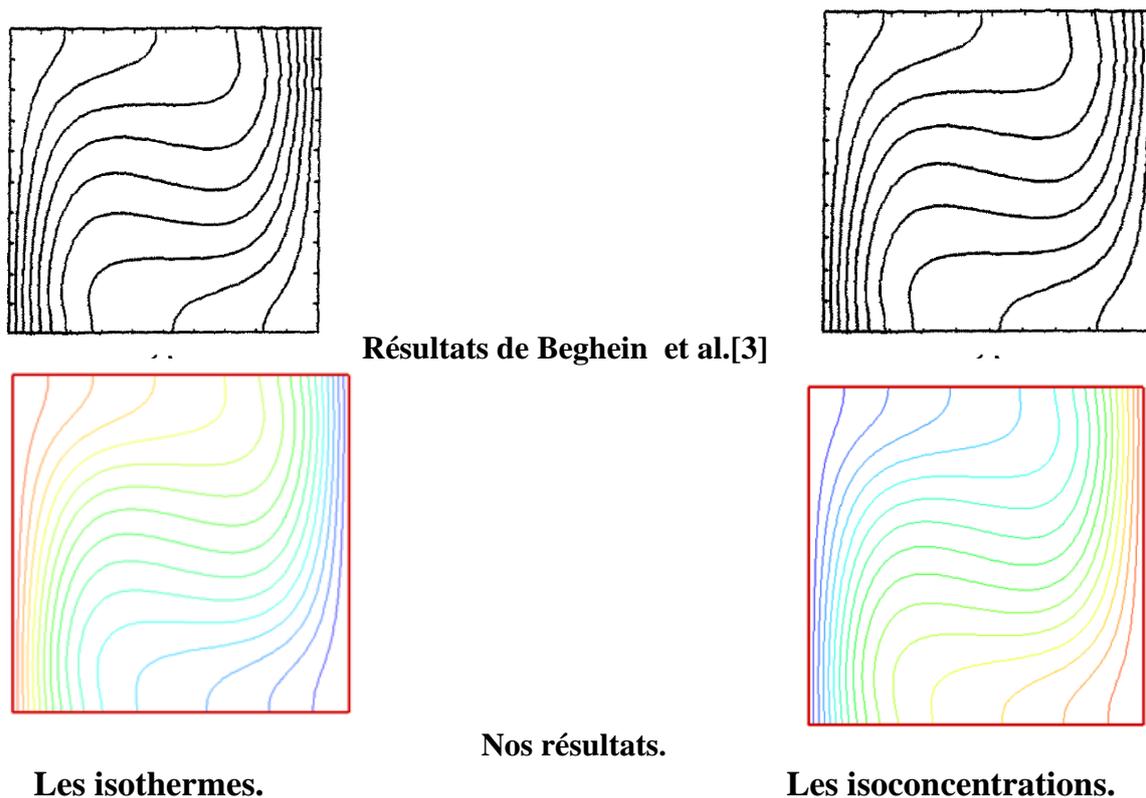


Figure IV.2 : Comparaison entre les isothermes et les isoconcentrations.

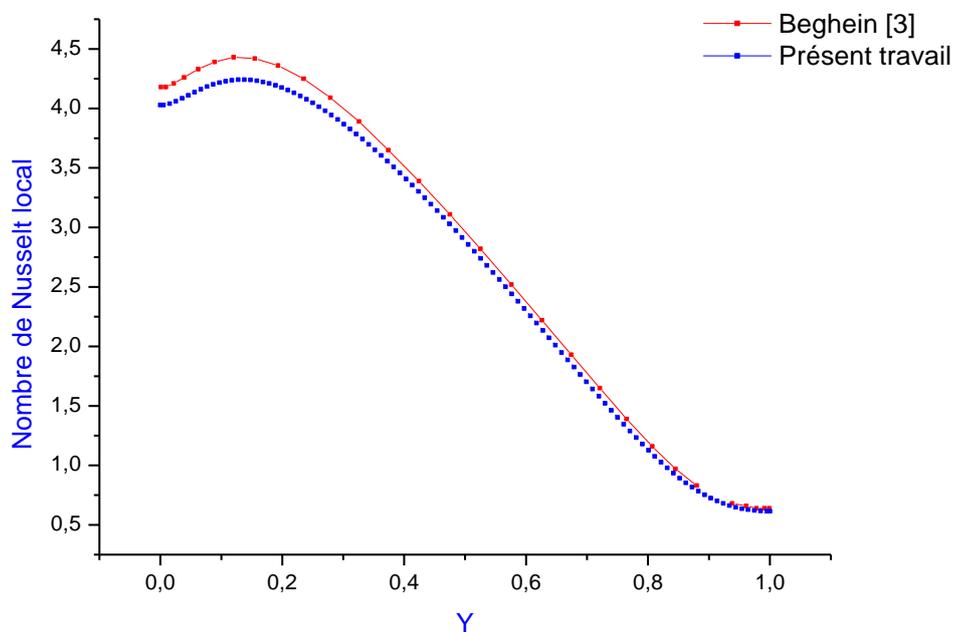


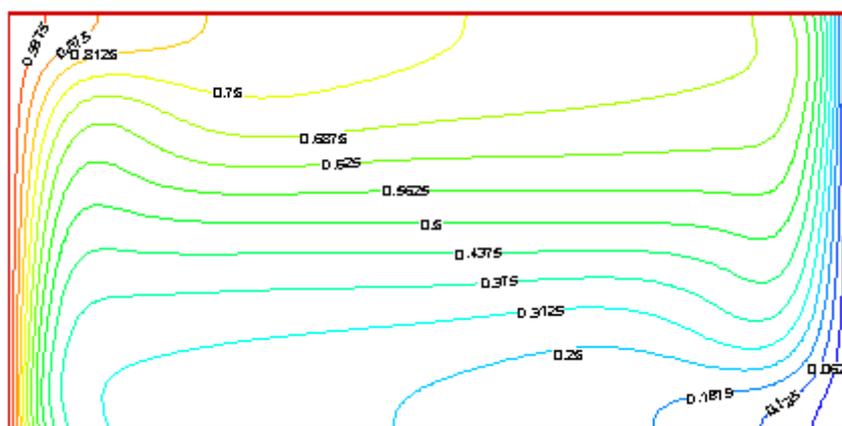
Figure IV.3 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi verticale gauche .

D’après les figures ci-dessus on constate que nos résultats sont en bon accord avec ceux de **Beghein et al.**

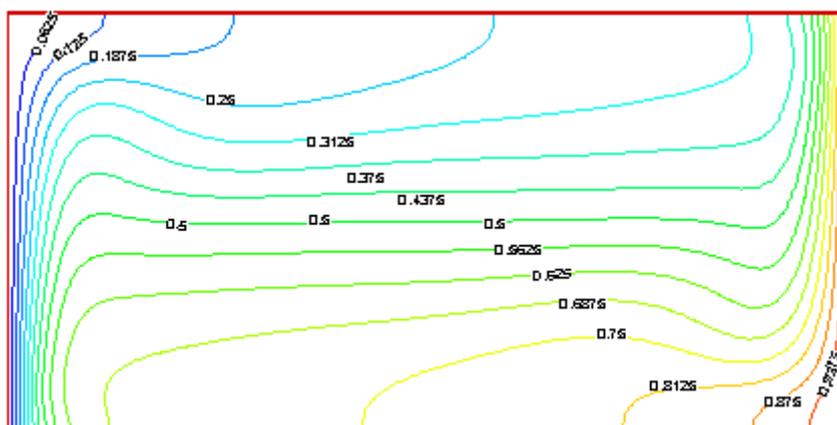
IV.4 : Résultats et discussions :

IV.4.1 : Partie 1 Canal Horizontal :

Dans cette partie on va maintenir les paramètres suivants : $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$ et $A = 2$ fixes et faire varier le Grashof solutal de 10^3 à 10^7 pour déterminer son influence. Avant d'entamer cette étude on commence par prendre un cas de référence où $Gr_s = 10^5$ qui correspond à $N=1$.

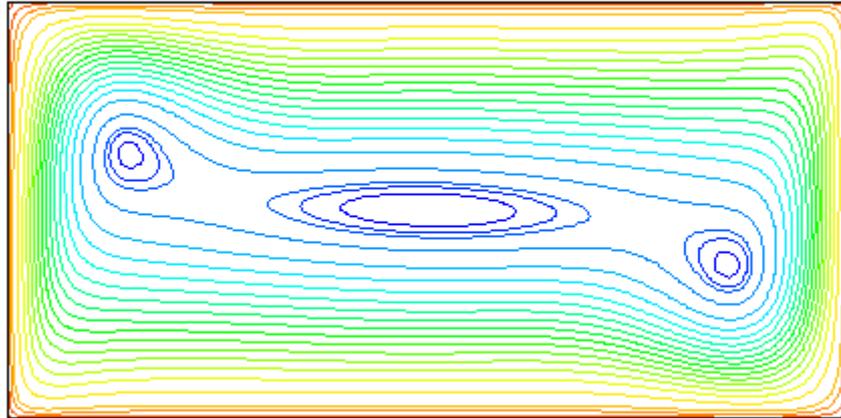


(a)



(b)

Figure IV.4 : Présentation des isothermes(a), des isoconcentrations(b) et des lignes de courant(c) pour $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc=0.65$ et $A=2$.



(c)

Suite figure IV.4 : Présentation des isothermes(a), des isoconcentrations(b) et des lignes de courant(c) pour $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc=0.65$ et $A=2$.

D'après la figure IV.4 on remarque que les isotherme sont serrées près des parois verticales cela est dû aux forts gradients et parallèles aux parois au milieu de la cavité; leurs valeur diminue de gauche en haut vers la droite en bas.

Les isoconcentrations ont le même profil que les isothermes mais leur valeur augmente de gauche en haut vers la droite en bas.

On constate que les lignes de courant se concentrent près des parois horizontales et verticales tournant dans le sens horaire et que le régime d'écoulement est composé de trois cellules secondaires; la première située au milieu de la cavité formant une zone de stagnation à cause des faibles vitesses comme le montre la figure IV.10 et les deux autres ont tendance à s'enfoncer dans les coins.

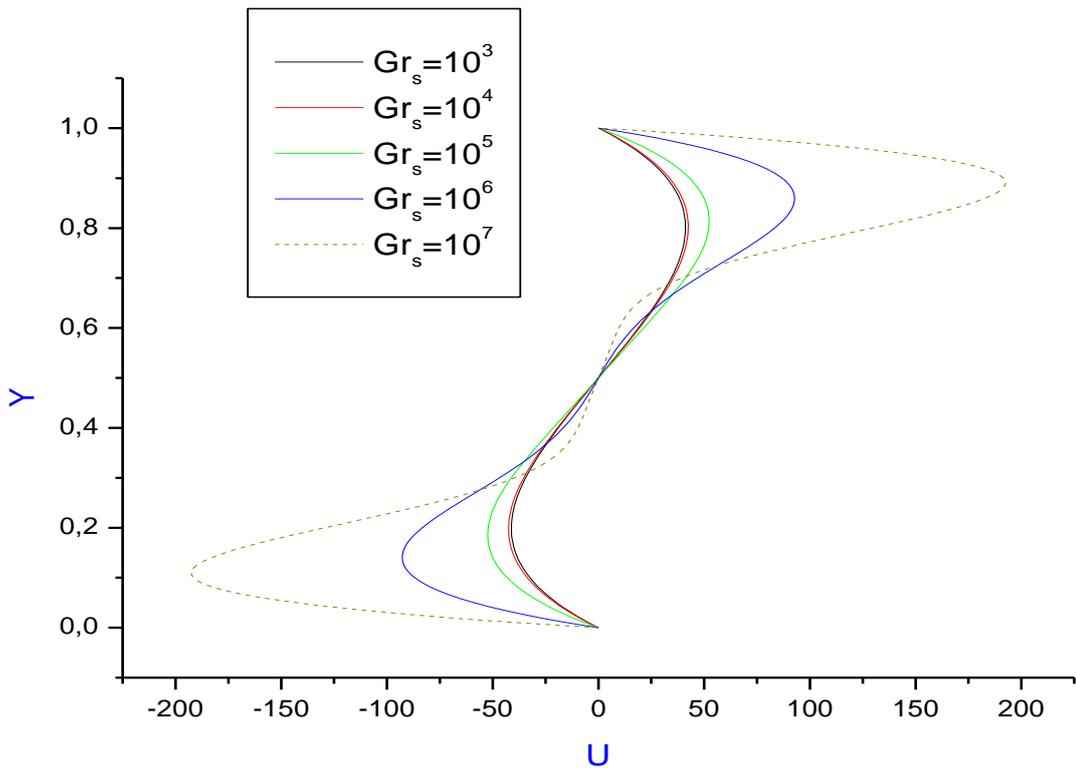
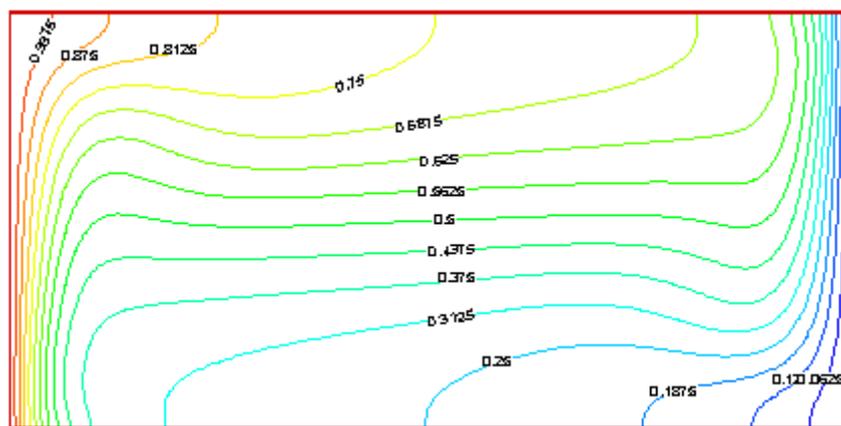


Figure IV.5 : Profil de la composante U à X=1.

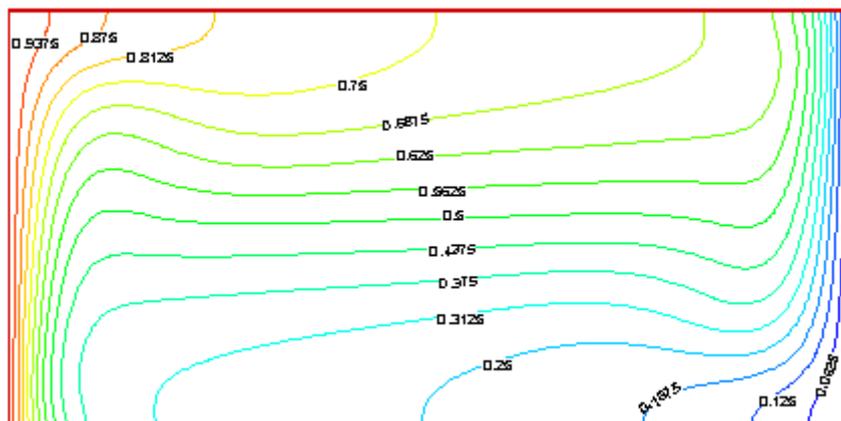
IV.4.1.1 : Influence de la variation du Grashof solutal :

IV.4.1.1.1 : Isothermes :

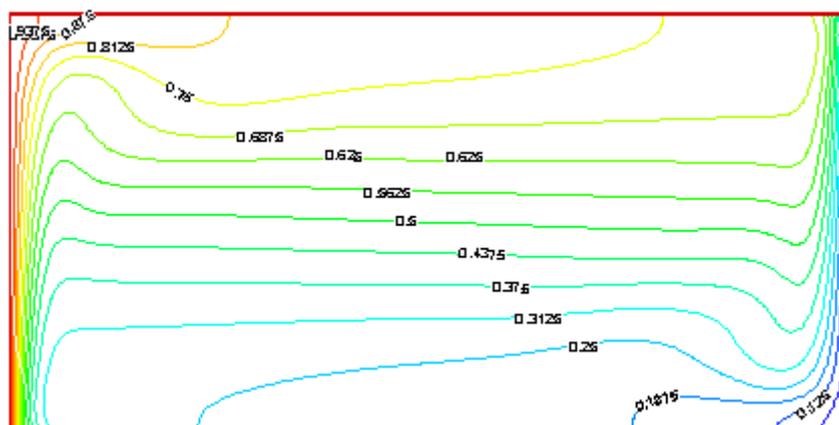


(a): $Gr_s = 10^3$

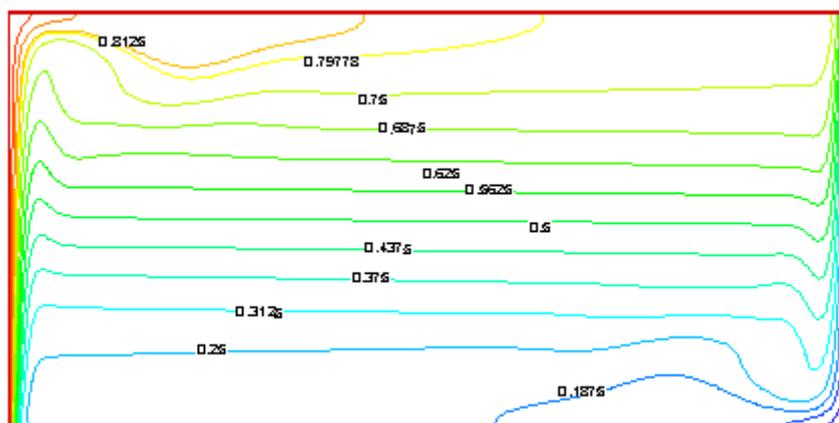
Figure IV.6 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal: $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.



(b): $Gr_s = 10^4$



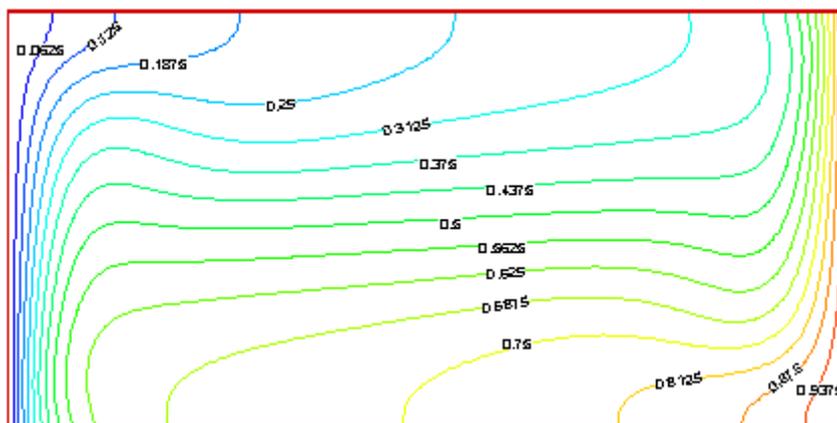
(c): $Gr_s = 10^6$



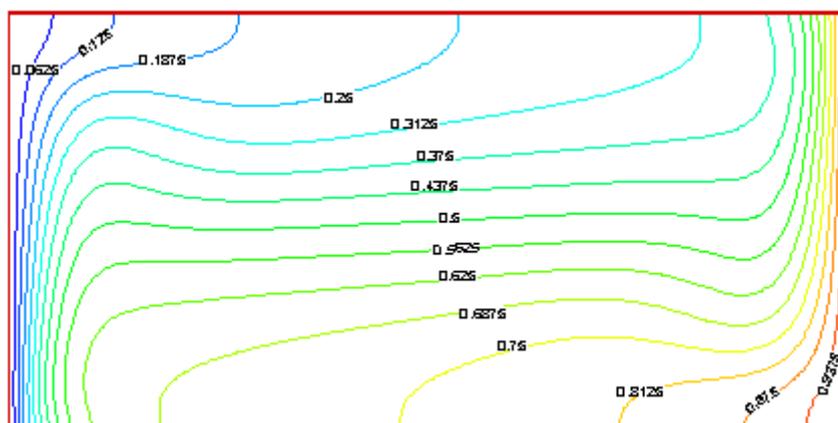
(d): $Gr_s = 10^7$

Suite figure IV.6 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal: $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.

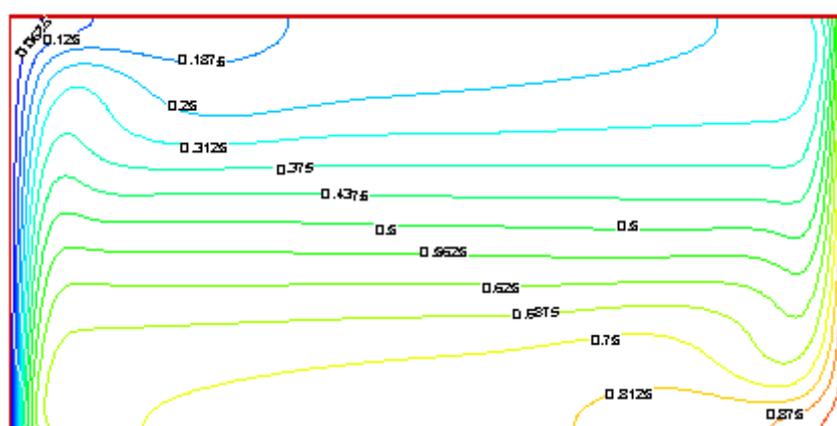
IV.4.1.1.2 : Isoconcentrations :



(a): $Gr_s = 10^3$



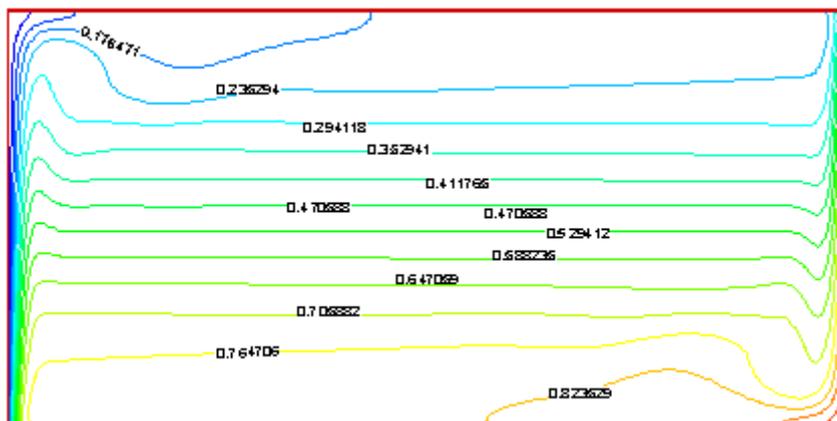
(b): $Gr_s = 10^4$



(c): $Gr_s = 10^6$

Figure IV.7 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal :

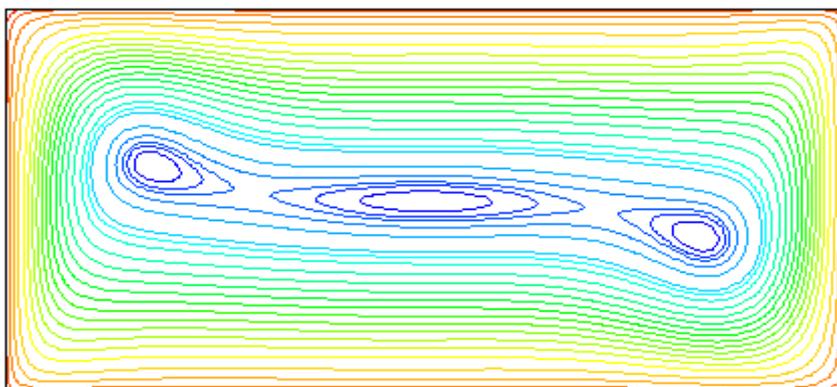
$Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.



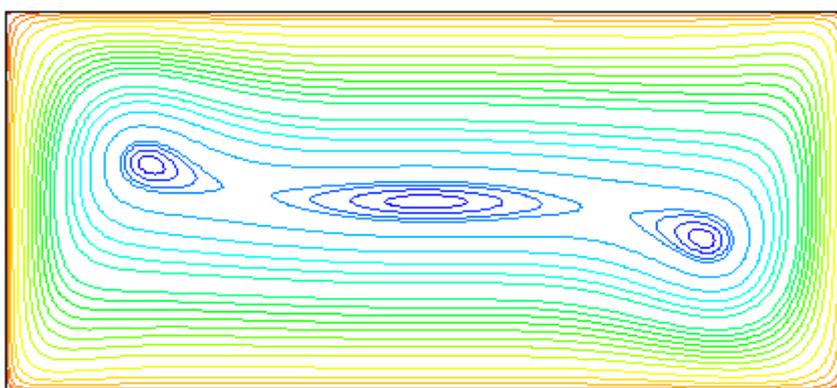
(d): $Gr_s = 10^7$

Suite figure IV.7 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal : $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.

IV.4.1.1.3 : Lignes de courant :

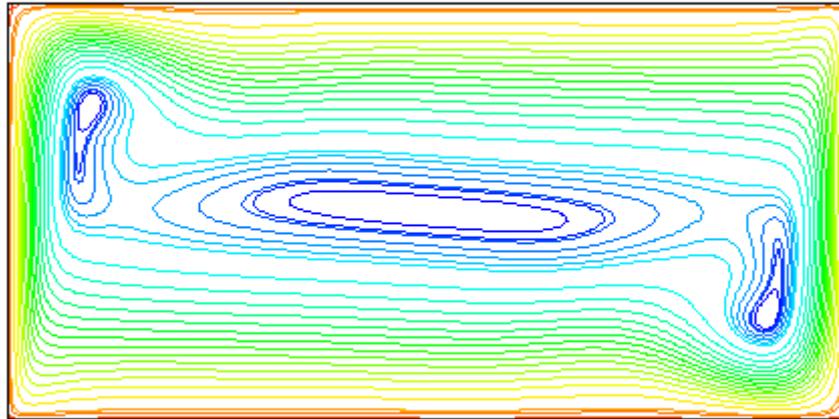
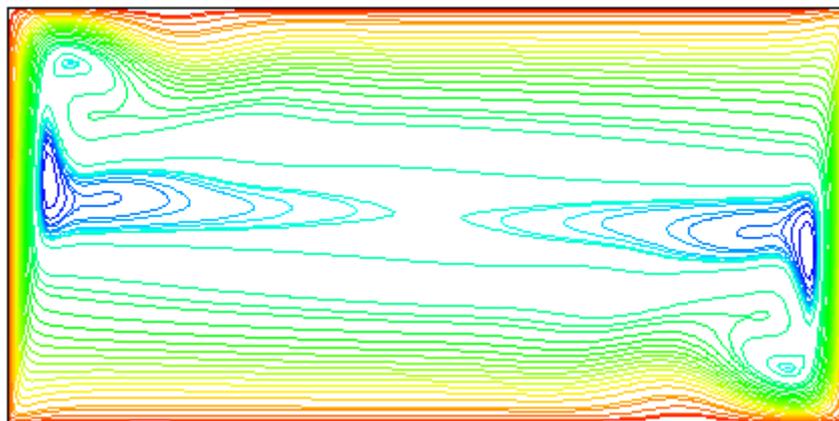


(a): $Gr_s = 10^3$



(b): 10^4

Figure IV.8 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas : $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.

(c): $Gr_s = 10^6$ (d): $Gr_s = 10^7$

Suite figure IV.8 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Grashof solutal cas : $Gr_t = 10^5$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.

- **Poussée thermique dominante ($N < 1$) :**

On remarque que les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont presque insensibles à la diminution du Grashof solutal et cela est dû aux faibles valeurs de poussée solutale.

- **Poussée solutale dominante ($N > 1$) :**

En augmentant la valeur du Grashof solutal on remarque que les isothermes et les isoconcentrations deviennent de plus en plus très serrées aux parois verticales et parallèles aux parois horizontales cela met en évidence l'existence de très forts gradients près des parois. Les lignes de courant sont très serrées autour de la cavité et il y'a apparition de nouvelles cellules qui commencent à se former à partir de $Gr_s = 10^6$.

IV.4.1.1.4 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche :

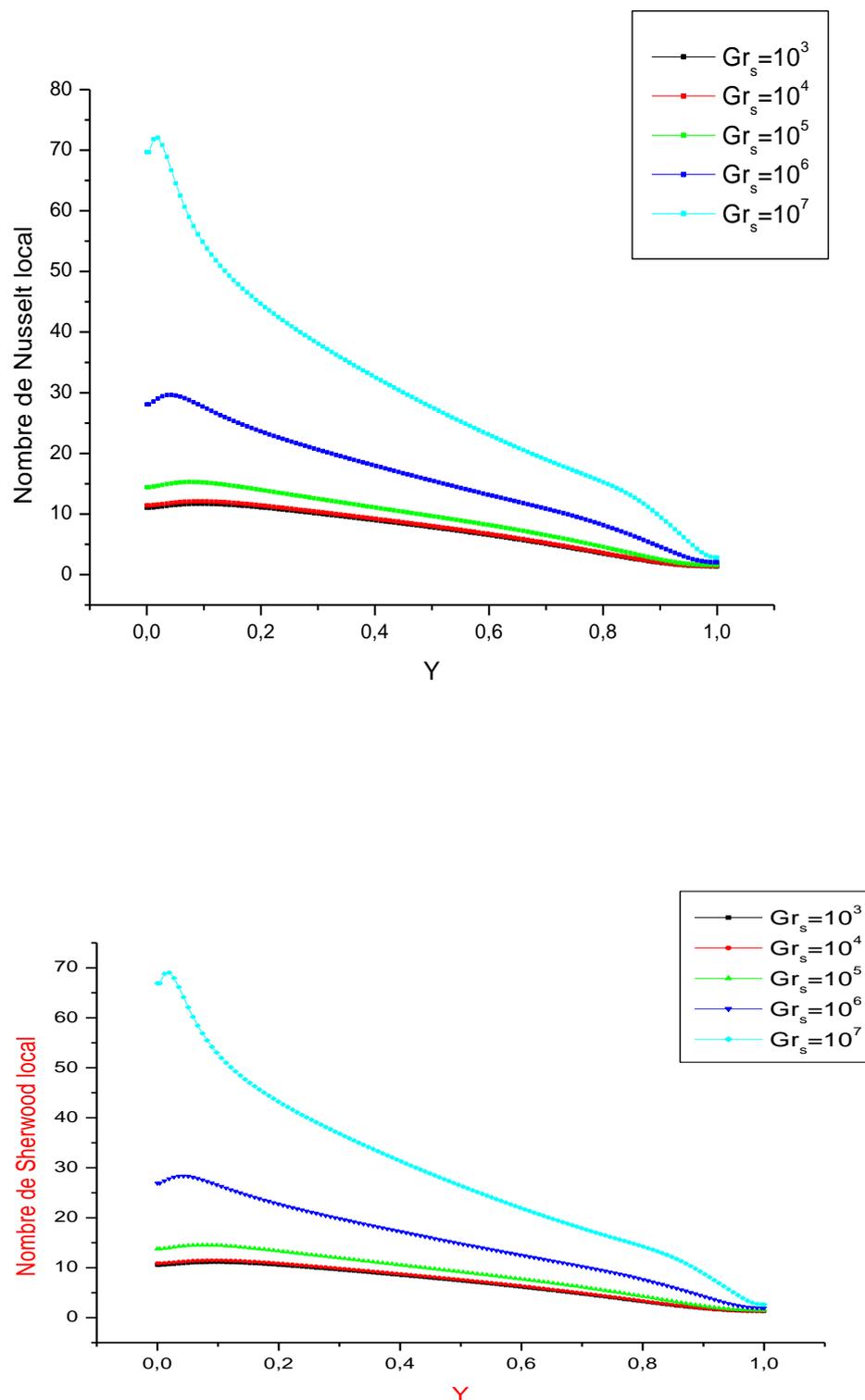


Figure IV.9 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche en fonction de y pour différents valeurs du Grashof solutal.

Pour $N \leq 1$ le nombre de Nusselt et de Sherwood local sont constants.

Pour $N > 1$ le nombre de Nusselt et de Sherwood local augmentent avec le nombre Grashof solutal à cause de la poussée solutale qui devient de plus en plus importante et qui intensifie l'écoulement cela on peut le déduire à partir du profil de la composante horizontale de la vitesse U à $X=1$ (figure IV.5).

A partir de $Gr_s=10^6$ la valeur de nombre de Nusselt et de Sherwood local sont maximales en bas et diminuent progressivement du bas vers le haut jusqu'à une valeur minimale (Figure IV.9) parce que la paroi est maintenue à une haute température et basse concentration est mise en contact avec un fluide froid et concentré donc la zone est soumise à de très forts gradients (solutal et thermique); en fait et à mesure que le fluide monte ces gradients diminuent à cause des transferts thermique et massique qui ont lieu entre le fluide et la paroi.

IV.4.1.1.5 : Taux de transfert de chaleur et de masse :

Grashof solutal	Nusselt moyen	Sherwood moyen
10^3	7.292	6.894
10^4	7.518	7.112
10^5	9.232	8.764
10^6	15.786	15.070
10^7	30.186	28.926

Tableau IV.2 : Valeurs du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen pour différents nombres de Grashof solutal.

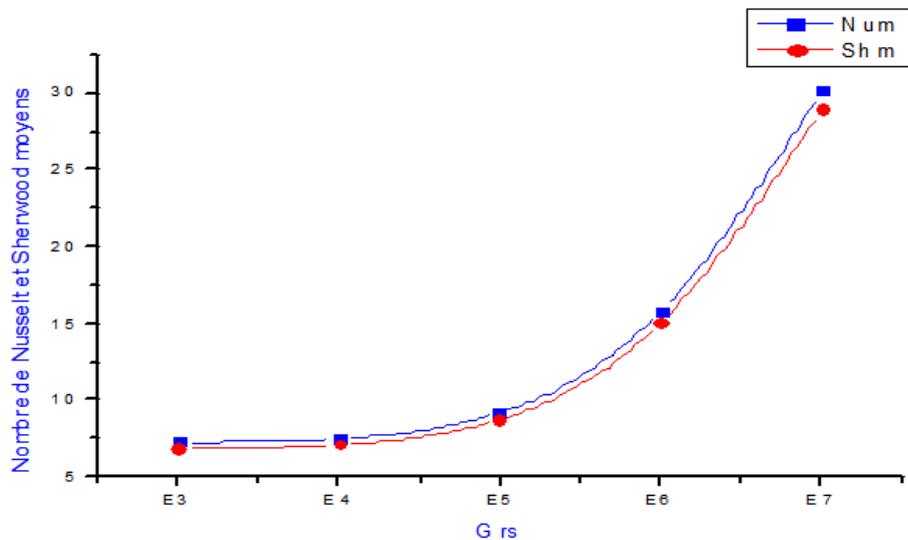


Figure IV.10 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du Grashof Solutal.

D'après la figure ci-dessous on conclue que le taux de transfert de chaleur et de masse augmente avec le nombre de Grashof solutal.

Partie 2 : Canal Horizontal

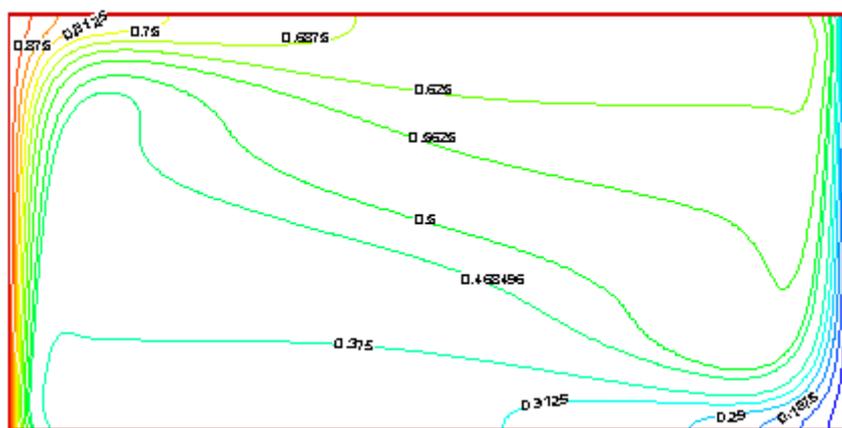
Dans cette partie on va maintenir les paramètres suivants : $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^6$
 $Pr = 0.71$ et $A = 2$ fixes et faire varier le nombre de Schmidt de 0.2 à 2 pour déterminer son influence.

IV.4.2 : Influence de la variation du nombre de Schmidt « Lewis » :

IV.4.2.1 : Les isothermes :



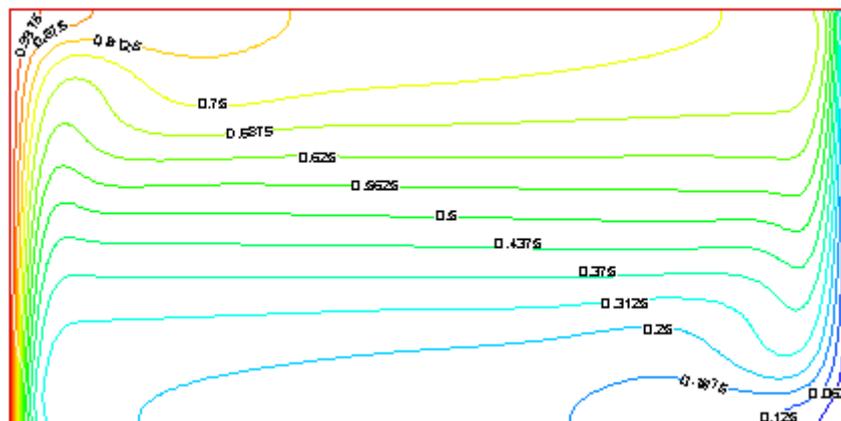
Sc =0.2



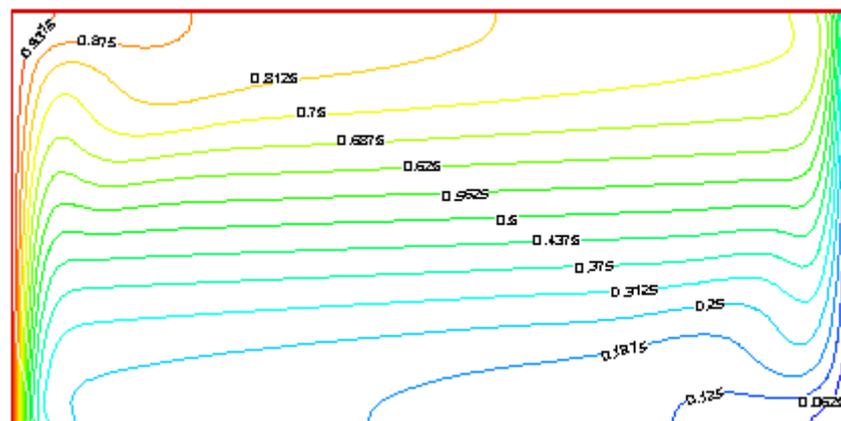
Sc =0.5

Figure IV.11 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Schmidt:

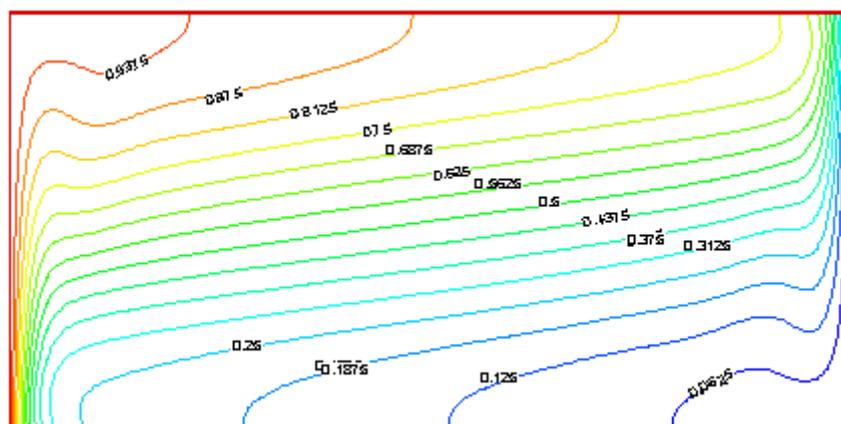
$Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A = 2$.



Sc = 0.71



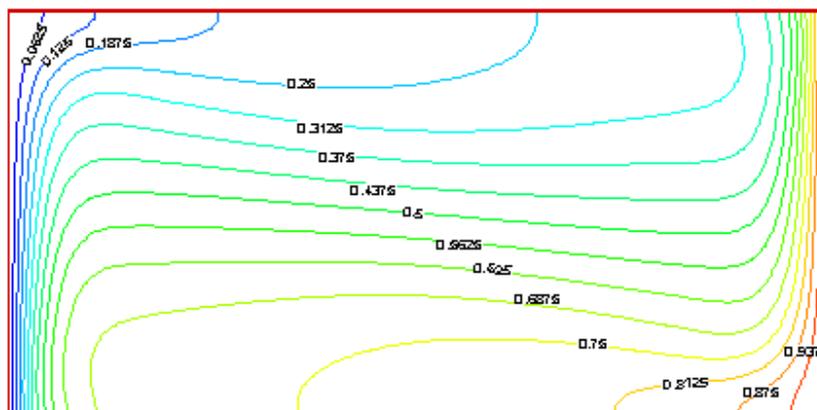
Sc = 1



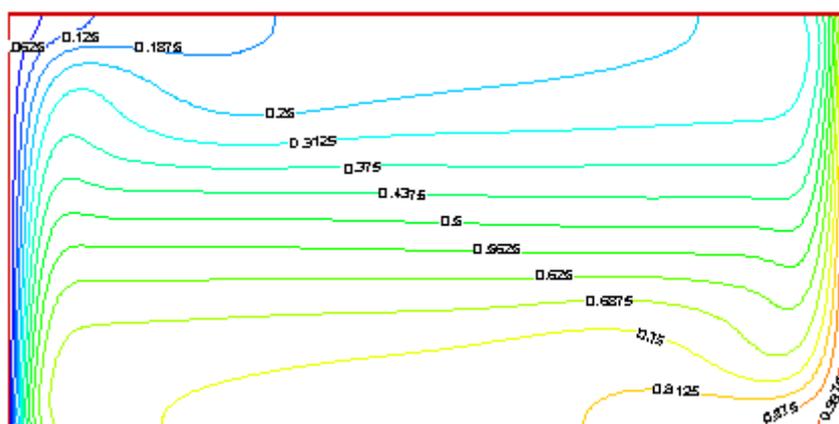
Sc = 2

Suite figure IV.11 : Distribution de la température pour différentes valeurs du nombre de Schmidt: $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$.

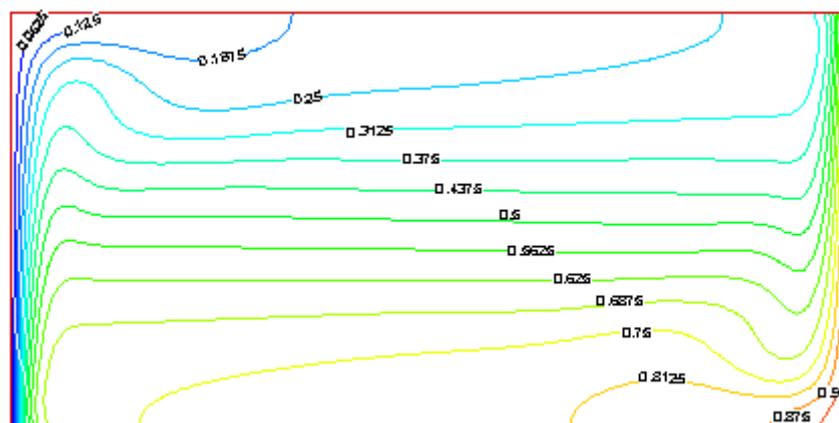
IV.4.2.2 : Les isoconcentrations :



Sc = 0.2



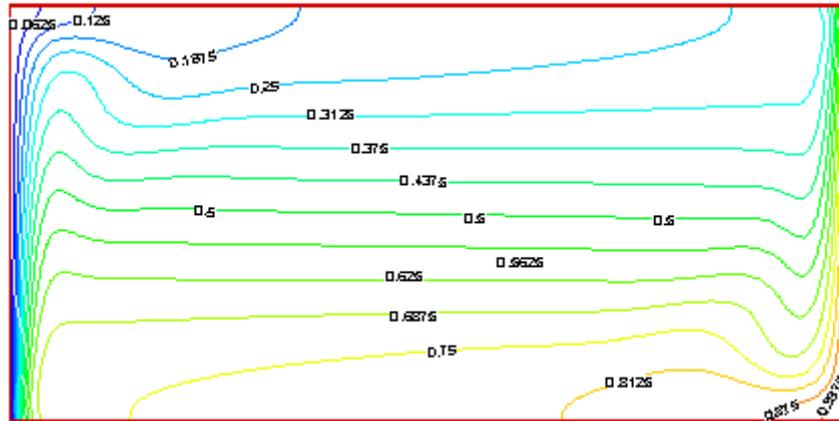
Sc = 0.5



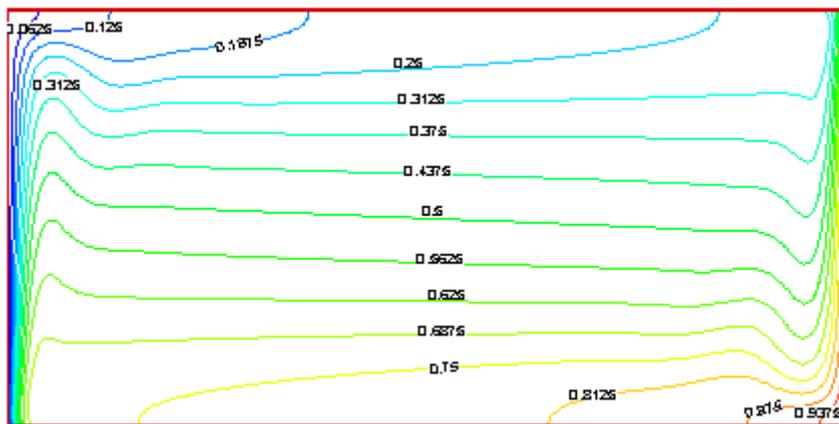
Sc = 0.71

Figure IV.12 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Schmidt:

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^6, Pr = 0.71, A=2.$$



Sc = 1



Sc = 2

Suite figure IV.12 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du nombre de Schmidt:

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^6, Pr = 0.71, A=2.$$

La figure IV.12 montre que les isothermes se desserrent de plus en plus près des parois avec l'augmentation du nombre de Schmidt à cause des faibles gradients dus à l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite thermique qui est donnée par la formule : $\delta_t = \delta_c \left(\frac{Sc}{Pr}\right)^{\frac{1}{3}}$ et cela explique la diminution du nombre de Nusselt local (Figure IV.13). Par contre les isoconcentrations sont de plus serrées aux parois actives à cause des très forts gradients provoqués par la réduction de l'épaisseur de la couche limite solutale qui a pour effet l'augmentation du nombre de Sherwood local (Figure IV.13).

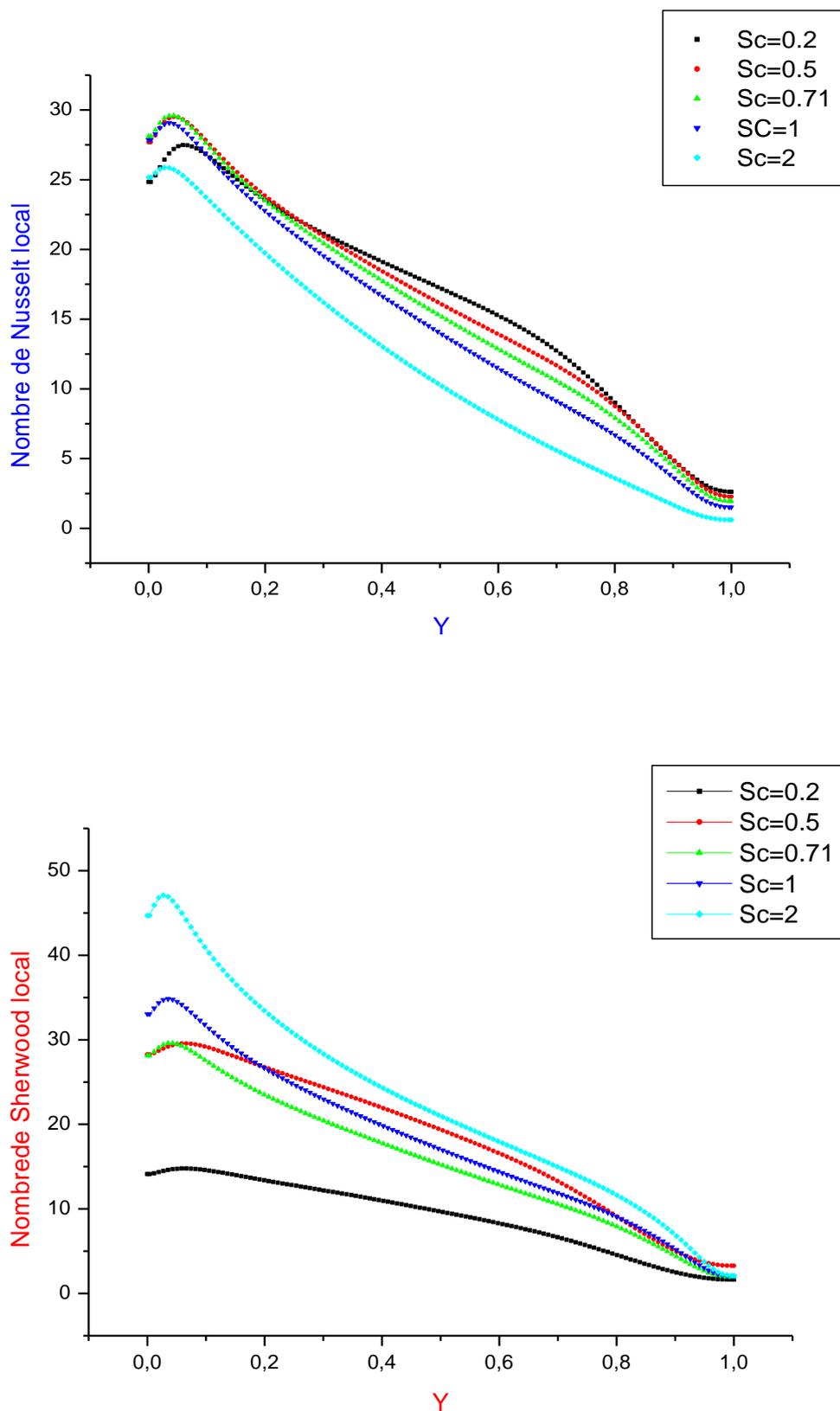
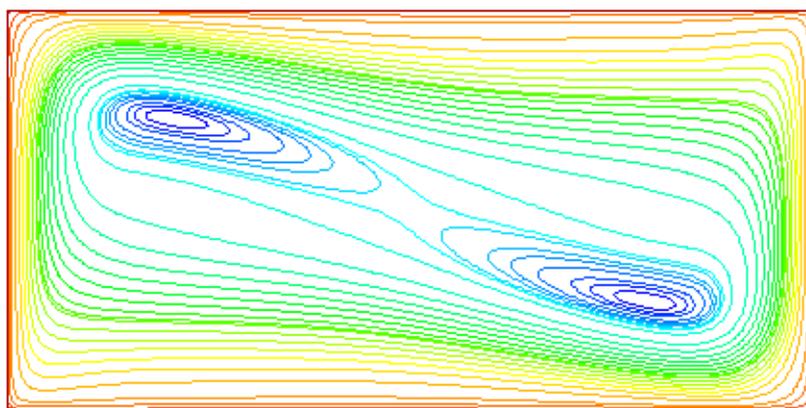
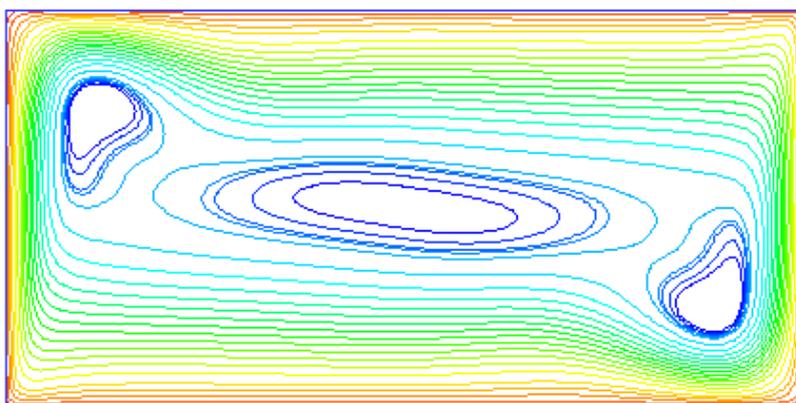


Figure IV.13 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood sur la paroi gauche en fonction de y pour différentes valeurs du Schmidt.

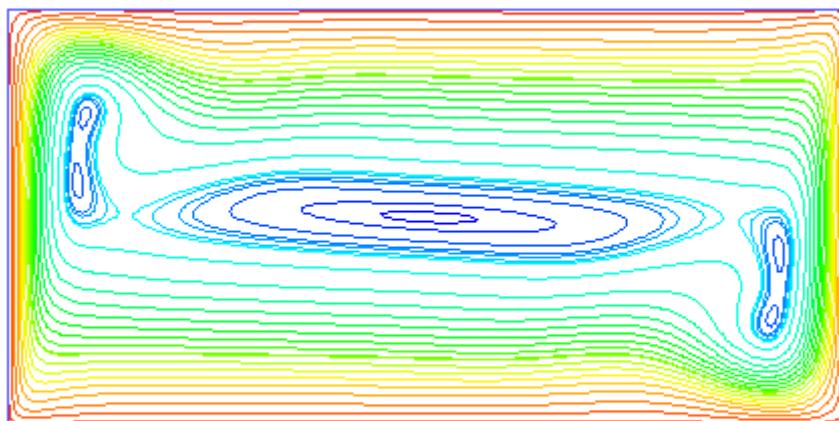
IV.4.2.3 : Les lignes de courant :



Sc =0.2

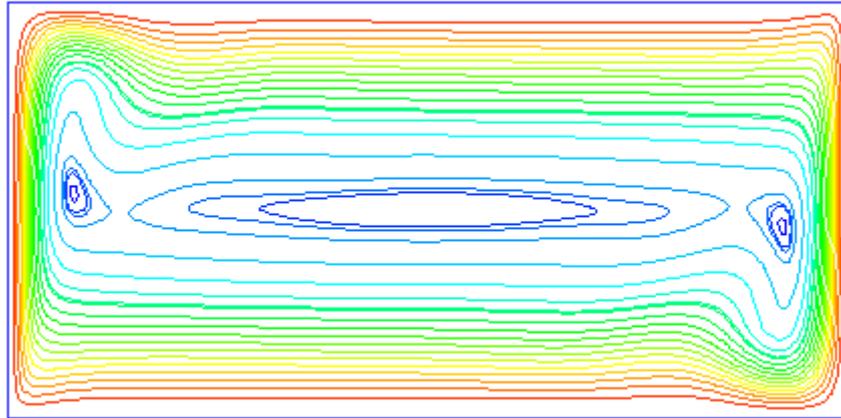


Sc =0.5

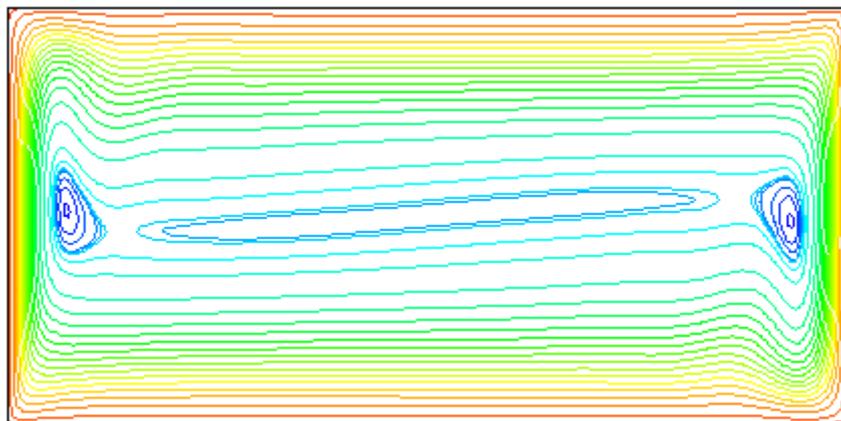


Sc =0.71

Figure IV.14 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Schmidt : $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$.



Sc = 1



Sc = 2

Suite figure IV.14 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Schmidt : $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^6$, $Pr = 0.71$, $A=2$.

La figure IV.14 montre que la structure de l'écoulement est multicellulaire tournant dans le sens horaire; en augmentant le nombre de Schmidt d'autres cellules apparaissent formant une zone de stagnation au milieu de la cavité (Figure IV.15). Aux parois actives on remarque que les lignes de courant deviennent serrées en augmentant le nombre de Schmidt à cause de la poussée solutale qui devient de plus en plus intense.

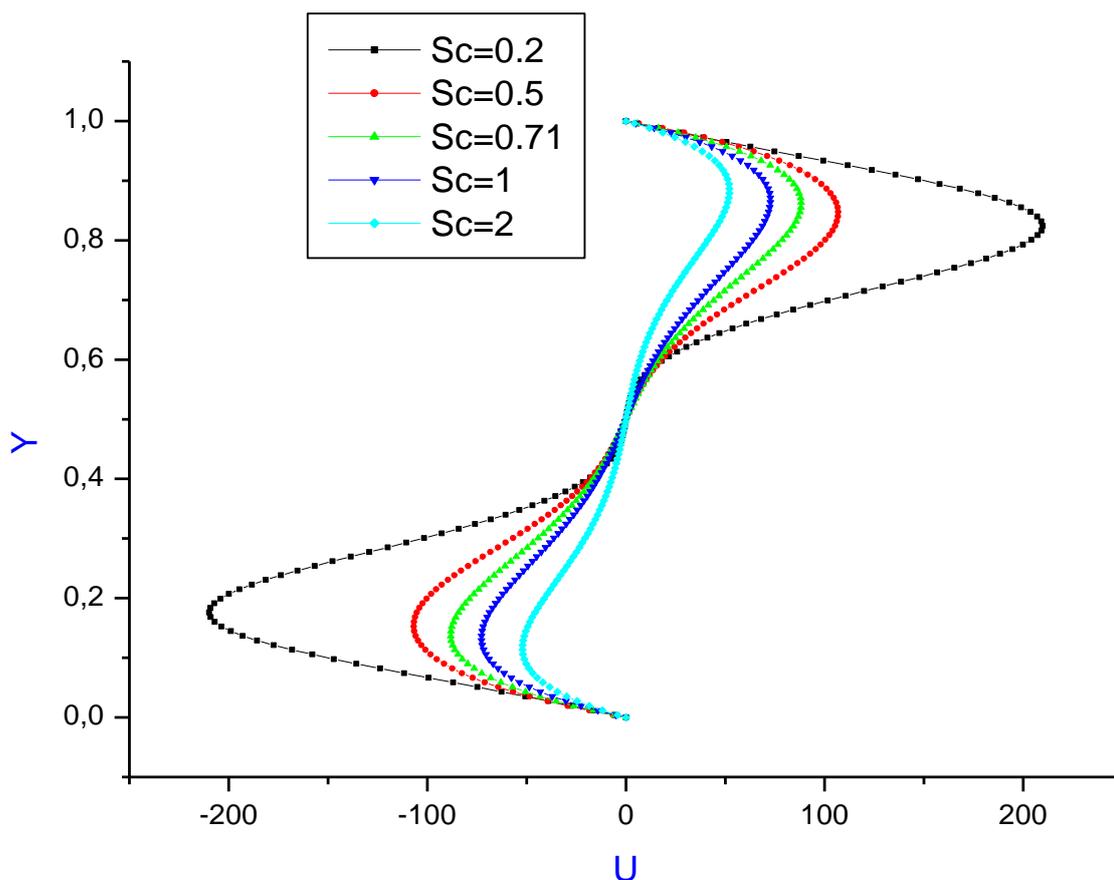


Figure IV.15 : Profil de la composante U à X=1.

IV.4.2.4 : Taux de transfert de chaleur et de masse :

Le nombre de Schmidt	Nusselt moyen	Sherwood moyen
0.2	16.412	9,082
0.5	16,206	13,576
0.71	15,594	15,594
1	14,594	17,712
2	11,488	22,398

Tableau IV.3 : valeurs du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen pour différents nombres de Schmidt.

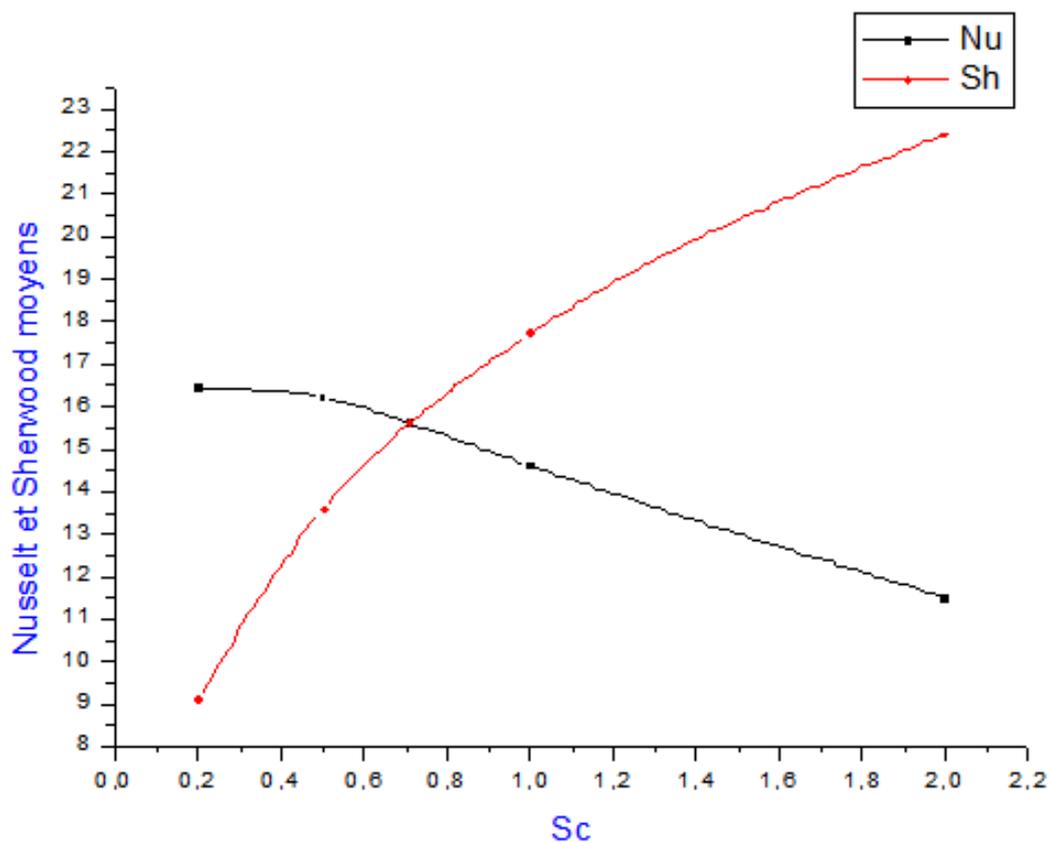


Figure IV.16 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du nombre de Schmidt.

La conclusion qu'on peut tirer de cette partie est que :

- le taux de transfert de chaleur diminue avec le nombre de Schmidt.
- le taux de transfert de masse augmente avec le nombre de Schmidt.

Partie 3 : Canal vertical

Dans cette partie on va maintenir les paramètres suivants : $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^3$, $Pr = 0.71$ et $Sc = 0.65$ fixes et faire varier le rapport de forme de 0.25 à 4 pour déterminer son influence. Avant d'entamer cette étude on commence par prendre un cas de référence où $A=0.25$.

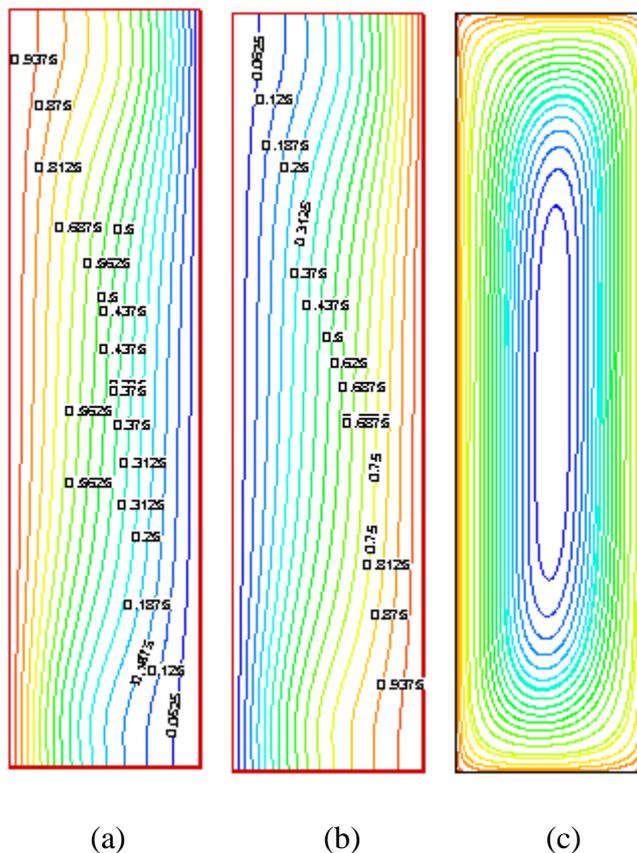
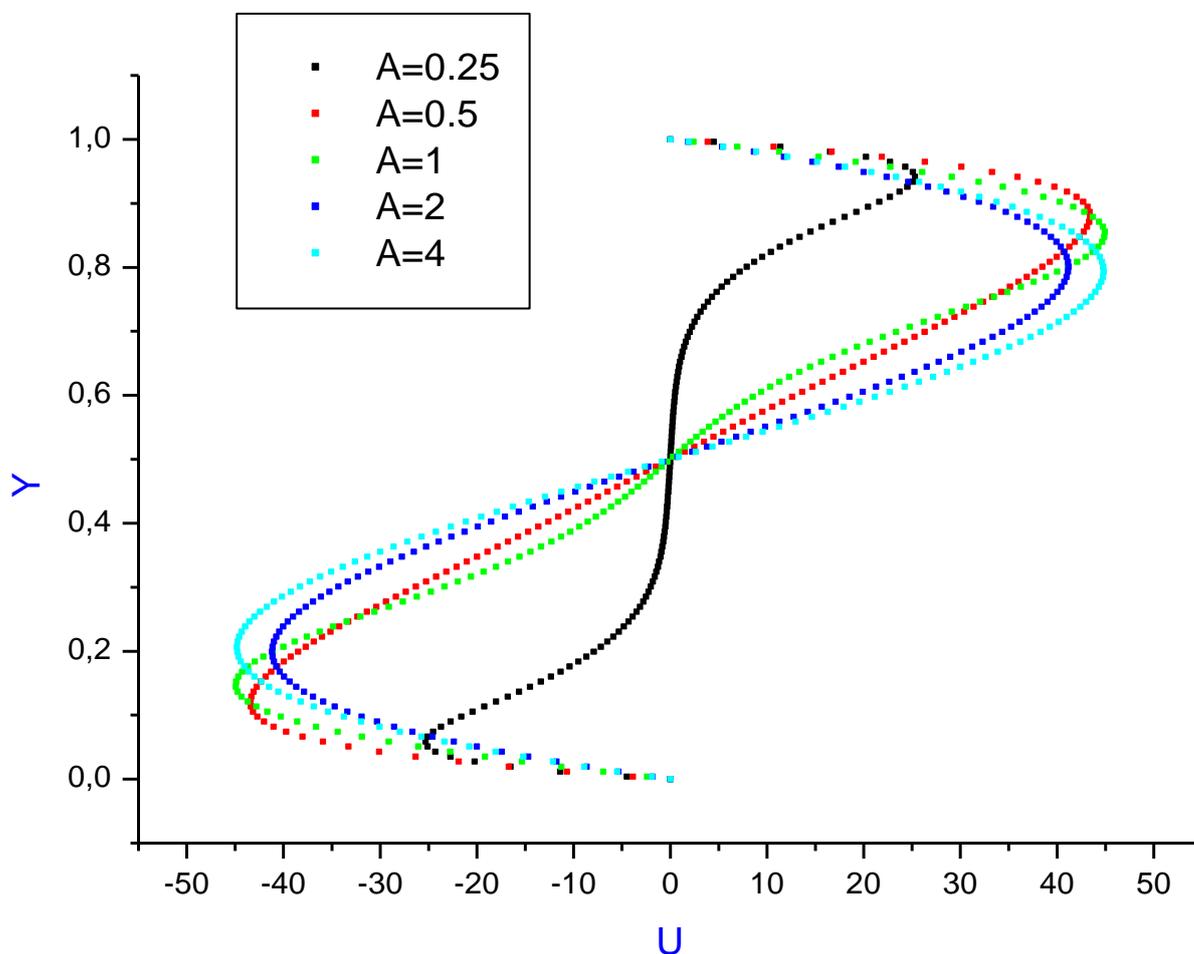


Figure IV.17 : Présentation des isothermes(a), des isoconcentrations(b) et des lignes de courant(c) pour : $Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^3$, $Pr = 0.71$, $Sc=0.65$ et $A=0.25$.

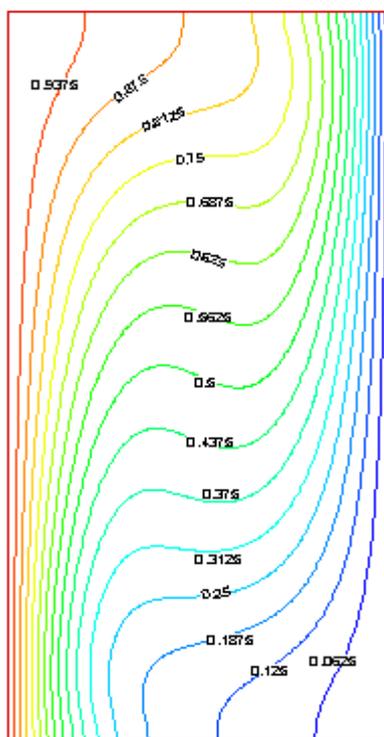
D'après la figure (IV.17) on remarque que les isothermes et les isoconcentrations sont parallèles aux parois verticales cela veut dire les transferts sont pratiquement diffusives comme on peut le voir sur la figure (IV.22) (le nombre de Nusselt et de Sherwood local gardent une valeur constante proche de l'unité). Cela est dû au fait que la cavité est très élancée vers le haut (parois actives très proches) ce qui empêche le déclenchement d'un mouvement convectif et cela est confirmé par la Figure (IV.18); le profil de la composante U à $X=1$ est symétrique avec des vitesses faibles près des parois adiabatiques et nulles au milieu.

IV.4.3.7 : Variation de U aux milieux de cavités en fonction de y :

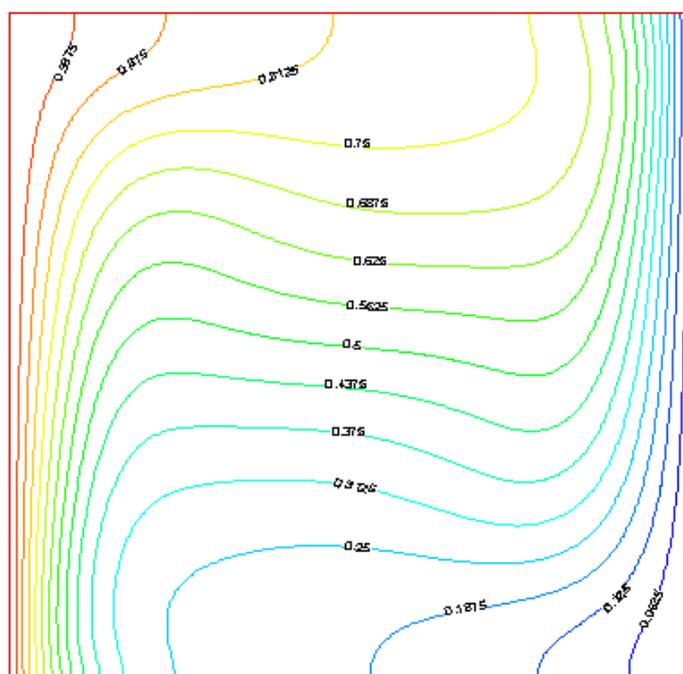
**Figure IV.18** : Profil de la composante U aux milieux des cavités.

IV.4.3 : Influence de la variation du rapport de forme :

IV.4.3.1 : Les isothermes :



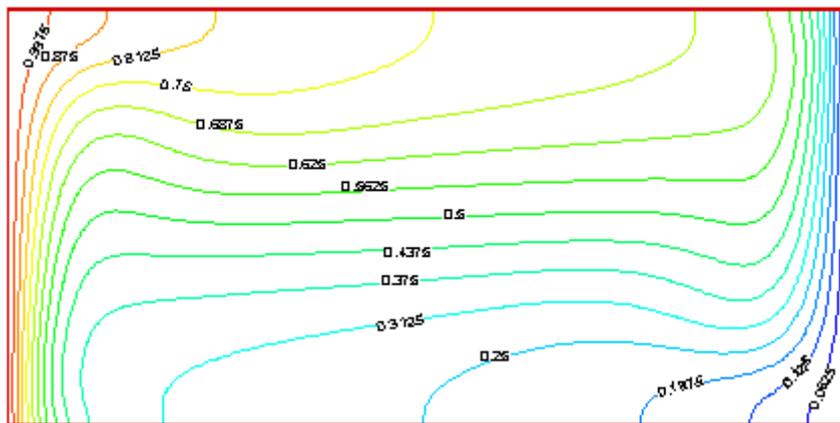
A=0.5



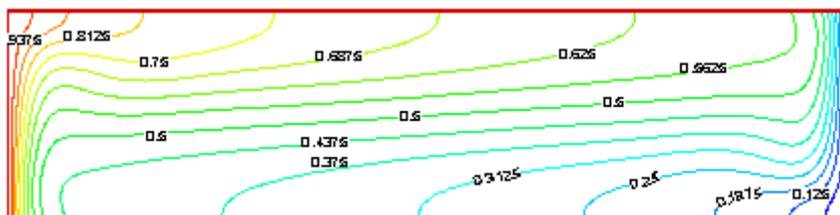
A=1

Figure IV.19 : Distribution de la température pour différentes valeurs du rapport de forme:

$Gr_t = 10^5$, $Gr_s = 10^3$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.65$.



A=2

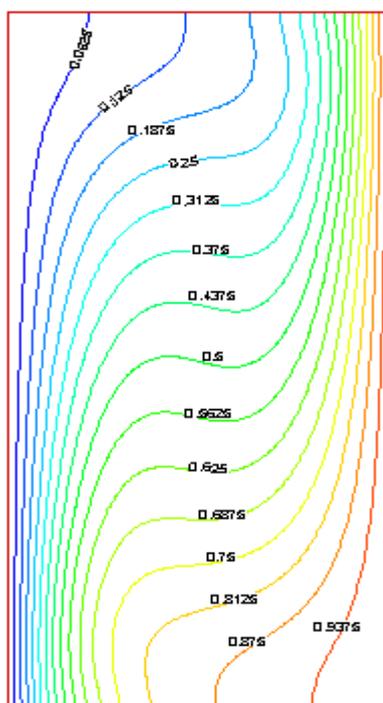


A=4

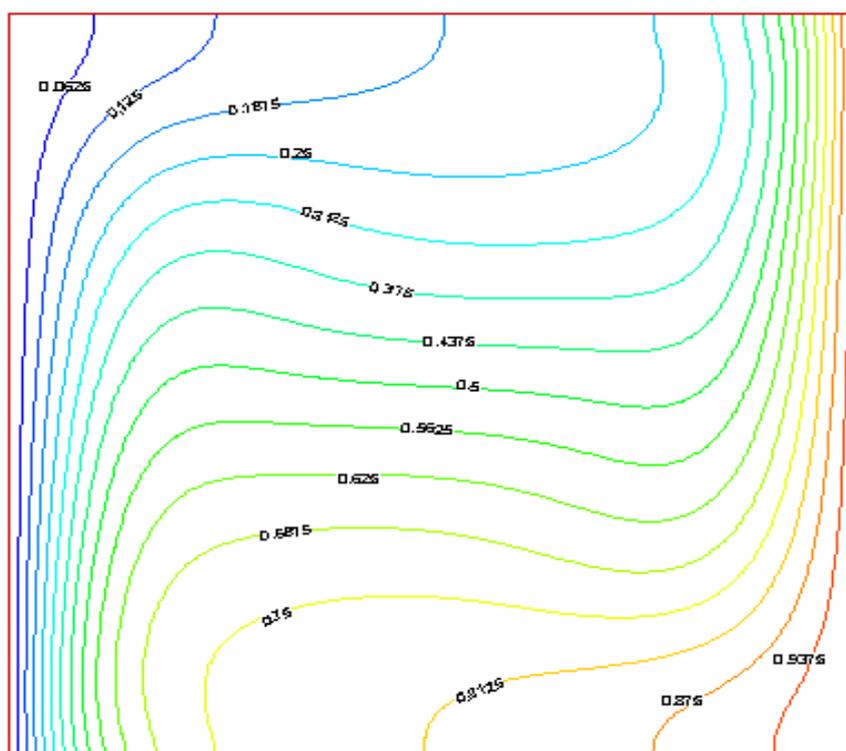
Suite figure IV.19 : Distribution de la température pour différentes valeurs du rapport de forme:

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^3, Pr = 0.71, Sc = 0.65.$$

IV.4.3.2 : Les isoconcentrations :



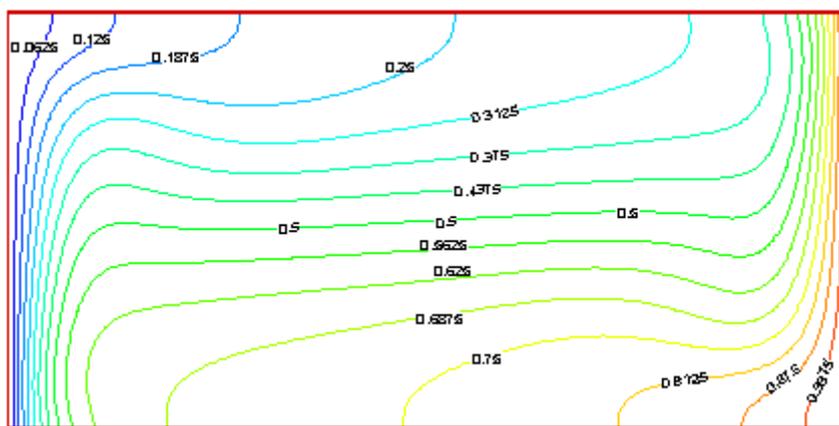
A=0.5



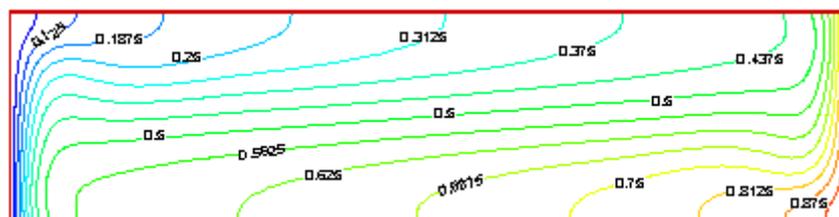
A=1

Figure IV.20 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du rapport de forme :

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^3, Pr = 0.71, Sc = 0.65.$$



A=2

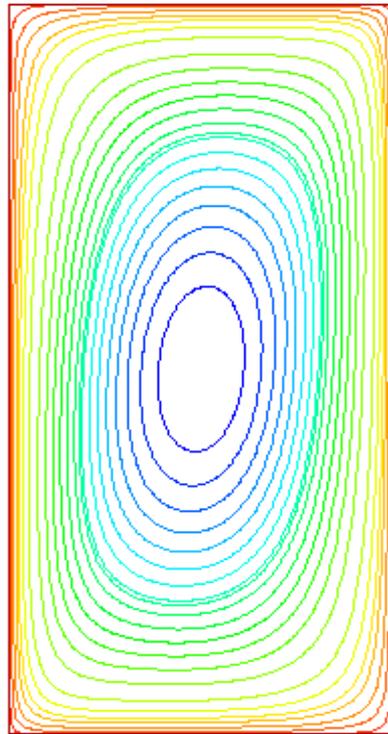


A=4

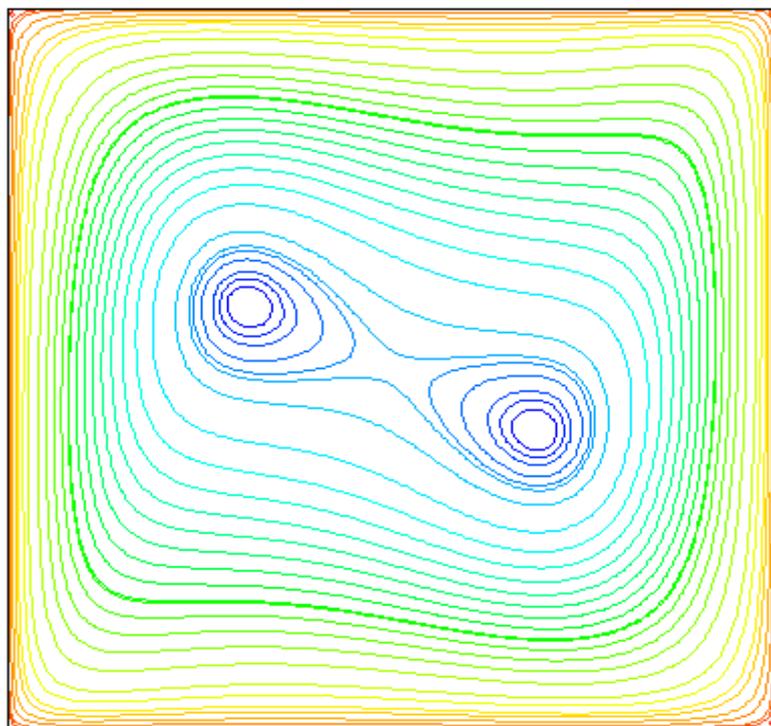
Figure IV.20 : Distribution de la matière pour différentes valeurs du rapport de forme :

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^3, Pr = 0.71, Sc = 0.65.$$

IV.4.3.3 : Les lignes de courant :



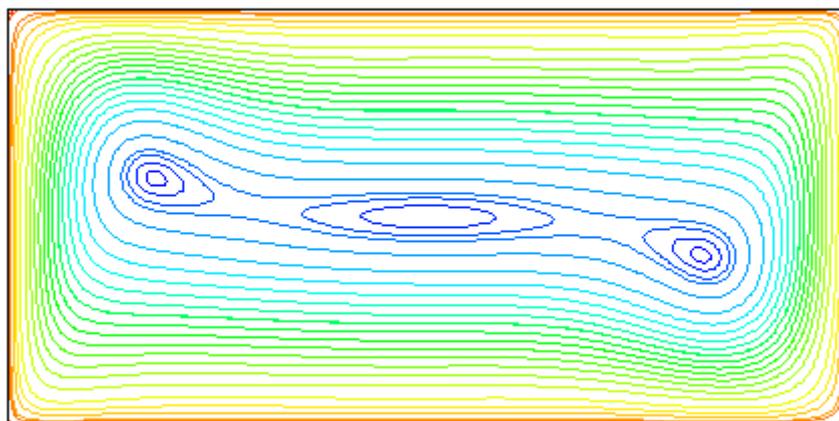
A=0.5



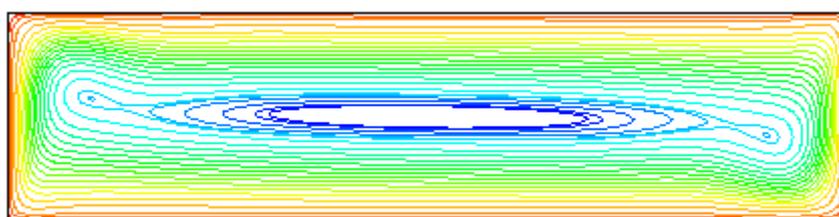
A=1

Figure IV.21 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du rapport de forme:

$$\text{Gr}_t = 10^5, \text{Gr}_s = 10^3, \text{Pr} = 0.71, \text{Sc} = 0.65.$$



A=2



A=4

Figure IV.21 : Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du rapport de forme:

$$Gr_t = 10^5, Gr_s = 10^3, Pr = 0.71, Sc = 0.65.$$

D'après les Figures IV.19-20 on remarque que les isothermes et les isoconcentrations ont le même profil sauf qu'en augmentant le rapport de forme ces dernières deviennent de plus en plus allongées et parallèles aux parois horizontales.

Le régime d'écoulement devient multicellulaire à partir de $A=1$ tournant le sens horaire, les lignes de courant sont de plus en plus serrées près des parois ce qui signifie que l'écoulement obtenu est très important comme illustré dans la figure IV.21, c'est ce qui explique l'augmentation du transfert de chaleur et de masse sur les parois (figure IV.22).

IV.4.3.4 : Variation du nombre de Nusselt et Sherwood local sur la paroi gauche :

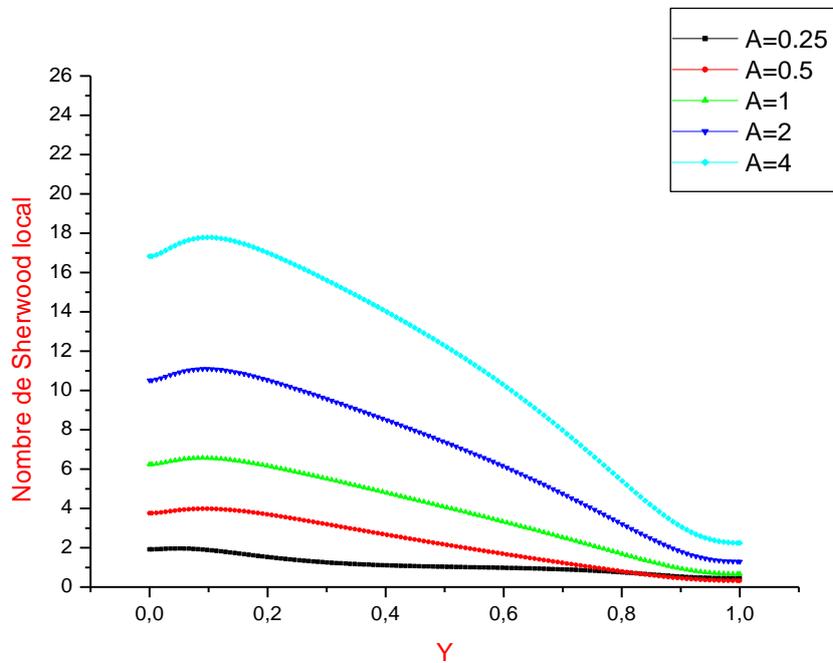
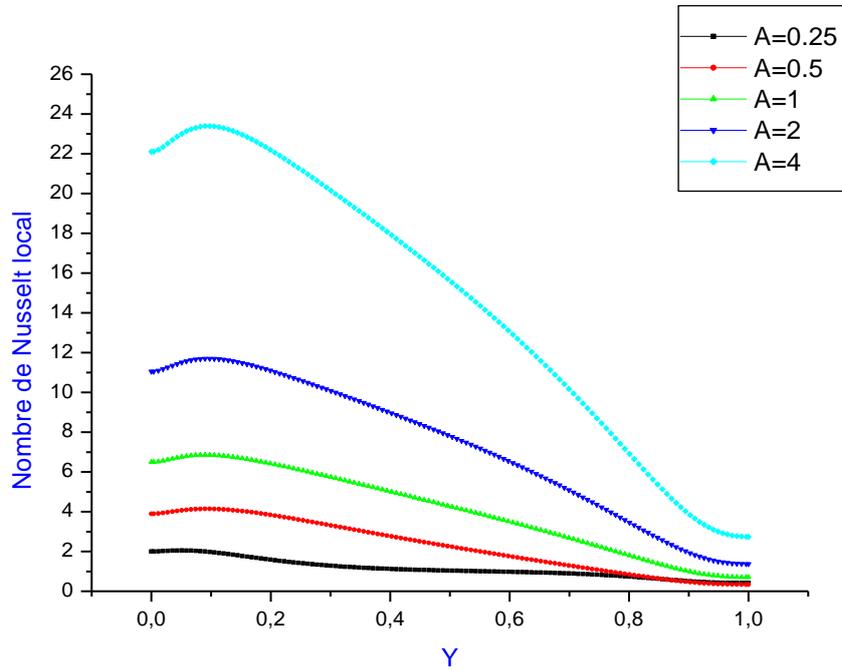


Figure IV.22 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood local sur la paroi gauche en fonction de y pour différentes valeurs du rapport de forme.

IV.4.3.6 : Variation du nombre de Nusselt et Sherwood moyen en fonction du rapport de forme :

Rapport de forme	Nusselt moyen	Sherwood moyen
0.25	1.134	1.114
0.5	2.281	2.195
1	4.093	3.908
2	7.292	6.894
4	12.144	11.304

Tableau IV. : Valeurs du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen pour différents rapport de forme.

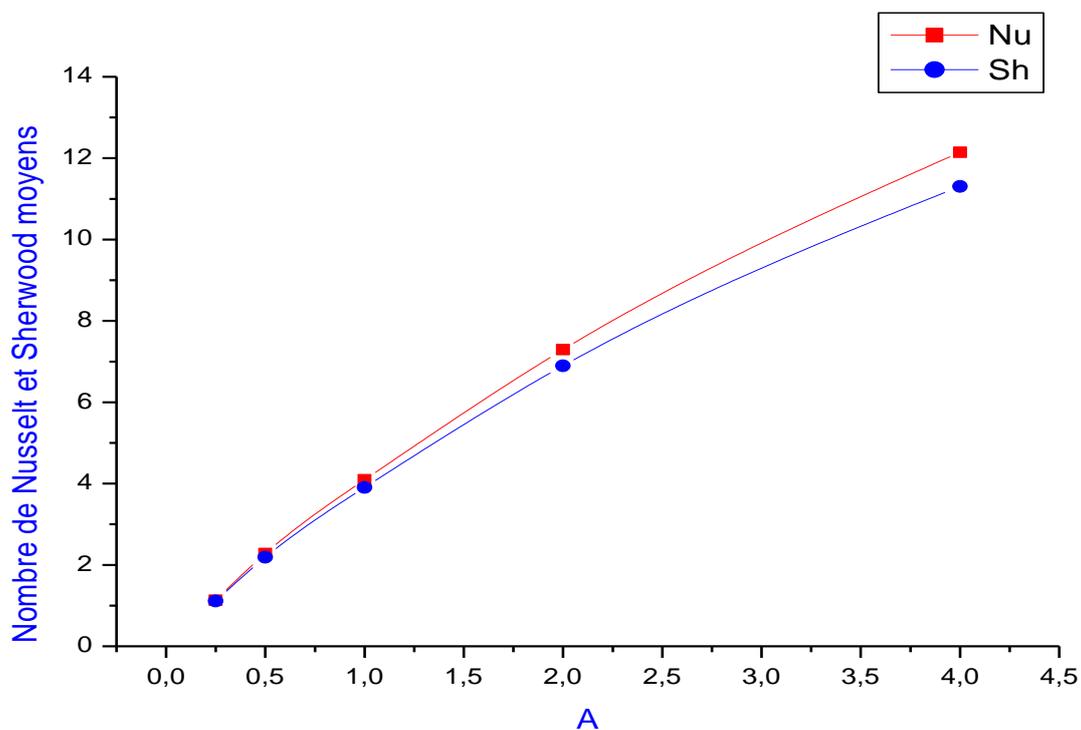


Figure IV.23 : Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood moyen en fonction du rapport de forme.

On conclut d'après la figure ci-dessus que le taux de transfert de chaleur et de masse augmente avec le rapport de forme.

CONCLUSION

ET

RECOMMENDATIONS

Conclusion générale :

Le travail présenté dans ce mémoire est une étude numérique de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire. L'objectif principal est de déterminer et d'observer l'influence des paramètres de contrôle (nombre de Grashof solutal Gr_s , rapport de forme A et le nombre de Schmidt Sc) sur le taux de transfert de chaleur et de masse.

Les principaux résultats tirés de ce travail peuvent être résumé comme suit :

- L'augmentation du nombre de Grashof solutal (Gr_s) et du rapport de forme (A) conduit à une augmentation du taux de transfert de chaleur et de masse ($\overline{Nu}, \overline{Sh}$).
- Le taux de transfert de chaleur (\overline{Nu}) diminue avec l'augmentation du nombre de Schmidt.
- Le taux de transfert de masse (\overline{Sh}) augmente avec l'augmentation du nombre de Schmidt.

Pour approfondir les connaissances liées à ce travail de grand intérêt, de nombreux points peuvent être développés et on peut citer comme exemples :

- Etude du cas avec gradients opposant.
- Etude de la configuration avec des gradients verticaux qui trouve une application dans le domaine de stockage de l'énergie solaire (étangs solaires à gradient de sel).
- Etude du cas d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire.
- Etude de la convection mixte à double diffusion.
- Etude d'un cas avec effet de Soret et Dufour.
- Etude du cas tridimensionnel.

Annexe A

Méthode TDMA (Algorithme de Thomas)

On résout le système d'équations itérativement par double balayage en utilisant l'algorithme de Thomas ou la méthode TDMA (Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm).

Considérons le système linéaire suivant :

$$A \cdot x = y$$

Où A est une matrice tridiagonale, alors l'algorithme de Gauss peut être simplifié et cela en tenant compte de la structure particulière de A .

En adoptant la notation suivante pour les éléments de A , x et y :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & \dots & c_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i & b_i & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Alors l'algorithme TDMA peut être résumé dans les étapes suivantes :

- Triangularisation de la matrice A :

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad i = 2, n - 1$$

$$\beta_1 = \frac{y_1}{b_1}$$

$$\beta_i = \frac{y_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad i = 2, n - 1$$

- Résolution du système à matrice bidiagonle :

$$x_n = \beta_n$$

$$x_i = \beta_i - \gamma_i \cdot x_{i-1} \quad i = n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 1$$

ANNEXES

Références bibliographiques

- [1] **Bennacer R. et al.:** “Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients.” *Int. J. Thermal Science.* (2001) 40, 899–910.
- [2] **Gobin et Bennacer:** “cooperating thermosolutale convection in an enclosure 1-heat transfer and flow structure.” *International journal of heat and mass transfer* Vol 39, No13 pp2683-2697, 1996.
- [3] **Béghein C. et al.:** “Numerical study of double diffusive naturel convection in a square cavity.” *International journal of heat and mass transfer* Vol. 35. No. 4, pp. 833-846, 1992.
- [4] **Akrour D. et al.:** “étude instationnaire d’écoulement en double diffusion avec gradient opposé en température et en concentration.” *rev.Energ.Ren. Chemss* 2000 99-104.
- [5] **Mohamed A. Teamah et al.:** “Numerical simulation for double diffusive mixed convection with aiding and opposing flow in vertical tubes.” *European Journal of Scientific Research* Vol.60 No.3 (2011), pp.378-396.
- [6] **Rayane T. et al.:** “Convection naturelle thermique et solutale entre enceintes parallélépipédiques avec transvasement.” *Communication au 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007.*
- [7] **Haddidi N.:** “Convection thermosolutale bidimensionnelle dans une cavité poreuse renferment deux couches poreuses disposées verticalement.” *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique, Vol.2 ,4.385-396 (2011).*
- [8] **Benissaad S. et Afrid M.:** “Etude numérique de la convection naturelle thermosolutale opposée tridimensionnelle.” *Bul.Inst.Polit.LasiII(LVI).f.1-2.2006.*

[9] **Trevisan O. V. et al.:** “Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in a Porous Medium” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 28, 1597-1611.

[10] **Amahmid A. et al.:** “Etude Analytique et Numérique de la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse de Brinkman Doublement Diffusive.” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42, 15, 2991-3005.

[11] **Mrcoux M. et al.:** “Naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise des flux de chaleur et de masse.” *Int. J. Therm. Sci.* vol. 38, pp. 258-266.

[12] **Kamakura K. et al.:** “Experimental and numerical analyses of double diffusive natural convection heated and cooled from opposing vertical walls with an initial condition of a vertically linear concentration gradient.” *Int. J. Heat and Mass Transfer* 36(8) (1993)2125-2134.

[13] **MHAZRI M. et al.:** “Thermosolutal natural convection in a vertically layered fluid-porous medium heated from the side.” *Energy Conversion and Management*, vol. 41, pp. 1065-1090, 1999.

[14] **Outaleb Y.:** “Effet du positionnement d’une injection/extraction sur la convection thermosolutale dans une enceinte partiellement poreuse.” Communication au 18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 Août 2007.

[15] **Jer-Huan Jang et al.:** “Natural convection heat and mass transfer along a vertical wavy surface.”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (2003) 1075–1083.

[16] **Wang L.W. et Chen J.J.:** “Flow patterns of thermosolutal convection in low aspect ratio enclosures.” *Int. J. Heat and Mass Transfer* 28(1) (1985)165-173.

[17] **Wang L.W. et Chen J.J.:** “Thermosolutal Convection in High Aspect Ratio Enclosures.” 25th National Heat Transfer Conference.

[18] **Bounecer A.** : “Convection naturelle double diffusive” thèse de magistère. Institut de Physique Université MENTOURI- Constantine, 1997.

[19] **Wang L.W., Chen J.J. et Chen C.T.**: “Fingering Flow Patterns of Thermosolutal convection in Rectangular Enclosures.” National Fluid Dynamics Congress.

[20] **Akrour D. et Kalache D.**: “Cooperating thermosolutal convection in enclosures heat and mass transfer.” 17^{ème} Congrès Français de Mécanique Troyes,-Septembre2005.

[21] **Sévéléder V. et Petit J.P.**: “Flow structures induced by opposing forces in double diffusion natural convection in a cavity.” Numerical Heat and mass Transfer Part A 15 (1989) 431-444.

[22] **Lee J.W. et Hyun J.M.**: “Double diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients.” Int. J. Heat and Mass Transfer 33(8) (1990)1619-1632.

[23] **S. Patankar**: “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, McGraw Hill, New York, 1980

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES