

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



### Mémoire

En vue d'obtention du diplôme master en Génie mécanique

Spécialité : Energétique

Présenté par :

CHAOUADI Yougourthene

CHAABNA Merzouk

## Thème

---

ETUDE ET SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT DANS UNE TUYÈRE DE LAVAL  
AVEC APPARITION D'ONDES DE CHOCS

---

Devant le jury composé de :

Mr A. DJERRADA	: Président ; Université de Bejaia
Mr. A. BENSLIMANE	: Rapporteur ; Université de Bejaia
Mr. F. MAIT BOUDA	: Examineur ; Université de Bejaia

Session juin 2016

ANNEE UNIVERSITAIRE 2015 - 2016

## *Remerciements :*

*On remercie Allah le très miséricordieux,*

*Le travail présenté dans ce manuscrit a été effectué dans le cadre du projet de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master sous la direction de Mr A. BENSLIMANE à qui on tient à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance pour ses conseils, sa compréhension, sa patience et sa confiance qu'il nous a témoigné et qui nous a été très utile dans la réalisation de ce modeste travail.*

*Nos sincères remerciements à Mr A. DJERRADA qui nous fait l'honneur de présider le jury.*

*On remercie également Mr F. NAIT BOUDA pour avoir consacré de son temps précieux pour examiner ce travail.*

*A tous .on vous dit merci.*

*De la part de*

*M. CHAABNA*

*Y. CHAOUADI*

---



---

## Sommaire

<b>Liste des figures :</b> .....	<b>i</b>
<b>Liste des tableaux :</b> .....	<b>ii</b>
<b>Nomenclature :</b> .....	<b>iii</b>
<b>Introduction générale :</b> .....	<b>1</b>

### Chapitre I :

#### Généralités et étude bibliographique

I.1 Introduction :.....	3
I.2 Généralités :.....	3
I.2.1 Présentation d'une tuyère de Laval :.....	3
I.2.2 Fonctionnement théorique de la tuyère de Laval :.....	4
I.2.2.1 Ecoulement subsonique :.....	5
I.2.2.2 Ecoulement sonique adapté :.....	5
I.2.2.3 Ecoulement sonique non adapté :.....	5
I.2.2.4 Ecoulement supersonique adapté :.....	6
I.2.5.5 Ecoulement supersonique non adapté :.....	6
I.2.3 Définition de l'onde de choc :.....	7
I.2.3.1 Ondes de choc droites :.....	7
I.2.3.2 Ondes de choc obliques :.....	7
I.3 Revues bibliographique :.....	8
I.4 Conclusion :.....	13

### Chapitre II :

#### Position du problème

II.1 Introduction :.....	14
II.2 Position du problème :.....	14
II.2.1 Le modèle physique :.....	14
II.2.2 Équations de l'écoulement quasi 1D :.....	15
II.2.2.1 Equation d'état du fluide :.....	15
II.2.2.2 Vitesse du son et le nombre du Mach :.....	16

---



---

II.2.2.3 Ecoulement isentropique d'un gaz parfait : .....	16
II.3 Mise en forme des équations d'Euler : .....	19
II.3.1 Forme numérique des équations d'Euler : .....	20
II.4 Equations et Modalisation en 2D axisymétrique visqueux: .....	21
II.4.1 Hypothèses : .....	21
II.4.2 Équations de conservation : .....	21
II.4.3 Description statistique des écoulements turbulents : .....	22
II.4.3 Décomposition de Reynolds (Pour la turbulence) : .....	23
II.4.4 La moyenne au sens de Favre : .....	24
II.4.5 Equations de conservation moyennées : .....	25
II.4.6 Equations de transport turbulent SST- Menter : .....	26
II.4.7 Nouvelle expressions des équations de Navier Stokes moyennées : .....	29
II.5 Méthode explicite de Mac Cormack : .....	30
II.6 Conclusion: .....	31

### **Chapitre III :**

#### **Méthode des volumes finis**

III.1 Introduction : .....	32
III.2. Principe de la méthode des volumes finis : .....	33
III.3 Discrétisation : .....	33
III.3.1 Différents schémas de discrétisation spatiale : .....	35
III.3.1.1 Schéma aux différences centrées (CDS) : .....	35
III.3.1.2 Schéma Upwind (UPS) : .....	36
III.3.1.3 Solution exact : .....	37
III.3.1.4 Schéma exponentiel : .....	38
III.3.1.5 Schéma hybrid (HDS : hybrid differencing scheme) : .....	38
III.4 Schéma de discrétisation temporel (régime instationnaire) : .....	39
III.5 Conclusion : .....	42

### **Chapitre IV :**

#### **Résultats et discussions**

IV.1 Introduction : .....	43
IV.2 Description du problème : .....	43
IV.2.1 Critère de convergence : .....	44

---

---

IV.2.2 Validation du maillage : .....	45
IV.2.3 Validation du modèle numérique : .....	47
IV.3 Ecoulement d'Euler dans une tuyère convergent-divergent 2D axisymétrique :.....	48
IV.3.1 Calcul des régimes : .....	48
IV.3.1.1 Régime sonique adapté : .....	48
IV.3.1.2 Régime sonique non adapté : .....	50
IV.3.1.3 Régime supersonique adapté : .....	52
IV.4 Ecoulement turbulent dans une tuyère convergent-divergent 2D axisymétrique :.....	55
IV.4.1 Choix du maillage : .....	55
IV.4.2 Calcul des régimes : .....	55
IV.4.2.1 Régime sonique adapté : .....	55
IV.4.2.2 Régime sonique non adapté : .....	57
IV.4.2.3 Régime supersonique : .....	60
IV.5 Conclusion : .....	63
<b>Conclusion générale : .....</b>	<b>64</b>

**Référence bibliographiques****Annexes**

---

---

## Liste des figures

<b>Figure. I.1</b> - Tuyère de Laval. ....	4
<b>Figure. I.2</b> - Schéma de la tuyère supersonique. ....	4
<b>Figure. I.3</b> - Régime de surdétente en 1D. ....	5
<b>Figure. I.4</b> - Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique. Evolution de la pression le long de la tuyère. ....	6
<b>Figure I.5</b> - Onde de choc oblique lors d'un écoulement supersonique. ....	7
<b>Figure I.6</b> - Géométrie de la tuyère étudiée par A. N. Johnson et al. [21] ....	11
<b>Figure II.1</b> - Géométrie tuyère de Laval à étudier. ....	15
<b>Figure II.2</b> - Propagation d'une onde sonore. ....	16
<b>Figure II.3</b> - Evolution de la pression et de la température dans un écoulement isentropique d'air en fonction du nombre de mach. ....	18
<b>Figure III.1</b> - maillage et volume de contrôle. ....	33
<b>Figure III.2</b> - Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration. ....	34
<b>Figure III.3</b> - Volume de contrôle dans le cas à une dimension. ....	35
<b>Figure III.4</b> – (a) $F_w > 0$ et $F_e > 0$ , (b) $F_w < 0$ et $F_e < 0$ ....	36
<b>Figure III.5</b> - Variation de $\phi$ dans le domaine $[0, L]$ . ....	37
<b>Figure III.6</b> - Méthode aux volumes finis - Cellule centrée, maillage structuré. ....	40
<b>Figure III.7</b> - Cellule bidimensionnelle. ....	40
<b>Figure III.8</b> - Maillage décale sur une frontière solide. ....	41
<b>Figure III.9</b> - Superposition des mailles entre deux blocs adjacents. ....	41
<b>Figure. IV.1</b> - Profil de la tuyère. ....	44
<b>Figure. IV.2</b> - Convergence et courbes des résidus. ....	45
<b>Figure. IV.3</b> - Maillage de la géométrie. ....	46
<b>Figure. IV.4</b> - Variation du nombre de Mach axiale(a) et la pression statique (b) sur l'axe suivant plusieurs maillages. ....	46
<b>Figure. IV.5</b> - Variation du nombre de Mach a la section de sortie en fonction du nombre de nœuds. ....	47
<b>Figure. IV.6</b> - Comparaison du Profil de pression $P/P_0$ a et du nombre de Mach ( $Ma$ ) (b) en fonction de $x/L$ à l'axe avec l'expérimental [29]. ....	48
<b>Figure IV.7</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ , écoulement d'Euler SA. ....	48

---



---

<b>Figure IV.8</b> - (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SA .....	49
<b>Figure IV.9</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ , écoulement d'Euler SNA .....	50
<b>Figure IV.10</b> - (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SNA. ....	51
<b>Figure IV.11</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ . Pour l'écoulement d'Euler SSA .....	53
<b>Figure IV.12</b> - (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SSA. ....	54
<b>Figure IV.13</b> - (a) Evolution de la pression $P/P_0$ , (b) Evolution du nombre du Mach, pour les différents régimes d'écoulement d'Euler. ....	54
<b>Figure IV.14</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SA .....	56
<b>Figure IV.15</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SA .....	57
<b>Figure IV.16</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SNA. ....	58
<b>Figure IV.17</b> - (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement turbulent SNA. ....	59
<b>Figure IV.18</b> - (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SSA. ....	60
<b>Figure IV.19</b> - (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression $P/P_0$ ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement turbulent SSA.....	61
<b>Figure IV.20</b> - Comparaison entre l'écoulement d'Euler et turbulente pour un même régime SNA, (a) Distribution de la pression $P/P_0$ , (b) L'évolution du nombre de Mach.....	62

---



---

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1</b> - Paramètres adimensionnels influençant le coefficient de débit Cd dans une tuyère critique ISO, d'après [21].....	12
<b>Tableau II.1</b> - Constantes du modèle de Menter.....	28
<b>Tab III.1</b> - les différentes valeurs de $\phi$ , $\Gamma\phi$ et $S\phi$ .....	34

## Nomenclature

$C_p$	: Chaleur massique à pression constante	$J\ kg^{-1}K^{-1}$
$C_v$	: Chaleur massique à volume constant	$J\ kg^{-1}K^{-1}$
$E$	: Energie totale par unité de masse	$J\ kg^{-1}$
$e$	: Energie interne par unité de masse	$J\ kg^{-1}$
$f$	: Grandeur instantanée de l'écoulement	
$\bar{f}$	: Grandeur moyenne selon Reynolds	
$f'$	: Partie fluctuante	
$\tilde{f}$	: Grandeur moyenne selon Favre	
$f''$	: Fluctuation de Favre	
$h$	: Enthalpie massique	$J\ kg^{-1}$
$k$	: Energie cinétique turbulente	$m^2\ s^{-2}$
$L$	: Longueur du domaine physique	$m$
$\dot{m}$	: Débit massique	$kg\ s^{-1}$
$P$	: Pression	$Pa$
$q$	: Densité du flux de chaleur	$W\ m^{-2}$
$q_r$	: Densité du flux de chaleur suivant (r)	$W\ m^{-2}$
$q_x$	: Densité du flux de chaleur suivant (x)	$W\ m^{-2}$
$R$	: Constante de l'air	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
$S$	: Surface	$m^2$
$T$	: Température	$K$
$t\ (\Delta t)$	: Temps (pas de temps)	$s$
$v_s$	: Vitesse du son	$m\ s^{-1}$
$V$	: Vitesse	$m\ s^{-1}$
$v_r$	: Composante de la vitesse suivant (r)	$m\ s^{-1}$
$v_x$	: Composante de la vitesse suivant (x)	$m\ s^{-1}$
$\vec{V}$	: Champ de vitesse	

**Symboles grecs :**

$\alpha$	: Diffusivité thermique	$m^2 s^{-1}$
$\gamma$	: Coefficient de détente isentropique	
$\varepsilon$	: Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente	$m^2 s^{-3}$
$\xi$	: Coordonnée axiale adimensionnelle	
$\eta$	: Coordonnée transversale ou radiale adimensionnelle	
$\lambda$	: Coefficient de diffusion	$W m^{-1}K^{-1}$
$\mu$	: Viscosité dynamique	Pa s
$\mu_t$	: Viscosité dynamique turbulente	Pa s
$\nu$	: Viscosité cinématique	$m^2 s^{-1}$
$\nu_t$	: Viscosité cinématique turbulente	$m^2 s^{-1}$
$\rho$	: Masse volumique	$kg m^{-3}$
$\tau$	: Contrainte visqueuse	Pa
$\tau_{xx}$	: Contrainte normale	$N m^{-2}$
$\tau_{xr}$	: Contrainte tangentielle	$N m^{-2}$
$\phi_1$	: Les constantes du modèle de Wilcox	
$\phi_2$	: Les constantes du modèle k- $\varepsilon$	
$\omega$	: Dissipation spécifique de l'énergie cinétique turbulente	$s^{-1}$

**Liste des indices**

0	: Etat initiale ou état générateur
1	: Entrée de la tuyère
2	: Sortie de la tuyère
(i, j)	: Base du repère (x, r)
p	: paroi
s	: Isentropique
t	: Turbulent
'	: Adimensionné, normalisé
*	: Critique

**Nombre adimensionnels**

Ma : Nombre de Mach

Pr : Nombre de Prandtl

Re : Nombre de Reynolds

**Liste des exposants**

C-D : Convergent-Divergent

SA : Sonique Adapté

SNA : Sonique Non Adapté

SSA : Supersonique Adapté

SST : Shear Stress Transport

VNAP : Viscous Nozzle Analysis Programme

# Introduction générale

## Introduction générale

En génie énergétique, les fluides sont omniprésents, qu'ils soient incompressibles ou compressibles, ils interviennent dans de nombreux domaines de l'industrie ou de transport. En effet, ils sont très souvent les agents des transferts énergétiques par leurs propriétés de conduction de la chaleur et surtout leur faculté à transporter l'énergie sous diverses formes : énergie cinétique, énergie potentielle, pression, énergie interne, etc.

Pour assurer ce rôle, ils sont quasiment toujours mis en mouvement. Il est alors essentiel de bien connaître les lois de la cinématique, de la thermodynamique et de la dynamique des fluides. Dans leur généralité, ces lois sont relativement complexes et donnent lieu à des résolutions faisant appel à des méthodes numériques et à des temps de calculs importants. Heureusement, dans un grand nombre de situations industrielles, on note des conditions particulières qui permettent de simplifier les équations de base et leur résolution. L'écoulement monodimensionnel des gaz parfaits en régime permanent en est un exemple. En réalité, ce type d'écoulement, au sens strict, ne représente que très peu de cas réels.

En effet, dans presque toutes les situations pratiques, les paramètres des écoulements de gaz ou de vapeurs varient selon deux, voir trois, dimensions de l'espace. Ils sont donc bidimensionnels ou tridimensionnels. Cependant, en admettant quelques distorsions par rapport à la réalité, on peut dans certaines études qui ne nécessitent pas des résultats rigoureux, faire l'hypothèse que les variations des paramètres dans les directions transversales peuvent être négligées.

Le présent travail est basé sur cet axiome. Il nous permettra de traiter de façon relativement simple des problèmes d'écoulements de fluides compressibles et d'aboutir à des résultats utiles pour la résolution numérique d'écoulement d'un fluide compressible à travers une tuyère dite de Laval.

Dans le premier chapitre, on a passé en revue divers travaux sur le domaine. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du problème physique ainsi qu'aux équations régissant. La description de la méthode de résolution employée par un code de calcul numérique CFD est présentée dans le troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté les principaux résultats qui comportent deux parties, la première concerne les résultats de simulations relatifs à l'écoulement Eulérien dans une tuyère convergent-divergent le second concerne les résultats du même problème en utilisant les équations de Navier-Stokes en régime turbulent.

Chapitre I :  
Généralités et étude  
bibliographique

# I

## Généralités et étude bibliographique

### I.1 Introduction :

Historiquement, la turbine à vapeur est le fruit du travail de nombreux chercheurs et ingénieurs à la fin du XIX siècle. La contribution du suédois Carl Gustaf Patrick de Laval est constituée à la construction d'une petite machine à vapeur en 1887, en 1890 il a développé une tuyère convergent-divergent qui permet d'augmenter la vitesse de la vapeur entrante dans la turbine.

Ces tuyères convergentes-divergentes (qui sont connues aussi sous le nom de tuyère de Laval) à échelle réduite constituent un moyen économique et très efficace pour l'étude des phénomènes physiques, rencontrés dans plusieurs domaines de technologie tel que les turbines à vapeur et à gaz, les entrées d'air des avions supersoniques, les souffleries supersoniques, les tuyères des missiles, les moteurs de satellite et principalement les tuyères des moteurs fusées et lanceurs spatiaux.

### I.2 Généralités :

#### I.2.1 Présentation d'une tuyère de Laval :

Une tuyère de Laval est une conduite de forme convergente-divergente qui a un profil spécifiquement étudié. Elle met en communication une chambre contenant un gaz comprimé avec un milieu extérieur d'évacuation. La chambre et le milieu extérieur sont à des pressions différentes pour permettre le mouvement du gaz. Elle convertit ainsi les gaz de faible vitesse, de pression et température élevées en gaz de vitesse très importante mais de basse pression et température. La forme générale du contour d'une tuyère figure **(I.1)**, présente trois parties essentielles :

- ❖ Le convergent : la partie amont de la tuyère. Situé entre la chambre de combustion et le col, son rétrécissement contribue à l'accélération des gaz.
- ❖ Le col : est la partie du canal d'écoulement des gaz qui a le plus petit diamètre et qui, par le choix de ses dimensions, fixe le point de fonctionnement du moteur.
- ❖ Le divergent : il augmente la vitesse d'éjection des gaz au cours de leur détente et améliore, de ce fait, leur effet propulsif.

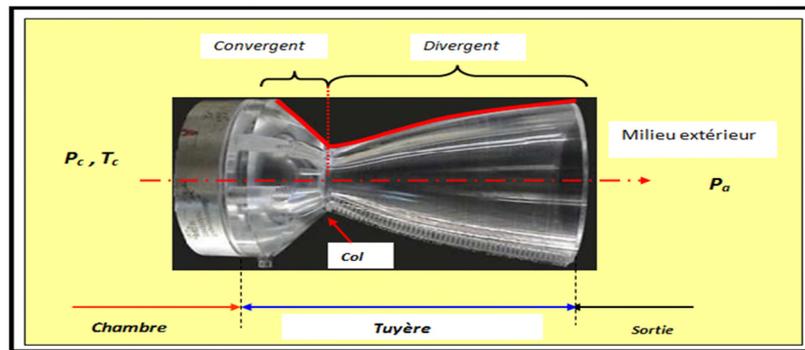


Figure I.1 - Tuyère de Laval.

### I.2.2 Fonctionnement théorique de la tuyère de Laval :

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté dans la figure (I.2), constitué d'une tuyère de Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice  $P_c$  supposée fixe. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique  $P_a$  est variable.

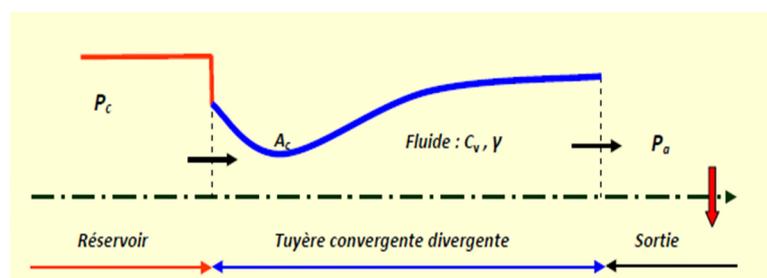


Figure I.2 - Schéma de la tuyère supersonique.

Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression de la chambre, le fluide est entièrement au repos (figure (I.4), courbe (a)). Si la pression du milieu ambiant  $P_a$  diminue progressivement au-dessous de la pression  $P_c$  supposée constante, un débit d'écoulement prend naissance et cinq régimes particuliers d'écoulements sont distingués.

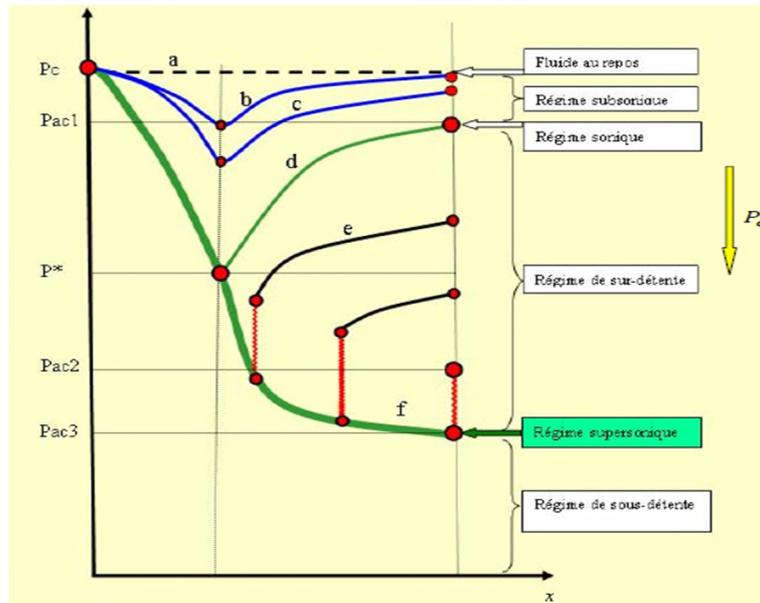


Figure I.3 - Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique.  
Evolution de la pression le long de la tuyère.

### I.2.2.1 Ecoulement subsonique :

Au début de l'écoulement le débit augmente avec la diminution de la pression ambiante. L'écoulement est subsonique dans toute la tuyère [figure (I.4), courbes (b) et (c)]. Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col. Dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression du milieu extérieur. La pression est donc minimale dans la section du col où la vitesse passe par une valeur maximale.

### I.2.2.2 Ecoulement sonique adapté :

Si  $P_a$  continue à diminuer jusqu'à une valeur caractéristique notée  $P_{ac1}$ , l'écoulement au col devient sonique et le débit atteint une valeur limite maximale [figure (I.4), courbe (d)].

L'écoulement est dit sonique adapté. Partout encore, sauf au col, l'écoulement est subsonique. Au col de la tuyère, la pression atteint la valeur critique  $P^*$  et la vitesse atteint la vitesse du son. Le col est amorcé (bloquée).

### I.2.2.3 Ecoulement sonique non adapté :

Si  $P_a$  diminue au-dessous de  $P_{ac1}$ , le col reste toujours sonique. Dans le divergent apparaît un phénomène irréversible appelé onde de choc, l'écoulement est dit sonique non adapté ou régime de sur-détente. L'évolution de l'écoulement du gaz est représentée par la courbe (e) de la figure (I.4). Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc stationnaire et normale à l'axe de la tuyère divise

l'écoulement en deux parties figure (I.3). Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. A travers l'onde de choc, la pression augmente brusquement et la vitesse diminue brusquement. L'onde de choc se place de telle façon que la recompression qui s'effectue ramène la pression de la sortie à la pression ambiante  $P_a$ . Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) la pression remonte et la vitesse diminue progressivement, l'écoulement est à nouveau subsonique.

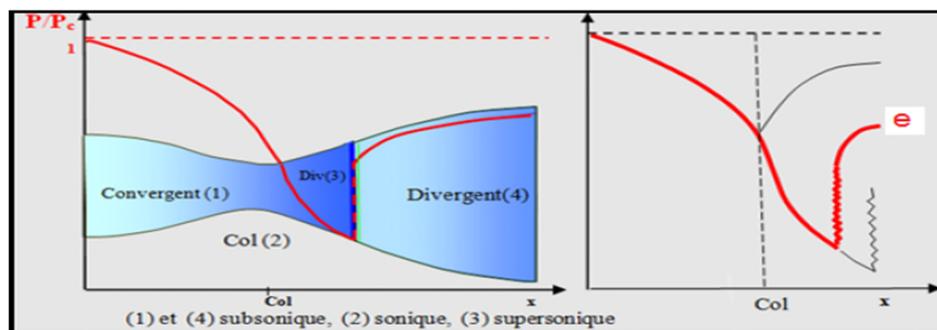


Figure I.4 - Régime de surdétente en 1D.

L'onde de choc se déplace vers la sortie lorsque  $P_a$  diminue. Soit  $P_{ac2}$  la pression ambiante pour laquelle l'onde de choc se place à la sortie de la tuyère.

En diminuant encore la pression  $P_a$  au-dessous de  $P_{ac2}$ , l'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique, la diminution de  $P_a$  ne modifie plus l'écoulement à l'intérieur de la tuyère. L'adaptation de la pression entre la sortie de la tuyère et la pression du milieu ambiant doit se faire à l'extérieure du divergent par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques.

#### I.2.2.4 Ecoulement supersonique adapté :

Si  $P_a$  continue à diminuer il arrive un moment où l'écoulement est entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît et il n'y a plus de recompression externe, alors la tuyère est parfaitement adaptée. L'évolution du gaz est représentée par [la courbe (f) de la figure (I.4)]. Notons par  $P_{ac3}$  la pression ambiante pour laquelle ce phénomène se produit  $P_{ac3}$  est appelé : pression d'adaptation.

#### I.2.2.5 Ecoulement supersonique non adapté :

Lorsque la pression  $P_a$  devient inférieure à  $P_{ac3}$  l'écoulement est dit supersonique non adapté. L'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification, l'adaptation entre la tuyère et la pression ambiante doit se faire à l'extérieure de la tuyère par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques.

### I.2.3 Définition de l'onde de choc :

Une onde de choc correspond à une zone d'écoulement de très faible épaisseur, inférieure à 1 mm, qui fait la transition entre l'amont dont la vitesse est supersonique et l'aval dont elle est subsonique. Dans le même espace, la pression est en très forte augmentation. Ainsi, les particules du fluide lors de leur traversée de l'onde de choc subissent une décélération extrêmement forte. Cet impact violent, produisant un véritable choc sur les particules, qui est à l'origine du nom donné à cette zone de transition.

#### **I.2.3.1 Ondes de choc droites :**

Dans la partie supersonique de l'écoulement, les particules fluides qui vont rencontrer l'obstacle ne peuvent « avertir » celles qui arrivent derrière car le signal qu'elles pourraient envoyer vers l'amont se propage à la vitesse du son et donc à une vitesse inférieure à la vitesse des particules (comme dans les carambolages en série sur autoroute ou la vitesse de propagation du ralentissement est plus grande que la vitesse de propagation de l'information « bouchon » chez les conducteurs).

Ce « signal » n'est donc perceptible qu'à l'aval. Il y aura donc dans une petite région de l'écoulement un phénomène « cataclysmique » (comme aurait dit Salvador Dali) où les effets de la viscosité ne pourront être négligés : le choc.

#### **I.2.3.2 Ondes de choc obliques :**

Les ondes de choc obliques apparaissent lorsqu'un écoulement supersonique rencontre un obstacle (bord d'attaque d'un projectile ou d'une aile d'avion, entrée d'air d'un turboréacteur, etc.) ou lorsqu'il débouche d'une canalisation à l'aval de laquelle la pression est inférieure à la pression de recompression de l'onde pour le nombre de Mach amont. D'une manière plus générale, ce type d'onde se rencontre dès qu'un écoulement supersonique change de direction voir figure (I.5).

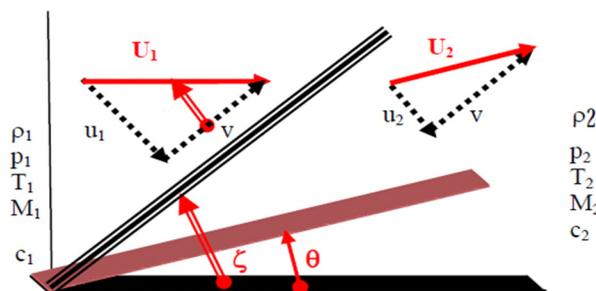


Figure I.5 - Onde de choc oblique lors d'un écoulement supersonique.

---

---

### I.3 Revues bibliographique :

Laval. P [1] présente une méthode de résolution des équations d'Euler sous forme conservative d'un écoulement compressible dans une tuyère (2D et axisymétrique). La méthode proposée, de type prédicteur-correcteur explicite, utilise un terme de pseudo viscosité. Les résultats numériques sont obtenus pour une tuyère convergente-divergente ( $45^\circ$ - $15^\circ$ ), étudiée expérimentalement par Cuffel et al dans [2] et une autre tuyère avec un angle du convergent égal à  $20^\circ$  en faisant varier le rapport des rayons de courbure et du col  $R_c/R_{th}$  de (0 à 0.8). Ce dernier cas a été étudié expérimentalement en 1970 par Solignac à l'ONERA. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux montrent une bonne cohérence.

Rae. W. J [3] a présenté un calcul numérique sur un écoulement à faible masse volumique dans une tuyère de type convergente-divergente, en prenant compte les effets de viscosité. Il a résolu les équations dans des micro-tuyères Slender-channel avec des conditions de glissement à la paroi. Un schéma aux différences finies implicite de type Crank-Nicholson est utilisé pour déterminer les profils de la pression, de vitesse et d'enthalpie le long de la tuyère. Il a également étudié l'effet de la géométrie, du nombre de Reynolds et des conditions de température pariétale. Les résultats montrent que les enthalpies obtenues entre les cas adiabatiques et ceux à températures de paroi constantes sont pratiquement identiques alors qu'avec une température de paroi variable, une réduction d'environ 20% de l'enthalpie, est observée. L'épaisseur de la couche limite la plus faible est obtenue dans le cas d'une température de paroi variable (refroidie).

Dans une série d'articles [4-7], Cline. M. C présente des études numériques d'un écoulement de fluide compressible dans des tuyères rectangulaires et axisymétriques. La méthode utilisée pour la progression dans le temps permet de contourner les difficultés rencontrées par les méthodes d'intégration numérique des systèmes hyperboliques et elliptiques qui sont dues à la mixité des domaines des vitesses subsoniques et supersoniques.

L'auteur a validé son travail sur des écoulements Eulériens bidimensionnels, isentropiques et rotationnels dans trois types de tuyère article [4] : la première a une forme conique de type convergent-divergent, la seconde est aussi de forme conique mais avec un convergent uniquement et la dernière de forme convergente-divergente présente un

---

raccordement à l'entrée. La comparaison des résultats montre une bonne cohérence avec ceux obtenus expérimentalement par Cuffel et al [2].

Le même auteur développe un nouveau code prenant en compte les effets visqueux de l'écoulement (Viscous Nozzle Analysis Program : VNAP) basé sur la même méthode que celle décrite dans [4] mais en utilisant une forme non conservative des équations (article [5]). Il la compare ensuite avec une méthode de calcul séparée de la couche limite visqueuse et de la zone eulérienne. Il montre que l'hypothèse de couche limite mince risque de ne plus être valable pour des tuyères de petites dimensions et pour des nombres de Reynolds de l'ordre  $10^3$  (cas de tuyères utilisées pour les lasers).

Mac Cormack W. R et al [8] présente une étude numérique de l'écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère de révolution, convergente-divergente, de petites dimensions. Il propose un schéma explicite aux différences de type Mac Cormack [9] pour la résolution du système d'équations de Navier-Stokes bidimensionnelles instationnaires. L'auteur compare deux méthodes numériques pour l'intégration temporelle des équations de Navier-Stokes. La première utilise un opérateur aux différences uniques et la seconde utilise une séquence d'opérateurs aux différences monodimensionnels. La tuyère est séparée en zones à maillage constant (convergent et divergent selon la direction longitudinale, partie centrale selon la direction radiale) et à maillage variable (près du col selon  $x$  et de la paroi selon  $r$ ). Les conditions sur la frontière amont sont basées sur une hypothèse qui privilégie les effets transversaux par rapport aux effets longitudinaux ; sur la frontière aval, toutes les grandeurs de l'écoulement sont obtenues par extrapolation. La paroi est supposée adiabatique. Les résultats présentés montrent l'évolution du coefficient de débit à différentes sections et les iso-contours des nombres de Mach, les isobares et les profils de température et de vitesses axiales dans différentes sections de la tuyère. Une comparaison des nombres de Mach avec ceux obtenus expérimentalement et numériquement dans une série de travaux publiés par Back. L.H [10-14] est également présentée. Pour un nombre de Reynolds relativement modéré de l'ordre  $10^3$ , l'étude montre une diminution sensible du nombre de Mach maximal dans chaque section et un développement important de la couche limite dans le divergent, qui a pour conséquence l'élimination de chocs obliques stationnaires.

Kwon. O. K et al [15] ont analysé l'écoulement transsonique stationnaire, laminaire et visqueux dans une tuyère par la méthode d'Hopscotch qui est connue comme une méthode hybride qui combine les avantages des algorithmes explicites et implicites. Les solutions

---

obtenues sont en bon accord avec les travaux expérimentaux de [5,10]. Cependant la précision des résultats dans les régions à forts gradients est très sensible à la densité du maillage utilisé.

Les effets de l'angle du divergent sur l'écoulement d'hydrogène et d'azote, à faible nombre de Reynolds dans une tuyère de forme conique ont fait l'objet du travail expérimental proposé par Whalen. M. V [16]. Il a également utilisé le code de Rae [3], pour comparer les résultats mesurés et calculés. Il a montré les limites de la méthode de Rae dans le cas de petits angles du divergent et de faibles nombres de Reynolds.

Kim. S. C [17] a présenté une étude numérique qui a pour but de déterminer les performances d'une tuyère d'une fusée avec une faible force de poussée. Pour résoudre les équations de Navier-Stokes axisymétrique, en régime laminaire et à Reynolds modérés, l'auteur utilise un code en volumes finis « RPLUS » basé sur un schéma LUSSOR implicite. Les résultats obtenus ont été validés avec les mesures obtenues, pour  $Re = 270$ , dans le cas de la tuyère étudiée par Rothe. D. E [18] avec de l'azote comme gaz test. Plusieurs simulations ont été présentées ensuite pour différentes formes de tuyère et avec l'hypothèse d'une paroi adiabatique. Les résultats ont montré l'existence d'un compromis entre les effets visqueux et bidimensionnels.

Young-Myung. Y [19] a aussi utilisé la méthode Mac Cormack avec la technique de décomposition de l'opérateur pour déterminer l'écoulement d'un mélange de gaz (propane, oxygène et azote, constituants chimiques des produits de combustion :  $(H_2O, CO_2, O_2, N_2, H_2)$ ) dans une tuyère axisymétrique avec une section constante du col, sur une longueur de l'ordre de (5 à 10) fois de celle du convergent, utilisée dans le système de projection thermique de type H.V.O.F. Les résultats obtenus à partir de modèles bidimensionnel et monodimensionnel, mettent en évidence les différences entre les deux approches sur la prédiction de la vitesse du nombre de Mach, de la pression et de la température au voisinage du col et dans le divergent.

Les travaux de Johenon. A. N [20] et de Johenson. A. N et al [21] ont été consacrés à l'étude de l'écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère axisymétrique dans le but de déterminer les caractéristiques numériques du coefficient de débit massique dans les tuyères, figure (I.6). La méthode des différences finies utilisée repose sur un schéma aux différences décentrées d'ordre 3 en espace pour les termes convectifs et centrées pour les termes diffusifs et d'ordre 1 en temps. Les gaz étudiés sont l'azote ( $N_2$ ), l'argon(Ar), le

dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) et l'hydrogène ( $\text{H}_2$ ). Les écoulements sont laminaires avec des nombres de Reynolds variant entre 2000 et 22000. La paroi est supposée adiabatique et les conditions d'entrée du fluide sont variables : les pressions varient de (0.25 à 2) atmosphère et les températures de (250 à 300) K. Le tableau (I.1) montre un résumé des résultats obtenus pour le coefficient de débit à partir d'une analyse paramétrique. La surestimation du coefficient de débit obtenu numériquement par rapport aux résultats expérimentaux a été expliquée par la sensibilité aux conditions pariétales (adiabatique, température imposée).

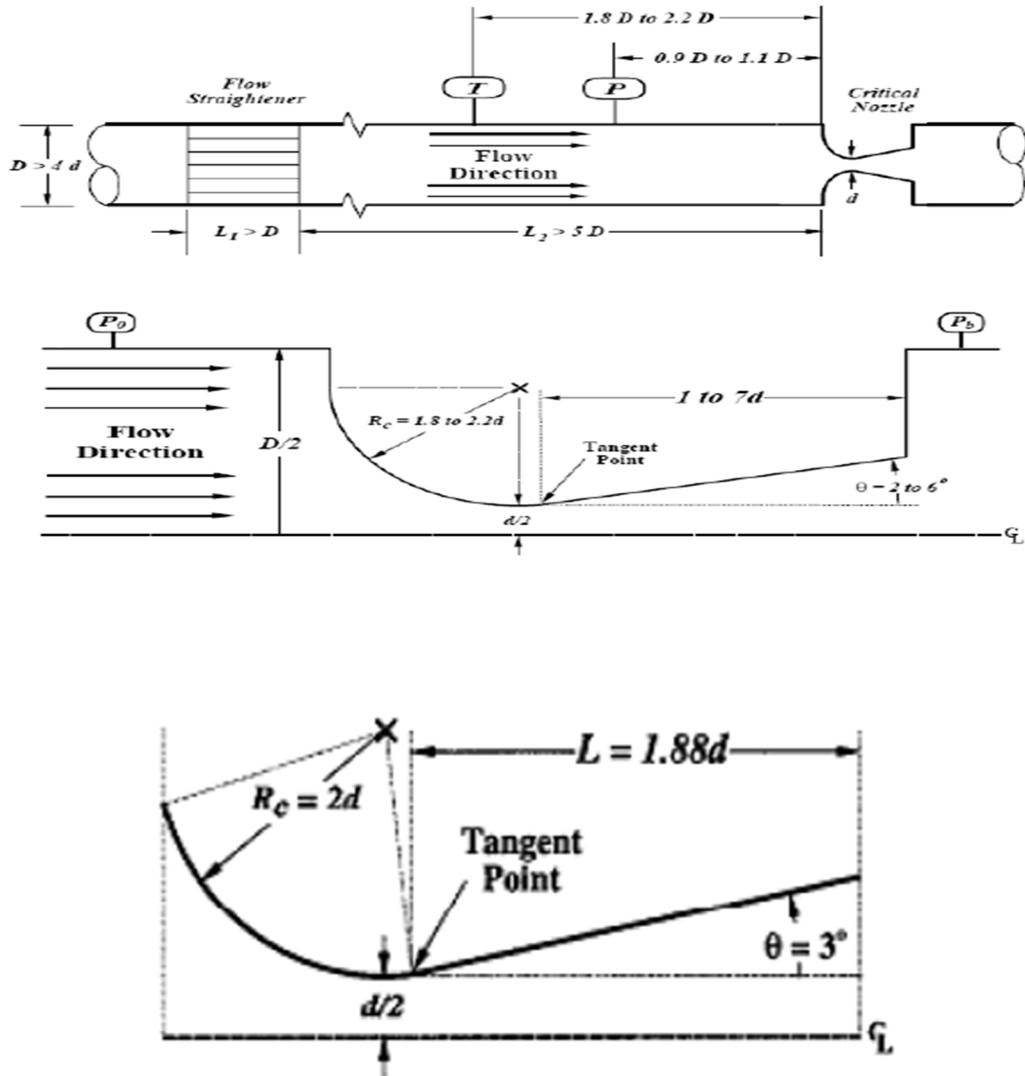


Figure I.6 - Géométrie de la tuyère étudiée par A. N. Johnson et al. [21].

**Tableau I.1** - Paramètres adimensionnels influençant le coefficient de débit  $C_d$  dans une tuyère critique ISO, d'après [21].

paramètre	Direction of $C_d$ change	% change in $C_d$
$(P_r \approx 7) \text{ inc } Pr$	dec $C_d$	0.01 – 0.11%
Inc $\gamma$	dec $C_d$	0.2 – 1.7%
inc $\mu/\mu_0$	dec $C_d$	0.006 – 0.043%
inc $\mu/\mu_0$	inc $C_d$	0.002 – 0.017%
Adiabatic wall	overpredict $C_d$	0 – 0.3%
Upstream pi ping	/	$\pm 0.0230\%$
Diam uncertainty $\pm 1685\%$	dec or inc $C_d$	$\pm 1685\%$

Böles. A et al [22] et Gerolymos. G. A et al [23], ont étudié L'écoulement compressible instationnaire dans une tuyère sous l'influence d'une pression variable en aval. Dans ces deux travaux, les études reposent sur une approche Eulérienne bidimensionnelle. Ils ont montré que la position de l'onde de choc est fortement influencée par la fréquence et l'amplitude de la pression imposée en aval, et que la ligne sonique, située au col en régime stationnaire, se décale légèrement vers l'aval sous l'influence de la pression.

Meister. L et al [24] ont présenté un travail numérique sur l'écoulement réactif dans une tuyère sur-détendue. Le code de calcul 'CARBUR' élaboré, est basé sur un schéma de type volume finis. Il permet de résoudre les équations de Navier Stokes, en régime instationnaire, pour des fluides compressibles et de traiter des conditions aux limites d'entrée et de sortie subsonique ou supersonique. Les résultats obtenus montrent un décollement de l'écoulement à la paroi et l'existence d'une zone de recirculation. L'effet de la température pariétale sur la position du décollement a été testé et a permis d'observer que le point de décollement avance de plus en plus à l'intérieur de la tuyère avec l'augmentation de la température de la paroi et par suite une zone de recirculation de plus en plus importante. Ils ont étudié la phase instationnaire en prenant en compte la réactivité chimique du milieu gazeux. A partir de l'état stationnaire, les auteurs ont analysé l'influence de trois vitesses d'air extérieur : 100, 200 et 300 m/s et observé une augmentation de la température pariétale avec la vitesse extérieure ainsi qu'une instabilité du jet à cause des tourbillons créés par le cisaillement proche de la couche de mélange du jet.

Dans un autre travail, Alexeenko. A. A [25,26] a étudié numériquement, pour des applications MEMS, la performance d'une tuyère en utilisant une analyse transitoire du

couplage thermique fluide-structure. Deux types de conditions thermiques sur la surface extérieure de la paroi ont été envisagés : le premier correspond au cas d'une paroi supposée adiabatique, le second à celui d'un échange convectif traduisant un refroidissement de l'écoulement. La technique de couplage utilisée est de type Dirichlet-Neumann. Le flux de chaleur inter facial, calculé avec le code DSMC dans le domaine fluide, sert de conditions aux limites pour le problème thermique de la paroi. La température inter faciale calculée, par la méthode des éléments finis, à partir de la paroi, sert à son tour de condition limite pour le calcul dans le fluide. Compte tenu des différences importantes des constantes de temps dans les deux milieux, le renouvellement des grandeurs échangées entre les deux milieux ne s'effectue que lorsque la température dans le domaine solide a changé d'un certain pourcentage défini à l'avance.

Pour tous les cas étudiés ( $Re = 35$  et  $175$ ,  $Pa = 0.1$  et  $0.5$  atm,  $h = 1000$  W/(m<sup>2</sup>.K),  $T_{ext}$ ), les résultats montrent que le coefficient de débit masse et la force de poussée décroît avec le temps pendant que la température augmente. D'une manière générale, la condition de refroidissement de la paroi permet d'améliorer les performances de la tuyère et d'éviter une dégradation éventuelle de la paroi. Enfin, les auteurs concluent à la nécessité de la prise en compte du couplage entre l'écoulement et la paroi.

#### **I.4 Conclusion :**

A travers cette étude bibliographique, nous avons pu constater l'abondance des travaux consacrés aux études des écoulements compressibles qu'ils soient visqueux ou non, laminaires ou turbulents, pour divers nombres de Mach et différentes géométries,... En revanche, dans ce chapitre on s'est focalisé sur la présentation des différents régimes qu'on peut obtenir dans ce genre de tuyères dites de Laval en faisant diminuer la pression de la sortie (Pa), Ainsi sur l'apparition du phénomène d'onde de choc.

# Chapitre II :

## Position du problème

# II

## Position du problème

### II.1 Introduction :

Il existe de très nombreuses études concernant les écoulements de convection forcée ou naturelle dans des géométries de type conduite. Un grand nombre de ces travaux supposent l'écoulement établi et une masse volumique constante ou obéissent à l'hypothèse de Boussinesq. Depuis quelques années, les transferts de chaleur stationnaires ou instationnaires, entre l'écoulement et la paroi sont étudiés mais toujours dans le cadre d'écoulements incompressibles ou pseudo-incompressibles et, plus récemment, les problèmes liés aux conditions dans la zone d'entrée sont abordés.

L'objectif de cette étude est de s'affranchir de l'hypothèse d'incompressibilité et d'étudier les phénomènes de transport et de transfert dans une tuyère de section circulaire, siège d'un écoulement stationnaire, compressible soumis à des conditions dynamiques et thermiques variables.

### II.2 Position du problème :

#### II.2.1 Le modèle physique :

Le modèle physique à étudier est une tuyère de Laval (C-D) représenté sur la figure (II.1), est une enceinte cylindrique avec une longueur ( $L$ ) et de rayon ( $r$ ) qui varie en fonction de ( $x$ ). La paroi extérieure de la tuyère est supposée adiabatique.

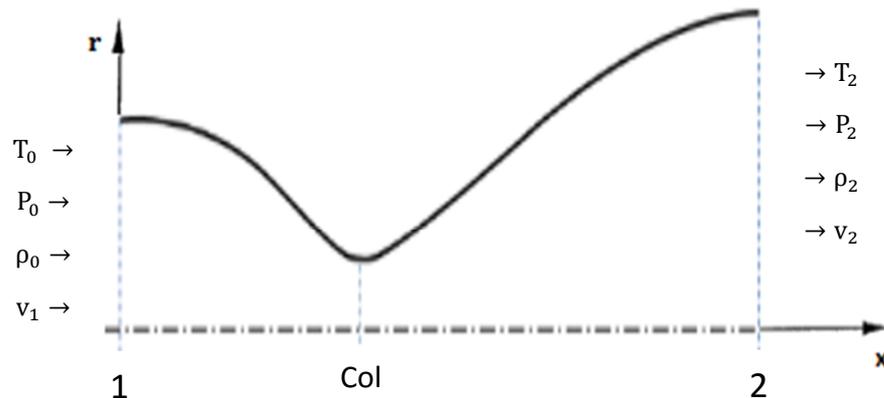


Figure II.1 - Géométrie d'une tuyère de Laval.

## II.2.2 Équations de l'écoulement quasi 1D :

### II.2.2.1 Equation d'état du fluide :

Cette équation caractérise l'état thermodynamique d'un fluide. Elle n'a une forme simple que dans le cas des gaz parfaits. Elle s'écrit :

$$P = \rho R T \rightarrow \rho = \frac{P}{R T} \quad (\text{II. 1})$$

Avec :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, R = C_p - c_v$$

Les deux propriétés utiles additionnelles de gaz idéal sont la capacité calorifique à volume constant et à pression constante spécifique sont définie par :

$$C_v = \frac{d e}{d T} \text{ et } C_p = \frac{d h}{d T}$$

### II.2.2.2 Vitesse du son est le nombre du Mach :

La vitesse sonique est la vitesse à laquelle une vague infinitésimal petite de pression (onde sonore) propage dans un fluide isentropiquement. Généralement la vitesse sonique est indiquée par la relation qui suit :

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} \quad (\text{II. 2})$$

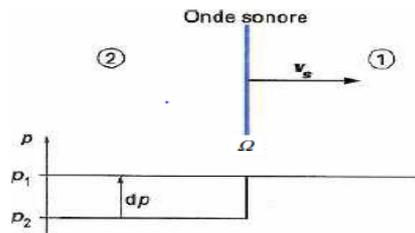


Figure II.2 - Propagation d'une onde sonore.

Pour un gaz idéal la vitesse du son est donnée par :

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} \quad (\text{II. 3})$$

Le nombre de mach Ma est un nombre adimensionnel où :

$$\text{Ma} = \frac{v}{v_s} \rightarrow v = \text{Ma} \cdot v_s \quad (\text{II. 4})$$

### II.2.2.3 Ecoulement isentropique d'un gaz parfait :

Nous avons la relation du débit masse qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{m} = \rho v S \quad (\text{II. 5})$$

On introduisant (II.3) et (II.4) en (II.5), on obtient :

$$\dot{m} = \frac{P}{RT} S \text{Ma} \sqrt{\gamma R T} \quad (\text{II. 6})$$

Quand l'écoulement d'un gaz idéal est tel qu'il n'y a aucun transfert de chaleur vers le milieu extérieur (c-à-d, adiabatique) ou effets irréversibles (par exemple, frottement, etc.), l'écoulement est isentropique. L'équation d'énergie appliquée entre deux points dans le champ d'écoulement devient :

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} = \text{cst} \quad (\text{II. 7. a})$$

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2} = \text{cst} \quad (\text{II. 7. b})$$

L'incorporation de l'équation de la vitesse sonique et des équations d'état de gaz idéal dans l'équation d'énergie pour l'écoulement isentropique régulier des gaz idéaux donne les résultats utiles suivants :

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2\right) \quad (\text{II. 8})$$

$$\frac{v_{s0}}{v_s} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II. 9})$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II. 10})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II. 11})$$

$P_0, T_0, \rho_0$  et sont les grandeurs de l'état générateur du fluide s'écoulant isentropiquement, (fluide à vitesse nulle) depuis la section amont jusqu'à la section où on a une vitesse  $v$ .

Les valeurs des propriétés de gaz idéal quand le nombre de mach est égale à l'unité (c-à-d, écoulement sonique) sont connues comme propriétés critiques ou soniques et sont indiquées par :

$$\frac{T_0}{T^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) \quad (\text{II. 12})$$

$$\frac{v_{s0}}{v_s^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II. 13})$$

$$\frac{P_0}{P^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II. 14})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II. 15})$$

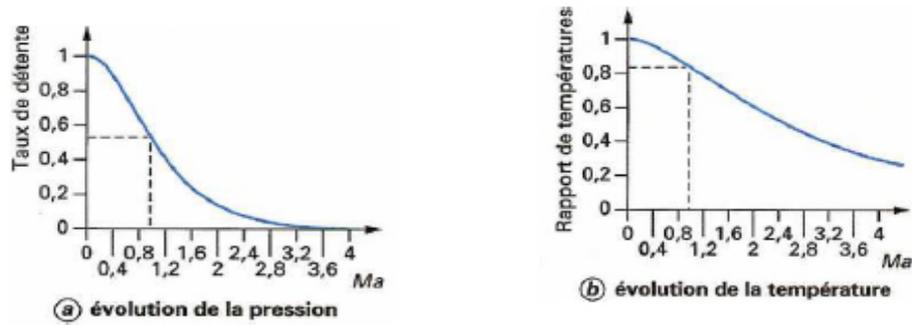


Figure II.3 – Evolution de la pression et de la température dans un écoulement isentropique d’air en fonction du nombre de mach.

On multiplie l’équation (II.6) par  $\left(\frac{P_0}{P_0}\right)$  et  $\sqrt{\frac{T_0}{T_0}}$  on obtient :

$$\dot{m} = \frac{P_0}{P_0} P Ma S \sqrt{\frac{\gamma R T}{R^2 T^2}} \sqrt{\frac{T_0}{T_0}}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S P_0} = Ma \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma^2\right]^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma+1}}} \quad \text{(II. 16)}$$

Dans le cas d’un écoulement sonique  $Ma = 1$  on aura :

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S \cdot P_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{\gamma-1}}} \quad \text{(II. 17)}$$

Le rapport de sections entre la sortie (2) et l’entrée (1) :

$$\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S P_0}\right)_1 = Ma_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_1^2\right]^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma+1}}}$$

Et

$$\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S P_0}\right)_2 = Ma_2 \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_2^2\right]^{\frac{-(\gamma-1)}{\gamma+1}}}$$

On devise  $\left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S P_0}\right)_1 / \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{S P_0}\right)_2$  :

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\left(\frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_2^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_1^2}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{\gamma-1}}} \quad (\text{II. 18})$$

$$\frac{S}{S^*} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (\text{II. 19})$$

Si on multiplie l'équation (II. 19) par (II. 10) on obtient le nombre de Mach en fonction de S :

$$\left(\frac{S}{S^*}\right) \left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{1}{Ma} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II. 20})$$

On pose :

$$C = \left(\frac{S}{S^*}\right) \left(\frac{P}{P_0}\right) \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{-\left[\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}\right]}$$

On aura une équation d'ordre 4 suivante :

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (Ma^2)^2 + Ma^2 - \frac{1}{C^2} = 0 \quad (\text{II. 21})$$

Dont la solution est :

$$Ma^2 = \frac{1}{\gamma-1} \left[ \sqrt{1 + \frac{2(\gamma-1)}{C^2}} - 1 \right] \quad (\text{II. 22})$$

### **II.3 Mise en forme des équations d'Euler :**

Pour un écoulement Eulérien bidimensionnel, pour lequel les forces de pesanteur sont négligeables, les équations à résoudre exprimées dans un repère cylindrique (x, r) prennent la forme suivante :

**1/ Continuité (conservation de masse) :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0 \quad (\text{II. 23})$$

2/ Quantité de mouvement selon x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_x v_r) = 0 \quad (\text{II. 24})$$

3/ Quantité de mouvement selon r :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_r v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r v_r + rP) = \frac{P}{r} \quad (\text{II. 25})$$

4/ Equation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho E + P)v_x] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho E + P)v_r] = 0 \quad (\text{II. 26})$$

5/ Equation d'état des gaz parfaits :

$$P = (\gamma - 1) \rho \left[ E - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_r^2) \right] \quad (\text{II. 27})$$

Avec  $\rho$  la masse volumique,  $P$  la pression statique,  $v_x$  et  $v_r$  les composantes du vecteur vitesse et  $E$  l'énergie totale par unité de masse.

Les quatre équations (II.23 – II.26) de bilan et l'équation d'état (II.27) lient l'évolution des cinq grandeurs inconnues ( $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_r$ ,  $P$ ,  $E$ ).

### II.3.1 Forme numérique des équations d'Euler :

Pour un écoulement Eulérien 2D, le système d'équation à résoudre numériquement peut se mettre sous la forme commune et compacte suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_x(\phi)}{\partial x} + \frac{\partial F_r(\phi)}{r \partial r} + S = 0 \quad (\text{II. 28})$$

Où les vecteurs  $\phi$ ,  $F_x(\phi)$  et  $F_r(\phi)$  ont pour composantes :

➤ **Le vecteur des variables conservatives**

$$\phi = (\rho \quad \rho v_x \quad \rho v_r \quad \rho E)^t$$

➤ **Le vecteur des flux convectif longitudinal**

$$F_x(\phi) = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_r \\ (\rho E + P)v_x \end{pmatrix}$$

➤ **Le vecteur des flux convectif transversal**

$$F_r(\phi) = r \begin{pmatrix} \rho v_r \\ \rho v_x v_r \\ \rho v_r^2 + P \\ (\rho E + P)v_r \end{pmatrix}$$

## ➤ Le vecteur des termes source

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

La forme de l'équation (II.28) incite à prendre comme inconnues les variables conservatives ( $\rho$ ,  $\rho v_x$ ,  $\rho v_r$ ,  $\rho E$ ).

Les variables d'état physiques ( $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_r$ ,  $e$ ,  $P$ ) s'expriment en fonction des variables conservatives par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho \\ u = \frac{\rho v_x}{\rho} \\ v = \frac{\rho v_r}{\rho} \\ e = E - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_r^2) \\ P = (\gamma - 1)\rho \left[ E - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_r^2) \right] \end{array} \right.$$

**II.4 Equations et Modélisation en 2D axisymétrique visqueux :****II.4.1 Hypothèses :**

Les hypothèses suivantes ont été prises en compte :

- ✓ Ecoulement turbulent, compressible, instationnaire,
- ✓ Ecoulement axisymétrique (écoulement sur le plan  $(x, r)$ ),
- ✓ Force de pesanteur négligeable,
- ✓ Gaz parfait (d'un point de vue thermodynamique),
- ✓ Fluide visqueux, satisfaisant l'hypothèse de Stokes.

**II.4.2 Équations de conservation :**

1/ Équation de conservation de la masse : (Équation de continuité)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0 \quad (\text{II. 29})$$

## 2/ Équation de conservation de la quantité de mouvement :

- Selon (x) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_x v_r) = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{xr}) \quad (\text{II. 30})$$

- Selon (r) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_r v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r v_r + rP) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) + \frac{1}{r}(P - \tau_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (\text{II. 31})$$

## 3/ Équation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho E + P)v_x] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho E + P)v_r] \\ = \frac{\partial}{\partial x}[\tau_{xx}v_x + \tau_{xr}v_r + q_x] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\tau_{xr}v_x + \tau_{rr}v_r + q_r)] \end{aligned} \quad (\text{II. 32})$$

Ou les éléments du tenseur des contraintes de cisaillement sont donnés par :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{3} \text{div } \vec{V} \right) & \tau_{rr} = 2\mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{3} \text{div } \vec{V} \right) \\ \tau_{xr} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) & \tau_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{v_r}{r} \right) \end{cases}$$

Avec la divergence du champ de vitesse  $\vec{V}$  :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}$$

Avec le flux de chaleur et l'énergie totale qui sont donné par :

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\mu C_p}{Pr}$$

$$E = e + \frac{1}{2} V^2 \quad \text{avec} \quad e = C_v T$$

### II.4.3 Description statistique des écoulements turbulents :

Les équations de Navier-Stokes n'ont pas de solution analytique connue en régime turbulent. Classiquement, on distingue trois grandes familles de méthodes pour simuler les écoulements turbulents. La simulation directe, couramment appelée DNS (Direct Numerical

Simulation), la simulation des grandes échelles ou (Large Eddy Simulation) et la méthode RANS (Reynolds Average Navier-Stokes Simulation).

**II.4.3.1 Décomposition de Reynolds (Pour la turbulence) :**

La décomposition de Reynolds permet de transformer les équations de Navier-Stokes et d'énergie en équations moyennées, en exprimant chaque variable instantanée  $f(x_i, t)$  (telle que la vitesse ou la pression) par la somme de la valeur moyenne  $\bar{f}(x_i, t)$  et d'une fluctuation  $f'(x_i, t)$ , comme suit :

$$f(x_i, t) = \bar{f}(x_i, t) + f'(x_i, t)$$

La moyenne est à l'origine une moyenne d'ensemble (moyenne stochastique), c'est-à-dire qu'elle est prise sur un ensemble d'expériences effectuées dans des conditions identiques.

L'hypothèse, qu'il est équivalent de considérer une expérience répétée une infinité de fois ou une seule expérience menée à l'infini dans le temps permet le passage à des moyennes temporelles, et par conséquent un traitement statistique des équations. Les équations ne sont alors a priori valables que pour des écoulements stationnaires en moyenne mais dans la pratique elles sont largement utilisées pour les cas instationnaires. La moyenne temporelle est définie par :

$$\overline{f(\vec{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\vec{x}, t)$$

Cette moyenne vérifie les règles dite de Reynolds

$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$
$\overline{f'} = 0$
$\overline{\alpha f} = \alpha \bar{f}$ avec $\alpha =$ une constante numérique
$\overline{\bar{f}} = \bar{f}$
$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$
$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$ avec $s =$ variable d'espace ou de temps

On définit la décomposition de Reynolds d'une quantité quelconque de l'écoulement  $f(\vec{x}, t)$  en deux parties distinctes :

$$f = \bar{f} + f'$$

Ce traitement appliqué aux équations de transport de mouvement et d'énergie qui décrivent le mouvement du fluide, fait apparaître des termes inconnus supplémentaires, les tensions de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  et le flux turbulent  $\overline{T' u'_i}$  d'où le problème de fermeture des équations.

Pour obtenir les équations moyennées, on utilise la décomposition de Reynolds suivantes :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \text{et} \quad u = \bar{u} + u'$$

Pour le terme  $\rho u$  on aura :

$$\overline{\rho u} = \overline{\bar{\rho} \bar{u}} + \overline{\bar{\rho} u'} + \overline{\rho' \bar{u}} + \overline{\rho' u'}$$

Comme  $\overline{\rho'} = 0$  et  $\overline{u'} = 0$  on aura :

$$\overline{\rho u} = \bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}$$

#### II.4.4 La moyenne au sens de Favre :

Pour un fluide compressible, l'utilisation du filtrage au sens de Favre évite l'introduction de termes de sous-maille supplémentaires. Le filtrage au sens de Favre est défini par :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

A partir de cette nouvelle moyenne, la partie fluctuante de  $f$  sera :

$$f'' = f - \tilde{f}$$

Avec

$$\tilde{f\tilde{g}} = (\tilde{f\tilde{g}}), \quad (\tilde{f\tilde{g}}) = \tilde{f\tilde{g}} = \tilde{f\tilde{g}}$$

Et

$$\tilde{\tilde{u}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\left( \frac{\rho u}{\bar{\rho}} \right)} = \tilde{u}, \quad \tilde{\tilde{u}''} = 0$$

$$\overline{\rho u} = \overline{\rho \tilde{u}}, \quad \overline{\rho u''} = 0$$

$$\overline{\rho U_i} = \overline{\rho \tilde{U}_i}, \quad \overline{\rho U_i U_j} = \overline{\rho \tilde{U}_i \tilde{U}_j} + \underbrace{\overline{\rho (U_i U_j - \tilde{U}_i \tilde{U}_j)}}_{\tau_{ij}} \text{ et } \overline{\rho U_{ie}} = \overline{\rho \tilde{U}_i e}$$

Le tenseur des contraintes  $\overline{\rho U_i U_j}$  et le flux de chaleur  $\overline{\rho U_i e}$  sont décomposés en une partie résolue et une partie de sous-maille qui nécessitera une modélisation :

$$\overline{\rho U_i U_j} = \overline{\rho \tilde{U}_i \tilde{U}_j} + \underbrace{\overline{\rho (U_i U_j - \tilde{U}_i \tilde{U}_j)}}_{\tau_{ij}}$$

$$\overline{\rho U_i e} = \overline{\rho \tilde{U}_i e} + \underbrace{\overline{\rho (U_i e - \tilde{U}_i e)}}_{q_i}$$

Où  $\tau_{ij}$  et  $q_i$  sont respectivement le tenseur des contraintes de sous-maille et le vecteur du flux de chaleur de sous-maille.

L'équation d'état filtrée d'un gaz parfait s'écrit :

$$\overline{P} = R \overline{\rho T} = \overline{\rho T} R$$

#### II.4.5 Equations de conservation moyennées :

Dans les écoulements de tuyère axisymétrique, il est possible de restreindre le domaine de calcul 3D en 2D axisymétrique. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes seront écrites dans un système coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ , auquel on associe le vecteur vitesse  $\vec{V}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta)$ . En négligeant les dérivées orthoradiales, le transport des variables conservatives  $(\overline{\rho}, \overline{\rho \tilde{v}_x}, \overline{\rho \tilde{v}_r}, \overline{\rho \tilde{E}_{ef}}, \overline{\rho \tilde{v}_\theta}, \overline{\rho \omega})$  s'exprime par rapport aux deux coordonnées spatiales  $(x, r)$  de la manière suivante :

**1/ Equation de conservation de la masse moyennée :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho \tilde{v}_x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \overline{\rho \tilde{v}_r}) = 0 \quad (\text{II. 33})$$

**2/ Equations de conservation de la quantité de mouvement moyennées :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \tilde{v}_x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho \tilde{v}_x \tilde{v}_x} + \overline{P}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \overline{\rho \tilde{v}_x \tilde{v}_r}) = \frac{\partial \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{\tau_{xx}}}{\partial r} \quad (\text{II. 34})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \tilde{v}_r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \overline{\rho \tilde{v}_x \tilde{v}_r} + r \overline{P}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho \tilde{v}_x \tilde{v}_x}) = \frac{\partial \overline{\tau_{xr}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{\tau_{rr}}}{\partial r} + \frac{\overline{P} - \overline{\tau_{\theta\theta}}}{r} \quad (\text{II. 35})$$

**3/ Equation de conservation de l'énergie moyennée :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P})\tilde{v}_x] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[(r\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P})\tilde{v}_r] \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\tau_{xx}}\tilde{v}_x + \widetilde{\tau_{xr}}\tilde{v}_r + \widetilde{q_x}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\widetilde{\tau_{xr}}\tilde{v}_x + \widetilde{\tau_{rr}}\tilde{v}_r + \widetilde{q_r})] \end{aligned} \quad (\text{II. 36})$$

Ou les éléments du tenseur des contraintes de cisaillement sont donnés par :

$$\begin{cases} \widetilde{\tau_{xx}} = 2(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div}(\vec{\tilde{V}}) \right) & \widetilde{\tau_{rr}} = 2(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \text{div}(\vec{\tilde{V}}) \right) \\ \widetilde{\tau_{xr}} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) & \widetilde{\tau_{\theta\theta}} = 2(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) \end{cases}$$

Avec la divergence du champ de vitesse  $\vec{\tilde{V}}$  :

$$\text{div}(\vec{\tilde{V}}) = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r}$$

**II.4.6 Equations de transport turbulent SST- Menter :**

La viscosité dynamique peut s'obtenir à partir d'une relation algébrique, d'une équation de transport ou de plusieurs équations de transport. Dans cette étude, on a utilisé le modèle à 2 équations de transport k- $\omega$  de Menter avec la correction SST (Shear Stress transport) vu son efficacité et sa grande popularité dans les études numériques de calcul des écoulements compressibles dans les tuyères.

Le modèle k -  $\omega$  de Menter consiste à une combinaison du modèle k -  $\omega$  de Wilcox et k -  $\epsilon$  de Launder-Sharma via une fonction de raccord de Menter F. La fonction de Menter contribue à privilégier le modèle de Wilcox, étant donné sa robustesse dans la région interne des couches limites, dans les zones des écoulements soumis à de fort gradient de pression adverse et dans les zones de décollement. D'autre part la fonction de Menter permet de basculer progressivement vers le modèle k- $\epsilon$  de manière à profiter de sa supériorité dans la zone de sillage.

La viscosité turbulente est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d'une échelle de vitesse u et une échelle de longueur L, caractéristique de la turbulence. Dans le modèle k- $\omega$ , soit  $u \approx \sqrt{k}$ . Pour l'échelle de longueur L, elle est donnée en fonction de la dissipation spécifique  $\omega$  :  $L \approx \frac{\sqrt{k}}{\omega}$ .

La fonction de dissipation spécifique  $\omega$  est reliée à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$  par la relation suivante :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$$

La viscosité turbulente est calculée en fonction de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et de la dissipation spécifique  $\omega$  par :

Le modèle de Menter repose sur le transport de deux équations, une pour l'énergie cinétique turbulente et une autre pour la dissipation spécifique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}k\tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}k\tilde{v}_r) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} k \right] + \frac{1}{r} \left[ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + S_k \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\omega\tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\omega\tilde{v}_r) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial}{\partial x} \omega \right] + \frac{1}{r} \left[ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + S_\omega \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Les termes sources du modèle  $S_k, S_\omega$  s'écrivent :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$$

$$S_k = P_k - \beta^* \bar{\rho} K \omega$$

$$S_\omega = \frac{\gamma \bar{\rho}}{\mu_t} P_k - \beta \bar{\rho} \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho} \sigma_\omega}{\omega} \overline{\text{grad}(k) \text{grad}(\omega)}$$

Avec  $P_k$  la production de  $k$  :

$$P_k = \bar{\tau}_t \cdot \overline{\text{grad}(\vec{V})}$$

Les constantes du modèle s'obtiennent par pondération des constantes du modèle de Wilcox et de Launder-Sharma en utilisant la fonction de Menter  $F$  :

$$\phi = F \phi_1 + (1 - F) \phi_2$$

Où les coefficients correspondant à  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont regroupés dans le tableau (II.1)

Tableau II.1 – Constantes du modèle de Menter.

	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$	$\beta$	$\beta^*$	K	$\gamma = \beta/\beta^* - \sigma_\omega k^2/\sqrt{\beta^2}$
$\emptyset_1$	0.85	0.5	0.075	0.09	0.41	0.553
$\emptyset_2$	1.0	0.856	0.0818	0.09	0.41	0.440

Sur le plan numérique, les équations k- $\omega$  sont résolues de la même manière que celle du modèle k- $\epsilon$ , les seules différences résultent de :

- L'établissement des conditions initiales et des conditions aux limites en

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k}$$

- La modification des termes diffusifs et l'ajout des termes sources inhérents au modèle SST-Menter.

La fonction de raccord de Menter F permet d'utiliser le modèle de Wilcox k- $\omega$  dans la sous-couche visqueuse et la région logarithmique (F = 1) et basculer progressivement vers le modèle k- $\epsilon$  à mesure qu'on s'approche de la zone de sillage (F = 0).

$$F = \tanh(\arg_1^4)$$

Avec :

$$\arg_1 = \min [\max(b_1, b_2), b_3]$$

Où

$$b_1 = \frac{500\mu_t}{\bar{\rho}\omega y^2}$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{k}}{y\omega\beta^*}$$

$$b_3 = \frac{4\bar{\rho}\sigma_\omega k}{D_{k\omega} y^2}$$

Où

$$D_{k\omega} = \text{Max}\left(\frac{\bar{\rho}\sigma_\omega k}{\omega} \overrightarrow{\text{grad}}(k) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\omega); 10^{-20}\right)$$

Le terme  $b_1$  intervient dans la sous-couche visqueuse, le terme  $b_2$ , dans la zone logarithmique et le terme  $b_3$ , dans l'écoulement externe.

La viscosité turbulente  $\mu_t$  est déterminée par le modèle de turbulence à deux équations de transport k- $\omega$  de Menter avec la correction SST (Shear Stress transport).

**II.4.7 Nouvelles expressions des équations de Navier stocks moyennées :**

Pour un écoulement 2D axisymétrique compressible et une modélisation de type  $k - \omega$  de Menter, le système peut se mettre sous une forme conservative qui a l'avantage d'être appropriée pour la résolution numérique des écoulements des fluides compressibles instationnaire qui présentent des discontinuités (ondes de choc).

La forme générale de ce système est la suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_r}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} S = 0 \quad (\text{II. 39})$$

Le vecteur inconnu  $\Phi$  des variables conservatives a pour forme :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{v}_x \\ \bar{\rho} \tilde{v}_r \\ \bar{\rho} \tilde{E}_{ef} \\ \bar{\rho} k \\ \bar{\rho} \omega \end{pmatrix}$$

Pour les vecteurs des flux eulérien et visqueux  $F_x$  et  $G_x$  dans la direction x on a :

$$F_x = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{v}_x \\ \bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_x + \bar{P}_{ef} \\ \bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_r \\ (\bar{\rho} \tilde{E}_{ef} + \bar{P}_{ef}) \tilde{v}_x \\ \bar{\rho} k \tilde{v}_x \\ \bar{\rho} \omega \tilde{v}_x \end{pmatrix} \quad G_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xx} \\ \tilde{\tau}_{xr} \\ \tilde{\tau}_{xx} \tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{xr} \tilde{v}_r + \tilde{q}_x \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} k \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial}{\partial x} \omega \end{pmatrix}$$

Pour les vecteurs des flux eulérien et visqueux  $F_r$  et  $G_r$  dans la direction r on a :

$$F_r = \begin{pmatrix} r \bar{\rho} \tilde{v}_r \\ r \bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_r \\ r \bar{\rho} \tilde{v}_r \tilde{v}_r + \bar{P}_{ef} \\ r (\bar{\rho} \tilde{E}_{ef} + \bar{P}_{ef}) \tilde{v}_r \\ r \bar{\rho} k \tilde{v}_r \\ r \bar{\rho} \omega \tilde{v}_r \end{pmatrix} \quad G_r = \begin{pmatrix} 0 \\ r \tilde{\tau}_{xr} \\ r \tilde{\tau}_{rr} \\ r (\tilde{\tau}_{xr} \tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{rr} \tilde{v}_r + \tilde{q}_r) \\ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial r} k \\ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega} \right) \frac{\partial}{\partial r} \omega \end{pmatrix}$$

Pour le terme source :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{P}_{ef} - \tilde{\tau}_{\theta\theta} \\ 0 \\ r S_k \\ r S_\omega \end{pmatrix}$$

---

---

## II.5 Méthode explicite de Mac Cormack :

Les écoulements compressibles non permanents sont régis par un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, non linéaire. De telles équations ne peuvent être résolues théoriquement que dans des cas particuliers (problèmes très simples ou de géométrie très particulière), rarement rencontrés dans la pratique. Par conséquent, plusieurs problèmes exigent, par manque de solution analytique, une solution numérique des équations aux dérivées partielles. Pour résoudre les équations du mouvement, un schéma aux différences finies explicite du type "Prédicteur - Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps, en l'occurrence le schéma de Mac Cormack est utilisé.

Du fait de sa validité expérimentale et de son efficacité numérique largement reconnues, le schéma de Mac Cormack est aujourd'hui très utilisé pour la simulation, autre que les écoulements des fluides compressibles, de nombreux phénomènes d'actualité qui touchent :

- Le domaine hydraulique avec des études relatives à la rupture des barrages (dam break flow),
- Le domaine de l'irrigation et du drainage,
- Le domaine de la rhéologie (sédimentation),
- Les domaines purement physiques concernant l'électromagnétisme et l'acoustique.

La méthodologie du schéma de Mac Cormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de Prédiction et une autre de Correction. Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au niveau du pas de temps «  $n + 1$  », en passant par un temps intermédiaire «  $n+1/2$  » et sachant que leurs valeurs sont connues au pas de temps «  $n$  ». Les différences finies Avants sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape Prédiction et les différences finies Arrières utilisant les variables prédites, sont utilisées dans l'étape correction. Cependant, il est possible d'utiliser les différences finies Arrières dans l'étape Prédiction et les différences finies Avants dans l'étape Correction, comme il est possible d'alterner la direction de différenciation d'un pas de temps à l'autre. Ce principe est développé dans chaque exemple d'écoulement considéré dans ce travail.

**II.6 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a pu constater que l'étude d'un écoulement d'un fluide compressible fait appel, non seulement, aux notions de base de la mécanique des fluides, mais également à celle de la thermodynamique. Ainsi, Le modèle adopté dans cette étude, pour la modélisation des écoulements compressibles turbulents dans les tuyères de Laval est le modèle SST Menter à deux équations de transport  $k-\omega$ . Le modèle est écrit en coordonnées axisymétriques.

# Chapitre III :

## Résolution numérique

# III

## Méthode des volumes finis

### III.1 Introduction :

La méthode numérique utilisée repose sur une formulation aux volumes finis. Elle présente le très grand avantage d'être à la fois facilement applicable sur un maillage quelconque, et assure également la conservation des propriétés physiques. De plus, une régularité suffisante des solutions ne peut pas toujours être garantie, le cas des écoulements avec chocs en est un exemple classique, ou encore l'écoulement sur le bord de fuite d'une aile lorsque la production d'entropie est différente le long des lignes de courants de part et d'autre du profil (discontinuité tangentielle). Il est alors important de représenter précisément les lois de conservation dans leur formulation intégrale. La méthode la plus naturelle pour y parvenir est évidemment de discrétiser la formulation intégrale des équations et non la forme différentielle.

Dans la méthode aux volumes finis, le domaine est subdivisé en cellules quelconques. Sur chacune d'elles les lois de conservation sont appliquées afin de déterminer les variables du champ de l'écoulement en des points discrets des cellules (nœuds). Les méthodes aux volumes finis n'exigent pas un maillage structuré. Il y a donc bien évidemment une liberté considérable dans le choix des cellules et des nœuds. Cependant, des règles doivent être suivies dans la construction du maillage pour garantir la stabilité du code et s'assurer de la pertinence du calcul (maillage fin lorsque l'on s'attend à trouver de petites structures, raffinement plus précis dans les zones de discontinuités etc...). On dispose ainsi d'une méthode de discrétisation très facilement adaptable à tous types de géométrie, et également capable de gérer des discontinuités.

La méthode aux volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, est celle que nous allons décrire simplement ici le principe général, vu que le code de calcul utilisé (Ansys-fluent) pour la résolution de ces équations utilise cette méthode.

### III.2. Principe de la méthode des volumes finis :

Dans son ensemble, la méthode des volumes finis consiste à définir à l'intérieur du domaine de calcul une grille de points appelés nœuds. Chaque nœud se trouve entouré par un volume élémentaire sur lequel les équations aux dérivés partielles sont intégrées.

Il existe deux méthodes pratiques pour placer le réseau de points ou maillage et leurs volumes de contrôle associés :

- la première consiste à définir d'abord la grille de points, puis placer les faces des volumes à mi-distance de deux nœuds consécutifs, figure (III. 1.a).
- dans la deuxième, on commence par la définition des volumes de contrôle, puis on place les nœuds associés aux centres des volumes, figure (III. 1.b)

**Remarque :** ces deux pratiques sont identiques dans le cas d'un maillage uniforme.

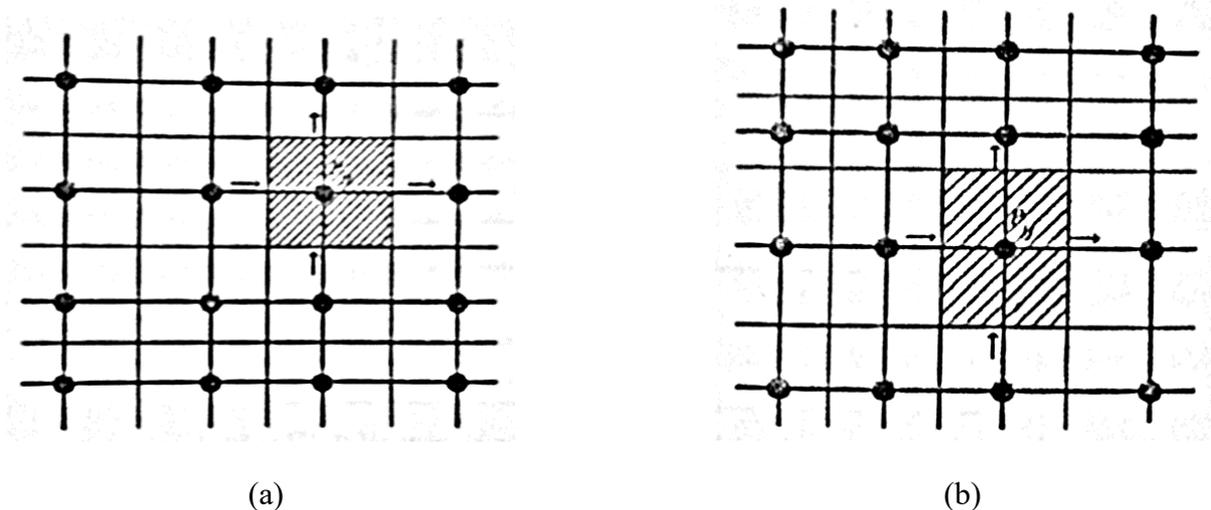


Figure III.1 - Maillage et volume de contrôle.

### III.3 Discrétisation :

Pour illustrer la méthode des volumes finis, nous allons l'appliquer pour le cas d'une équation de conservation sous forme la plus générale suivante :

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi) + \frac{d}{dx}(\rho u\phi) + \frac{d}{dy}(\rho v\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dy}\right) + S_\phi \quad (\text{III. 1})$$

Dans le cas des équations de la convection forcée, le tableau suivant résume les valeurs que prennent les variables  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  dans les différentes équations

Tab III.1 – Les différentes valeurs de  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$ .

Grandeur	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Conservation de masse	1	0	0
Quantité de mouvement selon l'axe ( $x_i$ )	$u_i$	$\mu$	$-\partial p/\partial x_i$
Energie	T	$\lambda/\rho c_p$	0

Pour obtenir les équations discrètes aux nœuds, l'équation (III.1) est intégrée sur le volume de contrôle, et sur le temps, figure (III.2).

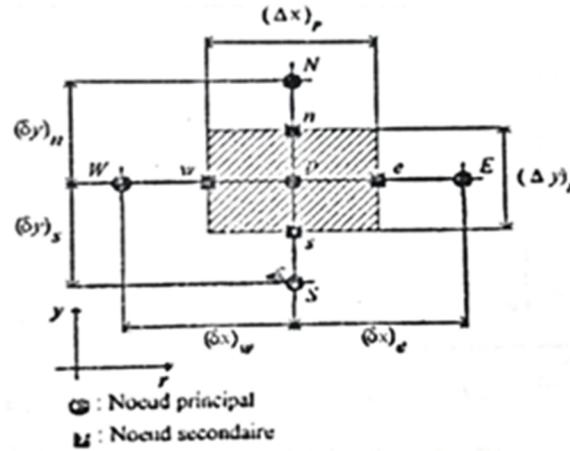


Figure III.2 - Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration.

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi)dv + \int_v \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) \right] dv$$

$$= \int_v \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dv + \int_v S_\phi dv \quad \text{(III. 2)}$$

$$[(\rho\phi)_{p,t+\Delta t} - (\rho\phi)_{p,t}] \Delta v$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w \right] dt$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_n - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} [(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] dt$$

$$- \int_t^{t+\Delta t} [(\rho v A \phi)_n - (\rho v A \phi)_s] dt + \int_t^{t+\Delta t} [S_\phi \Delta V] dt \quad \text{(III. 3)}$$

Pour chaque nœud la variable  $\phi$  est écrite en fonction des nœuds adjacents, d'où on obtient un système algébrique linéaire à résoudre. Pour former le système d'équations linéaires liant entre elle les valeurs de  $\phi$  aux nœuds P, E, W, S, N, il faut faire le choix d'un schéma d'approximation de la quantité  $\phi$  entre ces nœuds.

**III.3.1 Différents schémas de discrétisation spatiale :**

Pour la clarté de l'exposé, nous nous ramenons à l'équation de convection-diffusion monodimensionnelle stationnaire :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \tag{III. 4}$$

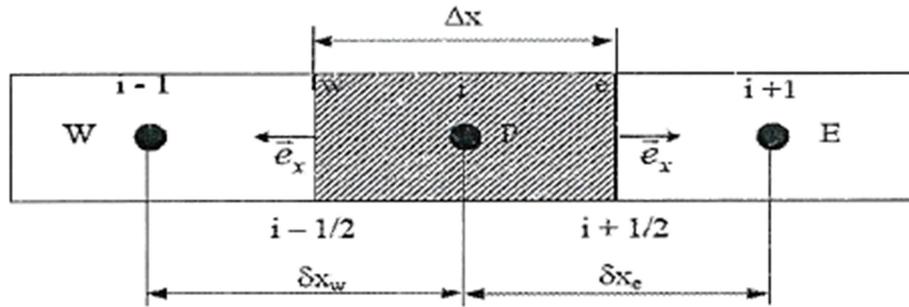


Figure III.3 - Volume de contrôle dans le cas à une dimension.

L'intégration de l'équation de convection diffusion sur le volume de contrôle centré en P donne, avec la notation de la figure (III.3) :

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \tag{III. 5}$$

On voit intervenir les valeurs de la variable  $\phi$  sur les faces du volume de contrôle. Il est nécessaire d'avoir recours à une méthode d'interpolation pour se ramener à une équation où seule la variable  $\phi$  au centre du volume de contrôle intervient. Il existe différents schémas d'interpolation, de précision variable.

**III.3.1.1 Schéma aux différences centrées (CDS) :**

Ce schéma fait l'hypothèse d'une variation linéaire de  $\phi$  d'un nœud à son voisin immédiat. En supposant que les interfaces des volumes de contrôle sont à mi-distance entre les nœuds, on peut alors écrire :

$$\begin{cases} \phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \\ \phi_w = \frac{(\phi_P + \phi_W)}{2} \end{cases} \tag{III. 6}$$

$$\begin{cases} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_P - \phi_E}{\Delta x_e} \\ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \end{cases} \quad (\text{III. 7})$$

Ce qui donne finalement :

$$\left[ \frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{2} + \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} \right] \phi_P = \left( \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right) \phi_E + \left( \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} + \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \phi_W \quad (\text{III. 8})$$

On montre, que la validité de ce schéma est limitée aux bas nombre de Reynolds, sinon il peut conduire à une représentation de  $\phi$  très irréaliste, pouvant par exemple se traduire par une valeur de  $\phi_P$  non bornée par  $\phi_E$  et  $\phi_W$ .

### III.3.1.2 Schéma Upwind (UPS) :

Ce schéma tient compte du sens de l'écoulement,  $\phi_P$  prenant la valeur de  $\phi$  au nœud situé en amont. Si on note  $F_e$  le produit  $(\rho u)_e$  et  $F_w$  le produit  $(\rho u)_w$ , alors on aura :

Dans le cas où flux est dans la direction positive :

$$\begin{cases} F_w > 0 \ (u_w > 0) \\ F_e > 0 \ (u_e > 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_w = \phi_W \\ \phi_e = \phi_P \end{cases} \quad (\text{III. 9})$$

Dans le cas où le flux est dans la direction négative :

$$\begin{cases} F_w < 0 \ (u_w < 0) \\ F_e < 0 \ (u_e < 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_w = \phi_P \\ \phi_e = \phi_E \end{cases} \quad (\text{III. 10})$$

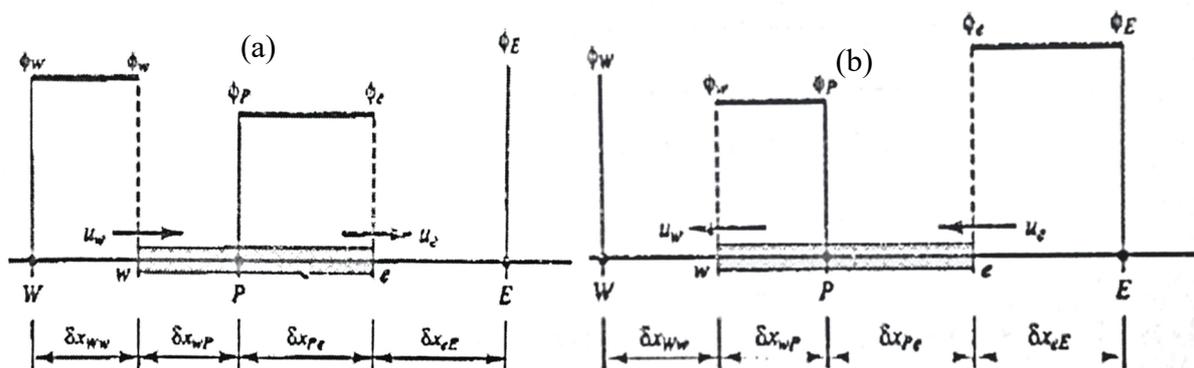


Figure III.4 – (a)  $F_w > 0$  et  $F_e > 0$ , (b)  $F_w < 0$  et  $F_e < 0$ .

### III.3.1.3 Solution exact :

Soit les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \phi(x=0) = \phi_0 \\ \phi(x=L) = \phi_L \end{cases} \quad (\text{III. 11})$$

Si  $\Gamma$  est constant, l'équation de convection diffusion a une solution exacte, donnée sur le domaine  $[0, L]$  par :

$$\frac{\phi(x) - \phi(0)}{\phi(L) - \phi(0)} = \frac{\exp\left(\text{Pe} \frac{x}{L}\right)}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad (\text{III. 12})$$

Où  $\text{Pe}$ , est un nombre de Peclet, donné par :

$$\text{Pe} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

Le résultat de cette interpolation dépend donc de la nature de l'écoulement caractérisée par le nombre de Peclet qui caractérise le rapport de la convection à la conduction, on peut donc représenter les variations de  $\phi(x)$  pour différentes valeurs de  $\text{Pe}$ .

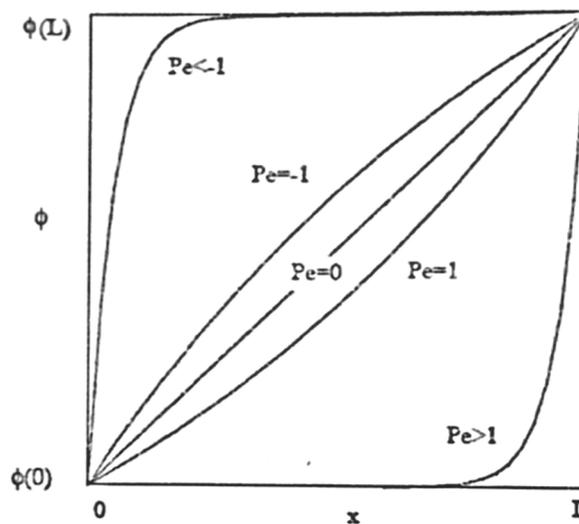


Figure III.5 - Variation de  $\phi$  dans le domaine  $[0, L]$ .

- Pour les valeurs  $|\text{Pe}|$  élevé (convection fortement dominant), l'interpolation se fait en adoptant la valeur de la cellule amont  $\phi_0$ , ou aval  $\phi_L$  (selon que  $\text{Pe} > 1$  ou  $\text{Pe} < -1$ )
- Pour  $\text{Pe} = 0$ , pas de terme convectif c'est-à-dire pure diffusion,
- Si la diffusion est fortement dominante ( $\text{Pe}$  faible), on utilise l'équation (III.9).

#### III.3.1.4 Schéma exponentiel :

Si on note  $J$  le flux total de convection et de diffusion :

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}$$

On a alors :

$$\frac{dJ}{dx} = 0$$

Ce qui intégré sur le volume de contrôle centré en P donne :

$$J_e - J_w = 0$$

Si on applique la solution exacte de l'équation de convection diffusion entre E et P d'une part, et entre W et P d'autre part, on aboutit à :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \tag{III. 13}$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\ a_w = \frac{F_w \exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right)}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\ a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \end{array} \right.$$

Où  $D_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e}, D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w}$

Ce schéma parait approprié mais n'est pas assez utilisé car les exponentielle sont couteuses à calculer.

### III.3.1.5 Schéma hybrid (HDS: hybrid differencing scheme):

Il s'agit d'une version approchée du schéma exponentiel, faisant l'objet d'une approximation linéaire, ainsi pour le coefficient  $a_E$  on a :

$$\frac{a_e}{D_e} = \frac{\frac{F_e}{D_e}}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} = \frac{Pe_e}{\exp(Pe_e) - 1}$$

$$\left| \begin{array}{ll} Pe_e < -2, & \frac{a_E}{D_E} = -Pe_e \\ -2 < Pe_e < 2, & \frac{a_E}{D_E} = 1 - \frac{Pe_e}{2} \\ Pe_e > 2, & \frac{a_E}{D_E} = 0 \end{array} \right.$$

Ceci revient en fait à une combinaison des deux schémas aux différences centrées et Upwind.

### III.3.2 Schéma de discrétisation temporel (régime instationnaire) :

Pour décrire les phénomènes transitoires, une discrétisation temporelle est réalisée, en plus de la discrétisation spatiale. Elle est caractérisée par le pas de temps  $\Delta t$ . La discrétisation temporelle implique l'intégration des équations différentielles sur le pas de temps  $\Delta t$ .

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} \right) = \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} + S_\phi \right) \quad (\text{III. 14})$$

L'intégration du terme d'accumulation de  $\phi$  ne pose pas de problème :

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = (\rho\phi)_{t+\Delta t} - (\rho\phi)_t \quad (\text{III. 15})$$

Pour les autres, l'intégration est moins directe. Une formulation générale étant pour une fonction  $b$  quelconque :

$$\int_t^{t+\Delta t} b_t dt = f b_{t+\Delta t} + (1 - f)b_t \quad (\text{III. 16})$$

Où  $f$  est un coefficient compris entre 0 et 1. Une valeur de  $f$  nulle, donne un schéma explicite, une valeur de 1 donne un schéma implicite.

Après discrétisation de l'équation (III.3), nous obtenons l'équation suivante :

$$a_p\phi_p = a_E\phi_E + a_w\phi_w + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \quad (\text{III. 17})$$

Dans le cas présent, nous utiliserons une méthode aux volumes finis centrés, figure (III.6). On procède à une intégration spatiale locale du système. Les variables physiques sont alors considérées comme représentatives des valeurs au centre de chaque cellule élémentaire  $\Omega_{i,j}$  du maillage.

On a :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(F + F_v)}{\partial x} + \frac{\partial(G + G_v)}{\partial x} = 0 \quad (\text{III. 18})$$

Où

- $W$  le vecteur des inconnues principales exprimées sous forme conservative,
- $F$  le flux non diffusif selon la direction longitudinale (suivant  $x$ ),

- $F_v$  le flux diffusif selon la direction longitudinale,
- $G$  le flux non diffusif selon la direction latérale (suivant  $y$ ),
- $G_v$  le flux diffusif selon la direction latérale.

En l'absence de diffusion ( $F_v, G_v$ ), le système d'équation gouvernant l'état du système peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \tag{III. 19}$$

Si on intègre l'équation (III.19) en posant  $\vec{H} = (F, G)$ , on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{i,j}} W d\Omega + \iiint_{\Omega_{i,j}} \Delta \vec{H} d\Omega = 0 \tag{III. 20}$$

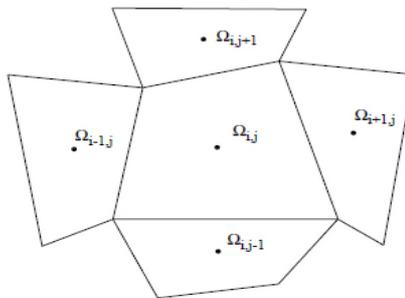


Figure III.6 - Méthode aux volumes finis - Cellule centrée, maillage structuré.

Ici  $d\Omega$  représente l'élément différentiel de volume. On utilise le théorème de Gauss selon lequel l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteur dans un volume est égale à l'intégrale du flux de ce champ de vecteur à travers la surface qui entoure ce volume.

On aura donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{i,j}} W d\Omega + \iiint_{S_{i,j}} \vec{H} d\vec{S} = 0 \tag{III. 21}$$

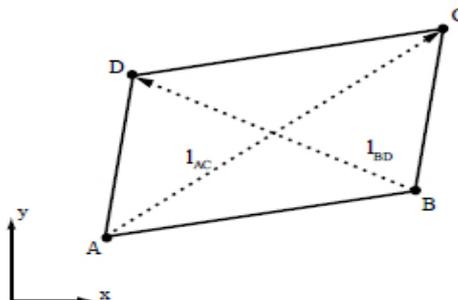


Figure III.7 - Cellule bidimensionnelle.

Considérons le volume de contrôle ABCD dans le cas bidimensionnel, figure (III.7), le vecteur surface  $\vec{S}_{AB}$  pour le côté AB peut être défini par :

$$\vec{S}_{AB} = \Delta y_{AB} \vec{e}_x - \Delta x_{AB} \vec{e}_y$$

Donc, le long de la surface AB :

$$\iint_{S_{AB}} \vec{H} d\vec{S} = \int_{I_{AB}} (Fdy - Gdx)$$

On procède de même pour les 3 autres côtés.

Dans la cellule  $\Omega_{i,j}$ , la vitesse est considérée comme constante et sa valeur est ramenée au centre de la cellule. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{i,j}} W d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} (W_{i,j}, \Omega_{i,j}) \tag{III.22}$$

Dans le cas bidimensionnel,  $\Omega_{i,j}$  est rapporté à une surface. Pour un quadrilatère quelconque l'aire  $\Omega$  peut être calculée à partir du produit vectoriel des diagonales, donc :

$$\Omega_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{l}_{AC} \wedge \vec{l}_{BD}| = \frac{1}{2} [(x_C - x_A)(y_D - y_B) - (y_C - y_A)(x_D - x_B)]$$

Il ne reste qu'à estimer la valeur des flux sur chacune des frontières de la cellule  $\Omega_{i,j}$  du maillage.

Nous avons vu que le choix d'une méthode aux volumes finis centrés nous impose de travailler en maillage décalé. Sur les frontières solides, les nœuds du maillage seront placés sur la frontière, alors que les paramètres seront calculés de part et d'autres de la frontière, figure (III.8).

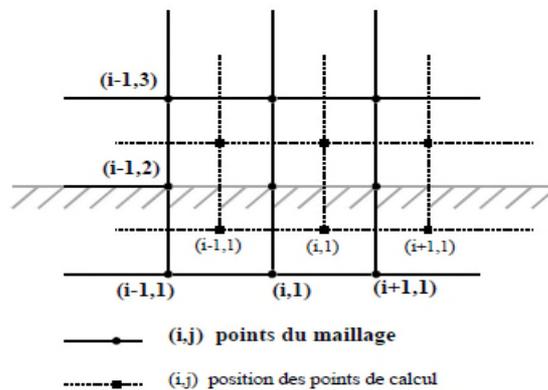


Figure III.8 - Maillage décalé sur une frontière solide.

De plus, nous travaillerons en multi blocs. Deux blocs adjacents partagent deux rangées de cellules (lignes ou colonnes) en commun, donc trois rangées de nœuds de

maillage, Figure (III.9). On aura par exemple, Bloc1 (ild, 1) = Bloc2 (2, 2) (où ild est la taille du bloc considéré) :

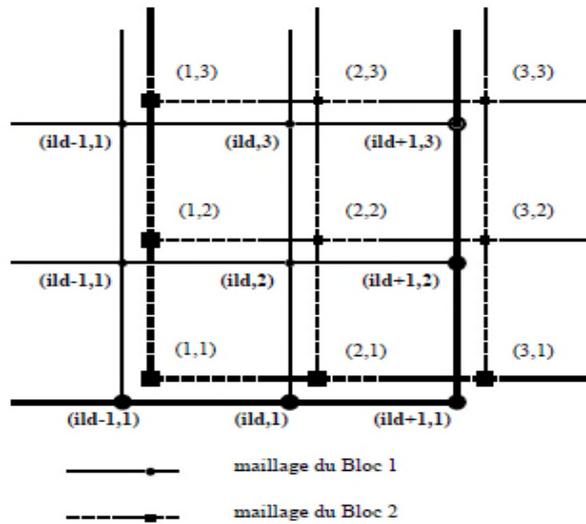


Figure III.9 - Superposition des mailles entre deux blocs adjacents.

### III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons discuté des méthodes de discrétisation des équations régissant les phénomènes de transport. Ce processus engendre un système d'équations algébriques linéaires. La résolution de ce dernier implique l'utilisation de méthodes numériques, cependant il existe deux familles de résolution, les méthodes directes et les méthodes itératives. Ces dernières sont basées sur l'application d'un algorithme relativement simple menant à la convergence certaine après un grand nombre d'itérations.

# Chapitre IV :

## Résultats et discussions

# IV

## Résultats et discussions

### IV.1 Introduction :

Cette partie porte sur la simulation numérique de l'écoulement dans la tuyère convergent divergent, elle a été menée à l'aide du code de calcul (Ansys Fluent 14.0.0). La méthode numérique utilisée pour la résolution de l'écoulement est basée sur une approche volumes finis. Le problème a été traité en deux dimensions axisymétriques. Dans cette étude le traitement des flux convectifs est effectué en utilisant la méthode de Roe - FDS. Pour la discrétisation temporelle des équations, un schéma implicite du type Mac Cormack ordre est utilisé.

### IV.2 Description du problème :

La géométrie étudié et une tuyère de Laval (convergent-divergent). La section d'entrée et d'un rayon de 85mm, la longueur du convergent et du divergent est respectivement 75.7mm et 154.3mm, la section au col et de 30mm et à la sortie est de 114.44mm, figure (IV.1). L'écoulement du fluide considéré (gaz parfait) est délimité par une paroi imperméable adiabatique, les données suivantes ont été utilisées pour l'écoulement d'Euler (§ IV.3) :

Pression total :  $P_0 = 34.7$  bar

Température totale :  $T_0 = 700$  K

Nombre de Prandtl :  $Pr = 0.72$

Constante de l'air :  $R = 287$  J/Kg. K

Rapport des chaleurs spécifiques :  $\gamma = 1.4$

Pas d'effet de gravité :  $g = 0$  m/s<sup>2</sup>

Pas du temps :  $\Delta t = \frac{r_*}{\sqrt{\gamma R T_0}} = 5.567 \cdot 10^{-5}$  s

Pour l'écoulement turbulent (§ IV.4) on a ajouté aux données précédentes :

La viscosité dynamique :  $\mu = 1,7894 \cdot 10^{-5}$  kg/m. s

Nombre de Reynolds :  $Re_d = \frac{2 \rho_0 \sqrt{\gamma R T_0} r_*}{\mu} = 316.117 \cdot 10^5$

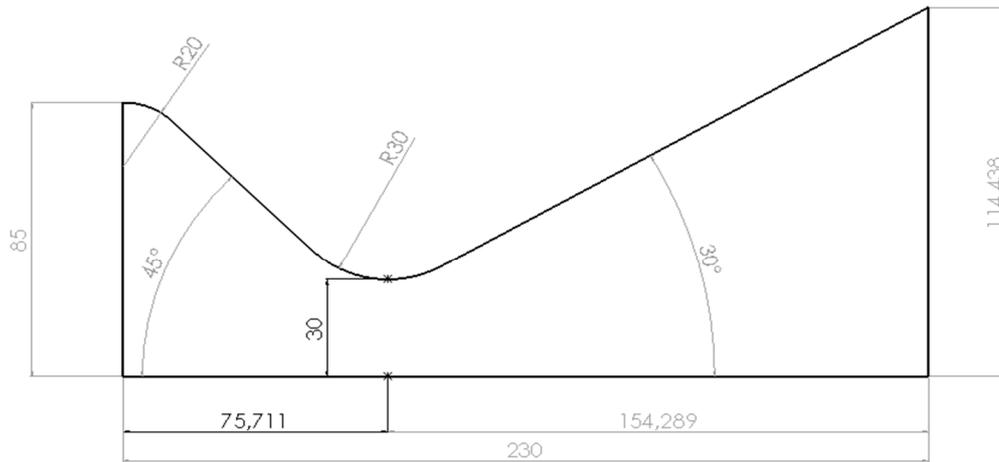


Figure IV.1 - Profil de la tuyère.

L'écoulement à travers cette tuyère est fortement influencé par la variation de la pression à la sortie (Pa). Pour capter ces effets, le maillage doit être conforme à certaine exigence. Ensuite, la modélisation passe par un choix judicieux des différents paramètres du code de calcul. Les bons réglages étant trouvés, on lancera les simulations en imposant une à une les conditions aux limites. A chaque fois, on attendra la convergence de la solution pour pouvoir traiter les résultats.

#### **IV.2.1 Critère de convergence :**

En règle générale, on considère que la convergence du calcul est acceptable lorsque les résidus atteignent  $10^{-4}$ . Toutefois, on ne parvient pas toujours à ce que chaque résidu soit inférieur à cette valeur. Cet objectif devient notamment difficile lorsque la pression statique imposée en sortie est faible (faibles rapports de pression) et que l'on s'approche du blocage sonique. Cela ne veut pas dire pour autant que la solution n'a pas convergé. En effet, si les résidus se stabilisent à un niveau de l'ordre de  $10^{-3}$ . Et que d'autres critères de convergence sont atteints comme la stabilité des grandeurs intégrales, alors on peut décider de stopper le calcul. La stabilisation signifie donc que l'on n'observe plus d'oscillations (ou peu), ou de variations brutales des pentes sur l'évolution de ces grandeurs en fonction du nombre d'itérations. Comme il n'existe pas de mesure universelle pour juger de la convergence d'un calcul, le critère sur la valeur des résidus qui peut être valable pour juger de la validité d'une classe de problèmes, mais elle peut s'avérer trompeuse pour d'autres types de problèmes.

Par conséquent, il est plus astucieux de juger de la convergence non seulement en examinant les résidus, mais également en surveillant des quantités intégrales telles que le débit, les propriétés thermiques et les forces aux parois.

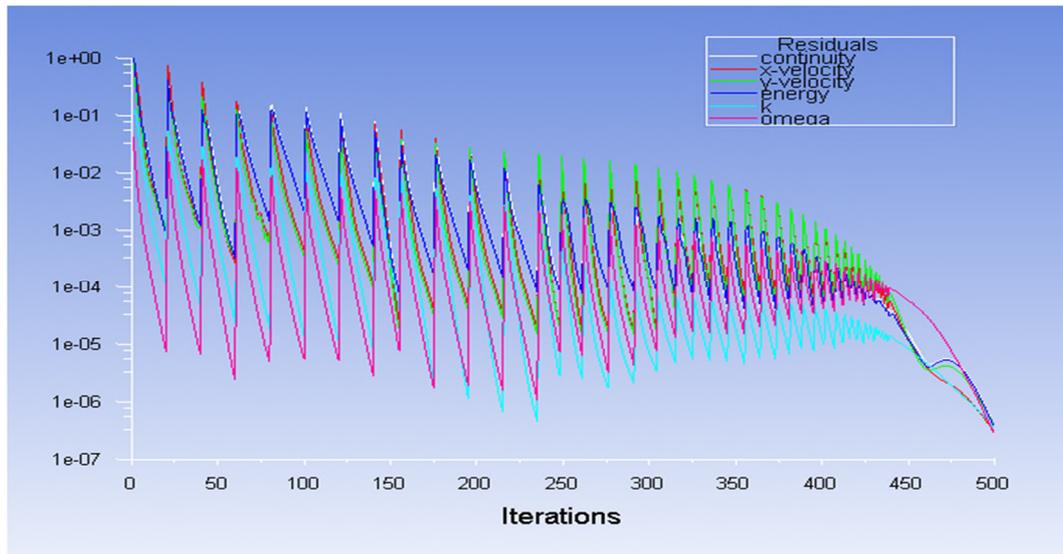


Figure IV.2 - Convergence et courbes des résidus.

### IV.2.2 Validation du maillage :

Dans le but d'investir, la performance d'un modèle mathématique pour certaines études d'écoulements de fluide, l'indépendance du maillage doit nous rassurer si les résultats obtenus ne sont pas affectés par l'augmentation progressive de ce dernier (maillage). Si les résultats calculés diffèrent de l'expérience nous ne pouvons pas savoir si cette différence est due à un modèle physique non adéquat ou bien à une résolution insuffisante du maillage. Ainsi on a testé pour la configuration choisie plusieurs maillages, différenciés par le nombre de point mis en jeu (405, 2079, 12792, 22563 et 35360) disposés comme montré sur la figure (IV.3).

Après chaque simulation, on surveille l'un des paramètres de l'écoulement qui nous intéresse le plus (pour notre cas, ce sera le nombre du Mach et la pression statique). Donc, pour chaque maillage, on trace les courbes d'évolution ou variation du paramètre choisi et on vérifie s'il continue à changer. Si c'est le cas, on raffine encore notre maillage, sinon, on conclue que la solution est devenue indépendante de la finesse de la grille.

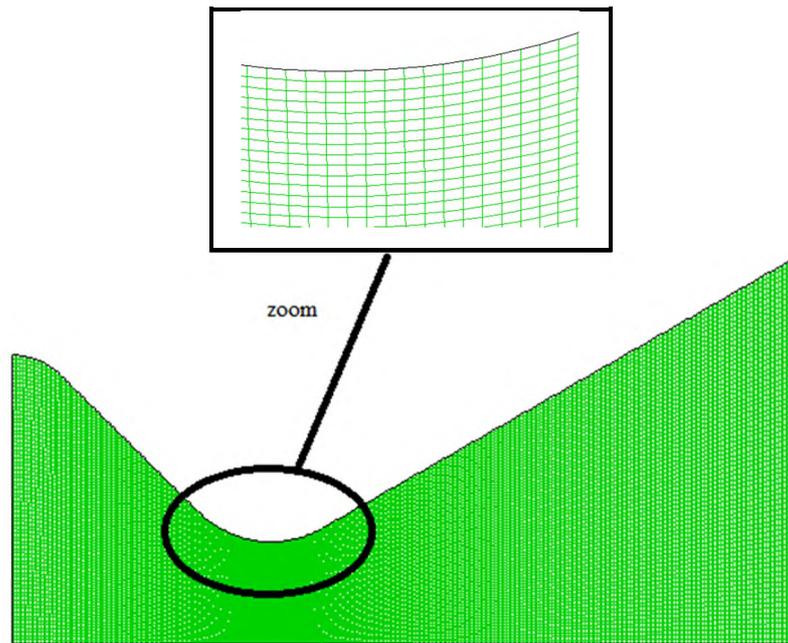


Figure IV.3 - Maillage de la géométrie.

Sur les figures (IV.4) et (IV.5), montrant les variations de pression et le nombre de Mach, on voit l'influence du maillage de la géométrie sur les résultats de simulation. On constate qu'après un certain nombre de nœuds la pression et le nombre de Mach ne varient plus en raffinant le maillage, la finesse du maillage est optimale.

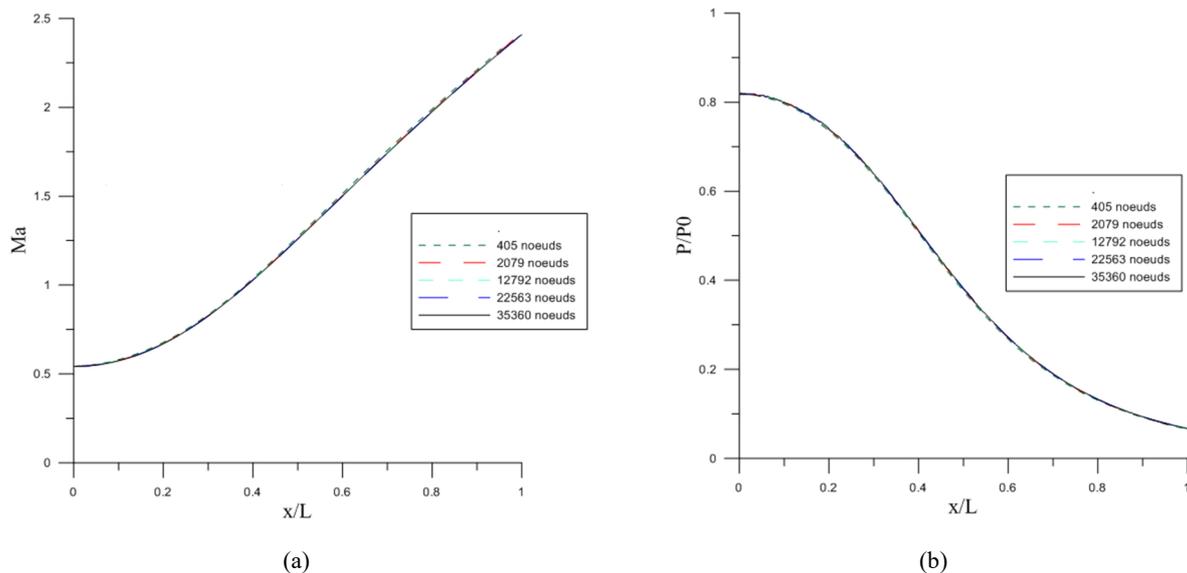
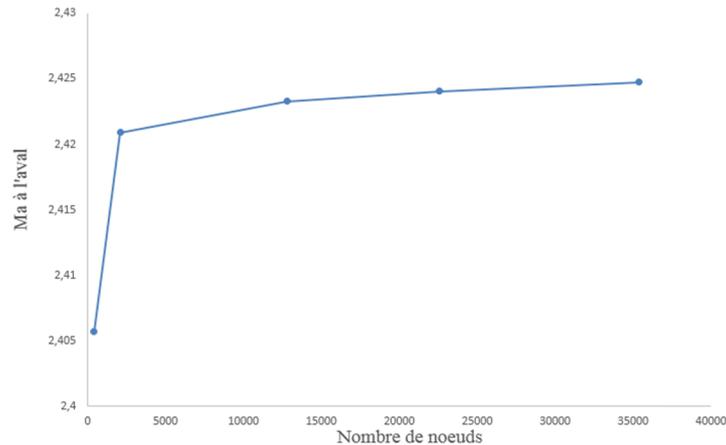


Figure IV.4 – Variation du nombre de Mach axiale (a) et la pression statique (b) sur l'axe suivant plusieurs maillages.



**Figure IV.5** - Variation du nombre de Mach à la section de sortie en fonction du nombre de nœuds.

Après plusieurs essais, nous avons pu obtenir les seuils de finesse des grilles au-dessus desquels la solution calculée devient indépendante. Le maillage adopté est un maillage structuré, ce choix est compatible avec les logiciels retenus pour la paramétrisation : (Ansys, Fluent,...).

La conjonction d'un maillage structuré et d'une géométrie multi-bloc présente les avantages suivants :

- un nombre inférieur de mailles par rapport à un maillage non structure équivalent.
- Réduction du risque d'erreurs numériques étant donné que le maillage est aligné avec l'écoulement.

### **IV.2.3 Validation du langage de calcul :**

Dans le but de valider le programme adopté de cette étude, on a comparé nos résultats avec ceux de [29] correspondant à une étude sur un écoulement de fluide compressible dans une tuyère convergent-divergent.

Le dispositif expérimental utilisé est simulé sur Ansys-Fluent, la tuyère expérimentale se divise en trois parties, l'entrée, le col et la sortie. Le rayon d'entrée est de 14,01 mm, 11,45 mm au col et 18,33 mm à la sortie. Avec une longueur totale de 30 mm.

Nous avons comparé les profils, à l'axe, de la pression normalisée par la pression totale ( $P_0$ ) et le nombre de Mach ( $Ma$ ), le long de la distance adimensionnelle  $x/L$ . Ces profils sont indiqués, respectivement par la figure (IV.6).

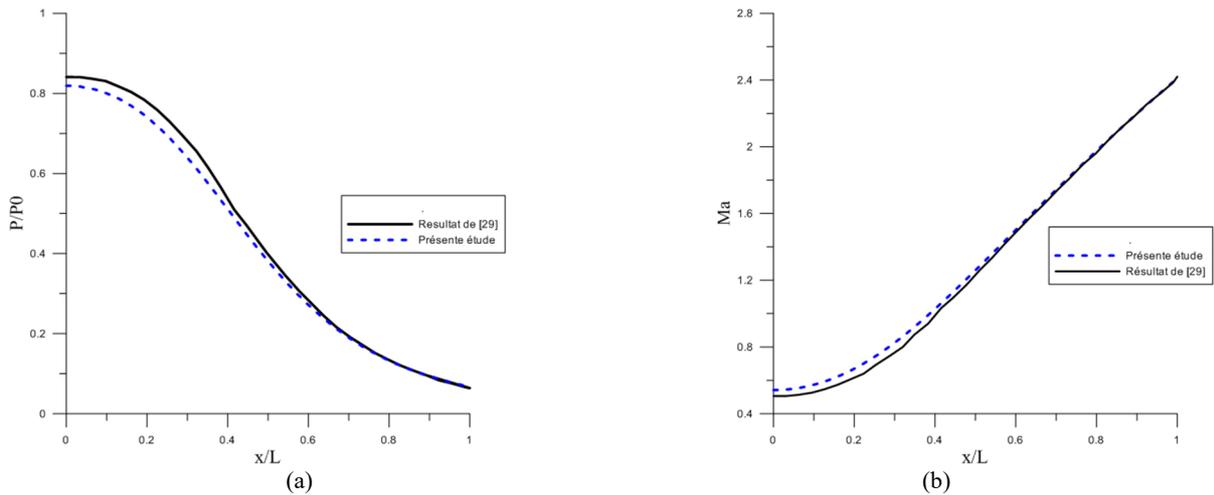


Figure IV.6 - Comparaison du Profil de pression ( $P/P_0$ ) (a) et du nombre de Mach ( $Ma$ ) (b) en fonction de  $x/L$  à l'axe avec l'expérimental [29].

### IV.3 Ecoulement d'Euler dans une tuyère convergent-divergent 2D axisymétrique :

#### IV.3.1 Calcul des régimes :

##### IV.3.1.1 Régime sonique adapté : $P_a/P_0 = 0.782$

Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans la tuyère figure (IV.1) pour le régime sonique adapté sont présentés dans les figures (IV.7 - IV.8).

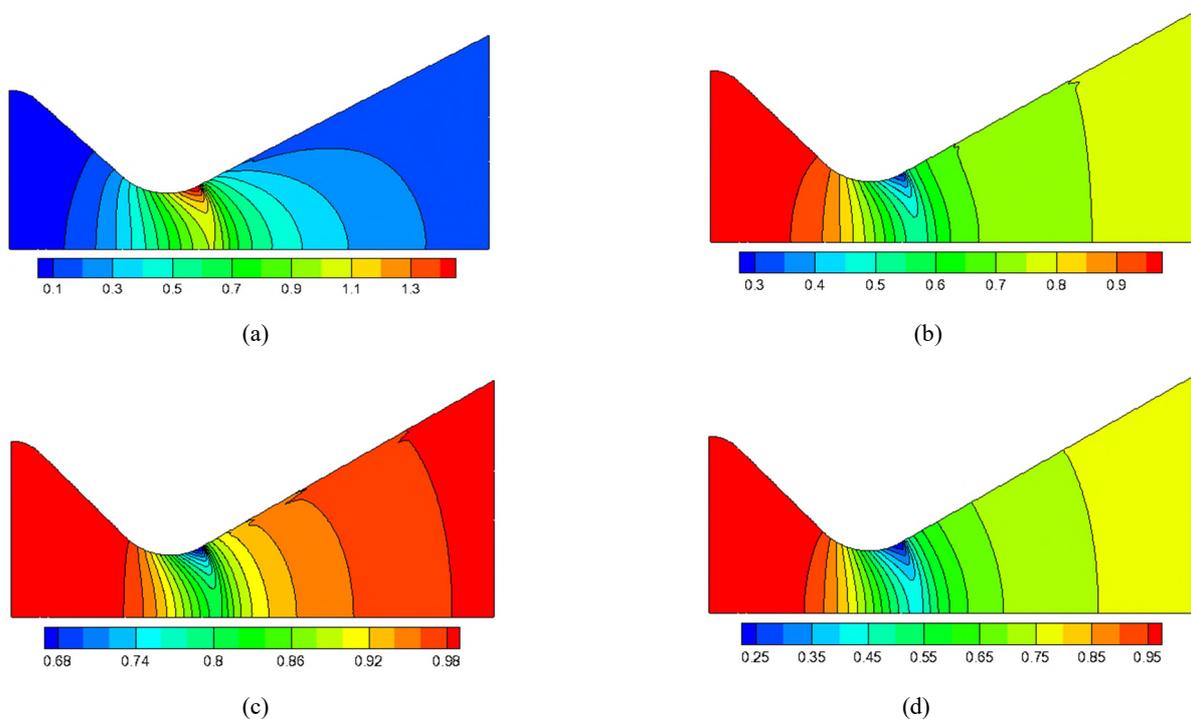
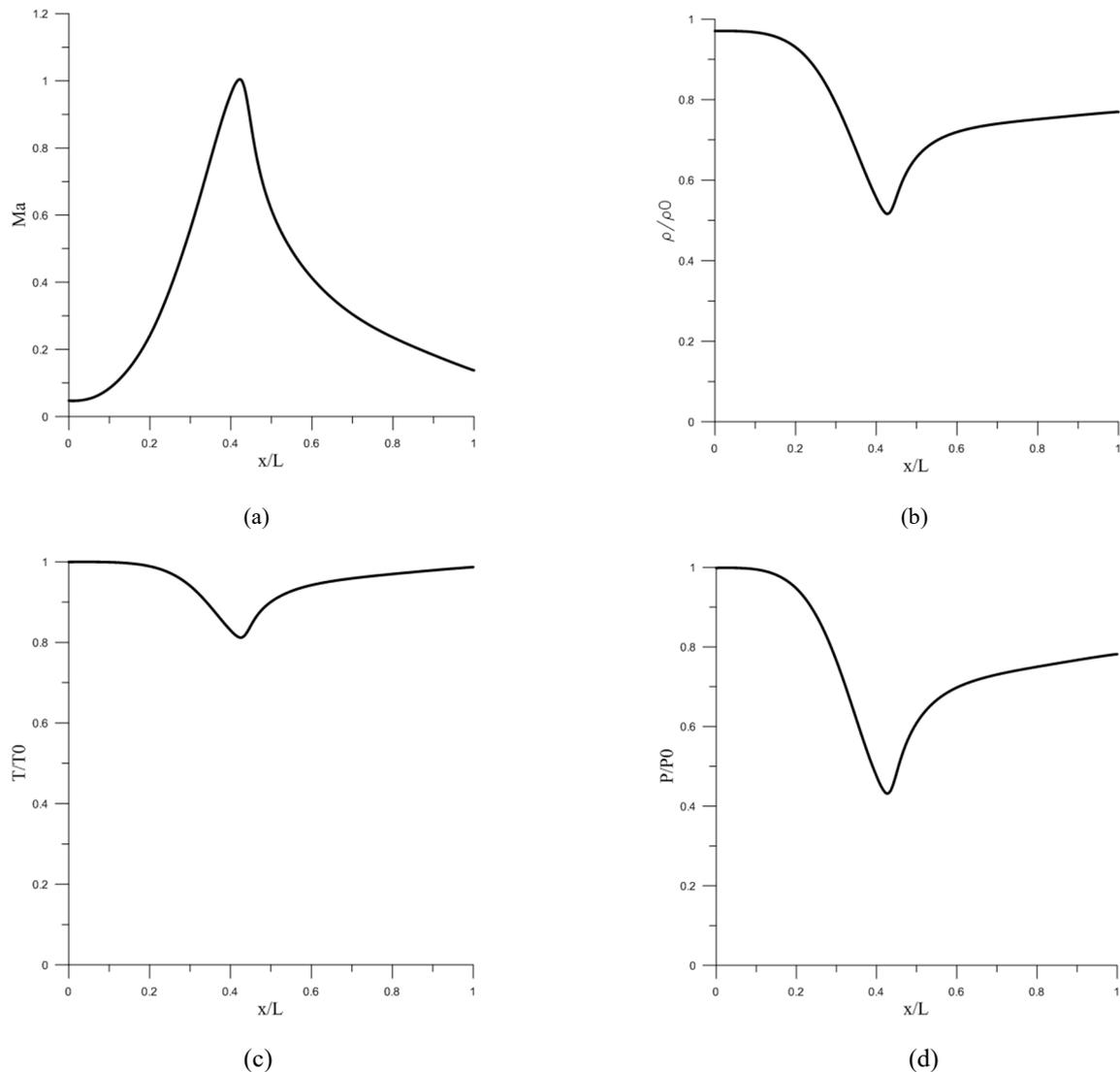


Figure IV.7 – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ ,

(c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ , écoulement d'Euler SA.



**Figure IV.8** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SA.

Les figures (IV.7.a - IV.8.a) montrent la distribution du nombre de Mach dans la tuyère et son évolution sur l'axe de cette dernière. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $Mach < 1$ ), il devient sonique au col ( $Ma = 1$ ) et subsonique ( $Mach < 1$ ) dans le divergent. Le nombre de Mach atteint une valeur maximale de 1 au col de la tuyère.

A l'entrée de la tuyère, la densité est maximale sa valeur est de 0,9704. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur minimale de 0,5226 au col. Puis elle augmente jusqu'à 0,7694 à la sortie Figures (IV.7.b - IV.8.b). De même la température diminue dans le convergent de 0,9995 à 0,8138 au col (détente des gaz) et inversement dans le divergent. La température à la sortie est de 0,9869.

La figure (IV.7.d) montre la chute de la pression statique dans la tuyère. Les gaz se détendent de la pression 0,9984 dans la chambre à la pression 0,4378 au col de la tuyère (détente des gaz). Dans le divergent la pression augmente jusqu'à 0,7818 à la sortie (compression). La figure (IV.8.d) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime sonique adapté.

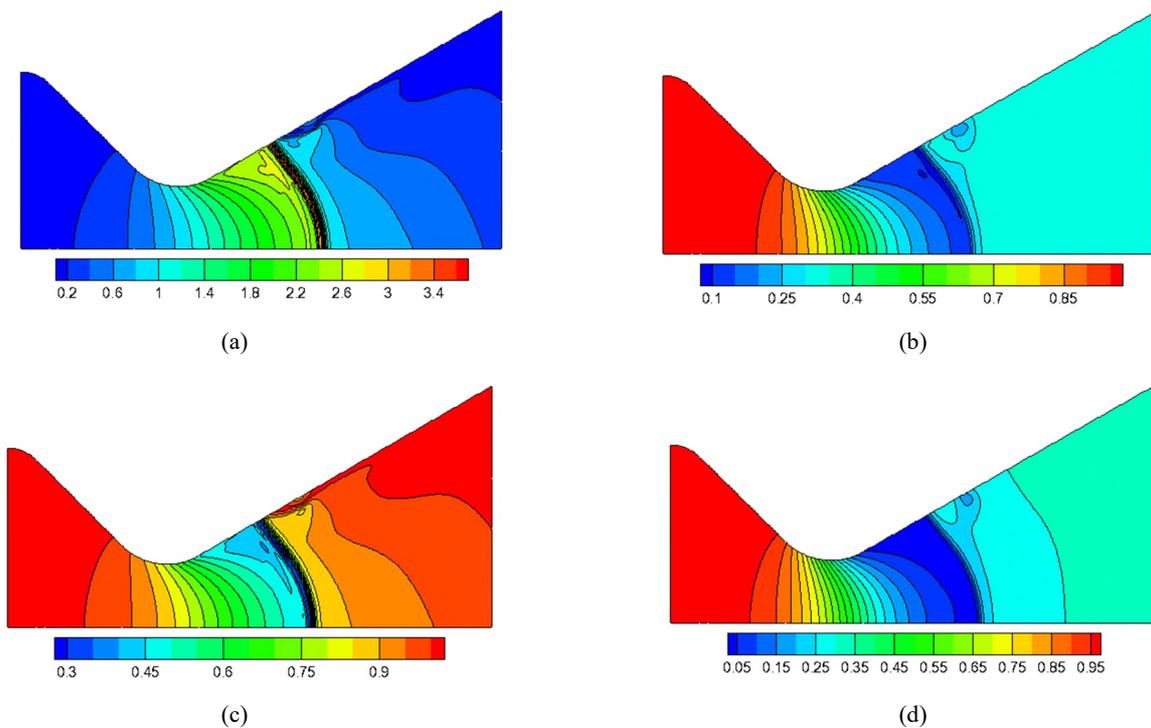
### Discussion :

En régime subsonique l'écoulement se comporte comme prévu théoriquement. Il accélère dans la partie convergente et décélère dans la partie divergente. Le Mach maximal est atteint au col. Contrairement à la théorie, l'écoulement n'ai pas unidimensionnel, ce qui explique le décalage vers l'aval du point où l'écoulement atteint le nombre de Mach maximal.

La pression statique n'atteint pas sa valeur minimale au col de la tuyère, et en fonction du rapport de pression, la position de ce minimum se déplace vers l'aval.

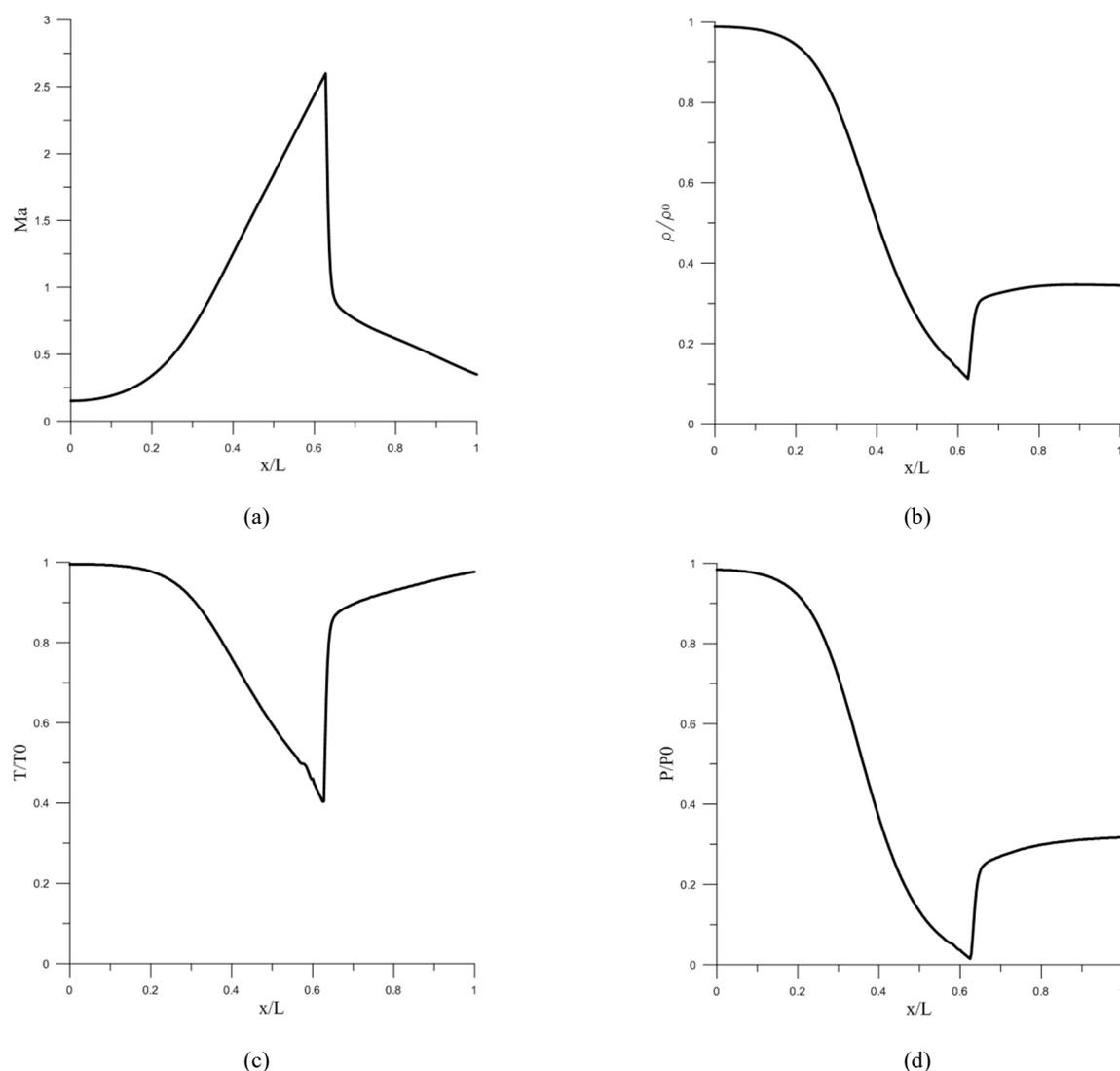
#### IV.3.1.2 Régime sonique non adapté : $P_a/P_0 = 0.317$

Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans la tuyère pour le régime sonique non adapté sont présentés dans les figures (IV.9 - IV.10).



**Figure IV.9** – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ ,

(c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ , écoulement d'Euler SNA.



**Figure IV.10** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SNA.

Les figures (IV.9.a - IV.10.a) montrent la distribution du nombre de Mach dans la tuyère et sa variation sur l'axe. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $\text{Mach} < 1$ ), il devient transsonique ( $0.8 < \text{Mach} < 1.2$ ) dans le col et supersonique dans la partie du divergent où  $x/L \in [0.33, 0.63]$  et subsonique dans l'autre partie où  $x/L \in [0.63, 1]$ . On remarque l'apparition d'une onde de choc à  $x/L = 0.63$  avec  $\text{Ma}$  qui fait une chute brusque de (2,512 à 0,181). Le nombre de Mach atteint une valeur de 0,35 à la sortie de la tuyère.

A l'entrée de la tuyère, la densité est maximale ; sa valeur est de 0,988. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur de 0,1713 à  $x/L = 0,63$ . Avec une densité à la sortie de 0,344 cette augmentation est provoquée par l'onde de choc les Figure (IV.9.b - IV.10.b). De plus la température statique diminue le long de la tuyère jusqu'à

l'apparition de cette dernière dans la première partie du divergent où  $x/L = 0,63$  dont la température augmente brusquement. La température statique adimensionnelle à la sortie devient 0.9762

La figure (IV.9.d) montre la chute de la pression statique dans le convergent et dans la partie du divergent où  $x/L \in [0.33, 0.63]$  de la tuyère. Les gaz se détendent de la pression 0,984 dans la chambre à la pression 0,0672 dans le divergent à  $x/L = 0,63$ . D'autre part, on constate qu'à  $x/L = 0,63$ , il y'a naissance d'une onde de choc qui comprime brusquement le fluide de la pression 0,0672 à la pression 0,206, la pression à la sortie est de 0,317. La figure (IV.10.d) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime sonique non adapté.

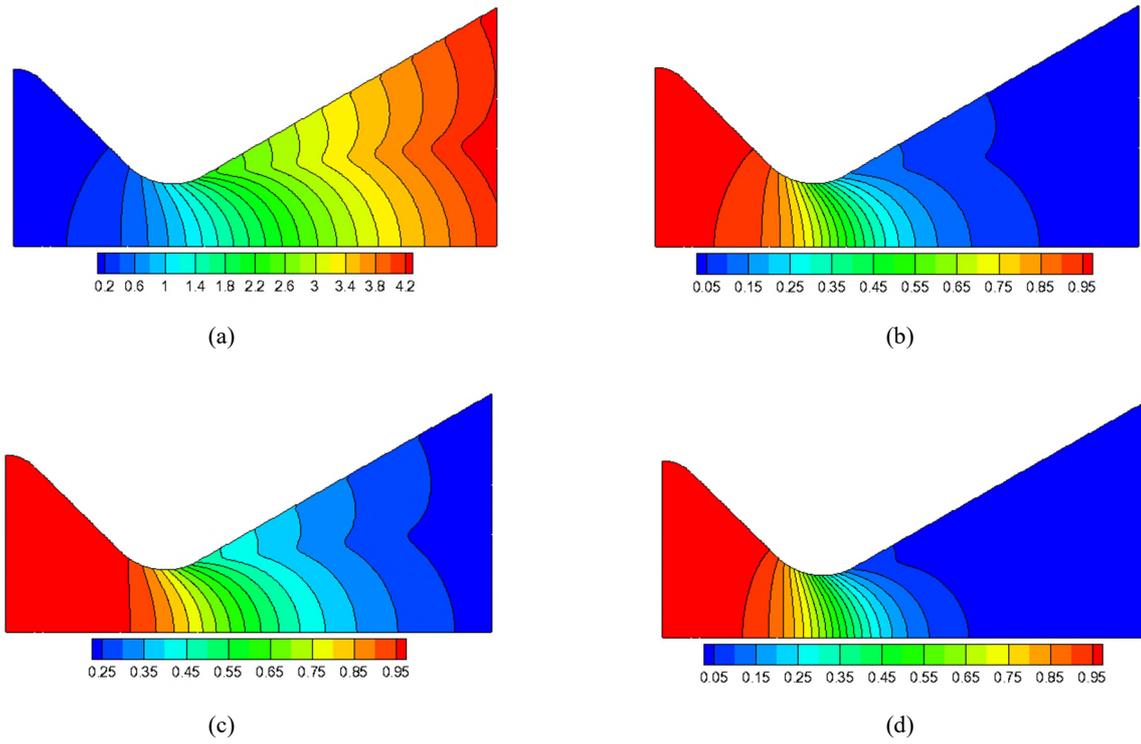
### Discussion :

Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc stationnaire et normale divise l'écoulement en deux parties ( $x/L = 0,63$ ). Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. A travers l'onde de choc, la pression augmente brusquement, et la vitesse diminue brusquement. Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) la pression remonte et la vitesse diminue progressivement, l'écoulement est à nouveau subsonique.

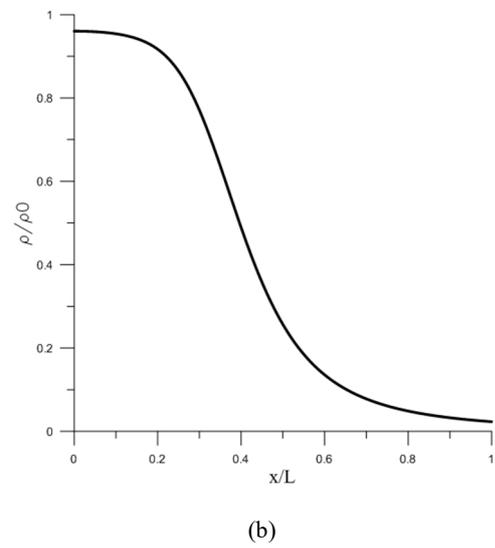
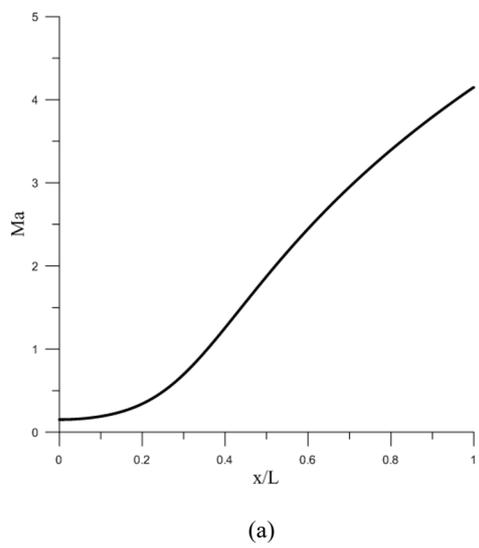
#### IV.3.1.3 Régime supersonique adapté : $P_a/P_0 = 0.00466$

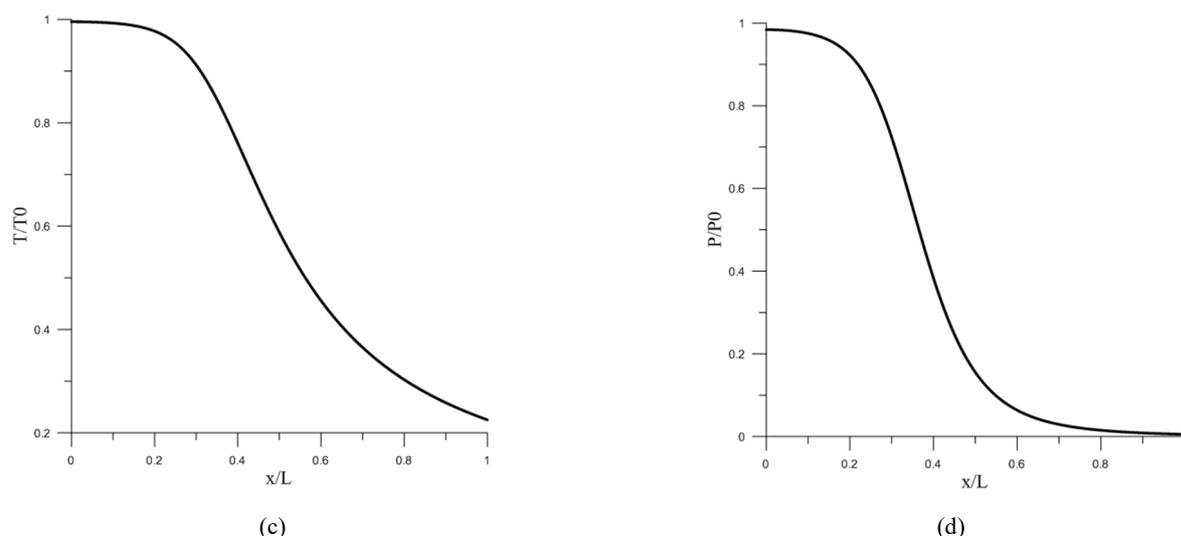
Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans la tuyère pour le régime supersonique adapté sont présentés dans les figures (IV.11 - IV.12). Les valeurs numériques des différents champs permettent de prédire la topologie de ce régime d'écoulement et d'avoir un ordre de grandeur des différentes propriétés moyennes de l'écoulement.

Les figures (IV.11.a - IV.12.a) montrent la distribution du nombre de Mach sur l'axe tuyère. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $Mach < 1$ ), il devient transsonique ( $0.8 < Mach < 1.2$ ) dans le col et supersonique dans le divergent. Le nombre de Mach atteint une valeur maximale de 4,1483 à la sortie de la tuyère.



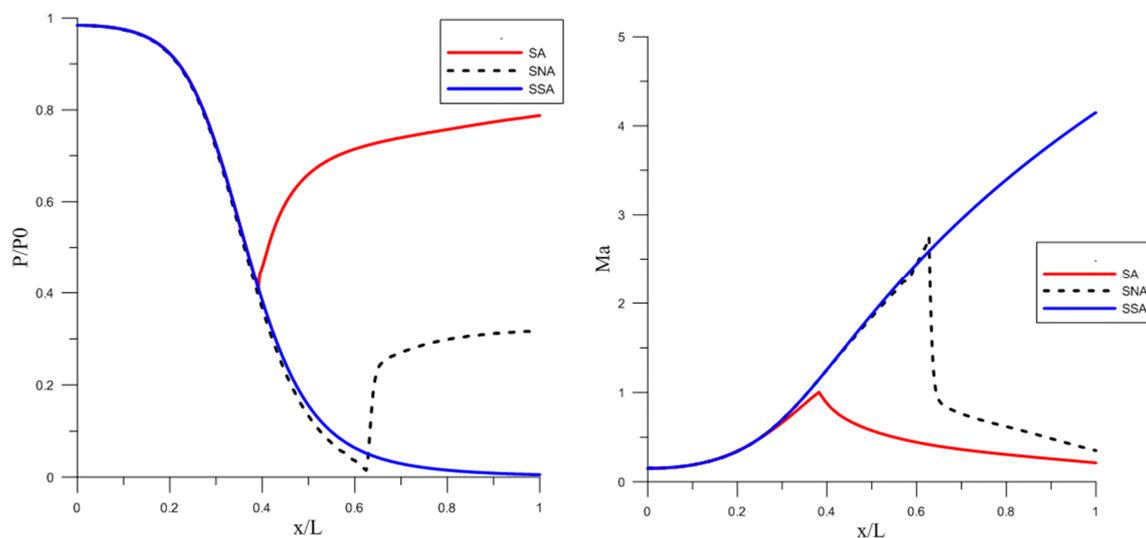
**Figure IV.11** – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ . Pour l'écoulement d'Euler SSA.





**Figure IV.12** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement d'Euler SSA.

A l'entrée de la tuyère, la densité adimensionnel est maximale sa valeur est 0,9604. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur minimale de 0,0231 à la sortie figures (IV.11.b - IV.12.b). De même la température diminue le long de la tuyère (détente des gaz) La figure (IV.11.d)) montre la chute de la pression statique de la tuyère. Les gaz se détendent de la pression 0,9840 dans la chambre à la pression 0,0053 à la sortie de la tuyère. La figure (IV.12.d)) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime supersonique adapté.



**Figure IV.13** – (a) Evolution de la pression  $P/P_0$ , (b) Evolution du nombre du Mach, pour les différents régimes d'écoulement d'Euler.

**Discussion :**

Dans la tuyère convergente-divergente, les gaz subissent une grande transformation de détente pour convertir l'énergie thermique et l'énergie de pression des gaz en énergie cinétique. Si  $P_a$  continue à diminuer il arrive un moment où l'écoulement est entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît et il n'y a plus de recompression externe, alors la tuyère est parfaitement adaptée.

**IV.4 Ecoulement turbulent dans une tuyère convergent-divergent 2D axisymétrique :**

La simulation numérique de cet écoulement a été menée à l'aide du code de calcul (Ansys-fluent 14.0.0). La méthode numérique utilisée pour la résolution de l'écoulement est basée sur une approche volumes finis.

Pour la résolution, l'approche pressure-base est sélectionnée car applicable aux écoulements compressibles. Ce choix permet en particulier de réduire considérablement le temps de calcul. Compte tenu du problème, le solveur (density-based) serait sensé fournir une solution plus précise, mais il faudrait un temps beaucoup plus important pour que la solution converge. En raison du nombre important de calculs amené à avoir une grande précision, il s'est avéré indispensable de chercher à réduire les temps de calcul. Nous adoptons ce choix de solveur étant donnée la qualité de maillage utilisé. Pour décrire les phénomènes de turbulence nous utilisons le modèle  $k - \omega$  sst.

**IV.4.1 Choix du maillage :**

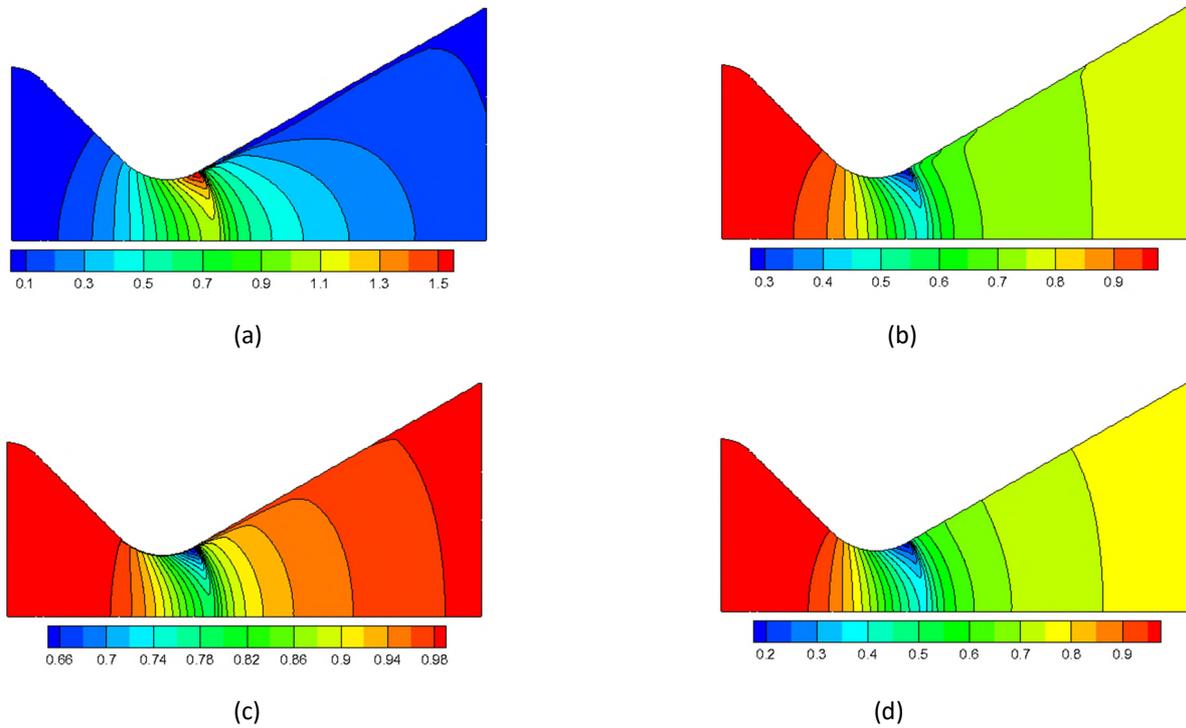
Dans cette partie, on a utilisé le même maillage que celui utilisé pour l'écoulement d'Euler (invisqueux). Ainsi, la simulation a été faite sur le même logiciel (Ansys-fluent 14.0.0) avec un nombre de nœuds identique (35360).

**IV.4.2 calcul des régimes :****IV.4.2.1 Régime sonique adapté :  $P_a/P_0 = 0.782$** 

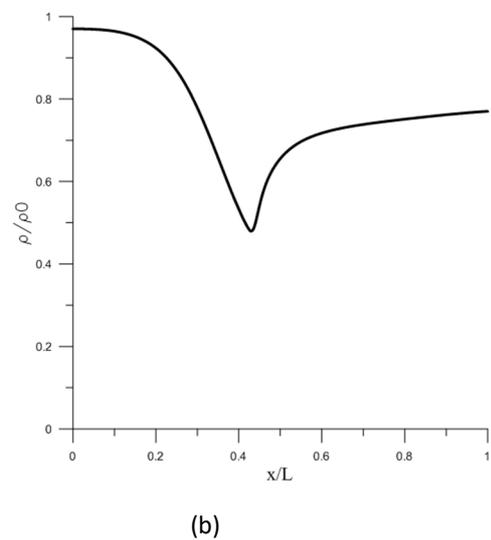
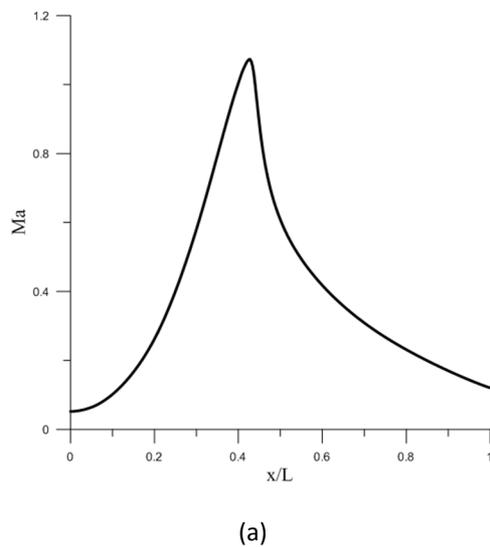
Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans la tuyère pour le régime sonique non adapté sont présentés dans les figures (IV.14 - IV.15).

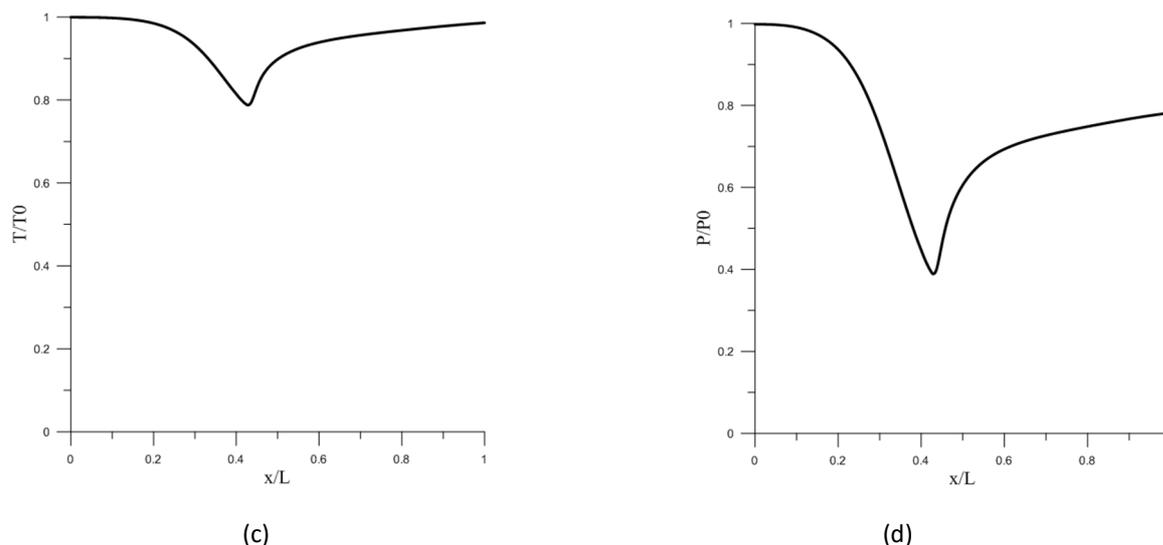
Les figures (IV.14.a) - IV.15.a)) montrent la distribution du nombre de Mach dans la tuyère et son évolution sur l'axe. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $Mach < 1$ ), il

devient sonique au col ( $Ma = 1$ ) et subsonique ( $Mach < 1$ ) dans le divergent. Le nombre de Mach atteint une valeur maximale de 1 au col de la tuyère.



**Figure IV.14** – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SA.





**Figure IV.15** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement turbulent SA.

A l'entrée de la tuyère, la densité est maximale sa valeur est de 0,9702. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur minimale de 0,4835 au col. Puis elle augmente jusqu'à 0,7699 à la sortie Figures (IV.14.b et IV.15.b). De même la température diminue dans le convergent de 0,9980 à 0,7890 au col (détente des gaz) et inversement dans le divergent. La température à la sortie est de 0,9861 figures (IV.14.c et IV.15.c).

La figure (IV.14.d) montre la chute de la pression statique dans la tuyère. Les gaz se détendent de la pression 0,9980 dans la chambre à la pression 0,3926 au col de la tuyère (détente des gaz). Dans le divergent la pression augmente jusqu'à 0,7817 à la sortie (compression). La figure (IV.15.d) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime supersonique adapté.

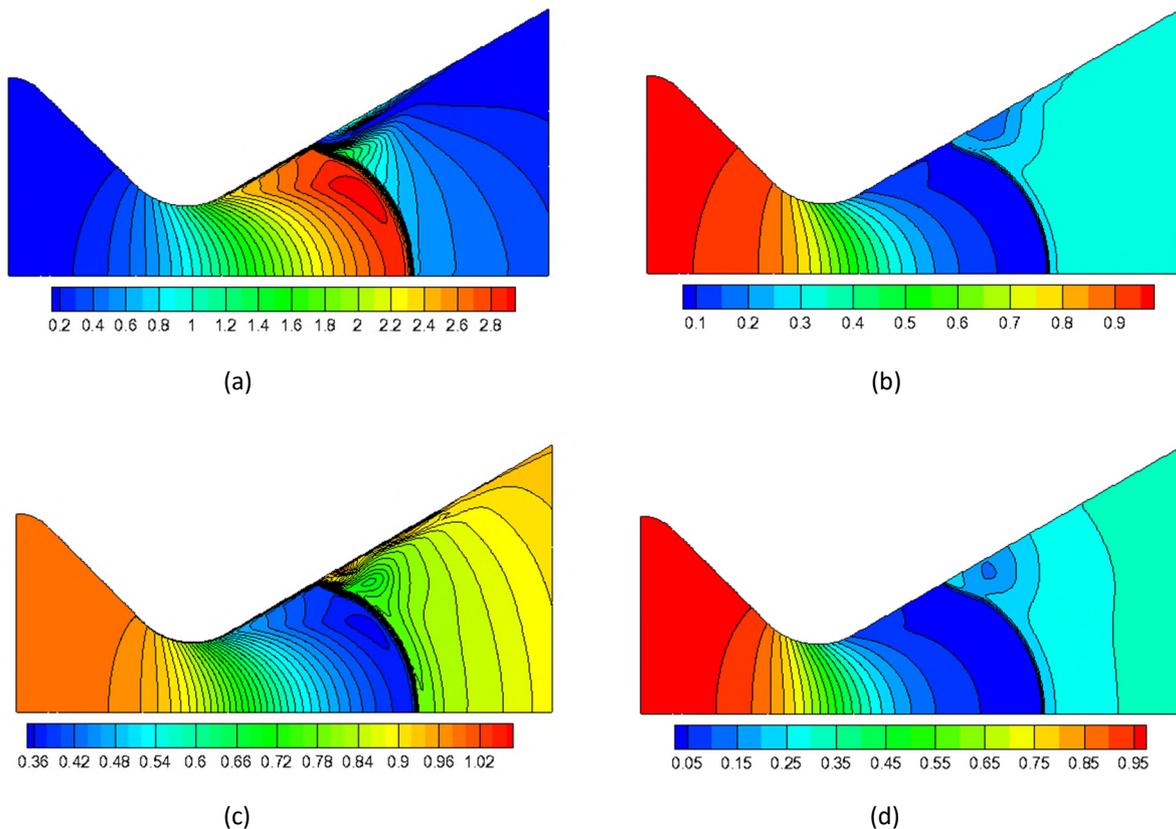
### Discussion :

Ce qui différencie cet écoulement comparativement à celui d'Euler, l'apparition d'un choc non souhaité au niveau de la paroi à l'aval du col. Ce phénomène est dû à la discontinuation de détente provoqué par la dissipation générée par les effets visqueux.

#### IV.4.2.2 Régime sonique non adapté : $P_a/P_0 = 0.317$

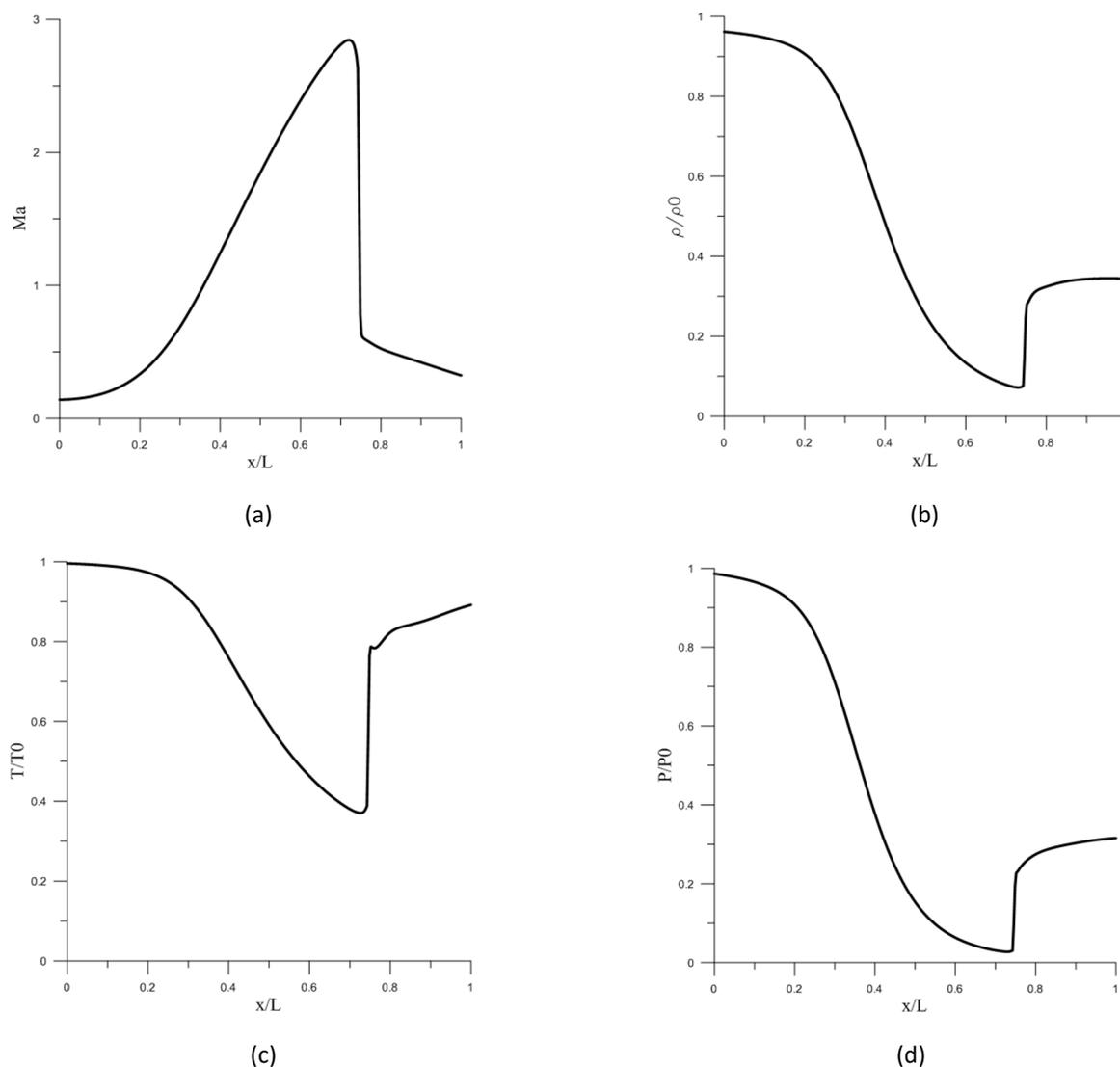
Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans la tuyère pour le régime sonique non adapté sont présentés dans les figures (IV.16 - IV.17).

La figure (IV.16.a et IV.17.a) montre la distribution du nombre de Mach dans la tuyère. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $Mach < 1$ ), il devient transsonique ( $0.8 < Mach < 1.2$ ) dans le col et supersonique dans la partie du divergent où  $x/L \in [0.33, 0.75]$  et subsonique dans l'autre partie où  $x/L \in [0.75, 1]$ . On remarque l'apparition d'une onde de choc à  $x/L = 0,75$  avec Ma qui fait une chute brusque de (2,84 à 0,74). Le nombre de Mach atteint une valeur de 0,32 à la sortie de la tuyère.



**Figure IV.16** – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ ,

(c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SNA.



**Figure IV.17** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement turbulent SNA.

A l'entrée de la tuyère, la densité est maximale sa valeur est de 0,9616. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur de 0,2463 à  $x/L = 0,75$ . Avec une densité à la sortie de 0,3438, cette augmentation est provoquée par l'onde de choc Figure (IV.16.b et IV.17.b). De plus la température statique diminue le long de la tuyère jusqu'à l'apparition de cette dernière dans la première partie du divergent où  $x/L = 0,75$  dont la température augmente brusquement. La température à la sortie devient 0,8920.

La figure (IV.16.d) montre la chute de la pression statique dans le convergent et dans la partie du divergent où  $x/L \in [0,33, 0,75]$  de la tuyère. Les gaz se détendent de la pression

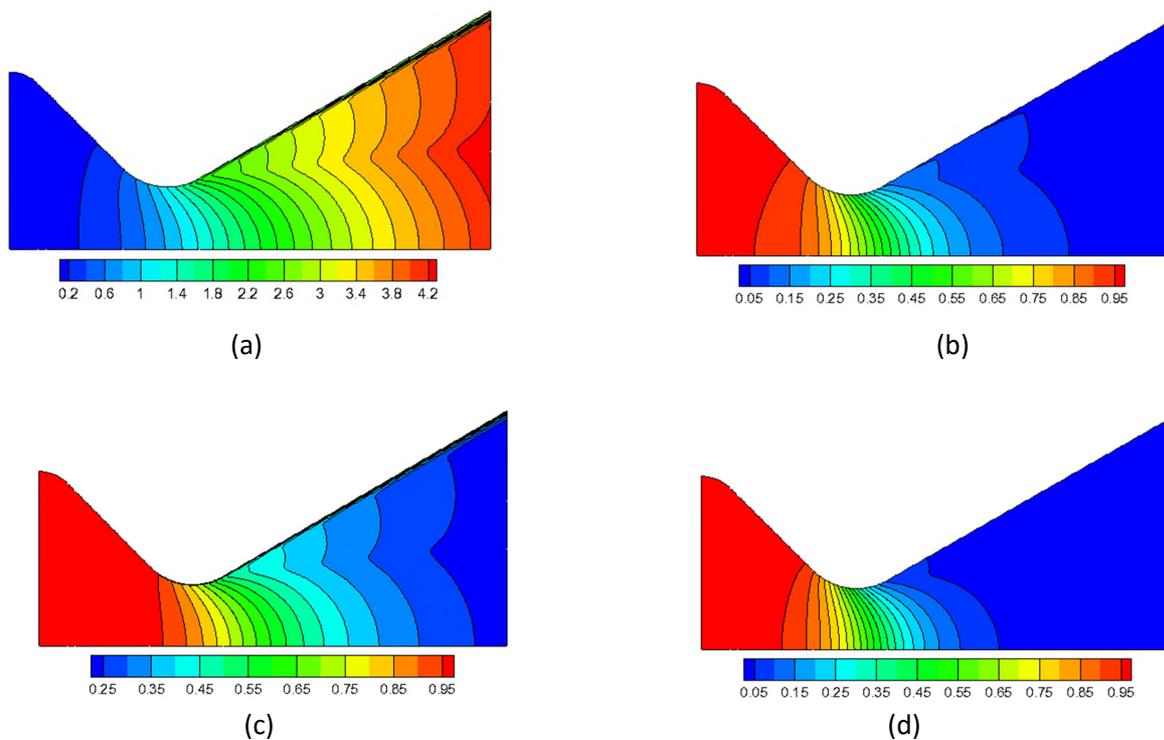
0,9861 dans la chambre à la pression 0.1947 dans le divergent à  $x/L = 0.75$ . D'autre part, on constate qu'à  $x/L = 0.75$ , il y'a naissance d'une onde de choc qui comprime brusquement le fluide de la pression 0.0285 à la pression 0.1947, la pression à la sortie est de 0.3159. La figure (IV.17.d) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime sonique non adapté.

**Discussion :**

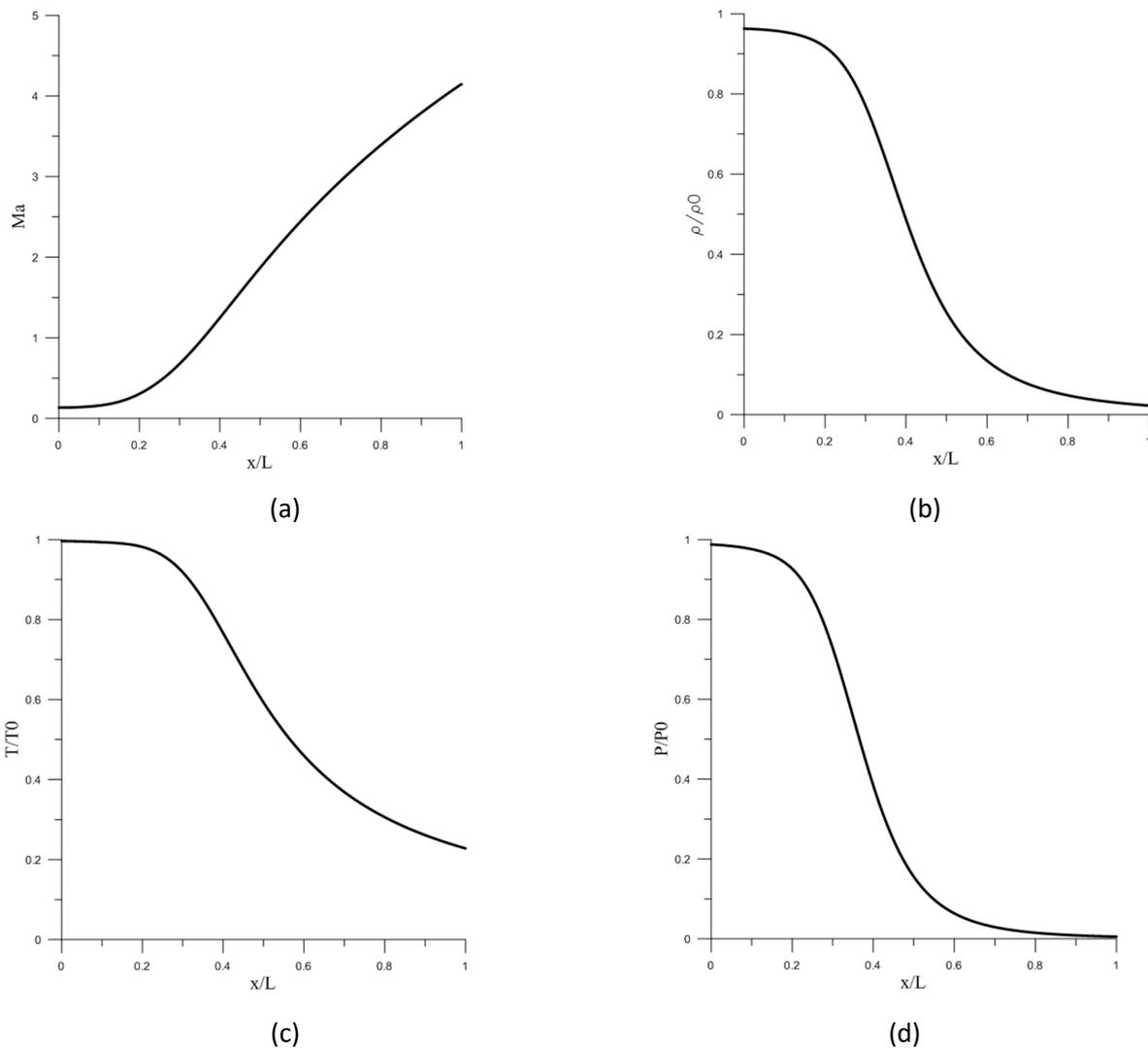
Au niveau de la paroi de la première partie du divergent où  $x/L \in ]0.33, 0.565[$  avec  $Ma > 1$  apparait l'épaississement une couche limite dynamique. Au point  $x/L = 0.565$  il y a naissance d'un point de décollement qui est induit par des ondes de compression qui se focalise pour former le choc au travers le quelle l'écoulement est dévié d'où l'apparition d'un vortex duquel l'écoulement est dévié.

**IV.4.2.3 Régime supersonique :  $P_a/P_0 = 0.0045$**

La figure (IV.18.a - IV.19.a) montre la distribution du nombre de Mach dans la tuyère. Dans le convergent l'écoulement est subsonique ( $Mach < 1$ ), il devient transsonique ( $0.8 < Mach < 1.2$ ) dans le col et supersonique dans le divergent. Le nombre de Mach atteint une valeur maximale de 4,1463 à la sortie de la tuyère.



**Figure IV.18** – (a) Les lignes Iso-Mach, (b) Distribution de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Distribution de la température  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$ . Pour l'écoulement turbulent SSA.



**Figure IV.19** – (a) L'évolution du nombre de Mach, (b) Profil de la densité  $\rho/\rho_0$ , (c) Le profil de la température statique  $T/T_0$ , (d) Distribution de la pression  $P/P_0$  ; le long de l'axe de la tuyère, écoulement turbulent SSA.

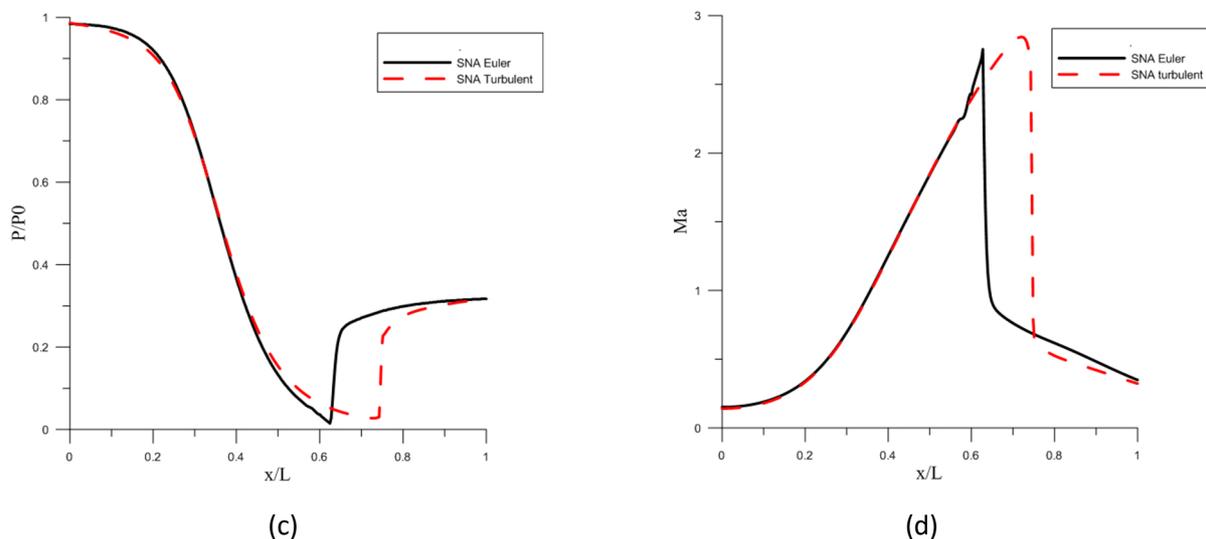
A l'entrée de la tuyère, la densité est maximale sa valeur est 0,9628. Elle diminue progressivement jusqu'à une valeur minimale de 0,02281 à la sortie figures (IV.18.b - IV.19.b). De même la température diminue le long de la tuyère (détente des gaz).

La figure (IV.18.b) montre la chute de la pression statique dans la tuyère. Les gaz se détendent de la pression 0,9877 dans la chambre à la pression 0,0053 à la sortie de la tuyère. La figure (IV.19.b) montre le profil de la pression statique axiale pour la tuyère complètement amorcée fonctionnant en régime supersonique adapté.

**Discussion :**

On constate l'apparition d'une couche limite dynamique qui s'épaissit le long de la paroi du divergent qui est dû aux effets visqueux du fluide ainsi à l'augmentation considérable de la vitesse, ce qui implique l'existence d'un grand nombre de Reynolds, ce qui fait que l'écoulement peut être considéré à l'échelle macroscopique comme étant dans un régime turbulent et les effets de la viscosité sont négligeables. Toutefois, près d'une paroi solide, la condition d'adhérence implique que la vitesse doit tendre rapidement vers 0. Si on définit un nombre de Reynolds local à l'aide de la vitesse réelle (et non d'une échelle de vitesse), celui-ci tend également vers 0, ce qui veut dire que très localement, dans le voisinage de la paroi, l'écoulement est dans un régime laminaire et les effets de viscosité deviennent prédominants. Cette zone de faible épaisseur accolée à la paroi s'appelle une couche limite. Cette dernière est subdivisée en trois zones :

- près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- Loin des parois, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux.
- Entre les deux couches il existe une zone transitoire où les effets de la viscosité moléculaire et de la turbulence sont de même importance.



**Figure IV.20** – Comparaison entre l'écoulement d'Euler et turbulente pour un même régime SNA, (a) Distribution de la pression  $P/P_0$ , (b) L'évolution du nombre de Mach.

---

---

### **IV.5 Conclusion :**

Ce chapitre s'est focalisé sur la modélisation numérique de l'écoulement dans le cadre d'un exemple académique (la tuyère De Laval). Nous avons détaillé la démarche de modélisation appliquée et sa mise en œuvre sur le code de calcul direct (Ansys-Fluent 14.0.0). La première partie de ce chapitre a été consacrée à l'analyse des résultats d'un écoulement d'un fluide non visqueux (écoulement d'Euler), la deuxième partie a été faite sur un écoulement turbulent d'un fluide visqueux. Au cours de cette analyse, nous nous sommes appuyés sur les résultats théoriques pour vérifier la cohérence des simulations. Suite à cette analyse, on peut conclure que la simulation donne des résultats globalement en accord avec la littérature. Même si les résultats théoriques sont basés sur une approche monodimensionnelle, la forme des écoulements attendus est respectée. L'analyse des solutions fournies par le code de calcul direct met toutefois en évidence que même sur un exemple académique des différences importantes peuvent apparaître aussi bien sur les résultats macroscopiques que sur l'amplitude ou la localisation des phénomènes locaux. Même si le maillage et les hypothèses de modélisation sont identiques, l'influence de la viscosité sur les résultats, en particulier l'amplitude des phénomènes locaux. Ce constat conduit à souligner toute l'importance des effets visqueux sur le comportement du fluide.

- Apparition d'un choc au niveau de la paroi à l'aval du col pour le régime sonique adapté (écoulement turbulent).
- Retardement de la naissance de l'onde de choc pour un même taux de détente ( $P_a/P_0 = 0.371$ ) de  $x/L = 0.63$  à  $x/L = 0.75$  pour le régime sonique non adapté.
- Apparition d'une couche limite turbulente au niveau de la paroi le long du divergent pour le régime super sonique adapté et après le col jusqu'à l'onde choc pour le régime sonique non adapté où  $Ma > 1$ .

# Conclusion générale

## Conclusion générale

L'étude de l'écoulement des fluides compressibles (gaz et vapeurs) fait appel, non seulement, aux notions de base de la mécanique des fluides, mais également à celles de la thermodynamique par l'intermédiaire des équations d'état et de celles des transformations particulières telles que la transformation isothermique et la transformation isentropique. La viscosité dynamique du fluide étant très faible par rapport à celle des liquides, il est souvent possible de négliger les évolutions de la vitesse au voisinage des parois matérielles.

Beaucoup de problèmes peuvent alors être traités, en première approximation, en monodimensionnel. C'est ce qui a été fait dans cette recherche où on a pu voir l'importance de la vitesse du son comme limite entre deux types d'écoulements très différents : l'écoulement subsonique et l'écoulement supersonique. Si le passage du premier au second se fait de manière progressive, le passage contraire est dans la plupart des cas brutal à travers une onde de choc qui dissipe une partie non négligeable de l'énergie.

Les applications de ce type d'écoulement sont aussi bien du domaine de l'aéronautique que du domaine industriel avec les écoulements de gaz ou vapeur en conduites et surtout les écoulements dans les turbines à vapeur ou à gaz et dans les compresseurs dynamiques d'air ou de vapeur, de fluides frigorigènes par exemple. Les écoulements soniques en tuyères peuvent également trouver une application dans le domaine de la régulation des débits de gaz.

## Références bibliographiques

- [1] Laval P, time dependent calculation method for transonic nozzle flows. Lecture Notes in Physics, Flow field calculations, Session IV, pp. 187 -192, 1971.
  - [2] Cuffel R. F, Back L. H et Masser P, transonic flow in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature, AIAA Journal, vol. 7, 1969, p. 1364-1366.
  - [3] Cline M. C, computation of steady nozzle flow by a time dependent method. AIAA Journal, Vol. 12, No. 4, pp. 419-429, 1974
  - [4] Cline M. C, computation of two-dimensional viscous nozzle flow. AIAA Journal, Vol. 14, No. 3, pp. 295-296, 1976.
  - [5] Cline M. C et Wilmothf R. G, computation of High Reynolds Number Internal/External Flows. AIAA Journal, Vol. 21, No. 2, pp. 172-173, 1982.
  - [6] Cline M. C, VNAP2: a computer program for computation of two-dimensional, time-dependent compressible turbulent flow. Rapport, Los Alamos National Laboratory, 1981.
  - [7] Imbert M et Zeitoun D, etude numérique d'un écoulement à nombre de Reynolds modéré dans une tuyère. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 1, No. 4, pp. 595-609, 1982.
  - [8] Mac-Cormack W. R and Baldwin B. S, a numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock-boundary layer interactions. AIAA Paper 75-1, 1975.
  - [9] Back L. H and Cuffel R. F, detection of oblique shocks in a conical nozzle with a circulararc- throat, AIAA Journal, vol. 4, 1966, p. 2219-2221.
  - [10] Back L. H and Cuffel R. F, flow coefficients for supersonic nozzles with comparatively small radius of curvature throats. Journal of Spacecraft, Vol. 8, No. 2, pp. 196 -198, 1971.
  - [11] Back L. H, Massier P. F and H Gier H. L, comparisons of experimental with predicted wall static – pressure distributions in conical supersonic nozzles. Technical Report No. 32-654, JPL, 1964.
  - [12] Back L. H, Massier P. F and Cuffel R. F, flow phenomena and convective heat transfer in a conical supersonic nozzle. Journal of Spacecraft, Vol. 4, No. 8, pp. 1040-1047, 1966.
-

- [13] Back L. H, Massier P. F and Cuffuel R. F, effect of inlet boundary – layer thickness and structure on heat transfer in a supersonic nozzle. Engineering Notes, Journal of Spacecraft, Vol. 5, No1. pp. 121-123, 1968.
  - [14] Kwon O. K and Delaney R. A, a Navier Stokes solution procedure for analysis of steady two-dimensional transonic nozzle flow. AIAA 18<sup>th</sup> Fluid Dynamics and Plasma-dynamics and Lasers Conference, July 16-18, 1985/Cincinnati Ohio.
  - [15] Margaret V. Whalen. Low Reynolds number nozzle flow study. M. S. Thesis (NASA TM 100130) 45 P. July 1987.
  - [16] Kim. S, calculations of low Reynolds number rocket nozzles. 31<sup>st</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 11-14, 1993/Reno, NV.
  - [17] Dietmar E. R, Electrom – Beam studies of viscous flow in supersonic nozzles. AIAA Journal, Vol. 9, No. 5, 1970.
  - [18] Young-Myung YANG. Modélisation mathématique d'un système de projection thermique à la flamme de type H.V.O.F.: application à l'élaboration de revêtements protecteurs. Thèse de Doctorat soutenue à l'UTBM, 1996.
  - [19] Johnson A. N, Numerical characterization of the discharge coefficient in critical nozzles. Thesis for the Degree of Doctor, Pennsylvania State University, 2000.
  - [20] Johnson A. N, Espina P. I, Mattingly G. E and Wright J. D, Numerical characterization of the discharge coefficient in critical nozzles. NCSL Workshop & Symposium, 1998.
  - [21] Bölcs A, Fransson T. H and Platzer M. F, Numerical simulation of inviscid transonic flow through nozzles with fluctuating back pressure. ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 111, pp. 169-190, 1989.
  - [22] Gerolymos G. A and Bréus J. P, computation of unsteady nozzle flow resulting from fluctuating back pressure using Euler equations. Aerospace Science and Technology, No. 2, pp. 91-105, 1998.
  - [23] Meister L, Burtschell Y et Zeitoun D. E, etude numérique d'un écoulement réactif dans une tuyère sur détendue : influence de la température de paroi et de l'altitude. Mécanique & Industries, Vol. 4, pp. 339-346, 2003.
  - [24] Alexeenko A. A, Levin D. A, Fedosov D. A, Gimelshein S.F and Collins R. J, performance analysis of microthrusters based on coupled thermal-fluid modeling and simulation. Journal of Propulsion and Power, Vol. 21, No.1, pp. 95- 101, 2005.
-

- [25] Alexeenko A. A, modeling of microscale gas flows using the direct simulation Monte Carlo method. Ph.D thesis, Pennsylvania State University, 2003.
- [26] Mahfoudi E, Gahmousse, Harrizi A, Talbi A et hadjadj A. simulation numérique de l'écoulement compressible supersonique appliquer aux tuyères propulsives à combustible liquide hydrogène, Revue des énergies renouvelables vol.15, No.3 117-124, 2012.
- [27] Mac Cormack R. W: « The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. » AIAA hypervelocity impact conference 1969, AIAA paper 69-354.1969.
- [28] Mac Cormack R. W: « Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. » Lectures notes in physics, Springer – Verlag, 8, paper 151-163, 1971.
- [29] P. Padmanathan, Dr. S. Vaidyanathan. Computational Analysis of Shockwave in Convergent Divergent Nozzle, IJERA Vol. 2, paper.1597-1605, Mar-Apr 2012.
-

---

# Annexes

---

**Annexe :****A.1 Méthode de décomposition des flux :**

Les valeurs propres  $\lambda_i$  de A (resp. B), qui indiquent le sens de déplacement de l'information, ne sont pas de signe constant. En particulier en subsonique où  $\lambda_4 = u - c$  est toujours négative. Steger et Warming ont donc proposé la décomposition des flux suivante :

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$$

Où :

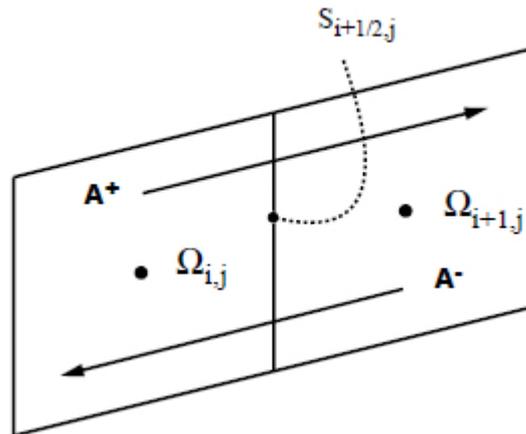
$$\lambda_i^+ = \frac{\lambda_i + |\lambda_i|}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_i^- = \frac{\lambda_i - |\lambda_i|}{2}$$

Ce qui nous permet de redéfinir  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$$

Même chose pour les flux non diffusifs relatifs aux variables conservatives :

$$F = L(\Lambda^+ + \Lambda^-)L^{-1}W = A^+W + A^-W = F^+ + F^-$$



**Figure A.1** - Décomposition des flux au premier ordre.

Le flux non diffusif,  $F_{i+\frac{1}{2},j}$  dans la direction longitudinale à travers la surface  $S_{i+\frac{1}{2},j}$  séparant les deux cellules  $\Omega_{i,j}$  et  $\Omega_{i+1,j}$ , figure (A.1), est alors évalué à l'aide de l'expression suivante :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = A^+W_{i,j} + A^-W_{i+1,j} \quad (\text{A. 1})$$

On fait alors le choix suivant :

$$A^+ = A_{i,j}^+ \quad \text{et} \quad A^- = A_{i+1,j}^-$$

$$\Rightarrow F_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i,j}^+ W_{i,j} + A_{i+1,j}^- W_{i+1,j} \quad (\text{A.2})$$

Ce schéma de décomposition des flux au premier ordre est trop fortement dissipatif. Steger et Warming ont alors proposé une méthode de décomposition au second ordre pour pallier ce problème.

Il est possible en effet de réduire cette dissipation en écrivant différemment l'expression permettant d'évaluer le flux non diffusif, figure (A.13) :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+\frac{1}{2},j}^+ W_{i,j} + A_{i+\frac{1}{2},j}^- W_{i+1,j} \quad (\text{A.3})$$

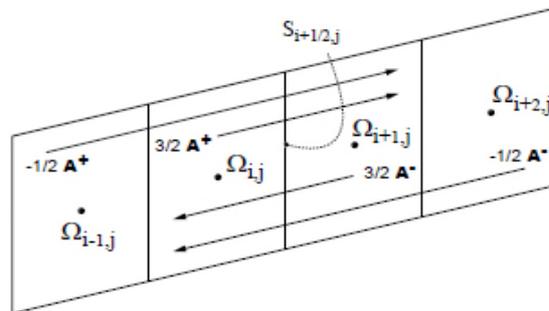


Figure A.13 - Décomposition des flux au second ordre.

Où les expressions  $A^+$  et  $A^-$  sont évaluées dans les mêmes cellules.

Pour le schéma de Mac Cormack à deux pas prédicteur / correcteur, on procède de la façon suivante :

- **pas prédicteur :**

$$A_{i+\frac{1}{2},j}^+ = A_{i,j}^+$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}^- = A_{i,j}^-$$

- **pas correcteur :**

$$A_{i+\frac{1}{2},j}^+ = A_{i+1,j}^+$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}^- = A_{i+1,j}^-$$

Soit pour le pas prédicteur :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i,j}^+ W_{i,j} + A_{i,j}^- W_{i+1,j}$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = F_{i,j} + A_{i,j}^- (W_{i+1,j} - W_{i,j})$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+1,j}^+ W_{i,j} + A_{i+1,j}^- W_{i+1,j}$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = F_{i,j} + A_{i+1,j}^- (W_{i+1,j} - W_{i,j})$$

On obtient ainsi un schéma au second ordre :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+\frac{1}{2},j}^+ \left( \frac{3}{2} W_{i,j} - \frac{1}{2} W_{i-1,j} \right) + A_{i+\frac{1}{2},j}^- \left( \frac{3}{2} W_{i+1,j} - \frac{1}{2} W_{i+2,j} \right)$$

Le principe reste le même pour le flux non diffusif dans la direction transversale.

Pour un écoulement bidimensionnel, la procédure de décomposition des flux au second ordre doit suivre un cycle sur 4 itérations alternant les différenciations progressives et régressives :

## A.2 Précision du schéma :

Partant du cas simple monodimensionnel de l'équation de convection-diffusion instationnaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

Le schéma de discrétisation de Mac Cormack se met sous la forme suivante :

Tab A.1 - Alternance des décentrement dans le calcul des dérivées à chaque itération.

	Prédicteur		correcteur	
itérations	$A_{i+\frac{1}{2},j}^{\mp}$	$B_{i,j+\frac{1}{2}}^{\mp}$	$A_{i+\frac{1}{2},j}^{\mp}$	$B_{i,j+\frac{1}{2}}^{\mp}$
4k+1	i+1, j	i, j+1	i, j	i, j
4k+2	i, j	i, j+1	i+1, j	i, j
4k+3	i+1, j	i, j	i, j	i, j+1
4k+4	i, j	i, j	i+1, j	i, j+1
4k+5	i+1, j	i, j+1	i, j	i, j

- pas prédicteur :

$$\Delta W_i^n = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_{i+1}^n - W_i^n) + \vartheta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (W_{i+1}^n - 2 W_i^n + W_{i-1}^n) \quad (\text{A.5.a})$$

$$W_i^{\overline{n+1}} = W_i^n + \Delta W_i^n \quad (\text{A.6.b})$$

- pas correcteur :

$$\Delta W_i^{\overline{n+1}} = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_i^{\overline{n+1}} - W_{i-1}^{\overline{n+1}}) + \vartheta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (W_{i+1}^{\overline{n+1}} - 2 W_i^{\overline{n+1}} + W_{i-1}^{\overline{n+1}}) \quad (\text{A.6.a})$$

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{2} (W_i^n + W_i^{\overline{n+1}} + \Delta W_i^{\overline{n+1}}) \quad (\text{A. 6. b})$$

A partir des équations (A.4) et (A.5) on remonte à l'équation (A.6), ce qui donne finalement après calculs :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -c \frac{\partial W}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 0(\Delta x^2) + 0(\Delta t^2) \quad (\text{A. 7})$$

Le schéma de Mac Cormack est donc précis à l'ordre 2 en espace et en temps.

---

## Résumé

Les études expérimentales sur les écoulements compressibles dans les tuyères convergentes-divergentes, ont prouvées l'existence et l'interaction de plusieurs phénomènes physiques : ondes de choc, décollement de la couche limite, l'écoulement de retour, couche de mélange visqueuse et turbulente. Ces phénomènes très complexes peuvent considérablement influencer sur les performances et la fiabilité des tuyères propulsives. Le présent travail porte sur l'analyse physique et la simulation numérique d'un écoulement dans une tuyère de Laval avec l'apparition d'une onde de choc, fonctionnant en trois régimes (SA, SNA et SSA) en utilisant le code de calcul (ANSYS). La turbulence est modélisée par une approche statistique en coordonnées généralisées, en utilisant un modèle à deux équations de transport (SST Menter). Le système d'équations régissant cet écoulement est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis sur un maillage structuré. L'intégration en temps est réalisée par le schéma numérique totalement implicite de type prédicteur-correcteur de Mac-Cormack. Les flux visqueux sont discrétisés par un schéma Upwind du second ordre. Les résultats numériques obtenus ont permis de retrouver les différents phénomènes comme prévu par la théorie.

**Mots clés : Tuyères de Laval, convergent-divergent, Ondes de choc, nombre du Mach.**

## Abstract

Experimental studies of supersonic compressible flows in Over-expanded nozzles have proved the existence and interaction of several physical phenomena: shock waves, boundary layer separation reversed flow, viscous and turbulent mixing layer. These complex phenomena can significantly affect the performance and reliability of propulsive nozzles. This work focuses on the physical analysis and numerical simulation of in de Laval nozzles, with the apparition of shock waves functioning in three orders (SA, SNA and SSA) by using the computer code (ANSYS - Fluent). The turbulence is modeled using a statistical approach on a generalized coordinates, using the two-equation model of transport (SST Menter). The system of equations governing the flow is solved using the finite volume method in structured grid. The time integration is performed by the fully implicit numerical scheme of predictor-corrector type of Mac-Cormack. Viscous terms are discretized with a second order Up-wind scheme. The Obtained numerical results have detected the various phenomena scheduled theoretically.

**Keys words: de Laval nozzle, Over-expanded, Shock waves, Mach number.**