République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABDERAHMANE MIRA BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

En vue de l'obtention d'un Master

En Mathématiques

Option : Statistique et analyse décisionnelle

Thème

Tests séquentiels

Présenté par :

M^{elle} AROUCHE Faiza

Soutenu le 29 JUIN 2016 devant le jury composé de :

Président	M^r. BOUMZAID Y .	M.A.A.	U. A. Mira, Béjéia
Rapporteur	M^{me} TIMRIDJINE K.	M.C.A.	U. A. Mira, Béjéia
Examinatrice	M^{lle} BAICHE L.	M.A.B.	U. A. Mira, Béjéia

Année Universitaire 2015 – 2016

Remerciements

En premier lieu, Je remercie Dieu qui m'a procuré de la patience et de courage à fin d'achever ce travail et d'atteindre cette réussite.

Je remercie Monsieur BOURAINE , mon enseignant, pour son humanité avec tous les étudiants et de m'avoir aidé sans hésitation malgré ses nombreuses résponsabilités.

Je remercie Madame TIMRIDJINE , ma promotrice, de m'avoir proposé ce sujet.

J'exprime ma gratitude aux membres de jury, M^{lle} BAICHE et M^{r} BOUMEZAID d'avoir consacré une partie de leur temps pour juger ce modeste travail. Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents ainsi à tous ceux et celles qui ont participé de prés et de loin à la réalisation de ce travail.

.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À ma très chère mère :

Honorable, aimable : tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

À mon très cher père :

Aucune dédicace ne pourrai exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi.

À mes deux chers frères TARIK et YOUCEF :

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de réussite et de sérénité. Je vous exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour.

À ma grand-mère DRIFA :

Tes prières m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes choix. Aucune dédicace ne pourrai être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance. Que dieu te préserve et t'accorde santé, longue vie.

À mon cher oncle IDIR et son épouse LEILA et leur petit ange AMIR :

Sans ton aide, tes conseils, ton soutien moral et matériel et tes encouragements ce travail n'aurait vu le jour. Que dieu te préserve et t'accorde santé, longue vie et bonheur et que ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour.

À mon meilleur ami HANAFI :

Je t'adresse ces mots pour t'exprimer toute ma reconnaissance. Sans demander, tu as su m'aider au moment où j'en avais le plus besoin. Ta présence, ton soutien et ton écoute m'ont permis de remonter la pente. Sans ton aide, ce travail n'aura pas la fin. Merci d'être tout simplement toi.

À ma meilleure amie LISA :

J'ai cherché longtemps comment je pouvais te remercier pour ta présence à ce moment de ma vie, pour tes témoignages, tes gestes et ton soutien. Sans ton aide, je n'arriverai pas à finir ce travail .

À tous mes ami(es) :FOUFA,ABDOU, DJAMILA, TINA, NAZIHA, RAHMA...

Je vous n'oublierai jamais merci pour tout.

FAIZA

Table des matières

Table des figures

Liste de notations

H_0	Hypothése nulle
H_1	Hypothése alternative
θ	Paramétre inconnu
θ_0	Valeure numérique
θ_1	Valeure numérique
Θ	Espase paramétrique
Θ_0	Sous ensemble non vide de Θ
Θ_1	Sous ensemble non vide de Θ
X	Variable aléatoire
α	Risque de premier espéce
β	Risque de deuxiéme espéce
$1-\beta$	Pissance d'un test
$1-\alpha$	Confience de test
n	Nombre de realisation
W	Région critique
$\overline{W}$	Région d'acceptation
$TSRP$	Test séquentiel du rapport des probabilités
$L(\underline{x},\theta)$	Rapport de vraissemblance
$f_\theta(x_i)$	Foncion de densité de x
$\varpi(\theta)$	Fonction d'éfficacité
ASN	average sample number (nombre d'échantillon moyen)
N	Taille d'échantillon

Introduction Générale

Le problème classique en statistique inférentielle est spécialement le problème des tests. Ce dernier est très voisin de celui de l'estimation il permet, en vue d'un échantillon de trancher entre deux assertion contraires ([1] [3]).

Confronté à des phénomènes complexes et aléatoires, la prise de décision est difficile et les outils adaptés de la théorie des tests ont pour objet de guider les choix entre différentes alternatives. De façon générale, il s'agit de décider si des différences observées entre un modèle posé a priori et des observations sont significatives ou peuvent être considérées comme étant dues au simple effet du hasard consécutif aux aléas du tirage d'un échantillon.

Réaliser un test statistique consiste à mettre en œuvre une procédure permettant :

de confronter une hypothèse avec la réalité, ou plus exactement, avec ce que l'on perçoit de la réalité à travers les observations à disposition et de prendre une décision à la suite de cette confrontation.

Si les problèmes traités par l'estimation (ponctuelle ou par intervalle de confiance) sont de type quantitatif, i.e. conduisent à un résultat numérique, ceux traités par les tests d'hypothèses sont d'ordre qualitatif, i.e. conduisent à une réponse du type rejet/acceptation de l'hypothèse statistique considérée ([2]).

Il existe de nombreuses quéstions qui se posent souvent en pratique par exemple : le médicament testé est-il efficace ? Les pièces sortant d'une machine sont-elles conformes ? Un nouveau mode de culture bactérienne est-il plus efficace ? Quels sont les gènes significativement différentiellement exprimés dans un tissu pathologiques ?... Sont autant de questions auxquels des tests statistiques peuvent apporter des réponses sous 4 conditions :

1. La question est posée de sorte qu'il n'y ait que 2 réponses possibles oui/non, :
2. Une expérimentation planifiée fournit des données relatives à cette question,
3. Les données sont considérées comme la réalisation de variables aléatoires décrites par un modèle statistique,

4. La réponse à la question se traduit par l'acceptation ou le rejet d'une hypothèse (H_0).

Dans ces conditions et avec une marge d'erreur plus ou moins bien contrôlée, accepter l'hypothèse, fait répondre Non à la question en considérant que les différences observées entre le modèle et la réalité des observations sont imputables au seul hasard. Rejeter l'hypothèse fait Oui à la question : les différences sont jugées significatives car trop improbables ou invraisemblables.

La théorie des tests est l'une des deux branches de la statistique mathématique. Elle se subdivise en deux volets principaux, les tests paramétriques et les tests non-paramétriques ([4]).

Ces derniers n'imposent aucune forme à la loi de probabilité des phénomènes étudiés, il n'est pas nécessaire de faire des hypothèses sur la forme des distributions, il n'est pas nécessaire non plus d'estimer les paramètres associés (ex. la moyenne si la répartition était gaussienne, etc.). Le champ d'application des techniques est par conséquent plus large. Vérifier a priori les conditions de validité des tests n'est pas un préalable indispensable.

contrairement au cas paramétrique qui requiert un modèle à fortes contraintes (comme la normalité des distributions, l'égalité des moyennes,. . .). Parmi les tests les plus usuels en statistique, on peut citer le test de normalité d'une population, les tests d'égalité des paramètres, les tests de corrélation, etc.

La littérature statistique abonde de types de tests statistiques ([5]).

Les tests permettent de trancher entre deux hypothéses (ou quéstions) antagoniste sur la base d'un échantillon obtenu en réalisant n experiences indépendantes. La décision prise dépend alors de la taille de l'échantillon considéré.

Dans certaines situations pratiques la taille doit être trés grande pour prendre une bonne décision quand à l'acceptation ou le rejet de l'hypothése (exp,en medecine). Les tests séquentiels ont alors fait leur apparution.

Les tests séquentiels et plus précisément les tests séquentiels du rapport des probabilités, ont été introduits par le mathématicien Wald pendant la seconde guerre mondiale mais son livre ne fût, pour des raisons évidentes, publiés qu'en 1947.

Contrairement aux tests classiques, ces tests sont définis par récurrence sur le nombre d'observations, qui n'est donc pas fixé a priori. Wald a entre autre, démontré que l'utilisation du test séquentiel du rapport des probabilités permettait souvent une économie moyenne d'au moins 50% sur le nombre d'observations par rapport à une procédure classique ([21]).

Sur la base des travaux effectués par Wald, de nombreux mathématiciens ont développé la théorie des tests séquentiels. Dans le cadre d'une loi exponentielle, l'article d'Epstein et Sobel paru en 1955 ([25]) est le premier à recenser l'ensemble des résultats et leur démonstration sur l'utilisation du test séquentiel du rapport des probabilités.

Plus tard, Aroian a cherché à étudier les propriétés des tests séquentiels tronqués, par l'utilisation de méthodes directes de calculs qui ont ensuite été appliquées et développées dans le cas particulier de la loi exponentielle par Sumerlin.

Une fois les procédures séquentielles bien connues, à partir de 1970, les statisticiens se sont intéressés à la détermination d'intervalles de confience suite à l'utilisation d'une procédure séquentielle ([22]).

Notre travail sera réparti en trois chapitres organisés comme suite : le premier chapitre sera consacré à des généralités sur les tests dont nous nous appuyons pour formuler un test. Puis le deuxiéme chapitre présentera les deux grands types de test : tests paramétriques et tests non paramétriques dont nous citerons les tests les plus usuels pour chacun. Enfin le troisiéme chapitre sera consacré au tests séquentiels. En vu de la difficulté de réaliser un test séquentiel qui est utilisé généralement dans le domaine médicale et avoir des résultats fiables durant une période de temps trés courte, nous nous sommes contenté pour expliquer les tests séquentiels principalement le test groupé (répété) et le test triangulaire sur le travail de ZERARI AMEL ([21]) qui est porté sur l'étude de plans d'expérience séquentiels appliqués aux essais cliniques. Dans le développement d'un nouveau médicament, c'est au cours de la phase 2 que la relation dose-réponse est évaluée et que les doses les plus prometteuses sont sélectionnées pour la phase 3.

Ce document se termine sur une conclusion qui résume le document, montionne les objectifs atteints et ses prespectives.

Chapitre 1

Les notions de base de tests

Dans ce chapitre nous rappelons un certain nombre de généralités autour des tests d'hypothèse. L'objectif étant d'être capable de bien formuler un test.

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Test

Un test est un mécanisme qui permet de trancher entre deux hypothèses antagonistes (une hypothése nulle et une hypothése dite alternative), à la vue des résultats d'un échantillon, en quantifiant le risque associé à la décision prise ([2] [6]).

1.1.2 Hypothèse

Une hypothèse est un énoncé concernant les caractéristiques d'une population ([1]).

1.1.3 Hypothèse nulle

L'hypothèse nulle notée H_0 est l'hypothèse que l'on désire contrôler : elle consiste à dire qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres comparés ou que la différence observée n'est pas significative et est due aux fluctuations d'échantillonnage. Cette hypothèse est formulée dans le but d'être rejetée ([2] [7]).

1.1.4 Hypothèse alternative

L'hypothèse alternative notée H_1 est l'hypothése complémentaire de H_0. La décision de rejeter H_0 signifie que H_1 est réalisée ou H_1 est vraie ([2] [6]).

Remarque 1.1.1.

- Les deux hypothèses ne sont pas symétriques (elles n' ont pas la même nature). H_1 est choisie uniquement par dèfaut si H_0 n'est pas considérée comme crédible.
- Le choix de H_0 et de H_1 est en gènèral imposèe par le test qu'on utilise et ne relève donc pas de l'utilisateur.

1.1.5 La statistique de test S

La statistique de test S est une fonction qui résume l'information sur l'échantillon qu'on veut tester. On la choisit de façon à pouvoir calculer sa loi sous H_0 .

S est une variable aléatoire, défnie indépendemment des données observées. La valeur que prend cette variable aléatoire pour les données observées sera appelée statistique observée et notée S_{obs} . Dite aussi statistique de désicion et permet de prendre une décision sur l'acceptation ou le rejet de H_0 ([2] [7]).

1.1.6 Région critique et région d'acceptation

La région critique notée W (W pour wrong), ou encore appelée zone de rejet est égale à l'ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à écarter H_0 au profit de H_1.

La région d'acceptation notée $\bar{W}$, ou encore appelée zone d'acceptation est la région complémentaire de la région critique W ([1] [3]).

1.1.7 Risques

Supposons qu'on ait construit une régle de décision à partir des données obtenues en réalisant un certain nombres d'éxperiences. Alors pour trancher entre H_0 et H_1 on peut se tromper car la régle de décision est construite à partir des données qui ne sont pas exactes. Il y a donc quatre cas possibles qui sont détaillés dans le tableau ci-dessous : ([2] [7])

	H_0 vraie	H_1 vraie
H_0 décidé	$1-\alpha$	β
H_1 décidé	α	$1-\beta$

FIG. 1.1 – Types et probabilités d'erreur

où α est la probabilité d'accepter H_1 alors que c'est H_0 qui realise .
β est la probabilité d'accepter H_0 alors que c'est H_1 qui realise.

1.1.8 L'erreur de première espèce

Le risque α de première espèce est celui de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie, ou accepter H_1 alors qu'elle est fausse ([1] [2])

1.1.9 L'erreur de deuxième espèce

Le risque β de deuxième espèce est celui d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse, ou rejeter H_1 alors qu'elle est vraie ([1] [2])

1.1.10 Niveau de significativité

Depuis les travaux de Neyman et Pearson, l'erreur de première espèce est limitée à un niveau dit niveau de significativité. Le fait d'imposer α faible conduit à une règle de décision plus stricte. En effet, dans ce cas, la décision consiste à abandonner H_0 ([2] [7]).

1.1.11 La puissance d'un test

La puissance d'un test est égale à $1-\beta$ ou encore la puissance est la probabilité de rejeter H_0 à raison. Un test est alors bon lorsque sa puissance est proche de 1 ([2] [7]).

1.1.12 Tests bilatéral et unilatéral

Dans le cas d'un test parametrique ; ie les hypothéses portent sur un paramétre inconnus θ, lorsque H_0 est une hypothèse dite simple H_0 : "$\theta = \theta_0$". Le test est dit unilatéral. Si H_1 est de type H_1 : "$\theta > \theta_0$" ou H_1 : "$\theta < \theta_0$" et bilatéral si H_1 : "$\theta \neq \theta_0$" ([3]).

1.2 Mise en œuvre pratique

1.2.1 Démarche d'un test

Après avoir clairement défini la question posée et le modèle statistique sous-jacent, une démarche de test suit généralement les étapes suivantes : ([3] [6])

1. Choix de H_0 et de H_1 Fixer α,
2. Détermination de la statistique de test, et sa loi sous H_0 (ou sa loi asymptotique sous H_0
3. Allure de la région de rejet en fonction de H_1,
4. Calcul de la région de rejet en fonction de α et H_0,
5. Calcul de la valeur observée de la statistique de test,
6. Conclusion : rejet ou acceptation de H_0 au risque $1-\beta$
7. Si possible, calcul de la puissance du test : $1-\beta$

Dans ce chapitre nous avons rappelé la définition de quelques notions de base de tests pour pouvoir les utiliser dans les chapitres prochains.

Chapitre 2

Tests paramétriques et tests non paramétriques

Dans ce chapitre,nous allons nous intéressé aux deux types de tests les plus utilisés en statistiques : Tests paramétriques et tests non paramétriques.

2.1 Tests paramétriques

Définition 2.1.1. Un test paramétrique est un test dont la forme fonctionnelle de la distribution de l'échantillon (ou des échantillons) à tester est connue mais dépend d'un paramétre inconnu. Le test porte sur le parametre inconnu ([10] [15]).

2.1.1 Les aventages de tests paramétriques

Parmi les avantages des tests paramétriques on cite deux petits avantages : simplicité et petit gain de puissance.

2.1.2 Contraintes des tests paramériques

Les principaux contraintes des tests paramétriques sont les suivants : -Normalité des distributions : Souvent en pratique, on se base sur la normalité des variables,

-Homogénéité des variances : L'égalité des variences peuvent de simplifier considerablement la construction de la statistique de décision,

-Peu applicable aux effectifs réduits (approximation $n < 30$) ([10] [5]).

2.1.3 Test bilatéral et test unilatéral

Un test bilatéral s'applique quand nous cherchons une différence entre deux paramètres, ou entre un paramètre et une valeur donnée sans se préoccuper du signe ou du sens de la différence. Dans ce cas, la zone de rejet de l'hypothèse principale se fait de part et d'autre de la distribution de référence ([1] [2]).

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ \ et \ \ H_1 : \theta \neq \theta_0 \tag{2.1}$$

Un test unilatéral s'applique quand nous cherchons à savoir si un paramètre est supérieur (ou inférieur) à un autre ou à une valeur donnée.

La zone de rejet de l'hypothèse principale est située d'un seul côté de la distribution de probabilité de référence.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ \ et \ \ H_1 : \theta < \theta_0 \tag{2.2}$$

Ou

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ \ et \ \ H_1 : \theta > \theta_0 \tag{2.3}$$

2.1.4 Qualité d'un test

Test sans biais

Définition 2.1.2. Un test est dit sans biais si sa puissanse est supérieure au risque de premier espéce si seulement si

$$\alpha < 1 - \beta$$

.

Test convergent

Définition 2.1.3. Un test est dit convergent si seulement si sa puissance est proche de 1 $(1 - \beta \longrightarrow 1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Test UPP(Uniformement le plus puissant)

Définition 2.1.4. On dira qu'un test est uniformement le plus puissant (UPP) dans la classe des tests de niveau α si et seulement si il est meilleur que tous les autres tests de même niveau α ([24]).

2.1.5 Tests entre hypothéses simples

On dira qu'un test est un test d'hypothèses simples si les hypothèses sont du type :

$$H_0 : "\theta = \theta_0" \ \ contre \ \ H_1 : "\theta = \theta_1" \tag{2.4}$$

Oú $\theta_0 \neq \theta_1$ $(\Theta_0 = \{\theta_0\})$ et $(\Theta_1 = \{\theta_1\})$.Pour plus de détails voir ([3] [23]).

Théorème 2.1.1. *(théoréme fondamentale de Neyman-Pearson) Soit* $\Gamma = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ *une structure statstique. On considère le test d'hypothèses simples* $H_0 : "\theta = \theta_0"$ *contre* $H_1 : "\theta = \theta_1"$ *Le test rejette* H_0 *si*

$$\frac{L(\underline{x}, \theta_1)}{L(\underline{x}, \theta_0)} > k_\alpha$$

ie La région critique du test est donnée par $w = \{L(x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n / \frac{L(\underline{x},\theta_1)}{L(\underline{x},\theta_0)} > k_\alpha\}$

Avec :

k_α *donnée tel que* $P_{H_0}(w) = \alpha$

$L(\underline{x}, \theta)$ *: fonction de vraissemblance tel que* $L(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \qquad \underline{x} = (x_1, ..., x_n)$

Démonstration 2.1.1. *Pour une preuve, voir ([3], [24])*

Propriétés du test de Neyman-Pearson

Le test de Neyman-Pearson est un test sans biais, convergent et aussi il est l'unique test UPP.

2.1.6 Test d'hypothèse simple contre hypothèse composite

On appelle test entre hypothèse simple et hypothèse composite tout test ou les hypothèses sont du type : ([3] [23])

$$H_0 : "\theta = \theta_0" \ et \ H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Où $\theta_0 \notin \Theta_1$ et $card(\Theta_1) > 1$

2.1.7 Tests entre hypothèses composites

On appelle test entre hypothèses composites tout test où les hypothèses sont du type : ([3] [23])

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \; et \; H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Où $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, $card(\Theta_0) > 1$ et $card(\Theta_1 >)1$

2.1.8 Test de vraisemblance

On appelle test du rapport de vraisemblances le test qui rejette H_0 si

$$\lambda_n(X) \leq \lambda_\alpha$$

Où

$$\lambda_n(X) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_n(\underline{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_0} L_n(\underline{x}, \theta)}$$

Ce test est utilisé quand les tests précédent ont échoué ([23] [24]).

Dans les sous-sections suivantes nous présentons les tests usuels les plus utilisée en pratique.

2.1.9 Test à un échantillon

Le test à un échantillon sert à comparer un paramétre à une valeur donnée. Dans le cas d'une variable Gaussienne il existe plusieurs tests mais les plus usuels sont : ([9])

- Test de Gauss : Comparaison de la moyenne de l'échantillon à une valeur théorique lorsque la variance est supposée connue .
- Test de Student : Comparaison de la moyenne de l'échantillon à une valeur théorique lorsque la variance est inconnue et estimée .

2.1.10 Test à deux échantillons

Le test à deux échantillons sert à comparer des paramétres de chacune des distributions d'échantillon. Il existe plusieurs types de ce test, dans ce qui suit, on citera quelques un de ces tests.

1. **Cas des échantillons indépendants** ([9])

- Test de Student : Comparaison de deux moyennes (variances égales ou échantillon suffisamment grand).
- Test de Fisher : Comparaison de deux variances.
- Comparaison de deux proportions.

2. **Cas des échantillons appariés** ([3])

   Deux échantillons sont dits appariés si et seulement si ils sont constitués de deux mesures successives de la même variable sur les mêmes individus.

2.1.11 Tests à K échantillons

Ce test sert à comparer les moyennes de plus des deux échantillons. Cette comparaison se fait généralement par une analyse de variance ([17],[19]), ou bien par le test de BARTLETT ([17]).

2.2 Tests non paramétriques

Définition 2.2.1. Un test non paramétrique est un test dont la forme fonctionnelle de la distribution de l'échantillon (ou des échantillons) à étudier est complétement inconnue. On utilise uniquement l'information apportée par les résultats de l'experience ([10] [15]).

2.2.1 Les aventages de tests non paramétriques

Parmis les avantages de tests non paramétriques nous citons :

- Pas de contrainte sur la population dont est extrait l'échantillon.
- Absence de conditions de validité donc pas d'angoisse quant à l'observance (parfois inconnue) des conditions de validité.
- Ils permettent de comparer des échantillons issus de populations ayant des distributions différentes.
- Ils traitent des données qualitatives exprimées soit en variables nominales soit par la comparaison de rangs ([10], [14]).

2.2.2 Les inconvénients des tests non paramétriques

Parmis les incovénients des tests non paramétriques nous citons :

- Difficultés d'interprétation : on ne compare plus des paramétres (moyenne, proportion, variance, . . .) ([10], [14]).
- Moins puissants que les tests paramétriques lorsqu'ils sont utilisables ([10], [14]).

Nous citons dans ce qui suit les tests souvent utilisés

2.2.3 Tests d'adéquation à une loi théorique

Tests du chi-carré

Le test de chi-deux utilise des propriétés de la loi multinomiale. Il permet de juger si une hypothèse concernant la loi de probabilité d'une variable aléatoire est compatible avec la réalisation d'un échantillon. La statistique de décision est la somme des ecarts quadratiques entre les fréquences empiriques et les probabités ([1], [6]).

Droite de Henry

Une autre méthode couramment utilisée en pratique pour visualiser plutôt que tester si la loi d'une v.a est normale est la droite de Henry.

L'utilisation d'une échelle spéciale, appelée échelle galtonienne ou gausso-arithmétique, permet de transformer les fonctions de répartition complexes de type gaussienne en droites. Pour ce faire, l'échelle des ordonnées est transformée par la fonction inverse de la fonction de répartition de la loi gaussienne ([6]).

Test de normalité de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk consiste à considérer le rapport entre l'estimation de la variance suivant la droite d'Henry et l'estimation de la variance par l'estimateur habituel ([6]).

Test de Kolmogorov

C'est un test d'ajustement à une loi connue sur H_0. Il est basé sur une statistique de décision tabulée qui s'interésse aux écarts entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique F_0 connue sous H_0 ([13], [20]).

Tests d'Anderson-Darling et de Cramer-von Mises

Ce sont des tests dérivés du test de Kolmogorov-Smirnov. Il permet également de tester toute forme de différenciation entre les distributions. Sa particularité est qu'il exploite différemment les fonctions de répartition empiriques : au lieu de se focaliser sur l'écart maximal, il compile tous les écarts sous la forme d'une somme des carrés des différences ([1], [19]).

2.2.4 Test d'indépendance

C'est un test entre deux variables généralement qualitatives, dont les différentes modalités sont réparties dans un tableau croisé donnant les effectifs (tableau de contingence). La statistique utilisée est l'écart quadratique χ^2 entre les effectifs observés et les effectifs théoriques.

Dans le cas les variables sont gaussiennes ce test est un test de correlation,cela revient à comparer le cœfficient de corrélation empirique ρ à 0 mais si les deux variables ne sont pas gaussienne le test reste valable mais c'est un test de corrélation non pas d'indépendance.

Ex : Test de corrélation des rangs de Spearman, Test de corrélation des rangs de Kendall, etc ([18]).

2.2.5 Tests à 2 échantillons

L'objectif c'est de comparer 2 échantillons issue d'une variable X de nature : quantitative ou qualitative ordinale, et de détermier si les deux échantillons proviennent-ils de même population.

1. **Deux échantillons indépendants**

   Test de Kolmogorov-Smirnov

   Le test de Kolmogorov-Smirnov vise à déterminer si les fonctions de répartition de deux populations sont identiques. La statistique de décision est basée sur l'écart quadratique entre les fonctions de répatition empirique) ([1], [13])

   Tests d'Anderson-Darling et de Cramer-von Mises

   Ce sont des tests dérivés du test de Kolmogorov-Smirnov mais basés sur la différence quadratique entre les fonctions de répartition théorique supposée et empirique ([1], [19]).

Test U de Wilcoxon-Mann-Whitney

Ce test repose sur l'idée que deux séries de valeurs mélangées et ordonnées par valeurs croissantes, doivent conduire à un mélange homogène si l'hypothèse H_0 d'identité des distributions est vérifiée. La statstique de décision est basée sur la somme des rangs des observations de l'échantillon globale ([10], [12]).

2. **Deux échantillons appariés**

Test du signe

Le test des signes s'intéresse uniquement au sens de l'écart et non à son importance. Il est adapté à tout type de variables (quantitative, ordinale, même binaire) dès lors qu'il est possible de déterminer si une valeur est plus importante qu'une autre pour chaque paire d'observation ([19]).

Test des rangs signés de Wilcoxon

Le test des rangs signés de Wilcoxon traite la comparaison d'échantillons appariés. Il répond donc à la même catégorie de problèmes que le test des signes. Nous ne devons pas le confondre avec le test des rangs de Wilcoxon-Mann-Whitney pour échantillons indépendants, même si le mécanisme du test repose sur une somme de rangs.

Par rapport au test des signes, le test de Wilcoxon utilise l'importance relative des écarts lors de la définition de la statistique de test. Il est donc plus riche, plus puissant pour peu que l'on puisse les ordonner (les écarts) ([10], [19])

Test de Mac Nemar

Le test de McNemar peut être considéré comme une application du test de signe a des variables dichotomiques [1]. On suppose que les individus constituant l'échantillon sont répartis en deux groupes, l'un vérifiant la propriété A et l'autre la propriété B. Suite à un évènement, les mêmes individus sont à nouveau répartis entre les deux sous-groupes et la question posée est de savoir si l'évènement a modifié la répartition initiale en faveur de l'un ou l'autre sous groupe.

[1] Une variable dichotomique est une variable qui ne peut prendre que deux modalités exclusives l'une de l'autre, comme "Oui/Non" ou "Inférieur ou égal à/Strictement supérieur à".

Selon cette logique on dispose d'échantillons appariés. On peut représenter par un signe + les individus passant de la catégorie A vers la catégorie B, par un signe – ceux qui effectuent le déplacement opposé et ne pas considérer les individus qui sont dans le même sous-groupe avant et après l'évènement ([13], [19]).

2.2.6 Tests à k échantillons

Test de Kruskal-Wallis

Le but c'est de comparer la distribution de ($k > 2$) échantillons indépendants dans le cas variable quantitative.

Ce test vérifie si plusieurs échantillons ($k > 2$) appartiennent à la même population.

Ce test est une extention (généralisation) du test de Wilcoxon-Mann-Whitney et par conséquent fonctionne sur le même principe de remplacement des valeurs de la variable d'étude par leurs rangs respectifs ([11], [12]).

ANOVA de Friedman

L'analyse de variance (ANOVA) de Friedman consiste à comparer K paramètres de localisation sur K échantillons liés. Le tableau de données comporte donc n lignes, et K colonnes. Dans sa construction, chaque ligne correspond à un "K-uplet" de mesures. Ces dernières peuvent être quantitatives continues [2] ou qualitatives ordinales [3], l'essentiel est que l'on puisse les exploiter de manière à produire un classement c.-à-d. affecter des rangs aux traitements. Par hypothèse, les formes fonctionnelles des distributions des K échantillons sont identiques, quand bien même elles seraient décalées, en particulier elles doivent présenter une dispersion identique ([6], [12])

Test Q de Cochran

Le test Q de Cochran est une généralisation du test de McNemar où l'on traite $k \geq 2$ échantillons appariés, dans un plan d'expérience en bloc aléatoire complet [4]. Il s'applique aussi au cas des mesures répétées c-à-d un seul échantillon dans laquelle une variable

[2] lorsqu'elles peuvent prendre une infinité de valeurs (dans un intervalle donné) : masse, temps, distance, volume...

[3] lorsque les classes peuvent être ordonnées : rang dans un classement, degré de satisfaction...

[4] s'il y a (ou s'il peut y avoir) une grande hétérogénéité entre les individus, ils sont réunis en groupes aussi homogènes que possibles (ou blocs). Au sein de ces blocs chaque individu est ensuite affecté aléatoirement à un traitement, de manière à ce que tous les traitements soient présents dans chacun des blocs

observée k fois sur une même population . La variable d'intérêt (variable à analyser) est binaire ([1], [19]).

Dans ce chapitre nous avons abordé les deux grands types de tests et nous avons déduit la différence entre eux.

Remarque 2.2.1. On pourra lire une documentation très précise, complète et pratique, sur l'emploi des tests non paramétriques et leur degré de pertinence, comparés à des tests paramétriques, sur le site : Cours de DEUG,Probabilités et Statistiques, Avner Ba-Hen, Aix-Marseille III.

Chapitre 3

Tests séquentiels

Afin d'optimiser les coûts et de gagner du temps, nous nous orienterons vers des tests statistiques séquentiels, connus par nécéssité d'un nombre d'observations inférieur en moyenne, à celui d'un test classique, pour prendre une décision.

3.1 Généralités

3.1.1 Approche décisionnelle entre le test classique et le test séquentiel

Test classique c'est de Choisir l'une des 2 décisions suivantes : Hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1,contrairement au test séquentiel qui choisit l'une entre ces 3 décisions : Hypothèse nulle H_0 ou l'hypothèse alternative H_1 ou bien information insuffisante, besoin de plus de données [31].

Exemple

Soit un nouveau lot de pièces d'une société qui a toujours donné satisfaction jusque là. Allons-nous accepter ce lot de nouveau, ou bien le rejeter ? ([30]).

1. **Test Non-Séquentiel**

   Tirer du lot un échantillon de taille n fixée.

   En notant p la proportion de piéces défectueuses et faire le test suivant avec un risque α (erreur grave) fixé :$H_0 : p = p_0$ et $H_1 : p = p_1$ $(p_1 > p_0)$

2. **Test Séquentiel** (pour économiser des analyses)

   Tirer du lot une piéce

   Regarder si la piéce tirée est bonne ou défectueuse

Décider :
- soit d'accepter le lot (accepter H_0)
- soit de refuser le lot (rejeter H_0)
- soit de tirer une nouvelle piéce ($n \leftarrow n+1$) c-à-d on reprend le test avec $(n+1)$ observations.

3.1.2 Forme générale d'un test statistique

Tout test peut être exprimé en fonction de deux statistiques, obtenues à partir de la vraisemblance ([31]) :

- une mesure de la différence Z
- une mesure de l'information V

3.2 Principe des méthodes séquentielles

Basé sur les réalisations des analyses répétées au cours de l'essai en incluant des observations (exemple : des malades) par petits groupes de nombre pair . L'analyse séquentielle peut porter sur des critères de jugement, binaires[1], quantitatifs [2] ou censurés [3]. Chaque analyse détermine un point situe dans un plan séquentiel délimité par des frontières.

Le plan séquentiel se situe dans un ensemble défini par 2 axes orthogonaux d'aprés Sébille et Bellissant (2003). Z en ordonnée (l'axe des ordonnée Z : mesure la différence entre les 2 groupe) et V en abscisse (l'axe des abscisses V : la quantité d'information), et 2 droites constituant les frontières d'une région de continuation par rapport à une région de rejet de H_0 et une autre région dite de non rejet de H_0.

Pour le test séquentiel les frontières sont constituées de 2 droites parallèles délimitant une région de continuation ouverte, d'où le risque d'essai de longue durée, le nombre d'analyses n'étant pas limite [21].

[1] Leurs valeurs est de 0 et 1

[2] leurs valeurs représentent une grandeur, quantifiable et le plus souvent associée à une unité de mesure

[3] Une variable censurée ou tronquée est une variable dont on observe la réalisation pour certains individus seulement. La troncature peut provenir soit du processus de collecte des données soit d'une décision prise par ces mêmes individus

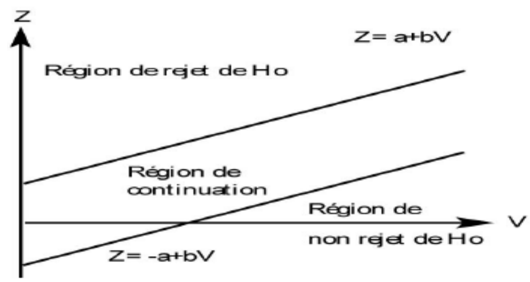

FIG. 3.1 – Frontiéres du Test Séquentiel en formulation unilatérale

3.3 Avantages des tests séquentiels

Ces tests sont explicitement intéressants par ce qu'ils permettent, pour des raisons éthiques, d'exposer le moins de sujets possible aux traitements les moins efficaces et ils sont plus économes concernant le temps et le coût que les tests classiques.

3.4 Inconvénients des tests séquentiels

Contrairement au tests classiques la durée de l'étude de tests séquentiels est aléatoire, le nombre de sujets est aléatoire en plus si la procédure s'arrête rapidement, les estimations ponctuelles peuvent être très imprécises.

3.5 Test séquentiel du rapport des probabilités

Cette partie a pour but, de présenter le test séquentiel du rapport des probabilités introduit par Wald en 1943 dont nous donnons ces principes et propriétés.

Nous considérerons $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et identiquement distribuées dont on notera $(x_1, ..., x_n)$ les réalisations.

La loi de X_1 dépend d'un paramétre $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ et on note par $f(x, \theta)$ la densité de probabilité X_1 au point x pour le paramétre θ si X_1 est absolument continue ou la probabilité que X_1 prenne la valeur x pour le paramétre θ si X_1 est une variable aléatoire discréte.

On veut tester l'hypothése $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothése $H_1 : \theta = \theta_1$, où $f(x, \theta_0)$ est la densité de X_1 (ou probabilité que X_1 soit égale à x) lorsque l'hypothése H_0 est vraie, et $f(x, \theta_1)$ désigne la densité de X_1 (ou probabilité que X_1 soit égale à x) lorsque H_1 est vraie. Enfin, pour tout événement $E \in \mathcal{A}$, on notera $\mathbb{P}_\theta(E) = \mathbb{P}(E \mid \theta$ est le vrai paramétre).

3.5.1 Définition du test séquentiel du rapport des probabilités

Soient

$$P_{0,m} = \prod_{i=1}^{m} f(X_i, \theta_0) \;\; et \;\; P_{1,m} = \prod_{i=1}^{m} f(X_i, \theta_1) \tag{3.1}$$

On pose

$$l_m = \frac{P_{1,m}}{P_{0,m}} \tag{3.2}$$

le rapport de vraisemblence.

3.5.2 Les propriétés de test séquentiel du rapport des probabilités

(ou TSRP) $S(A, B)$ Le test de H_0 contre H_1 est donné de la maniére suivante :

on se donne deux constantes positives A et B telles que $B < 1 < A$ et à chaque étape m de l'expérience, on calcule le rapport des probabilités l_m et on applique la régle de décision suivante :

- si $B < l_m < A$ on continue l'expérience en prenant une nouvelle observation,
- si $l_m \geq A$ on rejette H_0 (on accepte H_1),
- si $l_m \leq B$ on accepte H_0.

De maniére générale, il est pratique pour les calculs de prendre le logarithme du rapport des vraisemblances l_m. On a

$$\log l_m = \sum_{i=1}^{m} \log \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} \tag{3.3}$$

Avec

$$Z_i = \log \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} \tag{3.4}$$

Il est alors possible de décrire la régle de décision du test séquentiel à l'étape m de la maniére suivante :

- si $\log B < \sum_{i=1}^{m} Z_i < \log A$, alors on continue l'experience,

- si $\sum_{i=1}^{m} Z_i \geq \log A$, on rejette H_0,

- si $\sum_{i=1}^{m} Z_i \leq \log B$, on accepte H_0.

Remarque 3.5.1. - Si $p_{1,m} = p_{0,m} = 0$, alors on pose $l_m = 1$.

- Si $p_{1,m} > 0$ et $p_{0,m} = 0$ alors $l_m \geq A$ et on termine par conséquent le test à l'étape m par le rejet de H_0.

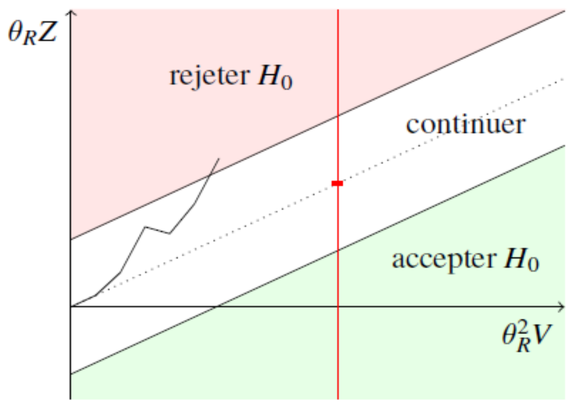

FIG. 3.2 – Test unilatéral du rapport de vraisemblance

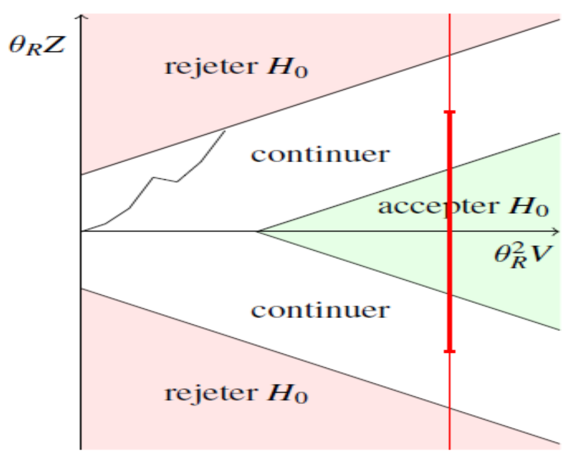

FIG. 3.3 – Test bilatéral du rapport de vraisemblance

Inconvénients du test séquentiel du rapport de vraisemblance

Parmis les désavantages du test séquentiel du rapport de vraisemblance on trouve que la probabilité que le chemin franchisse une frontière est de 1, malgré cela l'étude peut durer très longtemps [31].

Les régions du test séquentiel du rapport des probabilités :

En génerale, on peut défnir trois régions à chaque étape m de la procédure séquentielle :
✓ D_m^1 la région de rejet,
✓ D_m^0 la région d'acceptation,
✓ et D_m la région de continuation.
L'ensemble des observations de D_m conduisent à continuer la procédure séquentielle. D'où $(x_1, ..., x_m) \in D_m$ si

$$\forall n \leq m \quad B < l_n < A$$

De même D_m^1 est l'ensemble des observations conduisant à décider H_1. Alors $(x_1, ..., x_m) \in D_m^1$ si

$$\forall n < m \;\; B < l_n < A \quad et \quad l_n \geq A$$

Enfin D_m^0 est l'ensemble des observations conduisant à décider H_0. Alors $(x_1, ..., x_m) \in D_m^0$ si

$$\forall n < m \quad B < l_n < A \quad et \quad l_n \leq B$$

Soit $\theta \in \Theta$ fixé, Pour tout test séquentiel du rapport des probabilités et tout $n \geq 1$, on peut écrire :

$\mathbb{P}_\theta($ Continuer la procédure à l'étape n $)$ $+\mathbb{P}_\theta($ Décider H_0 avant ou à l'ètape n $)$ $+\mathbb{P}_\theta($ Décider H_1 avant ou à l'étape n $) = 1$.

qui en termes de D_m^1, D_m^0 et D_m, s'écrit :

$$\mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_n) \in D_n) + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_m) \in D_m^1) + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_\theta((X_1, ..., X_m) \in D_m^0) = 1 \quad (3.5)$$

Par continuité inférieure de la probabilité, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta((X_1,...,X_n)\in D_n) &= \mathbb{P}_\theta(\textstyle\bigcap_{m\geq 1}\{(X_1,...,X_m)\in D_m\}) \\ &= \mathbb{P}_\theta(\text{Le test ne s'arrête pas })\end{aligned}$$

et par σ-additivité on en déduit que

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{m\geq 1} \mathbb{P}_\theta((X_1,...,X_m)\in D_m^0) &= \mathbb{P}_\theta(\textstyle\bigcup_{m\geq 1}\{(X_1,...,X_m)\in D_m^0\}) \\ &= \mathbb{P}_\theta \text{ (Décider } H_0 \text{)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{m\geq 1} \mathbb{P}_\theta((X_1,...,X_m)\in D_m^1) &= \mathbb{P}_\theta((\textstyle\bigcup_{m\geq 1}\{(X_1,...,X_m)\in D_m^1\}) \\ &= \mathbb{P}_\theta \text{ (Décider } H_1 \text{)}\end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans (3.5) et on obtient la relation fondamentale :

$\mathbb{P}_\theta$(Le test ne s'arrête pas)$+\mathbb{P}_\theta$ (Décider $H_1) + \mathbb{P}_\theta$ (Décider $H_0) = 1$

On pourra alors en déduire que

$$\mathbb{P}_\theta(Decider H_1) + \mathbb{P}_\theta(Decider H_0) = 1 \tag{3.6}$$

Remarque 3.5.2. Tous les tests séquentiels ne s'arrêtent pas en un nombre fini d'observations avec une probabilité égale à 1. Il s'agit d'une particularité du TSRP.

3.5.3 Détermination de deux constantes A et B du TSRP

Afin de déterminer correctement le test séquentiel du rapport des probabilités $S(A, B)$, il faut choisir les constantes A et B.

On se fixe un couple (α, β) avec $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$ et les constantes A et B sont alors, en théorie, déterminées de façon à ce que le test ait pour erreurs de premiére et deuxiéme espéces respectivement α et β.

En pratique, il est difficile de calculer exactement la valeure de les constantes A et B. C'est pourquoi nous allons chercher une approximation de ces constantes mais avant cette étape il faut connaître la relation qui existent entre A,B, α et β, [22].

Relations entre A, B, α et β

Théorème 3.5.1. *Soit un test séquentiel du rapport des probabilités $S(A, B)$ d'erreurs de premiére et deuxiéme espéces respectivement α et β. Alors :*

$$A \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad et \quad B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.7}$$

Démonstration 3.5.1. *Lorsqu'un échantillon d'observations* $(x_1, ..., x_m)$ *conduit à décider* H_0*, on dit qu'il est de type* 0*. De même lorsqu'un échantillon conduit à décider* H_1*, on dit qu'il est de type* 1*. Nous noterons alors* D_j *,* $j = 0, 1$ *; l'ensemble des échantillons de type* j*. [22]*

Approximation de A et B

Les inégalités (3.7) du théoréme (3.5.1), suggérent d'approximer A et B respectivement par

$$A^* = \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{3.8}$$

et

$$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.9}$$

Remarque 3.5.3. Les inégalités (3.7) impliquent $B^* < A^*$ car $B < A$. En multipliant cette inégalité (3.7) par $\alpha.\ (1-\alpha) > 0$, on obtient aprés simplification $0 < 1 - \beta - \alpha$.

On en déduit finalement que $A^* > 1$ et $B^* < 1$.

Les risques de premiére et deuxiéme espéces pouvant être modifiés par l'approximation, notons α^* et β^* les erreurs de premiére et deuxiéme espéces du test $S(A^*, B^*)$ et analysons les conséquences de cette approximation.

Théorème 3.5.2. *Les risques du test* $S(A^*, B^*)$ *vérifient :*

$$\alpha^* \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \quad et \quad \beta^* \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.10}$$

mais aussi

$$\alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta \tag{3.11}$$

Démonstration 3.5.2. *En appliquant le théoréme* (3.5.1) *au* $S(A^*, B^*)$*, on obtient*

$$\frac{1}{A^*} \geq \frac{\alpha^*}{1-\beta^*} \tag{3.12}$$

$$B^* = \frac{\beta^*}{1-\alpha^*} \tag{3.13}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha^*}{1-\beta^*} \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{3.14}$$

$$\frac{\beta^*}{1-\alpha^*} \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.15}$$

Ce qui implique

$$\alpha^* \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{3.16}$$

$$\beta^* \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{3.17}$$

Si on multiplie (3.14) *par* $(1-\beta)(1-\beta^*)$ *et (3.15) par* $(1-\alpha)(1-\alpha^*)$*, il en découle que*

$$(1-\beta)\alpha^* \leq \alpha(1-\beta^*) \tag{3.18}$$

$$(1-\alpha)\beta^* \leq \beta(1-\alpha^*) \tag{3.19}$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient aprés simplification :

$$\alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta \tag{3.20}$$

Dans la pratique, si α et β sont choisis dans l'intervalle $[0.01, 0.05]$, alors les proportions dans lesquelles α^* peut excéder α et β^* peut excéder β sont trés faibles (car $\frac{1}{1-\beta}$ et $\frac{1}{1-\alpha}$ sont proches de 1) et peuvent donc être négligées.

Exemple : Si $\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$, alors $\alpha^* \leq 0.01053$ et $\beta^* \leq 0.05051$.

La deuxiéme inégalité (3.9) du théoréme (3.5.1) montre que nécessairement une des deux inégalités $\alpha^* \leq \alpha$ et $\beta^* \leq \beta$ est réalisée. En conséquence, l'approximation de A par A^* et de B par B^* conduit au plus à l'augmentation d'un des risques et cela dans une proportion trés faible [22].

Cependant cette approximation accroît le nombre d'observations nécessaires au test pour prendre une décision. Mais il est possible de montrer que l'augmentation du nombre d'observations causée par l'approximation est relativement faible comme l'illustre la figure sivante :

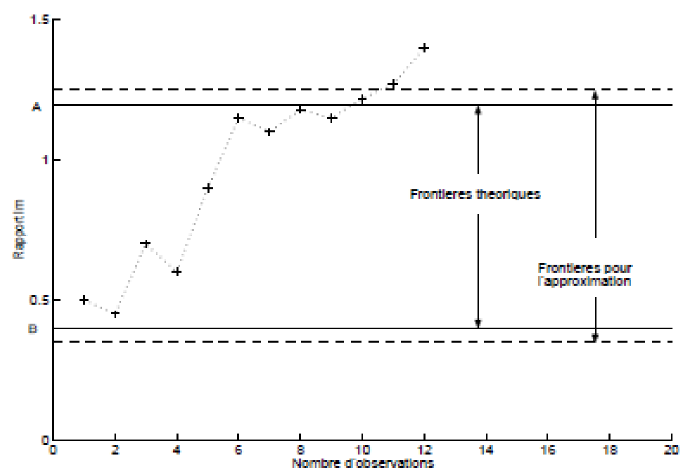

FIG. 3.4 – Augmentation du nombre d'observations

En pratique si le coût d'une nouvelle observation n'est pas trop élevé, si l'on désire obtenir un test séquentiel d'erreur de premiére espéce inférieure à α et d'erreur de deuxiéme espéce inférieure à β, on pose $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$, $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$ et on effectue le test selon de la définition (3.5.1).

3.5.4 Mise en œuvre du test séquentiel sur un exemple

On suppose que l'on dispose d'un échantillon de variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes et de même loi $N(\theta, \sigma^2)$ avec σ connu. On veut tester au moyen du TSRP, l'hypothése $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothése $H_1 : \theta = \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0$.

Si on souhaite obtenir un test tel que : [22]

$$P(Rejeter H_0 \mid H_0) \leq \alpha \;\; et \;\; P(Accepter H_0 \mid H_1) \leq \beta;$$

Oú α et $\beta \in [0.01, 0.05]$ on utilise l'approximation $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$

A l'issue de la m-iéme observation :
-on accepte H_0, si $\sum_{i=1}^{m} Z_i \leq \log B$,
-on accepte H_1, si $\sum_{i=1}^{m} Z_i \geq \log A$,

-on continue le test, si $\log B < \sum_{i=1}^{m} Z_i < \log A$.
avec Z_i défini par la relation (3.4).

Or

$$Z_i = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} X_i - \frac{1}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \tag{3.21}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{m} Z_i = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \tag{3.22}$$

Pour résumer :
On accepte H_0 si

$$\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \leq \log \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} X_i \leq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}[\log \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} X_i \leq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0} \log \frac{\beta}{1-\alpha} + n\frac{\theta_1+\theta_0}{2} = a_m$$

On accepte H_1 si

$$\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \geq \log \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} X_i \geq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}[\log \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} X_i \geq \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0} \log \frac{1-\beta}{\alpha} + n\frac{\theta_1+\theta_0}{2} = r_m$$

On prend une observation supplémentaire si

$$a_m < \sum_{i=1}^{m} X_i < r_m \tag{3.23}$$

En pratique on trace les deux droites paralléles :

$$\Delta_0 : y = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} x + \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \log \frac{\beta}{1 - \alpha} \tag{3.24}$$

$$\Delta_1 : y = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} x + \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \log \frac{1 - \beta}{\alpha} \tag{3.25}$$

Ensuite on place sur le même graphique les points de coordonnées $(m, \sum_{i=1}^{m} x_i)$ tant qu'ils sont dans la bande de plan définie par les deux droites et dés que l'un des points sort

de la bande de plan, on décide H_0 si L_0 est franchie et H_1 si L_1 est franchie.
Exemple d'application : ILLIG dans [22] a simulé des données selon plusieurs valeurs du paramétre θ et appliqué le test séquentiel décrit ci-dessus. Les figures Fig. (3.5) et Fig. (3.6) représentent les résultats obtenus respectivement pour $\theta \in \{0, 1\}$ et effectuer le test H_0 : "$\theta_0 = 1$",contre H_1 : "$\theta_1 = 2$" $\sigma = 1$, avec $\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$

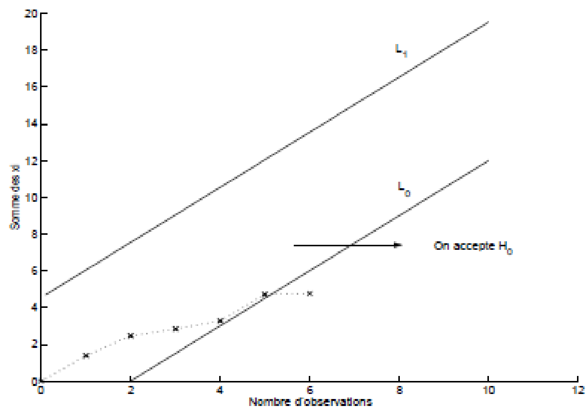

Fig. 3.5 – Représentation du rejet de $H_1(\theta = 1)$

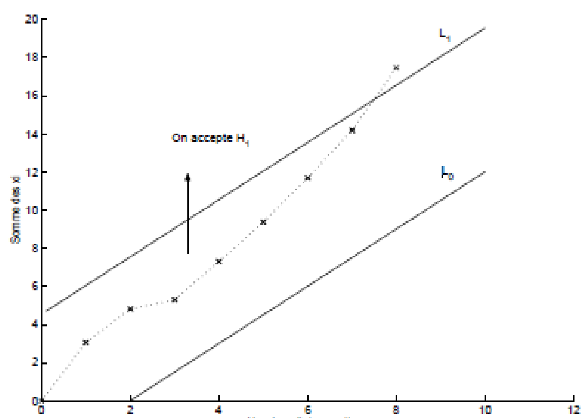

Fig. 3.6 – Représentation de l'acceptation de $H_1(\theta = 2)$

3.5.5 Fonction d'efficacité et fonction ASN

Dans ce paragraphe nous définissons la fonction d'efficacité d'un test séquentiel.

Définition 3.5.1. La fonction d'efficacité du test séquentiel du rapport des probabilités est la fonction :

$$\varpi : \mathsf{H} \to [0,1]$$

$$\theta \longmapsto \varpi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(Accepter H_0).$$

Il est intéressant de calculer la fonction d'efficacité car elle est définie pour toutes les valeurs possibles de θ dans le cas de test séquentiel du rapport des probabilités.

Lemme 3.5.1. *Soit Z une variable aléatoire réelle, $f(x)$ désigne la fonction de densité au point x. Si Z est absolument continue ou la probabilité que Z soit égale à x si Z est discréte.*

On suppose que $M(u) = E(e^{uZ})$ existe pour tout $u \in \mathbb{R}$ et qu'il existe un réel $0 < \delta < 1$ tel que

$$\mathbb{P}(e^Z > 1+\delta) > 0 \quad et \quad \mathbb{P}(e^Z < 1-\delta) > 0 \tag{3.26}$$

Alors

(i) Si $E(Z) > 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ admet une unique solution u_0 dans $]-\infty, 0[$.

(ii)Si $E(Z) < 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ admet une unique solution u_0 dans $]0, +\infty[$.

(iii) Si $E(Z) = 0$, alors l'équation $M(u) = 1$ n'admet pas de solution autre que 0.

Démonstration 3.5.3. *Voir la preuve [22]*

Remarque 3.5.4. La fonction d'efficacité d'un test de constantes associées A et B dépend de ces constantes. Le théoréme (3.5.3) explicite cette dépendance par l'approximation dite de Wald.

Théorème 3.5.3. *Si Z_1 vérifie les hypothéses du lemme* (3.5.1)*, alors la fonction d'efficacité $\varpi(\theta)$ d'un test séquentiel $S(A,B)$ peut être approximée par la formule suivante*

$$\varpi(\theta) \sim \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}} \tag{3.27}$$

avec $\forall\theta$ $h(\theta)$ est la solution non nulle, si elle existe, zéro sinon.

si Z_1 est absolument continue on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)})^{h(\theta)} f(x,\theta)dx = 1 \tag{3.28}$$

si Z_1 est discréte on

$$\sum_x (\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)})^{h(\theta)} f(x,\theta)dx = 1 \tag{3.29}$$

Démonstration 3.5.4. *Pour une preuve, voir ([22]).*

Remarque 3.5.5. Pour certains points, il est facile de calculer la valeur de la fonction d'efficacité. Par définition de $\varpi(\theta)$, on a $\varpi(\theta_1) = \beta$ et d'aprés la remarque (3.53) le théoréme (3.5.1), $\mathbb{P}($ Accepter $H_0 \mid H_0$ vraie $) = (1-\alpha)$. Donc $\varpi(\theta_0) = (1-\alpha)$

Exemple :

On se place à nouveau dans l'exemple d'un échantillon de loi $N(\theta, \sigma^2)$ avec σ connu.

Si on utilise les approximations de A et de B, d'aprés le théoréme (3.5.3), on a la formule d'approximation de la fonction d'efficacité :

$$\varpi(\theta) \sim \frac{(\frac{1-\beta}{\alpha})^{h(\theta)} - 1}{(\frac{1-\beta}{\alpha})^{h(\theta)} - (\frac{\beta}{1-\alpha})^{h(\theta)}} \tag{3.30}$$

Dans ce cas on a

$$h(\theta) = \frac{\theta_1 - \theta_0 - 2\theta}{\theta_1 - \theta_0} \qquad \forall\theta \tag{3.31}$$

Par conséquent pour tout θ

$$\varpi(\theta) \sim \frac{e^{\frac{\theta_1+\theta_0-2\theta}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha}} - 1}{e^{\frac{\theta_1+\theta_0-2\theta}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{1-\beta}{\alpha}} - e^{\frac{\theta_1+\theta_0-2\theta}{\theta_1-\theta_0}\log\frac{\beta}{1-\alpha}}} \tag{3.32}$$

La Fig. (3.7) représente l'approximation la fonction d'efficacité pour un échantillon de loi normale lorque $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$ et $\theta_1 = 2$, $\theta_0 = 1$.

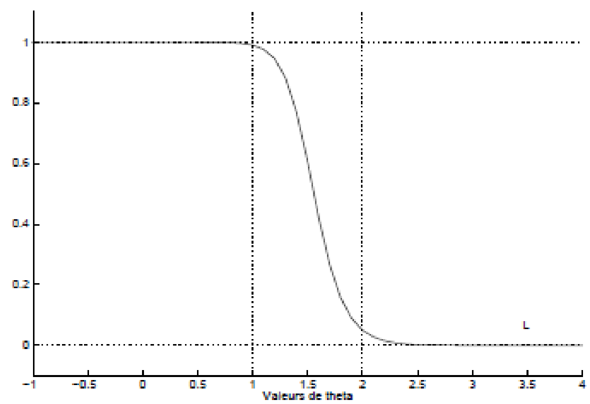

FIG. 3.7 – Approximation de la fonction d'efficacité

Nous allons définir dans cette sous section la fonction ASN (Average Sample Number).

Notons N le nombre d'observations nécessaires au test pour prendre une décision alors N est une variable aléatoire discréte dont nous noterons n la réalisation.

Définition 3.5.2. On appelle fonction ASN la fonction

$$\theta \longmapsto \mathbb{E}_\theta(N)$$

Nous allons exprimer la fonction ASN d'une maniére différente afin de pouvoir donner une expression de l'approximation facile à mettre en œuvre une approximation dont l'expression sera plus facile à calculer.

Notons $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ avec Z_i défini par la relation (3.4).

Théorème 3.5.4. *Soit $\theta \in \Theta$ fixé .Si $\mathbb{E}_\theta(\mid Z_1 \mid) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}_\theta(N)\mathbb{E}_\theta(Z_1) = \mathbb{E}_\theta(S_N).$$

Démonstration 3.5.5. *Pour une preuve, voir ([22]).*

Théorème 3.5.5. *Soit $\theta \in \Theta$ fixé .*

(i) Si $\mathbb{E}_\theta(\mid Z_1 \mid) < +\infty$, et $\mathbb{E}_\theta(Z_1) \neq 0$ alors

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1-\varpi(\theta))\log A + \varpi(\theta))\log B}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)}$$

(ii) Si $\mathbb{E}_\theta(Z_1) = 0, Var_\theta(Z_1) < +\infty$ et $Var_\theta(Z_1) \neq 0$ alors,

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1-\varpi(\theta))(\log A)^2 + \varpi(\theta)(\log B)^2}{Var_\theta(Z_1)}$$

Démonstration 3.5.6. (i) *Si* $\mathbb{E}_\theta(Z_1) < +\infty$ *et* $\mathbb{E}_\theta(Z_1) \neq 0$ *alors d'aprés le théoréme* (3.5.4)

$$\mathbb{E}_\theta(N) = \frac{\mathbb{E}_\theta(S_N)}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)} \tag{3.33}$$

Si on néglige les excés $S_N - \log A$ *et* $S_N - \log B$ *de* S_N *au-delà des bornes* $\log A$ *et* $\log B$*, alors on peut dire que* S_N *prend approximativement les valeurs* $\log A$ *et* $\log B$ *avec les probabilités respectives* $\mathbb{P}_\theta(S_N \geq \log A)$ *et* $\mathbb{P}_\theta(S_N \leq \log B)$*. Donc*

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \mathbb{P}_\theta(S_N \geq \log A)\log A + \mathbb{P}_\theta(S_N \leq \log B)\log B \tag{3.34}$$

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \mathbb{P}_\theta(Accepter H_1)\log A + \mathbb{P}_\theta(Accepter H_0)\log B \tag{3.35}$$

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim (1 - \varpi(\theta))\log A + \varpi(\theta))\log B \tag{3.36}$$

Et enfin,

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1 - \varpi(\theta))\log A + \varpi(\theta))\log B}{\mathbb{E}_\theta(Z_1)} \tag{3.37}$$

pour la preuve de (ii) *voir ([22])*

Exemple : Reprenons l'exemple d'un échantillon de loi normale $N(\theta, \sigma^2)$ avec $\sigma = 1$

Déterminons la fonction ASN pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_0$. On obtient dans le cas particulier des lois normales

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(Z_1) = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2 \neq 0$$

et

$$\mathbb{E}_{\theta_0}(Z_1) = -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2 \neq 0$$

En prenant $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$ grâce au théoréme (3.5.5) précédent, les approximations de la fonction ASN en θ_0 et θ_1 sont données par :

-sous H_0 $\mathbb{E}_{\theta_0}(N) \sim \frac{\alpha \log A + (1-\alpha)\log B}{-\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2}$ car $\varpi(\theta_0) = 1 - \alpha$

-sous H_1 $\mathbb{E}_{\theta_1}(N) \sim \frac{(1-\beta)\log A + \beta \log B}{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)^2}$ car $\varpi(\theta_1) = \beta$

Pour θ quelconque on a

$$\mathbb{E}_\theta(Z_1) = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) + (\theta_1 - \theta_0)\theta \tag{3.38}$$

et

$$\mathbb{E}_\theta(Z_1) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \tag{3.39}$$

Donc pour $\theta \neq \frac{\theta_1+\theta_0}{2}$; l'approximation de la fonction ASN est donnée par la formule

$$\mathbb{E}_\theta(N) \sim \frac{(1-\varpi(\theta))\log A + \varpi(\theta)\log B}{-\frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) + (\theta_1 - \theta_0)\theta}$$

En utilisant l'approximation de Wald de la fonction d'efficacité, on est en mesure de tracer une approximation de la fonction ASN (Fig.3.8) pour $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_1 = 2$.

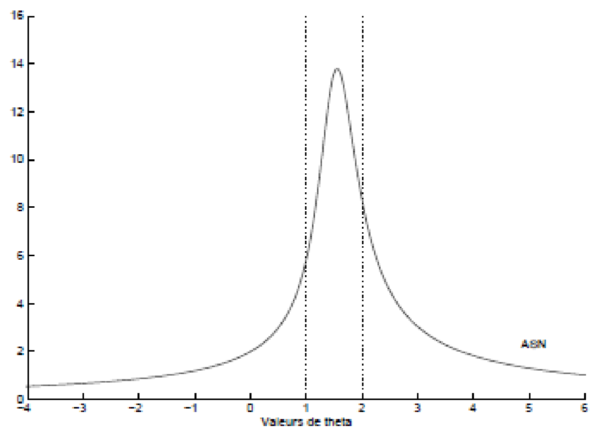

Fig. 3.8 – Appoximation de la fonction ASN

3.5.6 Gain de la méthode séquentielle

Par le biais d'un exemple nous comparons étudier le test séquentiel du rapport de probabilités au test classique et nous constatons le gain en nombre d'observations de la méthode séquentielle.

Supposons que l'on dispose d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ (n grand) de variables aléatoires indépendantes identiquement distribué selon une loi normale $N(\theta, 1)$.

Nous nous proposons de tester H_0 : "$\theta = \theta_0$" contre H_1 : "$\theta = \theta_1$" avec $\theta_0 < \theta_1$ au risque de premier espéce α et de puissance $1 - \beta$.

Nous effectuons dans un premier temps le test classique et ensuite on mettra en œuvre un test séquentiel, enfin on comparera les deux méthodes au niveau du nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision ([22], [21]).

1. **Test classique :**

   Soient donc α et β fixés, on va déterminer $n(\alpha, \beta)$ le nombre d'observations nécessaires pour obtenir une puissance de test égale à $1 - \beta$.

   Par application du lemme de Neyman-Pearson, on obtient un test ϕ de niveau α et de puissance maximale. Le test ϕ s'écrit

   $$\phi = \mathbb{I}_{\{\bar{X}_n > k\}} \ \ ou \ \ \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   Puisque le test doit être de niveau α et de puissance $1 - \beta$, il doit vérifier les deux équations :

   $$\mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X}_n \leq k) = 1 - \alpha \tag{3.40}$$

   $$\mathbb{P}_{\theta_1}(\bar{X}_n \leq k) = \beta \tag{3.41}$$

   Les equations (3.40 et (3.41) permettent de déterminer k et $n(\alpha, \beta)$.

   D'une part on a

   $$\mathbb{P}_{\theta_0}(\bar{X}_n \leq k) = 1 - \alpha$$

   $$\Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}_{\theta_0}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)) \leq \sqrt{n}(k - \theta_0) = 1 - \alpha$$

   $$\Leftrightarrow \qquad \phi(\sqrt{n}(k - \theta_0)) = 1 - \alpha$$

   oú ϕ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite car $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)$ suit une loi $N(0, 1)$.

   Et d'autre part on a,

   $$\mathbb{P}_{\theta_1}(\bar{X}_n \leq k) = \beta$$

   $$\Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}_{\theta_1}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_1)) \leq \sqrt{n}(k - \theta_1) = \beta$$

   $$\Leftrightarrow \qquad \phi(\sqrt{n}(k - \theta_1)) = \beta$$

   En notant λ_1 et λ_0 les réels tels que $\phi(\lambda_0) = 1 - \alpha$ et $\phi(\lambda_1) = \beta$, on obtient alors

   $$\begin{cases} \lambda_0 = \sqrt{n}(k - \theta_0) \\ \lambda_1 = \sqrt{n}(k - \theta_1) \end{cases} \tag{3.42}$$

   Finalement, en résolvant le systéme d'équations (3.42) on obtient

   $$\begin{cases} k = \theta_0 + \sqrt{n}\lambda_0 \\ \sqrt{n}\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\theta_1 - \theta_0} \end{cases} \tag{3.43}$$

   On en déduit donc que

   $$n(\alpha, \beta) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \tag{3.44}$$

2. **Test séquentiel :**
   On approxime A par $\frac{1-\beta}{\alpha}$ et l'approximation de B par $\frac{\beta}{1-\alpha}$. D'aprés le théoréme (3.5.5) on a
   $$\mathbb{E}_{\theta}(N) \sim \frac{(1-\varpi(\theta))\log A + \varpi(\theta))\log B}{\mathbb{E}_{\theta}(Z_1)}$$
   avec $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ et $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$
   Donc
   $$\mathbb{E}_{\theta_0}(N) \sim \frac{\alpha \log A + (1-\alpha)\log B}{\mathbb{E}_{\theta}(Z_1)}$$
   et
   $$\mathbb{E}_{\theta_1}(N) \sim \frac{(1-\beta)\log A + \beta \log B}{\mathbb{E}_{\theta}(Z_1)}$$
   D'aprés les calculs de l'exemple précédent
   $$\mathbb{E}_{\theta_1}(Z_1) = \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_0)^2 \;\; et \;\; \mathbb{E}_{\theta_0}(Z_1)\frac{-1}{2}(\theta_1-\theta_0)^2$$
   On a finalement
   $$\frac{\mathbb{E}_{\theta_1}(N)}{n(\alpha,\beta)} = \frac{2}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[\beta\log B + (1-\beta)\log A] \tag{3.45}$$
   et
   $$\frac{\mathbb{E}_{\theta_0}(N)}{n(\alpha,\beta)} = -\frac{2}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[(1-\alpha)\log B + \alpha\log A] \tag{3.46}$$
   On peut remarquer que les expressions (3.45 et 3.46 ne dépendent pas de θ_0 et θ_1.
   Pour le test dont nous utilisons les approximations, les pourcentages moyens d'économie sont
   -sous H_0 : $100[1-\frac{\mathbb{E}_{\theta_0}(N)}{n(\alpha,\beta)}]$.
   -sous H_1 : $100[1-\frac{\mathbb{E}_{\theta_1}(N)}{n(\alpha,\beta)}]$
   Dans le test sequentiel du rapport des probabilités, on utilise les approximations de A et B, ce qui implique comme nous l'avons vu précédemment une augmentation du nombre d'observations. Donc l'économie obtenue avec les valeurs théoriques ne peut être que supérieur à l'économie obtenue par le test séquentiel utilisant les approximations de A et B.

Application numérique :
$\alpha = 0.01$ et $\beta = 0.05$d'où $\phi(\lambda_0) = 0.99$ et $\phi(\lambda_1) = 0.05$. En utilisant la table de la loi $N(0,1)$ on trouve $\lambda_0 = 2.33$ et $\lambda_1 = -1.64$

Le pourcentage d'économie sous H_1 est de l'ordre de 47% tandis que le pourcentage d'économie sous H_0 est d'environ 63%.

3.5.7 Test tronqé

Présentation

Nous avons vu sur un exemple que le test séquentiel du rapport des probabilités est plus économe en nombre d'observations qu'un test classique.

Cependant, le gain obtenu(en terme d'observation) donné par $\mathbb{E}_N$ est un gain moyen. Dans certains cas , pour prendre une décision on auara besoin d'une trés grande taille d'échantillon à tester, Il est donc possible que pour certaines valeurs de $\theta, E_\theta(N)$ dépasse $n(\alpha, \beta)$, nombre d'observations d'un test non séquentiel.

C'est pourquoi Wald propose de tronquer la procédure séquentielle. Pour ce fait,il a définit une limite supérieure n_0 pour le nombre d'observations. Si le test séquentiel du rapport des probabilités n'a pas pris de décision pour $m \leq n_0$ on adopte à l'étape n_0 la régle de décision suivante [22] :

- on accepte H_0 si $\log B < \sum_{i=0}^{n_0} Z_i \leq 0$

- on accepte H_1 si $0 < \sum_{i=0}^{n_0} Z_i < \log A$

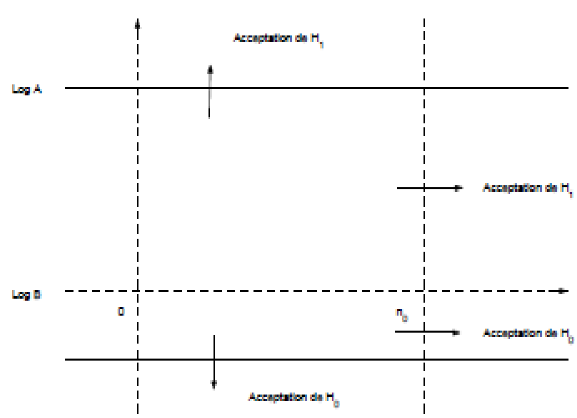

FIG. 3.9 – Fonctionnement du test séquentiel tronqué

Cependant, la troncation du test risque de changer les erreurs de premiére et deuxiéme espéces α et β. De plus les effets de la troncation vont dépendre du choix de n_0.

3.6 Test séquentiel restreint

Définition 3.6.1. Parmi les tests qui ont été developpé dans le cadre des tests séquentiels le test séquentiel restreint qui consiste à arrêter l'éxperience une fois qu'une décision de rejet de H_0 peut être prise vu à la position de sa région d'acceptation comme l'illustre la figure (3.10) [31]

3.6.1 Propriétés du test restreint

Ne s'arrête plus tôt que si on accepte l'hypothèse alternative H_1.
Si on va jusqu'au bout, il accepte plus souvent l'hypothèse nulle H_0 que le test classique.

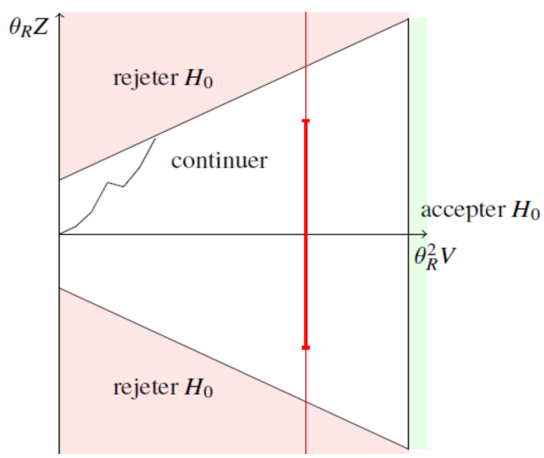

FIG. 3.10 – Test bilatéral restreint

3.7 Test séquentiel groupé ou répété

Définition 3.7.1. Test groupé, permet de répéter plusieurs fois en cours des essais (des essais multiples), et d'arrêter l'essai dès qu'il est possible de rejeter l'hypothèse nulle.

Test groupè ou l'essai séquentiel d'hypothèse est analyse statistique où la taille de l'échantillon n'est pas fixée à l'avance. Au lieu de cela des données sont évaluées pendant qu'elles sont rassemblées, et davantage de prélèvement est arrêté selon une règle d'arrêt prédéfinie dès qu'on observera des résultats significatifs ([26], [28]).

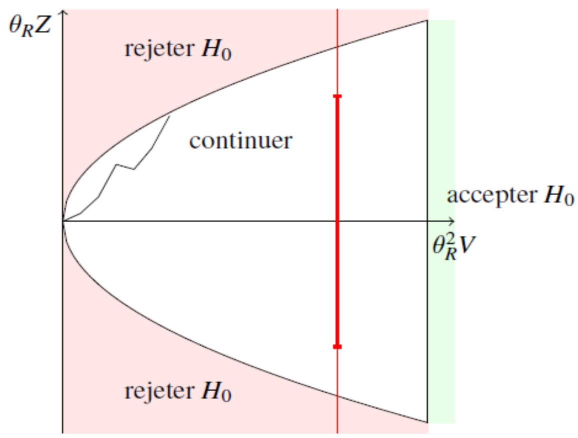

FIG. 3.11 – Test bilatéral répété ou groupé

3.7.1 Propriétés des tests répétés ou groupés

Le cadre séquentiel est naturel pour les tests répétés.
Comme pour les tests restreints, on ne s'arrête prématurément que pour refuser l'hypothèse nulle H_0.
Le test restreint est plus économique sous l'hypothèse alternative H_1 et le test répété sous l'hypothèse nulle H_0, [31].

3.7.2 Réalisation des analyses séquentielles de groupe

Dans la procédure séquentielle de groupe, un analyse doit être réalisée tous les $2n$ sujets pour binaires ou quantitatifs et tous les $2d$ événements pour censures. Lors de chaque analyse, les statistiques Z et V (coordonnées du nouveau point) sont calculées et le point obtenu est porté dans le plan séquentiel.

Si le trajet séquentiel ainsi prolongé ne franchit aucune frontière, l'inclusion dans l'essai de $2n$ nouvelles observations (exepmle : patients) ou observation de $2d$ nouveaux événements poursuit.

Si, au contraire, le trajet séquentiel franchit une frontière, pas d'inclusion de nouvelle observation ou l'obsérvation de nouveaux événements et une conclusion en est tirée ([21]).

3.7.3 Calcul des statistiques Z et V

Le calcul des statistiques Z et V se fait selon le critére de jugement et est résumé dans le tableau suivant : [21]

Critère de jugement	Z	V	Légende
Binaire	$Z = \frac{n_1 S_2 + n_2 S_1}{n}$	$V = \frac{n_1 n_2 S E}{n^3}$	n_1, n_2 : effectif de chacun des 2 groupes $n = n_1 + n_2$ S_1, S_2 : nombres des succès $S = S_1 + S_2$ E_1, E_2 : nombre d'échec $E = E_1 + E_2$
Quantitatif	$Z = \frac{n_1 T_2 - n_2 T_1}{n\sigma^2}$	$V = \frac{n_1 n_2}{n\sigma^2}$	σ^2 : variance sur l'ensemble des sujets évalués n T_1, T_2 : sommes des valeurs
Censuré	$Z = d_{i_1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i n_{i_1}}{n_i}$	$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i (n_i - d_i)}{n_i - 1} \times \frac{n_{i_1}}{n_i} \frac{n_{i_2}}{n_i}$	d_{i_1}, d_{i_2} : nombres des événements observés n_{i_1}, n_{i_2} :nombres des sujets à risque

FIG. 3.12 – Calcul des statistiques Z et V

3.8 Test séquentiel Triangulaire

3.8.1 Définition du Test Triangulaire

Le Test Triangulaire, qui appartient à la catégorie des analyses séquentielles, permet de réaliser des analyses répétées au cours du temps, et de décider l'arrêt de l'essai, dès que les données recueilliés sont suffisantes pour conclure.

Le Test Triangulaire en formulation unilatérale, les frontières sont constituées de 2 droites sécantes délimitant une région de continuation triangulaire fermée, d'où un nombre d'analyses maximal prédéterminé.

Procédure plus connue sous le nom Test Triangulaire, puisque les frontières forment un triangle avec le vertical égale à zéro.

Par exemple le Test Triangulaire, permet d'interrompre l'essai plus tôt que prévu, et aussi de faire bénéficier plus rapidement tous les malades d'un nouveau traitement, et d'éviter l'utilisation prolongée d'un traitement d'efficacité moindre ([29], [21]).

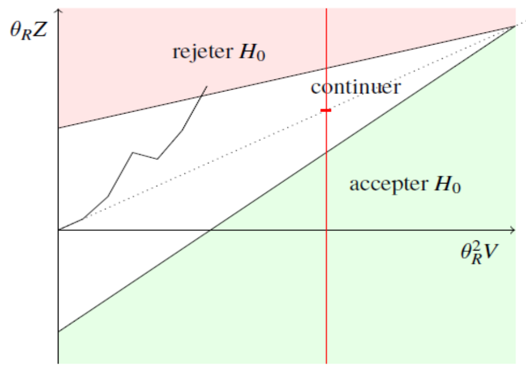

FIG. 3.13 – Test triangulaire unilatéral

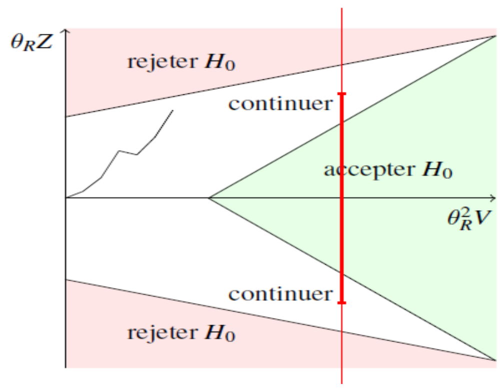

FIG. 3.14 – Test triangulaire bilatéral

3.8.2 Propriétés du test triangulaire

C'est un plan fermé. On s'arrête obligatoirement au plus tard à un temps fini maximal. S'arrête souvent un peu plus tard que le test du rapport de vraisemblance ([29], [21]).

Nous expliquons tout ce qui suit à travers le travail de Zerari Amel [21] qui est porté sur l'étude de plans d'expérience séquentiels appliqués aux essais cliniques. Dans le développement d'un nouveau médicament, c'est au cours de la phase 2 que la relation dose-réponse est évaluée et que les doses les plus prometteuses sont sélectionnées pour la phase 3. A coté du dispositif en groupes parallèles de doses, il existe des dispositifs adaptatifs visant à réduire le nombre de patients soumis aux doses les moins efficaces.

3.8.3 Détermination des valeurs attribuées aux paramètres

- Choix des risques α et β

Il s'agit de déterminer respectivement les probabilités de déclarer efficace une molécule dont le taux de réponse est égal à P_S et de ne pas détecter l'efficacité d'une molécule dont le taux de réponse est égal à P_N. Le meilleur choix serait de prendre $\alpha = 0.05$ et $\beta = 0.05$ mais il entraînerait l'inclusion d'un nombre élevé de patients. Si l'on choisit 2 valeurs différentes pour α et β, on privilégie ainsi un bon compromis entre le nombre de sujets nécessaires pour conclure et une valeur admissible du risque α (exemple : $\alpha = 0.05$ et $\beta = 0.10$).

- Choix de P_S
  Il s'agit de déterminer le taux de réponse maximum pour lequel on considère qu'il n'est pas nécessaire de poursuivre l'évaluation du produit en phase 3.
- Choix de P_N
  Il s'agit de déterminer le bénéfice minimum cliniquement intéressant par rapport à P_N ,c'est-à-dire le taux de réponse pour lequel les investigateurs considèrent qu'il est absolument indispensable de poursuivre les études de phase 3.

3.8.4 Détermination des frontières de la région de continuation

La région de continuation du test triangulaire est déterminée par l'axe des ordonnées et 2 droites sécantes qui constituent les frontières supérieure avec la région de rejet de H_0 et inférieure avec la région de non rejet de H_0 . L'axe des ordonnées, statistique Z, mesure la différence entre les 2 groupes. L'axe des abscisses, statistique V, représente la quantité d'information.

L'équation de la frontière supérieure s'écrit :

$$Z = a + \mu V \tag{3.47}$$

L'équation de la frontière inférieure s'écrit :

$$Z = -a + \lambda V \tag{3.48}$$

D'où $a, -a$ sont les ordonnées à l'origine et λ et μ sont les pentes.

L'essai triangulaire est l'une des nombreuses conceptions d'essai séquentielles possibles ; mais l'essai triangulaire à certaines caractéristiques très attrayantes. Si la différence entre traitement θ_a est grande, elle mènera à un chemin témoin en pente rapide croissant , et par conséquent à une petite épreuve parce que la frontière à $Z = a + \mu V$ est atteinte rapidement. S'il n'y a aucune différence entre le traitement, le chemin témoin se déplacera horizontalement et croisera $Z = -a + \lambda V$ la frontière rapidement qui mène également à une petite épreuve.

Si la différence de traitement est négative, $Z = -a + \lambda V$ la frontière sera croisée encore plus vite.

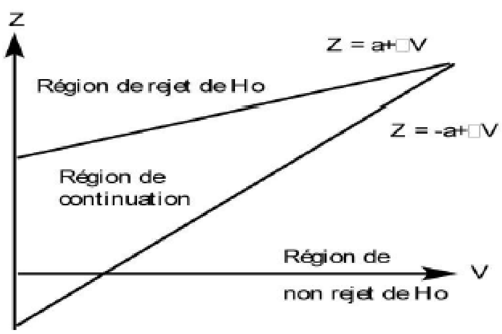

FIG. 3.15 – Frontiéres du Test Triangulaire, en formulation unilatérale

Les valeurs de ces 3 paramètres (α et β, P_S, P_N) dépendent des valeurs des risques α et β, de la différence θ_a à mettre en évidence et de la fréquence des analyses.

Si $\alpha = \beta$ alors

$$a = a^{'} - 0.583\sqrt{I} \tag{3.49}$$

$$a^{'} = \frac{2}{\theta_a} \ln \frac{1}{2\alpha} \tag{3.50}$$

et

$$\lambda = \frac{3\theta_a}{4} \tag{3.51}$$

et

$$\mu = \frac{\theta_a}{4} \tag{3.52}$$

Le terme $0.583\sqrt{I}$ est une correction afin de tenir compte du caractère groupé de l'analyse des données. I représente l'accroissement de la quantité d'information entre 2 analyses et détermine ainsi la fréquence des analyses réalisées tous les n patients. Le calcul de I varie en fonction de la typologie du critère de jugement.

Critère	I	Légende
Binaire	$\frac{2n}{4}\overline{P}(1-\overline{P})$	$\overline{P}$: taux de succès moyennes $(\frac{P_N+P_S}{2})$ $2n$: fréquence des analyses
Quantitatif	$\frac{2n}{4\sigma^2}$	σ^2 : variance du critère de jugement commune aux 2 groupes.
Censuré	$\frac{d}{4}$	Analyse tous événement

FIG. 3.16 – Calcul de I

La valeur de θ_a se calcule également de façon différente selon la typologie du critère de jugement.

Critère	θ_a	Légende
Binaire	$\ln \frac{P_N(1-P_S)}{P_S(1-P_N)}$	P : proportion de succès.
Quantitatif	$\mu_N - \mu_S$	μ : moyenne.
Censuré	$\ln \frac{\lambda_N(t)}{\lambda_S(t)}$	$\lambda(t)$: risque instantané.

FIG. 3.17 – Calcul de θ_a

L'indice N se référé au nouveau traitement.

L'indice S se référé au placebo.

Si les risques de 1ére espèce α et de 2éme espèce β ont des valeurs différentes, on utilise une valeur corrigée de θ_a : θ'_a

Si $\alpha \neq \beta$: alors

$$\theta'_a = \theta_a \frac{2\phi^{-1}(1-\alpha)}{\phi^{-1}(1-\alpha) + \phi^{-1}(1-\beta)} \tag{3.53}$$

(ϕ lit la table de la loi normale réduite) Pour $\alpha = 0.05$ et $\beta = 0.10$ alors $\phi^{-1}(1-\alpha) = 1.6449$ et $\phi^{-1}(1-\beta) = 1.2816$

D'oú

$$\theta'_a = \theta_a \frac{2 \times 1.6449}{1.6449 + 1.2816} = \theta_a \times 1.1241$$

En situation bilatérale, la valeur $\frac{\alpha}{2}$ doit être utilisée dans les calcul,(Si $\alpha \neq \beta$ alors θ'_a remplace θ_a

3.8.5 Exemples de calcul des équations des frontières de la zone de continuation

En appliquant les formules dans les tableaux (fig 3.16 et fig 3.17) :

Critère de jugement binaire

On cherche à mettre en évidence une amélioration du pourcentage de succès P de 60% à 80% ($P_S = 0.60$ et $P_N = 0.80$).

1ére hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.05$, $n = 10$ (analyse tous les 20 sujets)

En appliquant les formules précédentes :

$$\theta_a = \ln \frac{P_N(1-P_S)}{P_S(1-P_N)} = \ln \frac{0.80(1-0.60)}{0.60(1-0.80)} = 0.981$$

$$a' = \frac{2}{\theta_a} \ln \frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{0.981} \ln \frac{1}{0.10} = 4.694$$

$$a = a' - 0.583\sqrt{I}$$

$$I = \frac{2n}{4}\overline{P}(1-\overline{P}) = \frac{20}{4}(0.70 \times 0.30) = 1.05$$

$$a = 4.694 - 0.583\sqrt{1.05} = 4.097$$

$$\lambda = \frac{3\theta_a}{4} = 0.736$$

$$\mu = \frac{\theta_a}{4} = 0.245$$

D'où les équations :

$$Z = 4.097 + 0.245V$$

$$Z = -4.097 + 0.736V$$

2éme hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.10$, $n = 10$ (analyse tous les 20 sujets)

Dans la mesure où α et β ont des valeurs différentes, on remplace θ_a par θ'_a dans le calcul des paramètres.

$$\theta'_a = \theta_a \frac{2\phi^{-1}(1-\alpha)}{\phi^{-1}(1-\alpha)+\phi^{-1}(1-\beta)}$$

$$= \theta_a \frac{2 \times 1.645}{(1.645 + 1.282)}$$

$$= \theta_a \times 1.124 = (0.981 \times 1.124) = 1.103$$

Ce qui implique :

$$\theta'_a = 4.177 \qquad \theta_a = 3.580$$

$$\lambda = 0.827 \qquad \mu = 0.276$$

D'où les frontières suivantes :

$$Z = 3.580 + 0.276V$$

$$Z = -3.580 + 0.827V$$

Critère de jugement quantitatif

On cherche à mettre en évidence une augmentation d'une unité de la moyenne ($\mu_N - \mu_S = 1$)

1ére hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.05$, $n = 10$ (analyse tous les 20 sujets)$\sigma^2 = 2$

En appliquant les formules précédentes :

$$\theta_a = \mu_N - \mu_S = 1$$

$$I = \frac{2n}{4\sigma^2} = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$a' = \frac{2}{\theta_a} \ln \frac{1}{2\alpha} = 2 \ln \frac{1}{0.10} = 4.605$$

$$a = a' - 0.583\sqrt{I} = 4.605 - 0.583\sqrt{2.5} = 3.683$$

$$\lambda = \frac{3\theta_a}{4} = 0.750$$

$$\mu = \frac{\theta_a}{4} = 0.250$$

D'où :

$$Z = 3.683 + 0.250V$$

$$Z = -3.683 + 0.750V$$

2éme hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.10$, On remplace dans les formules θ_a par θ'_a :

$$\theta'_a = \theta_a \frac{2\phi^{-1}(1-\alpha)}{\phi^{-1}(1-\alpha) + \phi^{-1}(1-\beta)}$$

$$= \theta_a \frac{2 \times 1.645}{(1.645 + 1.282)}$$

$$= \theta_a \times 1.124 = (1 \times 1.124) = 1.124$$

Ce qui implique :

$$\theta'_a = 4.097 \qquad \theta_a = 3.175$$

$$\lambda = 0.843 \qquad \mu = 0.281$$

D'où les frontières suivantes :

$$Z = 3.175 + 0.281V$$

$$Z = -3.175 + 0.843V$$

Critère de jugement censuré

On cherche à mettre en évidence une augmentation de 1.5 du risque de survenue de l'événement.

1ére hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.05$, $n = 10$ (analyse tous les 20 événements ($d = 20$))

En appliquant les formules précédentes :

$$\theta_a = ln\frac{\lambda_N}{\lambda_S} = \ln 1.5 = 0.405$$

$$I = \frac{d}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$a' = \frac{2}{\theta_a}\ln\frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{0.405} \times 2.303 = 11.373$$

$$a = a' - 0.583\sqrt{I} == 11.373 - 1.304 = 10.069$$

$$\lambda = \frac{3\theta_a}{4} = \frac{3 \times 0.405}{4} = 0.304$$

$$\mu = \frac{\theta_a}{4} = \frac{0.405}{4} = 0.101$$

D'où les équations :

$$Z = 10.069 + 0.101V$$

$$Z = -10.069 + 0.304V$$

2éme hypothèse $\alpha = 0.05$ (situation unilatérale), $\beta = 0.10$,(analyse tous les 20 événements)

Dans la mesure où α et β ont des valeurs différentes, on remplace θ_a par θ'_a dans le calcul des paramètres.

$$\theta'_a = \theta_a\frac{2\phi^{-1}(1-\alpha)}{\phi^{-1}(1-\alpha) + \phi^{-1}(1-\beta)}$$

$$= \theta_a\frac{2 \times 1.645}{(1.645 + 1.282)}$$

$$= \theta_a \times 1.124 = 0.405 \times 1.124 = 0.456$$

Ce qui implique :

$$\theta'_a = 10.105 \qquad \theta_a = 8.801$$

$$\lambda = 0.342 \qquad \mu = 0.114$$

D'où les frontières suivantes :

$$Z = 8.801 + 0.114V$$

$$Z = -8.801 + 0.342V$$

Conclusion

Le Test Triangulaire, qui appartient à la catégorie des méthodes séquentielles groupées, permet de réaliser des analyses répétées au cours du temps et de décider l'arrêt de l'essai dès que les données recueillies sont suffisantes pour conclure.

Grâce à sa région de continuation fermée, le nombre d'analyses à effectuer avec le Test Triangulaire est limité, ce qui lui donne l'avantage sur le test Séquentiel du Rapport des Probabilités.

En outre, le Test Triangulaire est facile à mettre en œuvre, les équations des frontières aisément calculables ainsi que les valeurs de Z et V déterminées à chaque analyse. Il peut aussi bien s'appliquer aux critères binaires ou quantitatifs qu'aux données censurées. De plus, il permet une réduction de l'ordre de 30 à 50% du nombre de sujets à inclure par rapport aux essais cliniques se déroulant en une seule étape. Enfin et surtout, le Test Triangulaire permet d'apporter une solution aux problèmes éthiques soulevés par les essais de trop longue durée.

Conclusion générale

Ce travail est consacré à l'étude des tests séquentiels. Mais avant d'aborder ces aspects, nous avons rappelé un certain nombre de notions de base de tests en générale puis on a traité les deux grands types de test dont on a conclu que les tests paramétriques nécessitent le respect des hypothèses de base faites lors de leur conception. La violation des conditions d'application de ces tests statistiques donne souvent lieu à de fausses interprétations des résultats obtenus, puisque rien ne garantit la précision des méthodes en dehors de leurs hypothèses d'utilisation. Et lorsque les conditions de réalisation des tests ne sont pas vérifiées (distribution des variables non identifiées ou non identifiables, non-égalité des variances, etc.), il convient d'utiliser d'autres tests qui permettent de s'affranchir de ces conditions. Il s'agit des tests dites non-paramétriques qui restent valides quelle que soit la distribution des données (y compris si les données sont Gaussiennes, ou Poissonniènes, ou Binomiales, etc., mais, dans ces cas, la puissance des tests (c'est-à-dire leur capacité à détecter un effet) est généralement plus faible que leur équivalent en « paramétrique »).

Ensuite nous nous sommes intéressés aux procédures séquentielles, connues pour nécéssiter un nombre d'observations inférieur en moyenne, à celui d'un test classique, pour prendre une décision.

En statistique, l'analyse séquentielle ou le test d'hypothèse séquentiel est une analyse statistique où la taille de l'échantillon n'est pas fixée à l'avance. Plutôt, les données sont évaluées au fur et à mesure qu'elles sont recueillies, et l'échantillonnage est arrêté selon une règle d'arrêt prédéfinie, dès que des résultats significatifs sont observés. Ainsi, une conclusion peut parfois être atteinte à un stade beaucoup plus précoce que ce qui serait possible avec des tests d'hypothèse ou des estimations plus classiques, à un coût financier ou humain par conséquent inférieur.

La technique des tests séquentiels est peu enseignée dans le supérieur. Cependant, elle est très utilisée en fiabilité et plus généralement pour tout problème de certification, comme par exemple celle de médicaments nouveaux. En effet cette technique permet une économie de mesures et par là même de temps, de l'ordre de 50% en moyenne.

L'analyse séquentielle s'était développée solidement mais à un rythme quelque peu inégal pendant les dernières six décennies. Il y a maintenant un arsenal riche des techniques et de concepts, des méthodes et des théories, qui fourniront une base forte pour d'autres avances et percées. Le sujet est encore vibrant après six décennies du développement continuel, avec beaucoup de problèmes non résolus importants et avec de nouveaux problèmes intéressants apportés dedans d'autres champs.

Enfin Nous avons alors été naturellement conduits à étudier les différents types des tests séquentiels, on a commancé par le premier test séquentiel qui a été introduit par Wald les tests séquentiels du rapport des probabilités. Nous avons vu sur un exemple que ce dérnier peut être plus économe en nombre d'observations qu'un test classique. On peut alors être tenté d'abandonner les tests classiques au profit des tests séquentiels, puis on a juste cité l'éxistance d'un test séquentiel restreint vu à l'inutilité en pratique, ensuite on s'est appuyé sur un travail de [21] pour expliqué le Test séquentiel groupé et test séquentiel triangulaire qui sont plus utilisables dans le domaine médical. Le test séquentiel triangulaire a l'avantage sur le test Séquentiel du Rapport des Probabilités grâce à la facilité de le mettre en œuvre.

Bibliographie

[1] V. Monbet, *Tests Statistiques (Notes de cours)*. L2S1, 2009.

[2] D. Mourchiroud, *Mathhématiques : Outils pour la Biologie*. Deug- SV-UCBL, 18/02/ 2003.

[3] Olivier Gaudoin, *Principes et Méthodes Statistiques : Notes de cours*.

[4] Jean-Jacques Ruch, *Statistique : Tests D'hypotéses (Préparation à l'agrégaration)*. Bordeaux1, 2012- 2013.

[5] Khaled Dib, *Tests D'hypothéses dans un Modéle de Censure, Mémoire Option Probabilités et Statistiques* .

[6] Etienne Birmelé, *Tests non paramétriques*. M1IMSV.

[7] Frédéric Bertand, *Tests Paramétriques*. Université de Strasbourg,France, 01/06/2010.

[8] B.Riou, P.Landais, *Principes des tests D'hypothéses en Statistiques, Article Spécial*. Elsevier , Paris, 1998.

[9] Laurence Grammont *Cours Statistiques Inférentielles*. Septembre 19, 2003.

[10] Michaël Genin *Tests non paramétriques*.EA2694-Santé Publique. Université de Lille2.

[11] Jules Verne, *Les Statistiques dits "Non Paramétrique*. Université de Pécardie

[12] Mario Cannavacciuolo, *Tests non paramétriques*. 2002.

[13] Ségolen Geffray, *Quelques Tests*.Ecole Doctorat Chimie Biologie, 2008-2009

[14] J.Gaudart *Tests non paramétriques*. LERTIM, Faculté de Médecine, Marseille

[15] Sébastien Déjean, *Quelques Mots sur les Tests Non Paramétriques*. UT1 Capitole,Institue de Mathématiques de Toulouse, 13 Mai 2014

[16] Catherine Matias, *Introduction à la Statistique non paramétrique*.CNRS ,Laboratoire Statistique et Génome,ENSIIE, 2013/2014

[17] Pierre Legendre et Daniel Borcard , *Comparaison de plus de deux groupes.*Université de Montéréal, 2007.

[18] Fabrice Heitz,*Statistiques cours1 : Test D'hypothése* , Octobre 2014.

[19] Gilbert Colletaz, *Statistique Non Paramétrique Elementaire, Cours de M2 ESA*. université D'orleans, Oct 2004.

[20] Ricco Rakotomalala, *Comparaison de populations , Tests non Paramétrique*, version1.

[21] Zerari Amel, *Approche Bayésienne aux essais cliniques séquentiels*, Mémoire Option : PROBABILITES-STATISTIQUES.Université Mentouri Constantine, 10/01/2013.

[22] Illig Aude, *Probabilités de confiance aprés décision lors d'un test séquentiel avec un temps de bon fonctionnement de loi exponentielle*, Mémoire de DEA encadré par : Mr GAREL, Professeur à l'ENSEEIHT .Université Paul Sabatier Toulouse III, Juin 2001.

[23] Massimiliano Gubinelli, Fadoua Balabdaoui-Mohr, *cours poly numéro 6*. L2 Stat 2008/09

[24] *Cours 6 : TESTS Généralités et Tests optimaux* Diaporama.

[25] Epstein, B et Sobel, M, *equential life tests in the exponential case* Ann. Math. Stat., Vol 26, p-p 82-93. 1955

[26] James M.S.Wason, *Recent Developments in Group-Sequential Designs.*Institute of Public Health, Cambridge, United Kingdom

[27] L. Lehmann, *Probability and Statistics.*DOI $10.1007/978-1-4614-1412-4_18$, Springer Science + Business Media, LLC 2012.

[28] J. Bartroff ,*Sequential Testing Theory and Stochastic Optimization Over Time.*Springer Series in Statistics 298, DOI 10.1007/978-1-4614-6114-2 3,© Springer Science+Business Media New York 2013

[29] T.J. Cleophas and A.H. Zwinderman, *Machine Learning in Medicine :Continuous Sequential Techniques Chapter 18.*DOI $10.1007/978-94-007-6886-418$, Springer ScienceCBusiness Media Dordrecht 2013

[30] Ph. LERAY - A. ROGOZAN, *Tests séquentiels vs. non séquentiels Comparaison de deux échantillons Test d'adéquation, ...Cours n° 11-12*

[31] Guy Hédellin, *Principe des tests séquentiels*. Séminaire de statistique version 1.0