



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle

Spécialité : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

**Approximation des systèmes d'attente avec rappels via
les séries de Taylor**

Réalisé par :

M. Haneche Yanis

M. Kihal Fateh

Devant le jury composé de :

Présidente	Mme. Adel Karima	M.C.A	Université A.Mira Béjaïa
Rapporteur	M. Abbas Karim	M.C.A	Université A.Mira Béjaïa
Examinatrice	Mme. Hocine Safia	M.A.A	Université A.Mira Béjaïa
Examinatrice	Mme. Takhedmit Baya	M.A.B	Université A.M.O Bouira
Invité	M. Ouazine Sofiane	Docteur	Université A.Mira Béjaïa

2015/2016

Remerciements

Au terme de ce travail, on adresse nos remerciements à Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la motivation de terminer dans les délais.

Nos remerciements les plus vifs vont d'abord au Dr. Abbas Karim, notre encadreur, qui nous a proposé ce sujet et qui nous a permis de concrétiser ce travail de par sa disponibilité malgré ses grandes responsabilités et sa gentillesse.

Nous exprimons toute notre gratitude à Mme. Adel Karima, Mme. Hocine Safia et Mme Takhedmit Baya pour avoir bien voulu évaluer ce travail.

Nous remercions également M. Ouazine Sofiane ainsi que M. Soufit Massinissa pour leurs précieux conseils pendant toute la durée de notre travail.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

À mes très chers parents,

À mon frère Mehdi,

À ma sœur Nawel,

À ma sœur Faty,

À mes amours Aylane et Axel,

À Farah et Zaki,

Qui ont été là lors de mes heures les plus sombres et mes moments les plus heureux,

Qui m'ont soutenu dans tout ce que j'ai entrepris,

Qui ont veillé jour et nuit pour que je réussisse,

Qu'ils trouvent dans ce modeste travail,

Toute mon affection,

Ma reconnaissance,

À ma toute famille,

À mon très cher binôme,

À mes amis,

Je dédie ce mémoire.

Haneche Yanis

Dédicaces

À mes très chers parents,
Qui m'ont donné la force et la motivation pour atteindre mes objectifs,
Qu'ils trouvent en ce travail toute ma reconnaissance, toute mon
estime et tous mes vœux de bonheur et de santé.

À mes sœurs,

À mes frères,

À toute ma famille,

À mes enseignants,

À mon binôme,

À mes amis(es),

À...

Je dédie ce travail.

Kihal Fateh

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	v
Introduction générale	1
1 Systèmes d'attente avec rappels	3
1.1 Chaînes de Markov	4
1.1.1 Processus stochastiques	4
1.1.2 Processus Markoviens	5
1.1.3 Chaîne de Markov à temps discret	5
1.1.4 Propriétés fondamentales	5
1.1.5 Comportement asymptotique	8
1.2 Files d'attente classiques	8
1.2.1 Description du modèle d'attente classique	8
1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	8
1.3.1 Modèle markoviens	9
1.3.2 Modèles non markoviens	9
1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente	10
1.5 Systèmes d'attente avec rappels	11
1.5.1 Description d'un modèle d'attente avec rappels	11
1.5.2 Quelques cas modélisés par des systèmes se files d'attente avec rappels	12
1.5.3 Modèle d'attente M/G/1 avec rappels et orbite finie	14
2 Développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov	16
2.1 Rappels	16
2.1.1 Dérivabilité	16
2.1.2 Fonctions de Classe C^n	17
2.1.3 Différentiabilité et dérivabilité	17
2.2 Formules de Taylor d'une fonction réelle à une seule variable réelle	17

2.2.1	Développement de Taylor au voisinage d'un point	17
2.2.2	Analyse du reste de développement	18
2.2.3	Formule de Taylor avec reste généralisé	18
2.2.4	Formule de Taylor avec reste de Lagrange	19
2.2.5	Formule de Taylor avec reste de Cauchy	19
2.2.6	Formule de Taylor avec reste de Young	19
2.2.7	Formule de Mac-Laurin	19
2.3	Formules de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles . .	20
2.3.1	Fonction de classe C^n	20
2.3.2	Différentiabilité	20
2.3.3	Théorème des accroissements finis	21
2.3.4	Formule de Taylor à l'ordre n	21
2.3.5	Différentes formules caractérisant le reste	22
2.4	Application des développements en séries de Taylor sur les chaînes de Markov	22
2.4.1	Dérivées successives de la distribution stationnaire	22
2.4.2	Matrice fondamentale	22
2.4.3	Reste du développement en séries de Taylor	26
3	Approximation fonctionnelle dans les systèmes d'attente avec rappels	27
3.1	Analyse de la perturbation	28
3.1.1	Position du problème	28
3.1.2	Erreurs relatives à la perturbation du taux de rappels	29
	Conclusion générale	40
	Bibliographie	42

Table des figures

1.1	Système d'attente classique	8
1.2	Schéma d'un réseau local	14
1.3	Modèle M/G/1 avec rappels et orbite finie	14
2.1	Comparaison entre la fonction f et son développement en séries de Taylor à l'ordre 2	20
3.1	Comparaison des erreurs relatives absolues entre le système d'attente M/D/1 avec rappels et orbite finie avec M/D/1/5 classique.	29
3.2	Erreurs relatives absolues dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/D/1 avec rappels et orbite finie.	31
3.3	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/M/1.	31
3.4	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/E ₂ /1.	31
3.5	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/H ₂ /1.	31
3.6	Probabilité de blocage perturbé en fonction de Δ	33
3.7	Nombre moyen de clients perturbe en fonction de Δ	33
3.8	Probabilité de blocage en fonction de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/D/1 avec rappels et orbite finie.	34
3.9	Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/M/1 avec rappels et orbite finie.	34
3.10	Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/E ₂ /1 avec rappels et orbite finie.	35
3.11	Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/H ₂ /1 avec rappels et orbite finie.	36
3.12	Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/D/1 avec rappels et orbite finie.	39
3.13	Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/M/1 avec rappels et orbite finie.	39
3.14	Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de M/E ₂ /1 avec rappels et orbite finie.	39

3.15 Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie.	39
3.16 Probabilités de blocage en fonction de la variation de la capacité de l'orbite N	39

Liste des tableaux

3.1	Différence entre les distributions stationnaires des systèmes d'attente $M/D/1$ avec rappels et orbite finie et $M/D/1/5$ classique.	30
3.2	Distributions stationnaires perturbées du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1$ avec rappels et orbite finie.	32
3.3	Distributions stationnaires perturbé du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels et orbite finie.	32
3.4	Distributions stationnaires perturbé du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec rappels et orbite finie.	33
3.5	Distributions stationnaires perturbées du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie.	33

Introduction générale

Les phénomènes d'attente représentent pour beaucoup un mal de notre époque, mal inévitable à moins de programmer tout ce qui concerne et les choses et les gens. De fait, il suffit que deux flux reliés l'un à l'autre n'aient pas les mêmes caractéristiques complémentaires pour qu'il se forme une file d'attente. Les files constituent, si l'on veut, les éléments duaux des flux. La plupart du temps, il est certes difficile de se soustraire aux effets de phénomènes d'attente. Mais l'expérience montre qu'on peut à tout le moins les atténuer. Par exemple, les temps d'attente au téléphone dépendent pour partie de l'organisation des réseaux. De même, les files dans les gares ou dans les postes diminuent quand on spécialise les guichets. Et la circulation automobile est sensiblement plus fluide lorsque les feux de signalisation sont synchronisés.

La première étude systématique des phénomènes d'attente est celle que Erlang [1] entreprit pour le compte de la Compagnie des Téléphones de Copenhague en 1909. Depuis il est paru un nombre impressionnant de notes, d'articles et d'ouvrages sur le sujet [1, 2, 3, 4, 5].

Cependant, la théorie classique montra rapidement ses limites face à certains systèmes réels. Dès la fin des années 1940, des chercheurs comme Kosten [6] et Wilkinson [7] ont ainsi mis en évidence la faiblesse de la théorie classique qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant leur numéro jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition de demande du service a poussé les chercheurs à étendre le modèle d'attente classique pour créer le modèle dit avec rappels [8]. Cependant l'intérêt porté vers ce phénomène s'épuise vite durant les décennies suivantes. Ce n'est que vers les années 1970-1980 qu'on a vu un regain d'intérêt pour ces modèles, à cause de l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication. Kapyrin [9] pour sa part, étudia pour la première fois un système M/G/1 avec rappels. Son étude est suivie par d'innombrables autres qui sont synthétisées dans ces articles [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

La complexité des calculs ont amené les chercheurs à développer de nouvelles méthodes d'approximation afin d'avoir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performances. On peut citer les méthodes pour la solution des processus stochastiques non markoviens (chaînes de Markov induites, méthode de la variable supplémentaire,...etc) [17], les méthodes de simulation, la propriété de décomposition stochastique, les méthode de stabilité, les heuristiques et les méthodes numériques [18, 12]. Ces méthodes généralement se reposent sur le principe de l'analyse de perturbation, qui consiste à étudier l'impact de la variabilité des paramètres du modèle sur la variabilité de sortie. Ce type d'analyse est notamment envisagé dans le cadre de la méthodologie globale de traitement des incertitudes ou encore en conception robuste.

La sensibilité d'une file d'attente à une perturbation est mesurée par diverses métriques entre les distributions de probabilités liées aux processus de la file d'attente perturbée et la file d'attente nominale. Ces analyses peuvent être trouvées dans Kotzerek et Stoyan [19], Whitt [20], Zolotarev [21], Fricker et al. [22], Núñez-Queija et al. [23], Benaouicha et Aïssani [24] et Abbas et Aïssani [25]. Spécifiquement, l'utilisation du développement en séries de Taylor pour étudier la robustesse des files d'attente est initiée par Albin [26], où l'auteur a considéré plusieurs perturbations dans le processus d'arrivées de la file d'attente M/M/1. Dans le même travail, le développement en séries de Taylor est esquissé d'une façon directe pour estimer la différence entre les nombres moyens de clients dans la file d'attente M/M/1 et sa version perturbée.

Nous utilisons le développement en séries de Taylor pour examiner la robustesse de la file d'attente M/G/1 avec rappels et orbite finie aux perturbations dans les taux de rappels. Nous analysons numériquement la sensibilité de la distribution stationnaire du modèle, où nous représentons cette performance comme une fonction polynomiale du taux de rappels de la file d'attente étudiée. Dans ce travail, les coefficients de la série de Taylor sont exprimés en fonction de la matrice de déviation [27]. La méthode proposée a été déjà appliquée à d'autres modèles d'attente avec plusieurs cas d'études [28, 29, 30, 31].

Ce mémoire comprend trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

- Dans le premier chapitre, nous présentons et décrivons les résultats importants de la théorie des files d'attente et des chaînes de Markov. L'accent sera mis sur les systèmes d'attente avec rappels et le système M/G/1 avec rappels exponentiels et orbite finie.
- Dans le second chapitre, nous énumérons quelques généralités sur le développement en séries de Taylor. Ce chapitre est aussi l'occasion de présenter les dérivées d'ordre supérieur qui sont écrites en fonction de la matrice fondamentale. Ces résultats permettrons d'appliquer l'approche sur le modèle M/G/1 avec rappels et orbite finie.
- Le dernier chapitre est consacré à l'approximation fonctionnelle de certaines performances du système M/G/1 avec rappels exponentiels et orbite finie en utilisant l'approche par les séries de Taylor.

Introduction

Les files d'attente avec rappels ont été largement utilisées dans la modélisation des problèmes apparus dans les réseaux téléphoniques commutés, les réseaux de télécommunication, les réseaux et systèmes informatiques. Ces files sont caractérisées par les propriétés suivantes : le premier client trouvant le serveur occupé entre dans une orbite d'attente et réitère sa requête plus tard. Yang et Tempelton [15], Falin [14], kulkarni et Liang [32], Artalejo [10, 11], fournissent une étude approfondie des systèmes avec rappels.

La première étude du système M/G/1 avec temps de rappels général a été effectuée par Kapyrin [9]. Il a supposé que les clients génèrent dans ces systèmes un flux de rappels et sont aussi indépendants de l'état du serveur. Plus tard, Falin [33] a montré que sa méthodologie était erronée.

Fayolle [34] a considéré une file M/M/1 avec rappels, où chaque client trouvant le serveur occupé rejoint l'orbite et seul le client en tête de file est autorisé à effectuer un rappel afin de recevoir un service après un temps de rappel exponentiel. Farahmand [35] appelle cette discipline système avec rappels avec un orbite FCFS. Un système M/G/1 avec temps de rappel généraux a été proposé par Gomez-Corral [36], qui a supposé que les clients qui trouvent un serveur occupé entrent dans une orbite FCFS. Un rappel débute que lorsque le serveur complète un service sinon, la tentative échoue. Une variante a été étudiée par Krishna Kumar et Arivudainambi [37].

Dans ce chapitre, nous commençons par une description du modèle général de files d'attente classiques. Ensuite, nous nous intéressons particulièrement aux files d'attente avec rappels. Nous présenterons par la suite quelques exemples de problèmes qui peuvent être modélisés par ce type de modèles. Dans les sections suivantes nous donnerons une synthèse des différents modèles d'attente avec rappels ainsi que les principaux résultats de la littérature.

1.1 Chaînes de Markov

À la différence du calcul des probabilités, qu'on peut considérer comme étant le traitement mathématique de la notion intuitive du "hasard", les processus stochastiques fournissent des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires dont la dépendance du temps (ou d'un autre paramètre) joue un rôle prépondérant.

Dans cette section, nous introduisons quelques concepts fondamentaux de la théorie des processus aléatoires et de la théorie des files d'attente.

1.1.1 Processus stochastiques

Les processus aléatoires décrivent l'évaluation d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transition de phases, etc) en biologie (évolution, génétique et génétiques des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économiques et finances.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

Définition 1.1.1. [2] On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t; t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilités (Ω, F, \mathbb{P}) et à valeurs dans l'espace mesurable (E, ξ) , $t \in T$ représente une date. Lorsque $T \in \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

Définition 1.1.2. [38] On appelle espace des états (des phases) l'ensemble E où les variables X_n prennent leurs valeurs. L'ensemble E peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

1. Suite stochastique à espace d'états discret ;
2. Suite stochastique à espace d'état continu ;
3. Processus continu à espace d'état discret ;
4. Processus continu à espace d'état continu.

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

Définition 1.1.3. [38] Un processus stochastique $\{\xi_t; t \geq 0\}$ est strictement stationnaire, si :

$$\forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R} : F(\xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_n}) = F(\xi_{t_0+\tau}, \dots, \xi_{t_n+\tau}),$$

où F est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_t .

Définition 1.1.4. [38] Un processus stochastique $\{\xi_t; t \geq 0\}$ est à accroissement stationnaire (homogène), si $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}$:

$X_{t_2+h} - X_{t_1+h}$ et $X_{t_2} - X_{t_1}$ sont des variables aléatoires de même loi.

1.1.2 Processus Markoviens

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évaluation future.

1.1.3 Chaîne de Markov à temps discret

Définition 1.1.5. [2] On appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d : Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, ξ) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad (1.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états i_0, \dots, i_{n-1} , i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens.

On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par p_{ij} :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

La matrice de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

Les matrices de transition sont également appelées "matrices stochastiques" et satisfont les deux conditions suivantes :

1. leurs éléments sont non négatifs

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in E;$$

2. la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in E.$$

1.1.4 Propriétés fondamentales

Probabilité de transition

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transition ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i), \quad n \geq 1 \quad (1.3)$$

en utilisant l'algèbre des événements, on a :

$$P^{(n)} = P^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

De façon plus générale, la relation matricielle

$$P^n P^m = P^{n+m},$$

s'écrit maintenant

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \quad (i, j \in E, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1). \quad (1.5)$$

Ce système d'équations est connu sous le nom d'équations de **Chapman-Kolmogorov**.

Définition 1.1.6. Deux états i et j d'une chaîne de Markov sont dits communicants s'ils existent $m \geq 0$ et $n \geq 0$ tels que $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$.

En d'autres termes, i communique avec j (on écrit $i \leftrightarrow j$), si on peut atteindre l'état j à partir de l'état i , et vice versa. Noter que la relation \leftrightarrow entre i et j est une relation d'équivalence. Nous pouvons utiliser ceci pour séparer la chaîne de Markov dans ce qui s'appelle les classes de communication. Ces classes sont des ensembles disjoints de l'espace des états, et chaque état dans une classe de communication donnée communique avec chaque autre état dans la même classe de communication.

Définition 1.1.7. Une chaîne de Markov est irréductible, si et seulement si, pour tout état i et j , il existe $m \geq 0$ (pouvant dépendre de i et j) tel que

$$p_{ij}^{(m)} > 0.$$

Simplement dit, une chaîne de Markov est irréductible, si elle a seulement une classe de communication. Si une chaîne de Markov n'est pas irréductible, nous l'appelons une chaîne **réductible**. Si une classe de communication est avec une probabilité 1, la chaîne de Markov quitte la classe sans retour, alors cette classe est transitoire avec des états transitoires. Les classes qui ne sont pas **transitoires** sont les classes récurrentes (ou persistantes) avec des états récurrents, et une fois qu'une chaîne de Markov rentre dans une classe **récurrente**, elle reviendra toujours à cette classe.

Définition 1.1.8. Soit P une matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible. (Si la chaîne de Markov est réductible, alors nous pouvons prendre P pour chacune des classes récurrentes). La période $d = d(i)$ d'un état i est définie comme étant le plus grand diviseur commun de l'ensemble :

$$J_i = \{n \geq 0 : p_{ij}^{(n)} > 0\}.$$

Lorsque $d = 1$ (resp. $d > 1$) pour un état i , alors cet état est apériodique (resp. périodique). Une chaîne irréductible est apériodique ou a la même période d pour tous ses états.

Remarque 1.1.1. Dans une chaîne de Markov irréductible tous les états communiquent et sont de même nature.

Définition 1.1.9. [2] Un ensemble d'état C est fermé si,

$$\forall i \in C \text{ et } \forall j$$

alors $p_{ij} = 0$.

Définition 1.1.10. [2] Un état i est dit périodique de période $d(i)$, si

$$d(i) = \text{pgcd}(\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}) > 1. \quad (1.6)$$

Si

$$d(i) = 1, \quad (1.7)$$

alors i est " apériodique"

On représente le graphe correspondant, et grâce à celui-ci on détermine la nature des état de la chaîne comme suit :

1. Les sommets dans le graphe qui possèdent des successeurs sont appelés classes transitoires ;
2. Les sommets qui ne possèdent pas des successeurs sont appelés classes récurrentes ;
3. Parmi les classes récurrentes celle qui ne contiennent qu'un état sont classes absorbantes.

Définition 1.1.11.

$$\forall n > 0, \forall i \in C : \sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1, \quad (1.8)$$

c'est à dire : au bout de n transition on est toujours dans C .

Définition 1.1.12. [2] Une chaîne de Markov est dite irréductible, si elle ne contient aucun ensemble fermé (autre que celui de tout ces états).

Loi de probabilité de X_n

Nous introduisons les probabilités d'états :

$$\pi^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.9)$$

La distribution de X_n peut alors être écrite sous forme de vecteur-ligne :

$$\pi^{(n)} = (\pi^{(n)}(1), \pi^{(n)}(2), \dots) \quad (1.10)$$

dont la somme des termes vaut 1.

Pour calculer $\pi^{(n)}$, on doit connaître la distribution initiale $\pi^{(0)}$ et la matrice de transition P ; ces probabilités d'états définissent le régime transitoire d'un phénomène aléatoire :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.11)$$

Lorsque la limite suivante existe :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^{(x)} = \pi \quad (1.12)$$

on définit le régime permanent du processus, indépendant de la distribution initiale.

1.1.5 Comportement asymptotique

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \pi. \quad (1.13)$$

Théorème 1.1.1. [2] Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n 'a que des termes strictement positifs, alors

$$\pi^{(n)} \rightarrow \pi,$$

quelle que soit la distribution initiale $\pi^{(0)}$ et

$$P^n = P^*,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. La distribution π est un vecteur de probabilité strictement positif, et P^* une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π . En plus

$$\pi P^* = \pi.$$

1.2 Files d'attente classiques

1.2.1 Description du modèle d'attente classique

Une file d'attente peut se décrire comme un système où les clients (modélisant les activités qui ont besoin d'accéder aux ressources) arrivent à des instant aléatoires vers une station (modélisant les ressources) pour recevoir un service. À la lumière des exemples précédents, on voit que les clients peuvent être de toutes sortes (appels téléphonique, processeur,...). La station de service peut comprendre un ou plusieurs serveurs. Quand ceux-ci sont tous occupés, les clients doivent alors patienter dans un espace d'attente (si celui-ci existe) jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible. Une représentation graphique d'une file d'attente classique est donnée par la figure 1.1 :

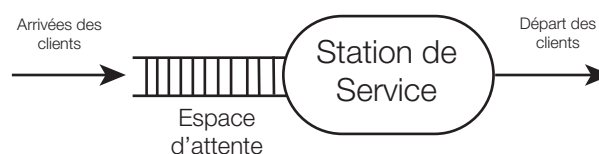


FIGURE 1.1 – Système d'attente classique

1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n), (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

1.3.1 Modèle markoviens

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (modèle d'attente $M/M/1$). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{X(t), t \geq 0\}$ est complètement défini grâce à la propriété d'absence de mémoire.

1.3.2 Modèles non markoviens

Lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, voire impossible. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'une des méthodes d'analyse suivantes :

Méthode des étapes d'Erlang

Son principe est d'approcher toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes.

Méthode de la chaîne Markov induite

Cette méthode, élaborée par Kendall [3], est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés $1, 2, \dots, n$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $\{X_n, n \geq 0\}$, où $X_n = X(n)$, soit markovienne et homogène.

Méthode des variables auxiliaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$. Les variables $A(t_k), k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites auxiliaires.

Méthode des événements fictifs

Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

Simulation

C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes d'attente les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant les lois gouvernant le système.

1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente

On note λ le taux d'arrivée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée séparent deux arrivées successives est $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$. On note μ le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est $\mathbb{E}(Y) = 1/\mu$. L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X)}$$

où les variables aléatoires X et Y suivent respectivement la loi des inter-arrivées et la loi de service.

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les caractéristiques d'exploitation du système, telle que : le temps d'attente d'un client (le temps qu'un client passe dans la file d'attente), le temps de réponse d'un client dans le système (composé du temps d'attente et la durée de service), le temps de réponse d'un système, le taux d'occupation des dispositifs de service, la durée de la période d'activité (l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système) ; et les mesures de performance suivantes :

- L : nombre moyen de clients dans le système de files d'attente,
- L_q : nombre moyen de clients dans la file,
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système,
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans la file.

Ces valeurs sont liées les unes aux autres par les relations suivantes :

- $L = \lambda W$,
- $L_q = \lambda W_q$,

- $L = L_q + \lambda / \mu$,
- $W = W_q + 1 / \mu$.

Les deux premières sont appelées "formules de Little". On note que ces formules sont valables sous la vérification de la condition d'ergodicité du système $\rho = \lambda / \mu < 1$. Ces formules expriment tout simplement le fait qu'en régime stationnaire le nombre moyen de clients dans la file est égal au taux d'arrivée des clients multiplié par le temps moyen d'attente des clients. Elles rappellent un comportement poissonien de la longueur de la file d'attente en régime stationnaire.

1.5 Systèmes d'attente avec rappels

1.5.1 Description d'un modèle d'attente avec rappels

Un système d'attente avec rappels (Retrial Queue) est un système composé de s ($s \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer de capacité $N - s$ ($N \geq s$) et d'une orbite de capacité M . À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans le buffer, le client le rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions occupées, il quittera le système définitivement avec une probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire.

Les clients qui reviendront et rappelleront pour le service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité finie, si elle est pleine, un client qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupées, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi.

Chaque client en orbite appelé aussi client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et une intensité de rappels bien définie (rappels constants, rappels classiques, rappels linéaires, ...). Chacun de ces clients secondaires est traité comme un client primaire, c'est-à-dire un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système. S'il trouve un serveur libre, il sera servi immédiatement puis quittera le système. Sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le buffer, il le rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et positions d'attente sont encore occupées, le client quittera le système pour toujours avec la probabilité $1 - H_k$ (si c'est le k^{me} rappel sans succès) ou bien entre en orbite avec la probabilité H_k si l'orbite n'est pas pleine.

Remarque 1.5.1. Le modèle d'attente avec rappels décrit ci-dessus est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers tels que : Les système sans buffer, les systèmes à un seul serveur,...

Remarque 1.5.2. La description d'un système de files d'attente ordinaire (classique) se fait avec ses éléments principaux : le processus d'arrivées, le mécanisme de service (disponibilité et nombre de serveurs) et la discipline d'attente. Pour un système avec rappels, on doit ajouter un élément décrivant la loi des répétitions d'appels. En fonction du modèle considéré, on pourra introduire d'autres éléments décrivant la fiabilité du serveur, les types de priorité,...

Remarque 1.5.3. Les clients primaire ou secondaires qui arrivent durant un service, entrent en orbite sans aucune influence sur le processus de service.

Notation :

En utilisant la notation de Kendall [3, 39], un modèle de files d'attente avec rappels est noté comme suit : $A/B/s/N/M/H$, ou

- A décrit la distribution des temps des inter-arrivées des clients.
- B décrit la distribution du temps de service de chaque client.
- s est le nombre de serveurs dans le système.
- N est la capacité du système.
- M est la taille de la population (source) de clients.
- H est la fonction de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blocage (serveurs occupés).
 H peut être décrite par un vecteur $H = (H_0, H_1, H_2, H_k, \dots)$, où H_k est la probabilité qu'après que la $K^{\text{ème}}$ tentative échoue, un abonné rappelle pour la $(K + 1)^{\text{ème}}$ fois.
- Quand $H_k = 1$ pour $K \geq 0$, le système devient un système sans perte. Ainsi, chaque client reçoit éventuellement le service si M est infinie. Dans ce cas, $H = NL$ (sans perte).
- Quand $H_k = \alpha < 1$ pour $K \geq 0$, le système est dit à perte géométrique et $H = GL$ (Geometric Loss).

1.5.2 Quelques cas modélisés par des systèmes se files d'attente avec rappels

Il existe aujourd'hui des centaines de publications sur les systèmes avec rappels ou des exemples concrets ont été cités Yang et Templeton [15], Aïssani [40], Falin et Templeton [41], Artalejo et Gomez [12], Amador et Artalejo [42]) en rapport avec les nouveaux développements technologiques dont l'intérêt porté s'accroît de jour en jour. Nous présentons quelques exemples de problèmes [15] pouvant être modélisés par ces systèmes. Ceux-ci vont du cas le plus simple de réservation à d'autres cas plus complexes comme les réseaux locaux CSMA.

Problème de réservation

C'est l'exemple le plus simple d'un client qui sollicite une réservation par téléphone dans un restaurant. Il y a une ligne unique qui est consacrée à répondre aux requêtes de réservations. Ainsi, si un client appelle et trouve la ligne occupée, il renouvellera sa tentative après une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité H_k qui, en pratique, est strictement inférieure à 1 car le client ne peut rappeler indéfiniment. Cet exemple peut être modélisé par une file d'attente $M/G/1$ avec rappels et avec perte en considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien. L'étude de ce genre de problèmes permet de prédire le temps d'attente du client, le nombre de clients perdus dû à ce blocage,...

Système informatique à temps réel

Dans un système informatique à temps réel, on trouve M terminaux et S canaux de transmission tels que $M > S$. Pour qu'un terminal soit connecté à l'ordinateur, il suffit d'un canal de transmission libre. L'illustration de ce genre de système est le centre de calcul, où arrive un étudiant pour utiliser l'ordinateur pendant une période de temps aléatoire. Celui-ci doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter. S'il n'y a aucun terminal disponible, il retentera sa chance après un temps aléatoire. Sinon, il envoie sa demande au commutateur central pour se connecter à l'ordinateur. Le terminal est alors connecté selon que le canal serait disponible ou pas. Dans ce dernier cas, la demande est mise dans la file par le commutateur en attente de libération d'un canal.

Ces systèmes peuvent être modélisés par une file $G/G/S$ avec rappels, avec un tampon (espace d'attente) de capacité M et une orbite de taille infinie, où les canaux de transmission correspondent aux serveurs et les terminaux au tampon.

Réseaux locaux CSMA

Dans les réseaux locaux se partageant un bus unique, l'un des protocoles de communication le plus généralement utilisé est appelé protocole non-persistant CSMA (Carrier Sense Multiple Access), c'est une méthode d'accès à un canal.

Un réseau canal est composé de stations communicantes les unes avec les autres via le bus qui peut être utilisé par une seule station à la fois. Une telle architecture de réseau d'ordinateurs local est appelée architecture en bus.

Des messages de longueurs variables arrivent aux stations du monde extérieur. En recevant le message, la station le découpe en un nombre fini de paquets de longueur fixe, et consulte immédiatement le bus pour voir s'il est occupé ou bien libre. Si le bus est, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination et les autres paquets sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieure. Par contre, si le bus n'est pas libre, tous les paquets sont stockés dans le tampon (position d'attente) et la station peut reconsulter le bus après une certaine période aléatoire.

Ce problème peut être modélisé comme un système d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les tampons des station représentent l'orbite. Ce système est décrit dans la figure 1.2.

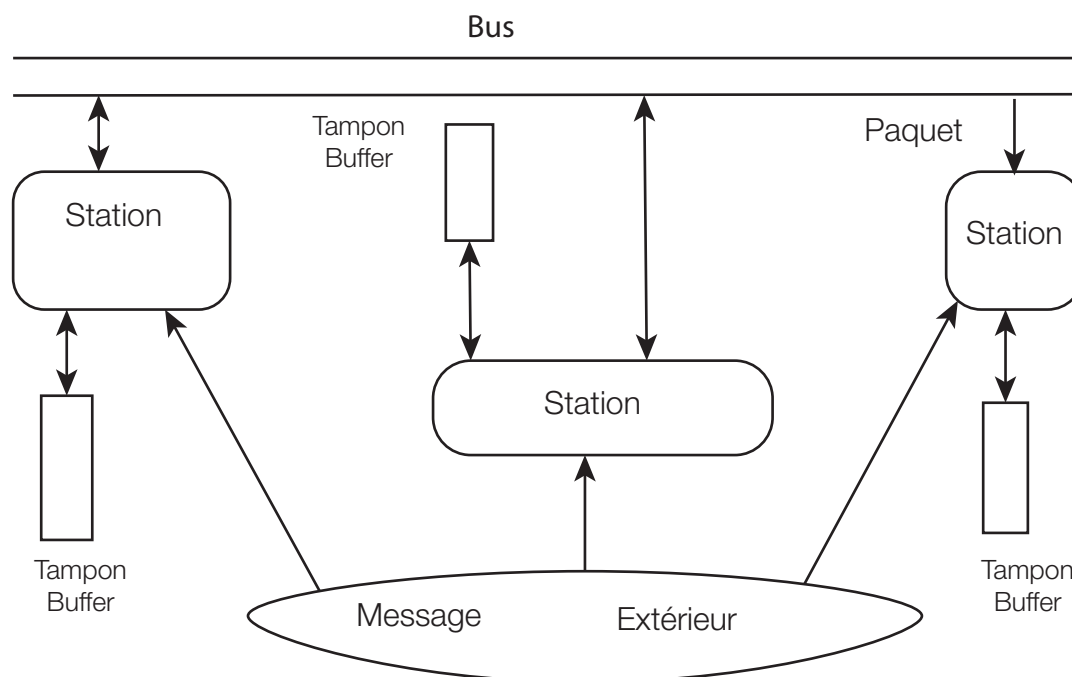


FIGURE 1.2 – Schéma d'un réseau local

1.5.3 Modèle d'attente M/G/1 avec rappels et orbite finie

Considérons un système à un seul serveur, les arrivées des clients dans le système forment un processus de Poisson de taux λ , si un client primaire trouve le serveur disponible il est immédiatement pris en charge. Sinon, c'est-à-dire, s'il trouve le serveur occupé, il rejoint l'orbite et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il trouve le serveur à nouveau disponible. Le temps de service est de loi générale de moyenne $1/\nu$, de distribution $B(x)$ et de transformée Laplace-Stieljes $\beta(x)$. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de taux θ . La figure 1.3 synthétise le modèle.

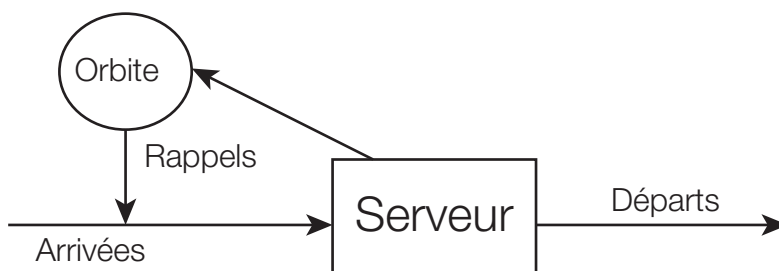


FIGURE 1.3 – Modèle M/G/1 avec rappels et orbite finie

Considérons le processus $\{N(\eta)\}$ (nombre de clients dans le système) aux instants η_1, η_2, \dots , où les clients terminent leurs services et quittent le système. On définit ainsi $N_i = N(\eta_i)$ $i = 1, 2, \dots$. Où η_i sont les instants de départ du $i^{\text{ème}}$ client :

$$N_i = \begin{cases} N_{i-1} + v_i - 1 & \text{Si } N_{i-1} \geq 1; \\ v_i & \text{Si } N_{i-1} = 0, \end{cases}$$

où :

v_i : "le nombre d'appels primaires durant le service du $i^{\text{ème}}$ client."
sont des variables indépendantes dont la distribution est :

$$k_n = \mathbb{P}(v_i = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dB(x)$$

Le processus $\{N(\eta)\}$ forme alors une chaîne de Markov induite [13] et sa matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \dots & p_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{0,k} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{1,k} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{N,0} & p_{N,1} & p_{N,2} & \dots & p_{N,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} p_{N,k} \end{pmatrix},$$

avec

$$p_{ij} = \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} k_{j-i} + \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} k_{j-i+1}$$

$p_{ij} \neq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, j+1$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé les principales définitions concernant les systèmes d'attente et les chaînes de Markov, en général, et les systèmes d'attente avec rappels en particulier. On a énuméré les principaux modèles de la littérature ainsi que leurs méthodes d'analyse. On s'est intéressé surtout au système M/G/1 avec rappels exponentiels et orbite finie, qui objet d'étude du chapitre 3. Dans ce dernier, nous calculerons la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite notée π_θ , où θ représente le taux de rappels qui est notre paramètre à perturber.

Développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov

Les séries de Taylor, introduites par le mathématicien anglais Brook Taylor [43] en 1715, ont été un outil mathématique très utiles durant des siècles, et sont appliquées dans plusieurs domaines scientifiques encore aujourd'hui. Les séries de Taylor ont de nombreuses variétés d'applications, ainsi des travaux significatifs ont été effectués dans l'approximation des fonctions et de plusieurs types d'équations différentielles. Elles aboutissent souvent à l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point fixé, dont l'expression analytique de cette fonction n'existe pas ou difficile à manipuler. Pour cette raison, le développement en séries de Taylor, nous assure une approximation polynomiale de la fonction considérée au voisinage du point considéré. Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle approche, basée sur les développements en séries de Taylor, où la dérivée d'ordre supérieure de la distribution stationnaire est calculée en fonction de la matrice fondamentale, d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini.

2.1 Rappels

2.1.1 Dérivabilité

Soit $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. Alors f est dérivable au point x_0 si, et seulement si, la fonction

$$x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie au point x_0 .

f est dérivable sur l'intervalle \mathbb{I} si et seulement si elle est dérivable en tout point de \mathbb{I} .

2.1.2 Fonctions de Classe C^n

Définition 2.1.1. [44]

Soit \mathbb{I} un intervalle ouvert. On dit que $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur \mathbb{I} , où n est un entier supérieur ou égal à 1, si f est n fois dérivable sur \mathbb{I} et $f^{(n)}$ est une fonction continue sur \mathbb{I} .

- On dit que f est de classe C^∞ , si toutes les dérivées de f existent et définies sur \mathbb{I} .
- On note respectivement par $C^n(\mathbb{I})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur \mathbb{I} ($C^\infty(\mathbb{I})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{I}).

Exemple 2.1.1. $\sin x$, $\cos x$ et $\exp(x)$ sont des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

2.1.3 Différentiabilité et dérivabilité

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathbb{I} contenant x_0 . Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 . Dans ce cas :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 2.1.1. Cette relation est fondamentale. Elle traduit le fait que si f est dérivable en un point x_0 , au voisinage de ce point elle **diffère** peu de la fonction affine

$$x \rightarrow f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0). \quad (2.1)$$

2.2 Formules de Taylor d'une fonction réelle à une seule variable réelle

2.2.1 Développement de Taylor au voisinage d'un point

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en $x_0 \in]a, b[$, alors au voisinage de x_0 , f peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon_{x_0}] \quad (2.2)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. On dit que f est approchée par le polynôme $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ de degré 1.

La formule de Taylor permet d'approcher les fonctions de classe C^n par un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Dans ce cas, la fonction f s'écrit comme suit :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = 0$.

Exemple 2.2.1. Considérons L le nombre moyen de clients dans le système d'attente $M/G/1/$ avec rappels qui est une fonction de l'intensité de trafic $\rho = \lambda/\mu$, donnée par la formule suivante :

$$L(\rho) = \lambda\beta_1 + \frac{\lambda^2}{1-\rho} \left(\frac{1}{\mu}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 \right).$$

Comme la fonction L est de classe C^n , alors le développement de Taylor de L au voisinage de ρ est donné comme suit :

$$\begin{aligned} L(\rho + \Delta) &\simeq L(\rho) + L'(\rho)\Delta + \frac{L''(\rho)}{2}\Delta^2 + \dots + \frac{L^{(n)}(\rho)}{n!}\Delta^n \\ &\simeq \sum_{i=0}^n \frac{L^{(i)}(\rho)}{i!}\Delta^i. \end{aligned}$$

2.2.2 Analyse du reste de développement

Le développement (2.2) consiste à remplacer une fonction difficile à manipuler, voire impossible à calculer par un polynôme. Mais si la fonction initiale n'est pas calculable, il en est de même pour le reste $R_n(x)$.

Afin d'évaluer l'erreur d'approximation d'une fonction par un polynôme de Taylor, il est primordial de calculer la série :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Remarque 2.2.1. Le reste $R_n(x)$ varie suivant les conditions de dérivabilité imposées à f . De ce fait, il existe plusieurs formules du reste qui en découlent. Comme alternative du calcul du reste $R_n(x)$, on peut l'estimer ou le majorer.

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques résultats concernant l'estimation du reste $R_n(x)$.

2.2.3 Formule de Taylor avec reste généralisé

Théorème 2.2.1. [44] Soient les deux fonctions $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ dérivable sur $]a, b[$;
2. $g \in C([a, b])$ et g' dérivable sur $]a, b[$, telle que $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$

Soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x_0 \in [a, b], x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x_0, x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x_0, x) = 0$;

où

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(a)(x-a)^n [g(x) - g(x_0)]}{n!g'(a)}, \quad (2.3)$$

et a est un point strictement compris entre x et x_0 . La formule (2.3) de $R_n(x_0, x)$ est appelée "reste généralisé".

2.2.4 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Théorème 2.2.2. [44] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$, et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b], x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où c est strictement compris entre x et x_0 , et $R_n(x-x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est le reste de Lagrange.

2.2.5 Formule de Taylor avec reste de Cauchy

Théorème 2.2.3. [44] Soit la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b], x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1} (n-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)),$$

où $0 < \theta < 1$, et $R_n(x-x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1} (n-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$ est le reste de Cauchy.

2.2.6 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 2.2.4. [44] Soient la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors :

$\forall x \in [a, b]$ et $x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o(x-x_0)^n,$$

avec : $R_n(x, x_0) = o(x-x_0)^n$, est le reste de Young.

Si on pose

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x_0, x)}{(x-x_0)^n} & \text{si } x \neq x_0; \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

On obtient : $R_n(x_0 - x) = (x-x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$, qui représente le reste de Peano.

Exemple 2.2.2. Le développement de Taylor pour $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de 0 avec le reste de Young est donné par :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n). \quad (2.4)$$

2.2.7 Formule de Mac-Laurin

Lorsque on pose $x_0 = 0$ dans les formules de Taylor, on obtient les formules dites Mac-Laurin :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où c est fréquemment écrit $a + \theta(b-a)$ pour une valeur θ élément de $]0, 1[$.

Formules de Mac-Laurin avec reste de Young

Théorème 2.2.5. [44] Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors la formule de Taylor avec le reste de Young devient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$

Exemple 2.2.3. La représentation de $f(x) = e^x$ avec la formule de Mac-Laurin-Young est donnée comme suit :

$$f(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exemple 2.2.4. Considérons la fonction $f = e^{x \sin(x)}$ et son développement en série de Taylor au voisinage de 2. La figure 2.1 montre la comparaison entre la fonction et son développement en séries de Taylor :

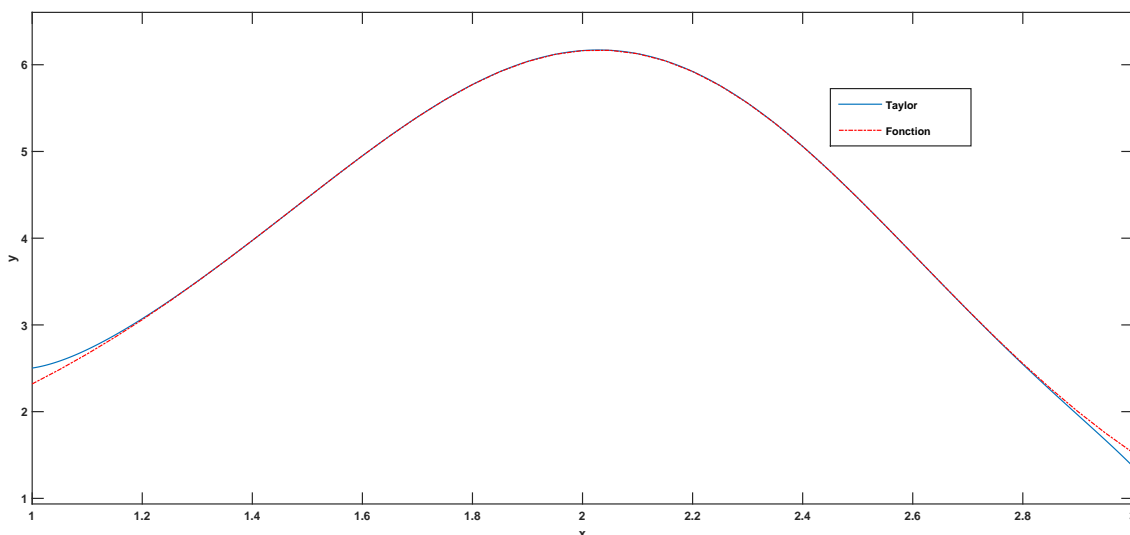


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la fonction f et son développement en séries de Taylor à l'ordre 2

Dans la section précédente, on a présenté une vue générale sur les formule de Taylor d'une fonction réelle à une seule variable réelle. Dans la prochaine section, on présentera les développements en séries de Taylor relatifs au cas des fonctions réelles à plusieurs variables réelles.

2.3 Formules de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles

Les séries de Taylor permettent de représenter non seulement les fonctions à une variable, mais aussi les fonctions de plusieurs variables sous forme polynomiale.

2.3.1 Fonction de classe C^n

Définition 2.3.1. On dit qu'une fonction, définie dans un ouvert θ de \mathbb{R}^p , est de classe C^n sur θ si elle admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n continues.

2.3.2 Différentiabilité

Théorème 2.3.1. [44] Si f est une fonction d'un ouvert θ de \mathbb{R}^p dans une partie U de \mathbb{R} admettant des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 définies dans θ et continues en un point M_0 de θ , alors f est différentiable en M_0 .

2.3.3 Théorème des accroissements finis

Proposition 2.3.1. [44] Soit f une fonction de classe C^1 , définies sur $D =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\subset \mathbb{R}^2$, et $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ deux point de D . Il existe $(z_1, z_2) \in D$, tel que :

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (x_2 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x}(z_1, z_2) + (y_2 - y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(z_1, z_2).$$

Dans cette proposition, nous avons restreint le domaine à un rectangle de \mathbb{R}^2 . Ce n'est pas l'hypothèse la plus générale mais l'important est que (z_1, z_2) soit dans D .

2.3.4 Formule de Taylor à l'ordre n

Définition 2.3.2. Considérons une boule ouverte B de \mathbb{R}^p centrée en a et f une fonction à valeurs réelles, possédant des dérivées d'ordre $n + 1$ continues en chaque point. Alors pour tout $x \in B$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha}_{R_n(a,x)}.$$

Tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$.

Exemple 2.3.1. On considère à nouveau L , le nombre moyen de clients dans le système d'attente $M/G/1$, comme une fonction à deux variables λ et μ :

$$L(\lambda, \mu) = \left\{ \lambda \beta_1 + \frac{\lambda^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right) \right\}.$$

En utilisant deux paramètre de perturbation Δ_1 (correspondante à λ) et Δ_2 (correspondant à μ). La représentation polynomiale sous forme du polynôme de Taylor à l'ordre 3 est donnée par :

$$\begin{aligned} L(\lambda + \Delta_1, \mu + \Delta_2) &\simeq L(\lambda, \mu) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, \mu) \Delta_1 + \frac{\partial L}{\partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(\lambda, \mu) \Delta_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2}(\lambda, \mu) \Delta_2^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_1 \Delta_2 \right) \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 L}{\partial \lambda^3}(\lambda, \mu) \Delta_1^3 + \frac{\partial^3 L}{\partial \mu^3}(\lambda, \mu) \Delta_2^3 + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial \lambda^2 \partial \mu}(\lambda, \mu) \Delta_1^2 \Delta_2 + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial \lambda \partial \mu^2}(\lambda, \mu) \Delta_1 \Delta_2^2 \right). \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2. Calculons le développement en série de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ au voisinage du point $X = (0,0)$ et considérons ce polynôme pour calculer une approximation de f au voisinage du point $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.

Calculons d'abord ses dérivées partielles :

$$P_B(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{-(x^2+y^2)} \end{cases} \quad (2.5)$$

On a donc, avec $X(0,0)$, $f(X) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
Finalement, on trouve :

$$f(X+H) \cong p_2(X+H) = 1 - (h_1^2 + h_2^2).$$

2.3.5 Différentes formules caractérisant le reste

Théorème 2.3.2. [44] (Taylor-Young)

Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^p , m fois différentiable au point a . Alors on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha \partial^\alpha f}{\alpha! \partial x^\alpha}(a) + o(\|h\|^m).$$

Théorème 2.3.3. [44] (Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , de classe C^m sur U et $B(a,h)$ incluse dans U . Si f admet des dérivées partielles, à l'ordre $(m+1)$ en tout point de $B(a,h)$, alors il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha \partial^\alpha f}{\alpha! \partial x^\alpha}(a) + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{h^\alpha \partial^{m+1} f}{\alpha! \partial x^\alpha}(a + \theta h).$$

2.4 Application des développements en séries de Taylor sur les chaînes de Markov

Dans cette section, on présente une approche basée sur les développements en séries de Taylor [31]. Celle-ci servira à calculer plusieurs caractéristiques stationnaires relatives aux chaînes de Markov à espace d'états fini et à temps discret. La distribution stationnaire, dont les coefficients de la série de Taylor sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale appropriée à la chaîne de Markov.

2.4.1 Dérivées successives de la distribution stationnaire

On considère une chaîne de Markov $X = \{X_n; n \geq 0\}$ d'espace d'états $S = \{0, 1, \dots, N\}$. Soit $P = (p_{ij})$ la matrice de transition associée à la chaîne de Markov X . On suppose que la chaîne de Markov X admet une unique distribution stationnaire π . On considère P comme étant une matrice fonction d'un paramètre θ , qu'on notera P_θ et π_θ sa distribution stationnaire.

2.4.2 Matrice fondamentale

La notion de "Matrice fondamentale" a été introduite, pour la première fois par Kemeny et Snell [27] dans le cadre de l'analyse de la perturbation des chaînes de Markov.

Les méthodes de calcul de la matrice fondamentale notée Z_θ ont été d'une grande importance. Précisément une discussion générale sur le calcul de Z_θ a été abordé dans [45]. Egalement dans [46], les auteurs ont considéré quelques approches du calcul stable de Z_θ . De même dans [47] un algorithme, basé sur la factorisation LU de la matrice $(I - P_\theta)$ a été élaboré pour calculer Z_θ tout en utilisant l'algorithme **GTH** (**G**raßman, **T**aksar et **H**eyman).

À l'origine, la matrice fondamentale Z_θ est utilisée pour résoudre des systèmes d'équations de la forme $(I - P_\theta)x = b$, où b est connu. Puisque $(I - P_\theta)$ n'est pas inversible, alors la matrice $(I - P_\theta)$ a été modifiée en y ajoutant la matrice Π_θ dont chaque ligne est le vecteur de la distribution stationnaire π_θ . Ce qui induit que $Z_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$ existe. Cette même matrice est appelée matrice fondamentale des chaînes de Markov ergodiques. Du point de vue pratique, cette définition consiste tout d'abord à calculer la distribution stationnaire π_θ . Ce qui est envisageable dans le cadre de l'analyse de perturbation des chaînes de Markov ergodiques. Ainsi ceci est adéquat à notre démarche abordée par la suite.

Dans cette partie, on se contente de rappeler quelques propriétés de la matrice fondamentale d'une chaîne de Markov ergodique.

Théorème 2.4.1. [27] Si P_θ est une matrice de transition d'une chaîne de Markov finie et ergodique, alors la matrice inverse $Z_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$ existe, et :

1. $P_\theta Z_\theta = Z_\theta P_\theta$
2. $Z_\theta \varepsilon = \varepsilon$
3. $\pi_\theta Z_\theta = \pi_\theta$
4. $(I - P_\theta)Z_\theta = I - \Pi_\theta$
5. $Z_\theta = I + \sum_{i=1}^{\infty} (P_\theta^i - \Pi_\theta)$

avec ε un vecteur dont tous les composantes sont égales à 1.

Remarque 2.4.1. Avec l'obtention de la matrice Z_θ , d'autres caractéristiques comme le temps moyen de premier passage peuvent se calculer [27].

On s'intéresse à l'obtention des dérivées successives d'ordre supérieur de la distribution stationnaire π_θ dans le cas où θ est le paramètre de contrôle. Ce qui nous permettra ensuite d'approcher la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$ par un polynôme en Δ . Par conséquent, l'évaluation numérique de π_θ dans un voisinage du paramètre θ est envisageable. Dans la suite, on donne la formule de la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la distribution stationnaire π_θ , où on suppose que les probabilités de transition de P_θ sont de classe C^k . Alors par l'utilisation de cette formule, on obtient le développement en séries de Taylor en Δ de la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$, où leurs coefficients sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale Z_θ associée à la chaîne de Markov X .

Le théorème suivant établit la formule de la $k^{\text{ème}}$ dérivée de la distribution stationnaire π_θ par rapport à θ en fonction de la matrice fondamentale.

Théorème 2.4.2. [31] *Supposons que toutes les composantes de la matrice P_θ sont de classe C^k par rapport à θ , où θ est un point intérieur d'un certain intervalle Θ . Alors la $k^{\text{ème}}$ dérivée de la distribution stationnaire π_θ , d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini, par rapport au paramètre θ est donnée par :*

$$\frac{d^k}{d\theta^k} \pi_\theta = \pi_\theta^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \pi_\theta^{(m)} P_\theta^{(k-m)} Z_\theta, \quad (2.6)$$

où $P_\theta^{(n)}$ (resp. $\pi_\theta^{(n)}$) est la matrice (resp. le vecteur) dont ses composantes sont les dérivées $n^{\text{ème}}$ des composantes de P_θ (resp. π_θ) par rapport à θ .

Une démonstration de ce théorème est disponible dans [31]. Un résultat équivalent à celui énoncé ci-dessus a été établi en 2003 par Heidergott et Hordijk [28]. Ce résultat consiste à obtenir la sensibilité de la distribution stationnaire en fonction de la matrice de déviation D_θ :

$$D_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1} - \Pi_\theta.$$

Théorème 2.4.3. [28] *Soit $\theta \in \Theta$ et soit $\Theta_0 \subset \Theta$ un intervalle ouvert contenant θ . Supposons que les composantes de la matrice de probabilités de transition P_θ sont n fois dérivables par rapport au paramètre θ . Alors, la dérivée d'ordre n de la distribution stationnaire π_θ par rapport à θ est donné par :*

$$\pi_\theta^{(k)} = \pi_\theta K_\theta(k), \quad (2.7)$$

où

$$K_\theta(k) = \sum_{1 \leq m \text{ et } l_i \leq k \text{ et } l_1 + \dots + l_m = k} \frac{k!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{i=1}^m (P_\theta^{(l_i)} D_\theta). \quad (2.8)$$

Dans la suite, on présente une approche numérique [28, 31, 30] pour calculer la distribution stationnaire π_θ en quelques valeurs de θ , et on montre comment cette distribution stationnaire peut se faire calculer, dans le cas où le paramètre de contrôle θ change dans un certain intervalle. Spécifiquement, on approchera $\pi_{\theta+\Delta}$ par un polynôme en Δ . Ainsi, par supposition que les probabilités de transition de P_θ sont suffisamment régulières par rapport à θ (la condition du théorème 2.4.2), alors la distribution

stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$ peut-être approchée par un polynôme de Taylor, donné sous la forme suivante :

$$\pi_{\theta+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)},$$

où $\pi_{\theta}^{(k)}$ est la dérivée k^{me} de π_{θ} par rapport à θ . Pour $n \geq 0$, on appelle :

$$H_{\theta}(n, \Delta) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)}$$

l'approximation de Taylor d'ordre n de $\pi_{\theta+\Delta}$ en θ ,

$$T_{\theta}(n, \Delta) = \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)}$$

le k^{me} élément de $H_{\theta}(n, \Delta)$ au point θ et

$$r_{\theta}(n, \Delta) = \pi_{\theta+\Delta} - H_{\theta}(n, \Delta)$$

le reste d'ordre n en θ .

La représentation explicite des dérivées de la distribution stationnaire π_{θ} [30] d'ordre inférieur est donnée par :

$$\pi'_{\theta} = \pi_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta}$$

et

$$\pi_{\theta}^{(2)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta} + 2\pi_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta} (P'_{\theta} Z_{\theta})^2.$$

La dérivée seconde peut encore s'écrire :

$$\pi_{\theta}^{(2)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta} + 2\pi'_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta}.$$

Ainsi la troisième dérivée s'écrit :

$$\pi_{\theta}^{(3)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(3)} Z_{\theta} + 3\pi_{\theta}^{(2)} P'_{\theta} Z_{\theta} + 3\pi'_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta}.$$

Remarque 2.4.2. Pour toute fonction coût $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{I} = \{0, 1, \dots, N\}$, on peut analyser la sensibilité de la caractéristique stationnaire $\eta_{\theta} = \pi_{\theta} f$ relative à la chaîne de Markov par rapport au paramètre θ . Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$\eta_{\theta+\Delta} = \pi_{\theta+\Delta} f = \sum_{i \geq 0} f(i) \times \pi_{\theta+\Delta}(i), \quad (2.9)$$

où $\pi_{\theta+\Delta}(i)$ est ensuite approchée par la $i^{\text{ème}}$ composante de $H_{\theta}(n, \Delta)$.

Exemple 2.4.1. Dans le cas des files à capacité finie, on obtient la définition de la sensibilité du nombre moyen de clients dans le système :

$$L_{\theta+\Delta} = \pi_{\theta+\Delta} f = \sum_{i=0}^N \pi_{\theta+\Delta}(i) \times i. \quad (2.10)$$

Exemple 2.4.2. On peut aussi choisir la fonction coût f comme fonction indicatrice sur $i = k$, i.e.

$$f(i) = 1_{\{i=k\}} \begin{cases} 1, & \text{Si } i = k; \\ 0, & \text{Sinon,} \end{cases}$$

où $0 \leq k \leq N$. Pour ce choix nous obtiendrons l'estimation de la sensibilité de la probabilité que X est égale à k . Particulièrement, pour $k = N$, nous obtiendront par exemple, l'estimation de la mesure de performance relative aux modèles de files d'attente à capacité finie, qui est la probabilité de blocage. En d'autres termes, nous obtiendrons :

$$P_b = \mathbb{P}(i = N) = \pi_{\theta+\Delta} f = \pi_{\theta+\Delta}(N).$$

En utilisant l'estimation du nombre moyen de clients dans un système d'attente $L_{\theta+\Delta}$, on peut facilement déduire le temps moyen d'attente dans le système comme suit :

$$W_{\theta+\Delta} = \frac{L_{\theta+\Delta}}{\lambda^*},$$

où $\lambda^* = \lambda(1 - P_b)$ est le taux effectif des inter-arrivées.

2.4.3 Reste du développement en séries de Taylor

Le reste $r_\theta(n, \Delta)$ présenté ci-dessus peut être exprimé sous la forme de Lagrange comme suit :

$$r_\theta(n, \Delta) = \int_0^\Delta \frac{x^n}{n!} \pi_{\theta+x}^{(n+1)} dx. \quad (2.11)$$

Le reste du développement de Taylor est approché en considérant la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$ comme fonction de θ , et par la suite est approchée par un polynôme, tout en tronquant sa série de Taylor.

Considérons le développement en séries de Taylor de la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$ au voisinage de θ :

$$\pi_{\theta+x}^{(n+1)} \simeq \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} \sum_{l=0}^{n+j} \binom{n+1+j}{l} \pi_\theta^{(l)} P_\theta^{(n+1+j-l)} Z_\theta. \quad (2.12)$$

Cette expression est la troncature de la série de Taylor à l'ordre m de la dérivée $\pi_{\theta+x}^{(n+1)}$. En substituant cette dernière dans la formule du reste on obtient :

$$r_\theta(n, \Delta) \simeq \sum_{j=0}^m \frac{\Delta^{n+1+j}}{n! j! (n+1+j)} \sum_{l=0}^{n+j} \binom{n+1+j}{l} \pi_\theta^{(l)} P_\theta^{(n+1+j-l)} Z_\theta. \quad (2.13)$$

On peut dès lors utiliser (2.13) comme approximation du reste du développement en séries de Taylor, afin d'approcher le reste $r_\theta(n, \Delta)$.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter les principaux résultats obtenus dans l'approximation des caractéristiques stationnaires d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'état fini. Nous y avons présenté une formule récursive du calcul de la sensibilité de la distribution stationnaire, où nous avons considéré la perturbation d'un seul paramètre. Nous avons mis en lumière l'approche basée sur les séries de Taylor. Cette approche sera l'objet d'une application sur les systèmes avec rappels dans le prochain chapitre.

Approximation fonctionnelle dans les systèmes d'attente avec rappels

Dans le précédent chapitre, on a introduit les principaux résultats concernant l'approche qu'on a entrepris. En effet, nous avons défini les outils permettant d'approximer les caractéristiques d'une chaîne de Markov finie. Dans ce qui suit, nous appliqueront l'approche du développement en séries de Taylor [30], afin d'approcher les mesures de performance de la chaîne de Markov induite d'un système d'attente M/G/1/N avec rappels.

Pour illustrer cette dernière, nous appliquerons cette méthode sur quatre exemples où on a considéré différentes distributions de temps de service telles que :

1. **Déterministe** : La loi déterministe ayant le coefficient de variation $CV = 0$;
2. **Exponentielle** : Le processus de Poisson, dont la loi des inter-arrivées suit une loi exponentielle ayant le coefficient de variation $CV = 1$;
3. **Hyper-exponentielle** : La loi hyper-exponentielle a le coefficient de variation $CV \geq 1$. Dans notre cas, nous considérons que la fonction de densité de la distribution H_2 est définie comme suit :

$$f(t) = q\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-q)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0$$

où, $0 \leq q \leq 1$ et $\lambda^{-1} = q\lambda_1^{-1} + (1-q)\lambda_2^{-1}$

En changeant les valeurs du paramètre q , on peut obtenir différentes valeurs de CV . Le coefficient de variation, CV , correspondant à cette distribution est donné par :

$$CV = \sqrt{\frac{1 + (2q - 1)^2}{1 - (2q - 1)^2}}$$

4. **Erlang** : Les valeurs du coefficient de variation de la loi d'Erlang d'ordre deux varient entre $1/\sqrt{2}$ et 1. La fonction de densité correspondante à cette distribution est donnée par :

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t})}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, t \geq 0.$$

Posons $\lambda^{-1} = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}$ pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$. De plus, si $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda$, celle-ci se réduit à la distribution d'Erlang régulière de moyenne λ . En d'autres termes, sa densité est définie comme suit :

$$f(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}, t \geq 0.$$

Ainsi, le coefficient de variation de cette distribution est donné par :

$$CV = \sqrt{\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Les prochaines sections énumèrent les résultats obtenus pour l'application de la méthode de développement en séries de Taylor [31] sur le modèle $M/G/1/N$, en fixant comme distribution de la durée de temps de service les quatre distributions citées ci-dessus.

3.1 Analyse de la perturbation

3.1.1 Position du problème

Considérons un système d'attente $M/G/1$ à orbite finie décrit dans le chapitre 1. La matrice de transition associée à sa chaîne de Markov induite est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \dots & p_{0,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{0,k} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{1,k} \\ 0 & p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{2,k} \\ 0 & 0 & p_{3,2} & \dots & p_{3,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{N,N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_{N,k} \end{pmatrix},$$

avec

$$p_{ij} = \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} k_{j-i} + \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} k_{j-i+1}$$

$p_{ij} \neq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, j+1$.

Nous calculerons pour les quatre loi de services décrites précédemment la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite notée π_θ , où θ représente le taux de rappels qui est notre paramètre à perturber.

3.1.2 Erreurs relatives à la perturbation du taux de rappels

Afin de démontrer la robustesse de cette approche, nous avons calculé les erreurs relatives [30]. Celles-ci sont calculées par la formule suivante :

$$\left| \frac{H_\theta(1, \Delta)(i) - \pi_{\theta+\Delta}(i)}{\pi_{\theta+\Delta}(i)} \right|$$

pour chaque élément $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Nous appliquerons l'approche des séries de Taylor

Comparaison entre le système d'attente M/D/1 avec rappels et orbite finie avec le système d'attente M/D/1/5 classique

Dans un premier temps, on effectue une comparaison entre le système d'attente M/D/1/N avec rappels où l'on fait tendre le taux de rappels vers l'infini, avec un système d'attente M/D/1/N classique [29]. Les résultats ont été obtenus avec $\lambda = 1$ et $\mu = 2$ (temps de service $T_s = 0.5$) ainsi qu'un taux de rappels $\theta = 50$. La figure 3.1 illustre les erreurs relatives absolues commises lors de la perturbation du paramètre de service de sur un intervalle $[0, 0.1]$.

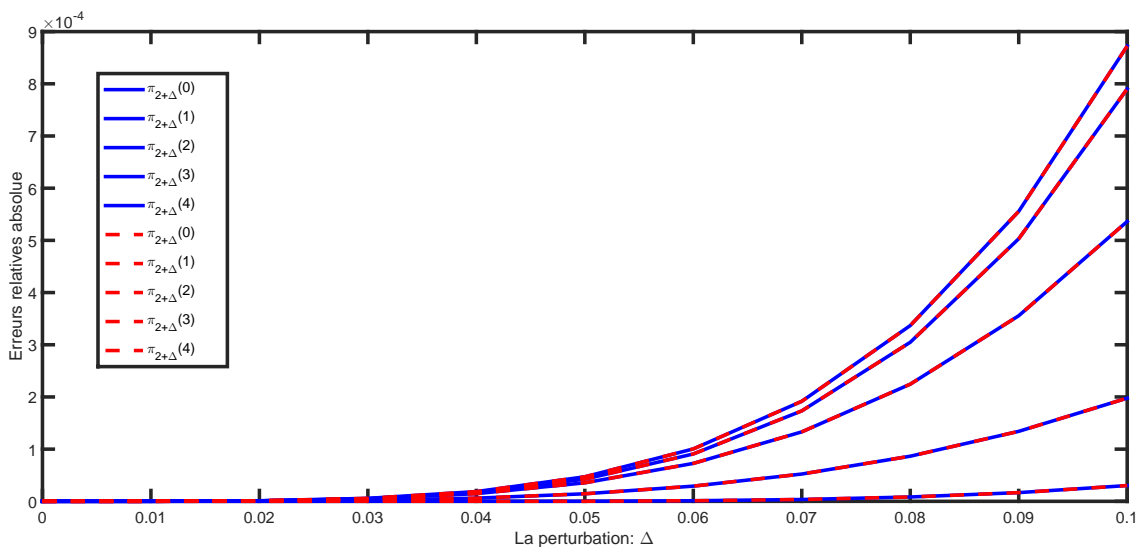


FIGURE 3.1 – Comparaison des erreurs relatives absolues entre le système d'attente M/D/1 avec rappels et orbite finie avec M/D/1/5 classique.

Δ	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
0	$7.8 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$2.05 \cdot 10^{-7}$	$8.4 \cdot 10^{-8}$
0.01	$7.9 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$9.1 \cdot 10^{-8}$
0.02	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$
0.03	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$
0.04	$8.1 \cdot 10^{-7}$	$8.1 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
0.05	$8.1 \cdot 10^{-7}$	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
0.06	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$4.8 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
0.07	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$
0.08	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$
0.09	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$
0.1	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$

TABLE 3.1 – Différence entre les distributions stationnaires des systèmes d’attente M/D/1 avec rappels et orbite finie et M/D/1/5 classique.

Comme on peut le voir sur la figure 3.1, les deux courbes (Bleue pour le modèle avec rappels et rouge pour le modèle classique) des erreurs relatives absolues se confondent et démontrent que les deux systèmes sont équivalents pour une valeur assez grande du taux de rappels. Le tableau 3.1 représente la différence entre les distributions stationnaires perturbées des deux systèmes.

L’erreur entre les deux distributions stationnaires et leur perturbation prouvent que lorsque le taux de rappel tend vers l’infini, le modèle M/D/1 avec rappels et orbite finie tend vers le modèle M/D/1/N classique dont l’étude se trouve dans [29]. Ces résultats démontrent que l’approximation est validée sur ce modèle.

Résultats

Les calculs ont été réalisés sur un système avec orbite d'une capacité $N = 5$. Le paramètre de perturbation varie entre $0 \leq \Delta \leq 0.1$ avec un pas de 0.01. On obtient les distributions stationnaires perturbées qui sont présentées dans les tableaux (3.2, 3.3, 3.4 et 3.5). Quant à θ , il a été fixé à 2.

Les résultats de l'analyse de la perturbation du taux de rappels avec une approximation en séries de Taylor d'ordre 3 sont illustrés dans les figures 3.2 3.3 3.4 3.5 et tableaux (3.2, 3.3, 3.4 et 3.5).

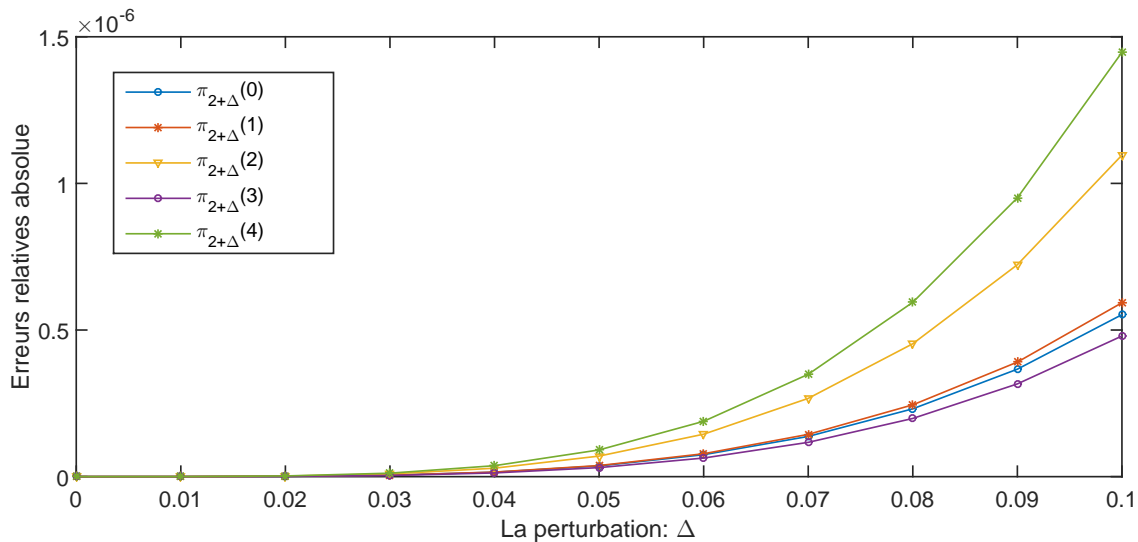


FIGURE 3.2 – Erreurs relatives absolues dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/D/1 avec rappels et orbite finie.

La figure 3.2, montre les résultats numériques obtenus pour la file d'attente $M/D/1$ avec rappels et orbite finie, avec les paramètres suivants : un temps de service $T_s = 0.5$, un taux d'arrivée $\lambda = 1.7$, alors que la figure 3.3 présente les valeurs de l'erreur relative absolue pour : $\lambda = 1.7$, $\mu = 2$.

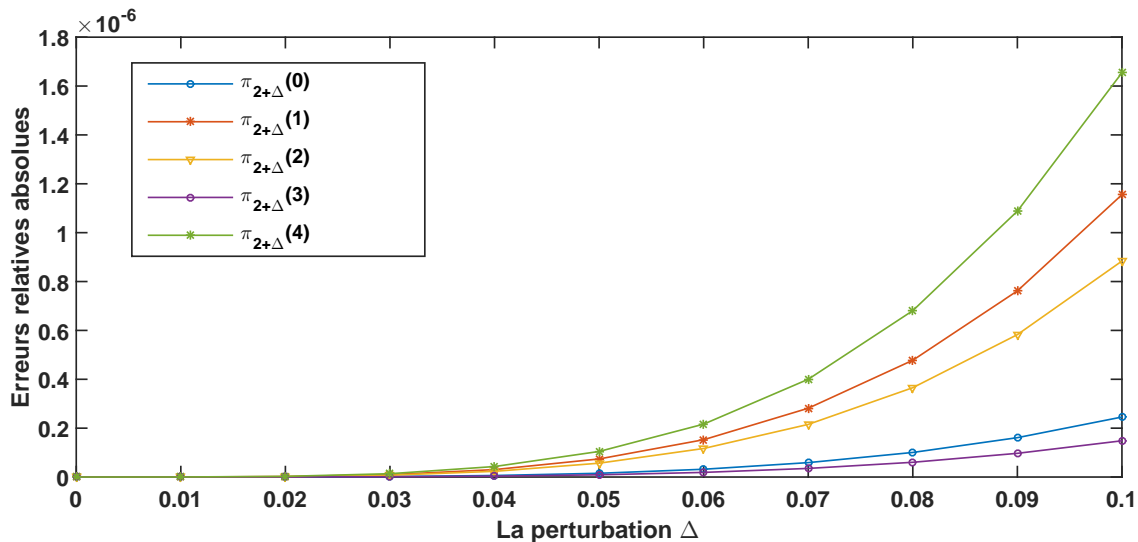


FIGURE 3.3 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/M/1.

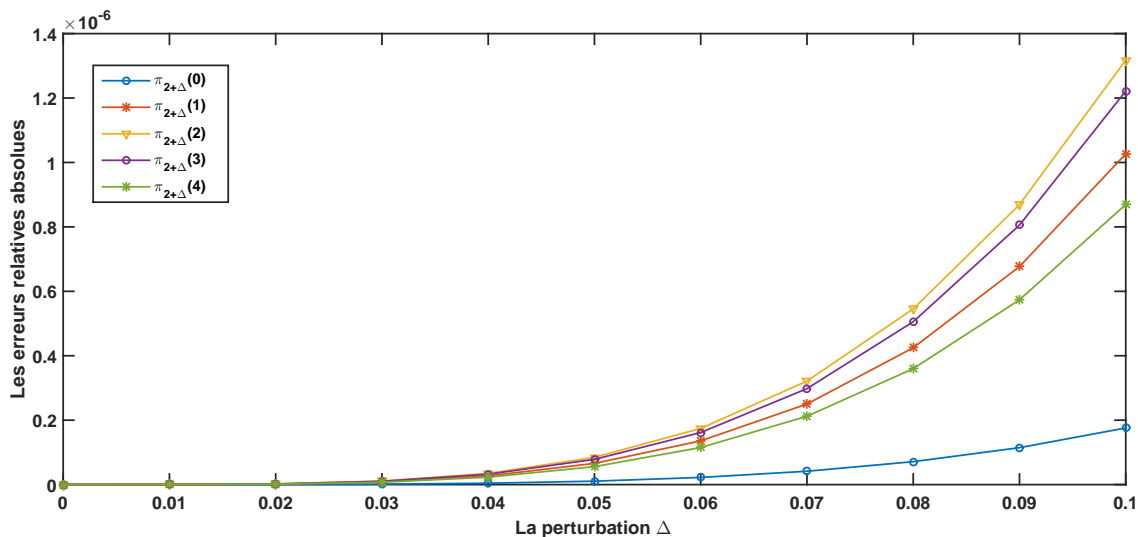


FIGURE 3.4 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de M/E₂/1.

On utilise la figure 3.4, pour illustrer les erreurs relatives absolues associées au calcul des distributions stationnaires du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec rappels et orbite finie, avec $\lambda = 0.9$, $\mu = 2$ et $k = 2$. Enfin, dans la figure 3.5 nous présentons les résultats obtenus par l'erreur relative absolue pour le modèle $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie, avec $\lambda = 0.7$, $\mu_1 = 0.8$, $\mu_2 = 0.9$ et $p = 0.4$.

Les tableaux(3.2, 3.3, 3.4 et 3.5) présentent les distributions stationnaires perturbées pour les quatre exemples respectivement avec les même paramètres utilisés pour l'obtention des figures précédentes.

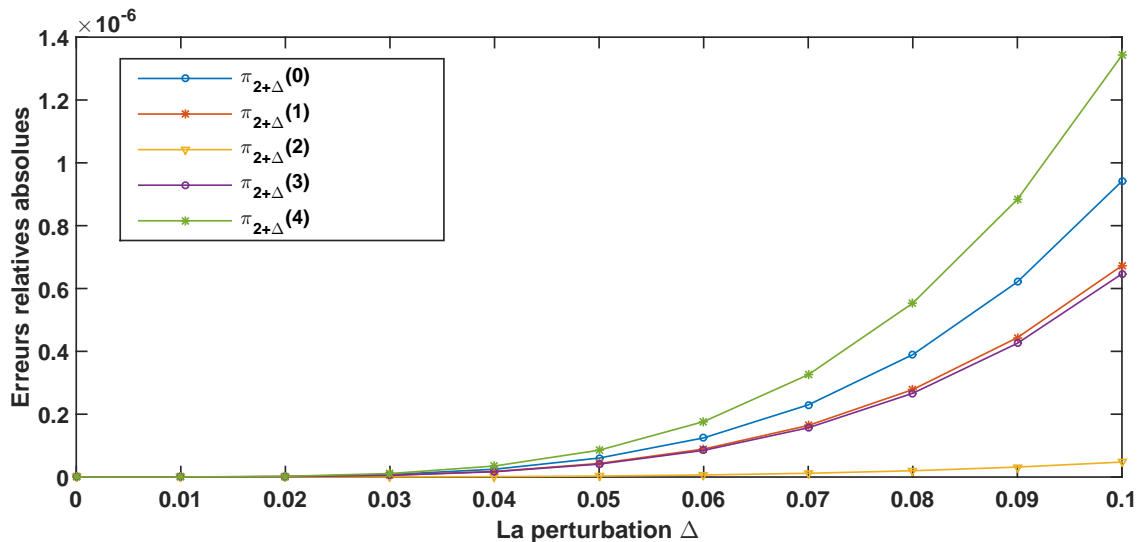


FIGURE 3.5 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{2+\Delta}$ pour le cas de $M/H_2/1$.

Δ	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
0	0.0579976	0.143738	0.220754	0.274395	0.303115
0.01	0.0583034	0.144166	0.220959	0.274167	0.302405
0.02	0.0586082	0.144591	0.221161	0.273939	0.301701
0.03	0.0589120	0.145013	0.221361	0.273712	0.301001
0.04	0.0592147	0.145433	0.221559	0.273486	0.300308
0.05	0.0595165	0.145850	0.221754	0.273260	0.299620
0.06	0.0598172	0.146264	0.221947	0.273034	0.298937
0.07	0.0601169	0.146676	0.222138	0.272810	0.298260
0.08	0.0604157	0.147085	0.222327	0.272585	0.297587
0.09	0.0607134	0.147492	0.222513	0.272362	0.296920
0.1	0.0610101	0.147896	0.222697	0.272139	0.296258

TABLE 3.2 – Distributions stationnaires perturbées du nombre de clients dans le modèle d’attente $M/D/1$ avec rappels et orbite finie.

Le comportement de la probabilité de blocage en fonction de la perturbation Δ est illustré Dans les figures 3.6 et 3.7. D’après l’illustration graphique donnée, les performances L (Nombre moyen de clients) et P_b (Probabilité de blocage) restent stables par rapport aux petites perturbations.

Δ	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
0	0.114992	0.180826	0.219025	0.238920	0.246237
0.01	0.115432	0.181102	0.219035	0.238668	0.245763
0.02	0.115870	0.181376	0.219043	0.238418	0.245293
0.03	0.116305	0.181648	0.219051	0.238169	0.244827
0.04	0.116738	0.181917	0.219058	0.237922	0.244365
0.05	0.117169	0.182183	0.219064	0.237676	0.243908
0.06	0.117597	0.182447	0.219070	0.237432	0.243454
0.07	0.118024	0.182709	0.219074	0.237189	0.243004
0.08	0.118448	0.182968	0.219078	0.236948	0.242558
0.09	0.118870	0.183225	0.219081	0.236708	0.242116
0.1	0.119290	0.183479	0.219083	0.236470	0.241678

TABLE 3.3 – Distributions stationnaires perturbé du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec rappels et orbite finie.

Δ	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
0	0.0556625	0.0889835	0.106370	0.114142	0.116035
0.01	0.0558959	0.0892186	0.106532	0.114219	0.116034
0.02	0.0561280	0.0894520	0.106693	0.114294	0.116033
0.03	0.0563590	0.0896837	0.106852	0.114369	0.116032
0.04	0.0565887	0.0899136	0.107010	0.114443	0.116030
0.05	0.0568172	0.0901419	0.107166	0.114516	0.116028
0.06	0.0570445	0.0903685	0.107320	0.114587	0.116025
0.07	0.0572706	0.0905935	0.107474	0.114658	0.116022
0.08	0.0574956	0.0908168	0.107626	0.114728	0.116019
0.09	0.0577193	0.0910385	0.107776	0.114797	0.116015
0.01	0.0579419	0.0912586	0.107925	0.114866	0.116011

TABLE 3.4 – Distributions stationnaires perturbé du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec rappels et orbite finie.

Nous vérifions l'influence des différents paramètres sur certaines performances du système pour les quatre exemples. Nous présentons tout d'abord le comportement de la probabilité de blocage par rapport à la variation de la capacité d'attente du système N et au paramètre de perturbation Δ .

Δ	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
0	0.201073	0.221348	0.212240	0.193493	0.171846
0.01	0.201419	0.221442	0.212173	0.193332	0.171634
0.02	0.201762	0.221535	0.212106	0.193172	0.171424
0.03	0.202102	0.221628	0.212040	0.193014	0.171217
0.04	0.202439	0.221718	0.211975	0.192857	0.171011
0.05	0.202774	0.221808	0.211909	0.192701	0.170807
0.06	0.203106	0.221897	0.211844	0.192547	0.170606
0.07	0.203436	0.221985	0.211780	0.192393	0.170406
0.08	0.203763	0.222072	0.211716	0.192242	0.170208
0.09	0.204088	0.222158	0.211652	0.192091	0.170012
0.1	0.204410	0.222243	0.211588	0.191942	0.169817

TABLE 3.5 – Distributions stationnaires perturbées du nombre de clients dans le modèle d’attente $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie.

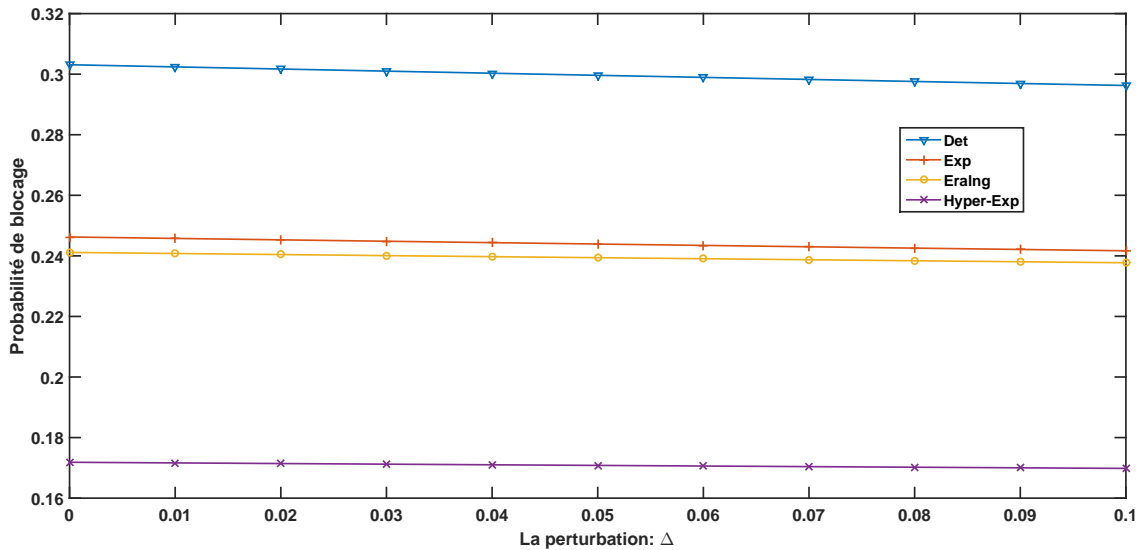


FIGURE 3.6 – Probabilité de blocage perturbé en fonction de Δ .

Les figures montrent que l’augmentation de la capacité d’attente du système N et le paramètre de perturbation engendre la diminution de la probabilité de blocage diminuée pour les quatre types de distributions de service utilisées.

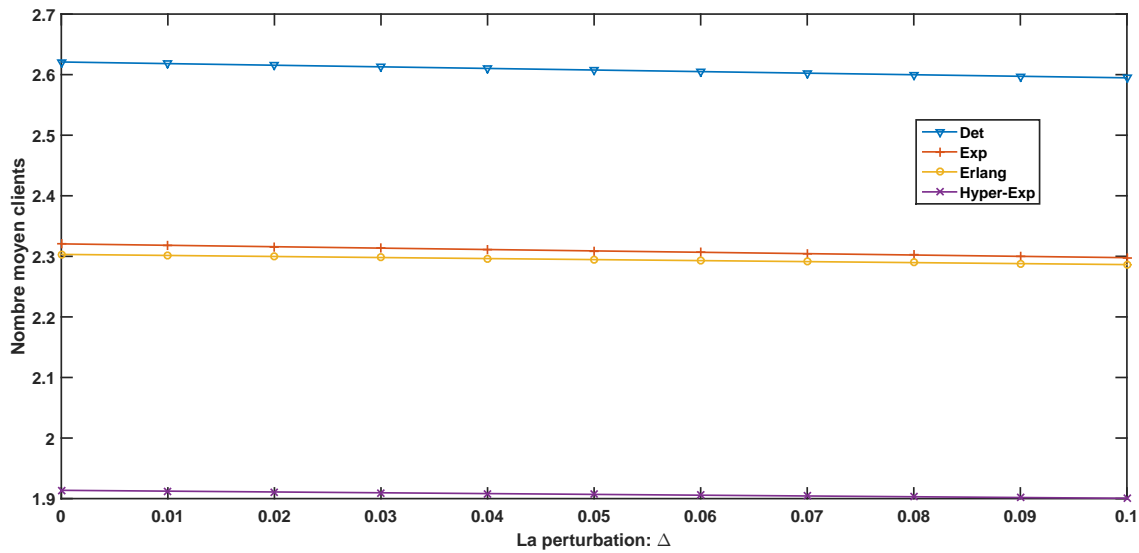


FIGURE 3.7 – Nombre moyen de clients perturbé en fonction de Δ .

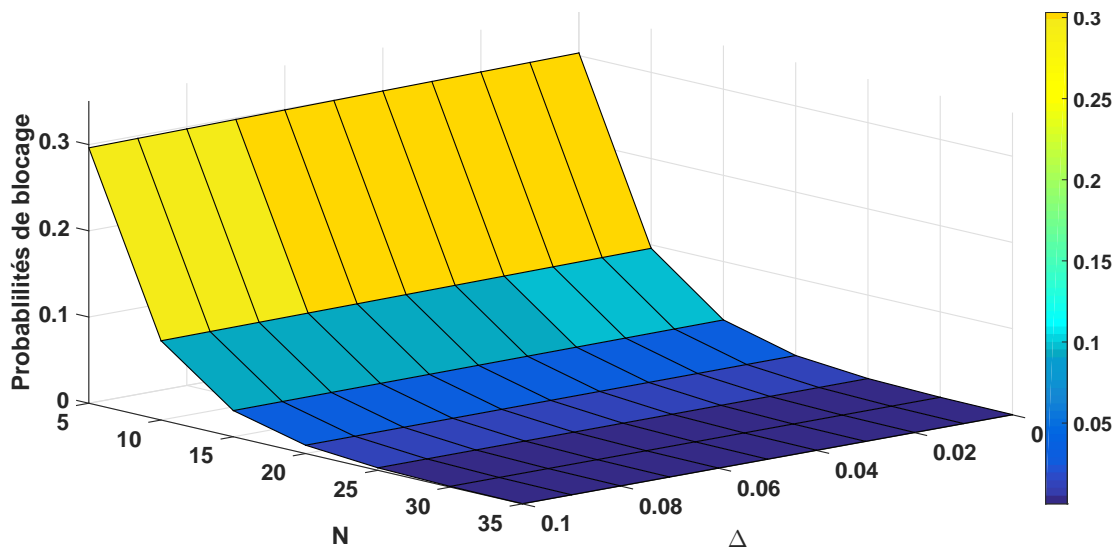


FIGURE 3.8 – Probabilité de blocage en fonction de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/D/1$ avec rappels et orbite finie.

De même façon nous illustrons le comportement du nombre moyen de clients dans la file en fonction de la variation de N et Δ . On remarque qu'à chaque fois que N et Δ augmentent, le nombre moyen de clients dans le système augmente aussi pour les quatre lois.

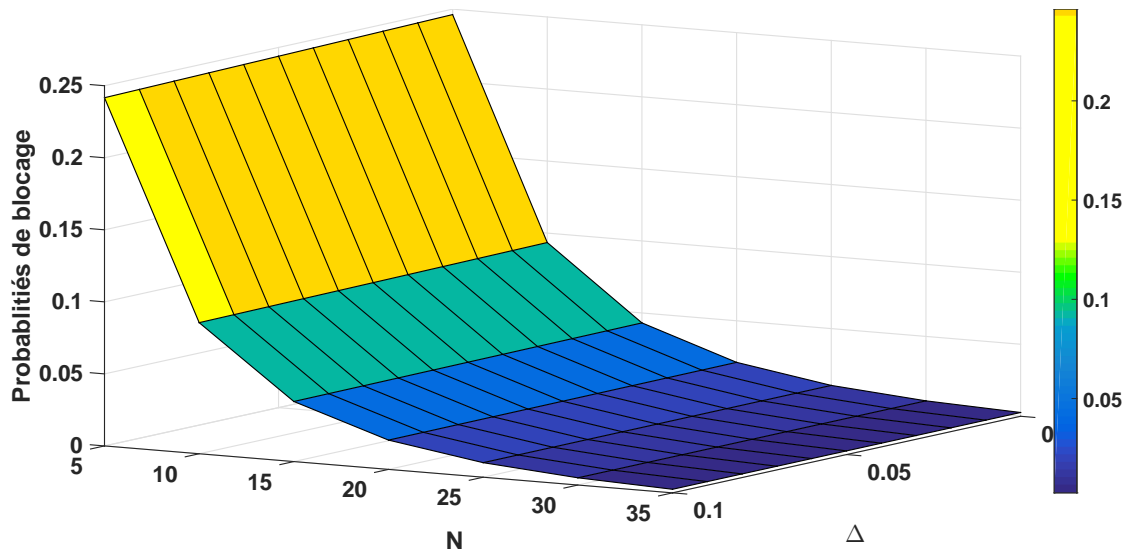


FIGURE 3.9 – Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/M/1$ avec rappels et orbite finie.

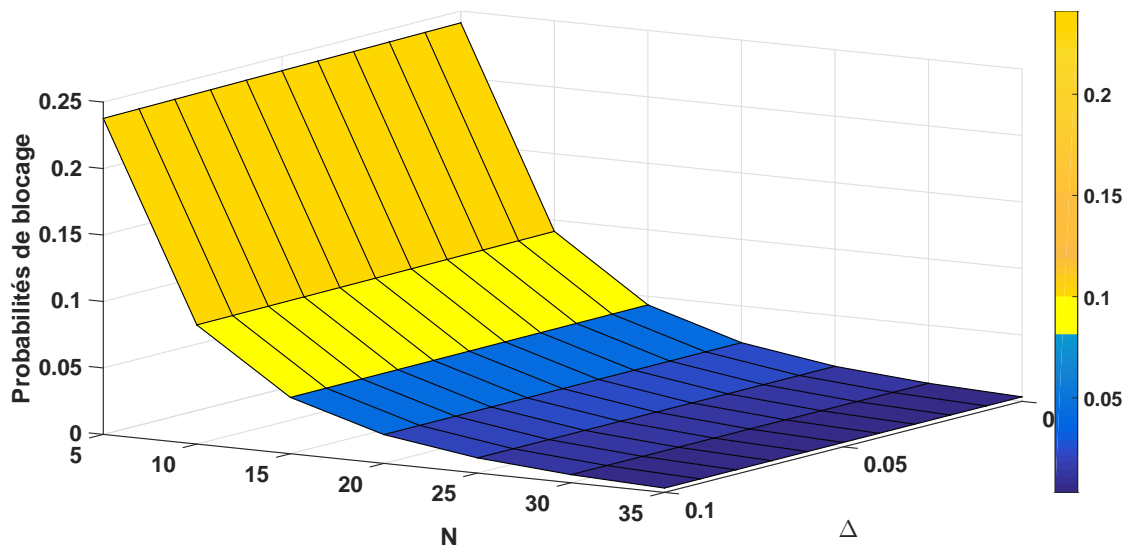


FIGURE 3.10 – Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/E_2/1$ avec rappels et orbite finie.

Dans la figure 3.16, nous présentons le comportement de la probabilité de blocage par rapport au changement de la capacité d'attente du système N pour le développement à l'ordre 3 au voisinage de θ . Pour cela, nous avons choisi les paramètres pris dans les tableaux précédents. Pour les résultats obtenus dans la figure 3.16, on peut voir que l'augmentation de la capacité d'attente du système engendre la diminution de la probabilité de blocage P_b , et ce pour les quatre types de distributions de service.

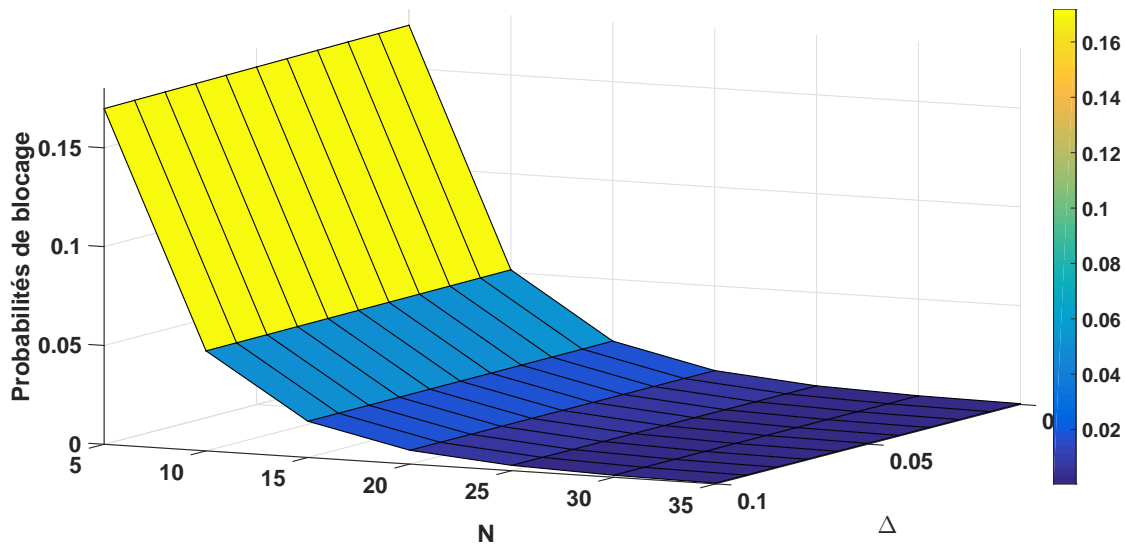


FIGURE 3.11 – Probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie.

Conclusion

À la lumière de ce chapitre, nous avons réalisé l'approximation du système d'attente $M/G/1$ avec rappels et orbite finie, en se basant sur l'approche du développement en séries de Taylor. Nous avons d'abord vérifié la validité de notre modèle en le comparant avec un modèle classique déjà étudié. Nous avons, entre autres, évalué les erreurs relatives liées à cette approximation avec des résultats discutés. Enfin, nous avons calculé les principales performances (comme fonctions du paramètre de rappels) liées à ce système et nous avons analysé leur sensibilité.

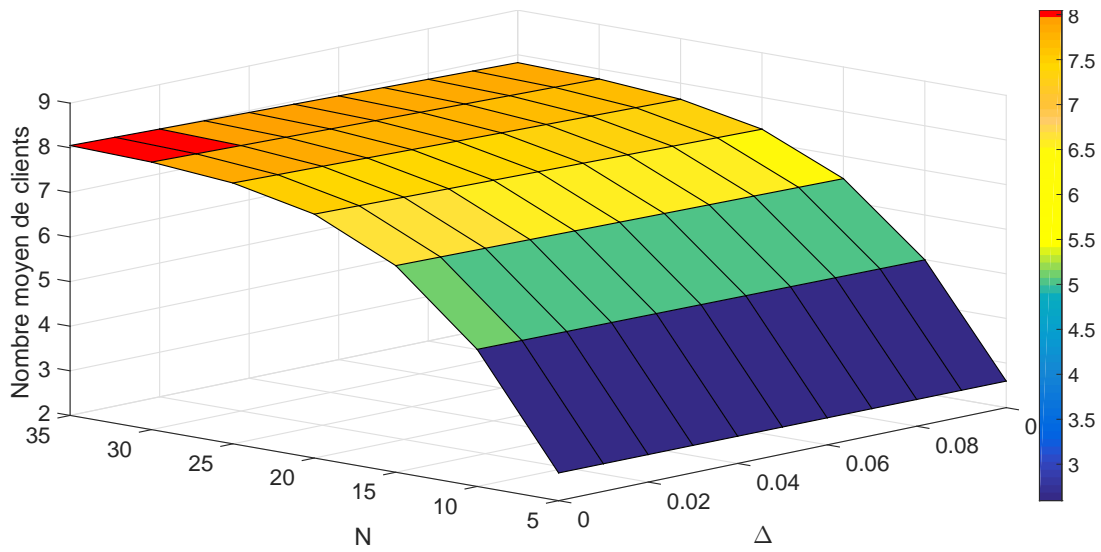


FIGURE 3.12 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/D/1$ avec rappels et orbite finie.

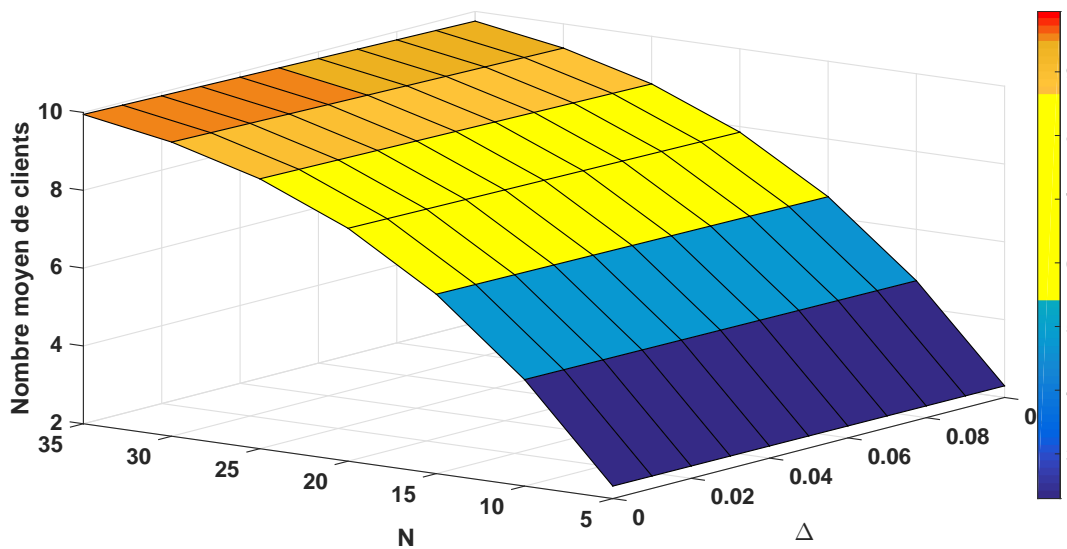


FIGURE 3.13 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/M/1$ avec rappels et orbite finie.

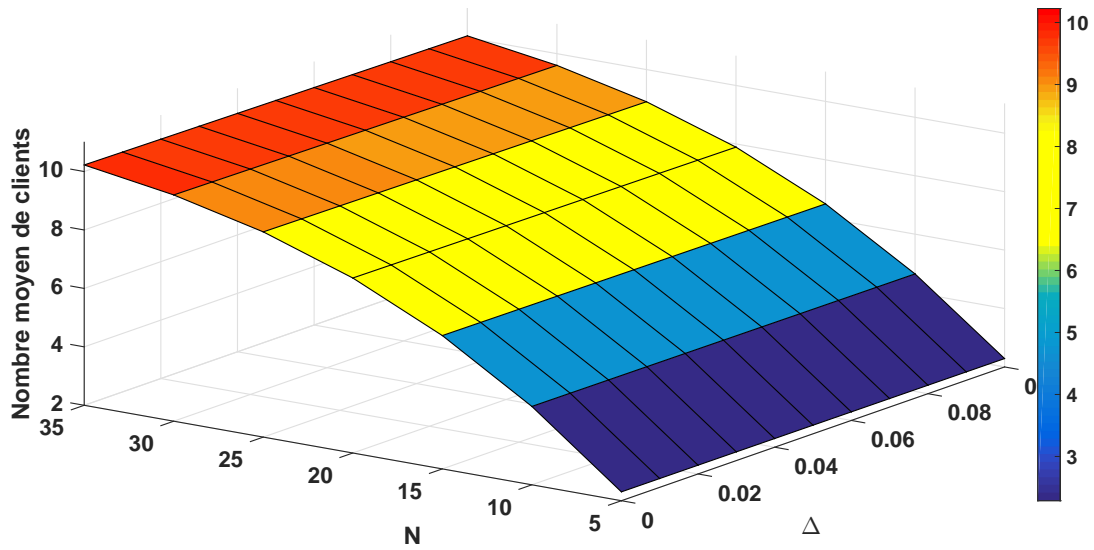


FIGURE 3.14 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/E_2/1$ avec rappels et orbite finie.

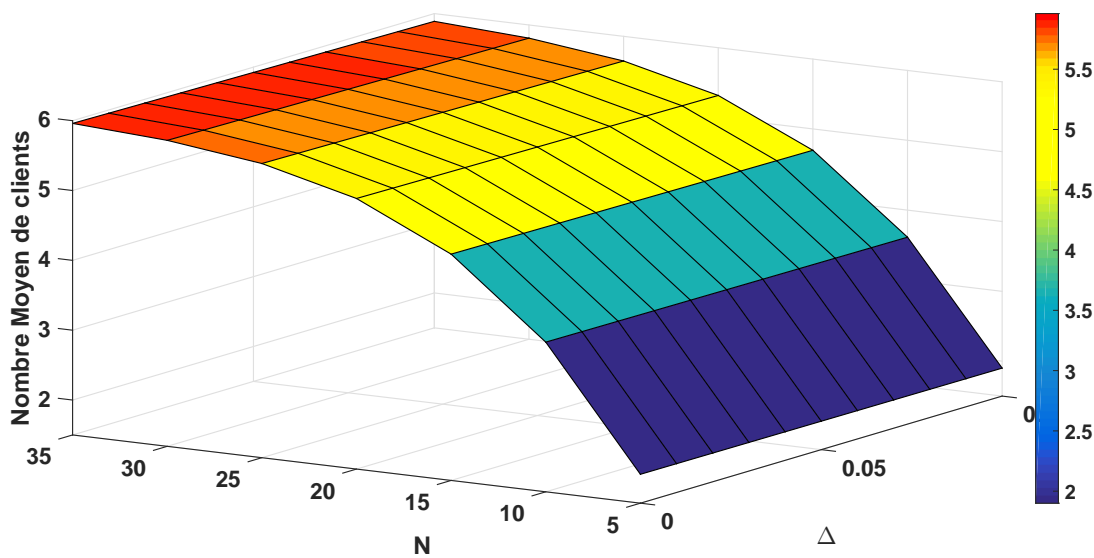


FIGURE 3.15 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la capacité de la file N et Δ dans le cas de $M/H_2/1$ avec rappels et orbite finie.

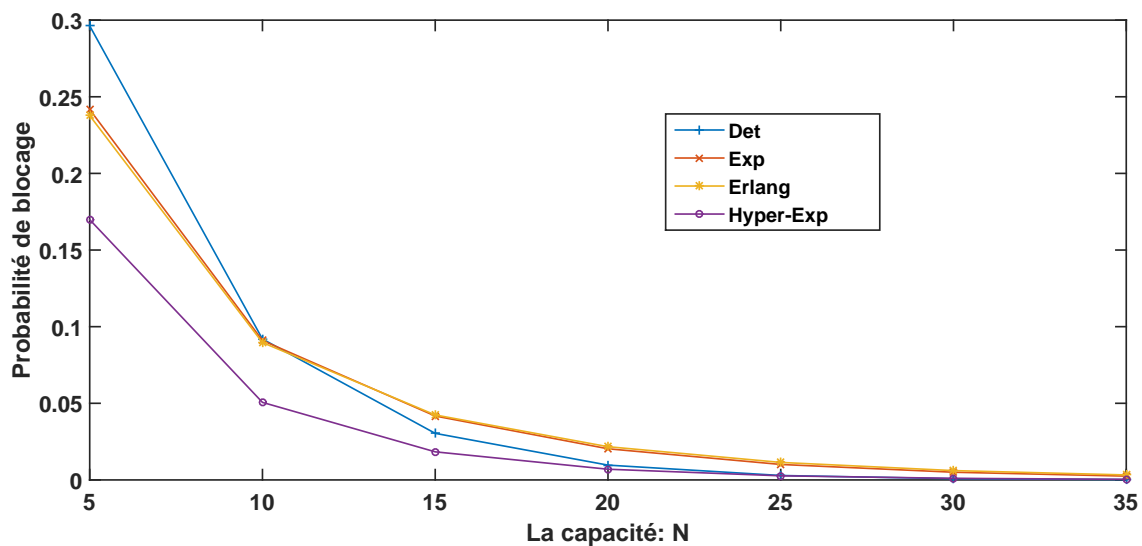


FIGURE 3.16 – Probabilités de blocage en fonction de la variation de la capacité de l'orbite N .

Conclusion générale

L'étude de nombreux systèmes réels passe par l'analyse de leurs performances et conduit à la formulation de modèles de files d'attente. La complexité de ces systèmes induit généralement des modèles très difficiles à traiter analytiquement avec des résultats difficilement exploitables en pratique. On a donc recours à des méthodes d'approximation dont les algorithmes sont en constante évolution vers des résultats exacts.

Les séries de Taylor dans les chaînes de Markov apparaissent comme une méthode d'approximation flexible et applicable à une large gamme de systèmes de files d'attente. De par leurs natures, elles sont devenues un outil de grande importance dans l'analyse des systèmes pouvant être modélisés par des chaînes de Markov. Cette approche permet de faire l'impasse sur des méthodes comme les transformées de Laplace ainsi que d'autres méthodes largement utilisées.

L'avantage certain de cette approche, est qu'elle permet d'évaluer les performances d'un système à l'aide d'une fonction polynômiale d'un certain paramètre d'intérêt. Ceci permet de faire une multitude de manipulations sur cette mesure comme l'analyse de sensibilité ou bien l'optimisation.

Ce travail est porté sur l'application de l'approche des séries de Taylor sur le système d'attente $M/G/1$ avec rappels exponentiels et orbite finie. Nous avons calculé les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire de ce dernier. Ces dérivées sont exprimées en fonction de la matrice fondamentale.

Dans ce mémoire, on a commencé par présenter les principaux résultats sur les chaînes de Markov et les files d'attente. Nous y avons présenté le système d'attente $M/G/1$ avec rappels exponentiels et orbite finie. Par la suite, nous, l'avons approximé certaines mesures de performance du modèle étudié, en utilisant les séries de Taylor d'ordre trois pour les chaînes de Markov, enfin nous avons analysé sa sensibilité et calculé certaines performances comme le nombre moyen de clients et la probabilité de blocage par rapport au changements sur le taux de rappels.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche entre autres, on peut citer :

1. Appliquer cette approche sur un modèles avec temps de rappels généraux.
2. Élargir l'applicabilité de la même approche à l'analyse des autres modèles de files d'attente avec rappels.
3. Généralisation des résultats obtenus dans ce mémoire au cas de la perturbation de plusieurs paramètres notamment sur le modèle avec rappels et priorités.

Bibliographie

- [1] A. Erlang, "Solution of some problems in theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges," *Elektroteknikeren* 13, pp. 5–13, 1917.
- [2] B. Baynat, *Théorie des Files d'Attente : des Chaînes de Markov aux Réseaux à Forme Produit*. Hermes Sciences Publications, Paris, 2000.
- [3] D. Kendall, "Stochastic processes occurring in theory of queues and their analysis by the method of imbedded markov chain," *Annals of Mathematical Statics* 24, pp. 338–554, 1953.
- [4] L. Kleinrock, *Queuing Systems Theory and Applications vol.1*. John Wiley and Sons, 1975.
- [5] L. Kleinrock, *Queuing Systems Theory and Applications vol.2*. John Wiley and Sons, 1976.
- [6] L. Kosten, "On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking," *De Ingenieur* 59, pp. 87–105, 1947.
- [7] R. Wilkinson, "Theories for toll traffic engineering in the usa," *Bell Systems Technical Journal* 35 (2), pp. 421–514, 1956.
- [8] W. Cohen, "Basics problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls," *Philips Telecommunication Review* 18, pp. 49–100, 1957.
- [9] V. Kapyrin, "A study of stationnary characteristics of a queuing system with recurring demand," *Cybernetics* 13, pp. 584–590, 1977.
- [10] J. Artalejo, "Accessible bibliography on retrial queues," *Mathematical and Computer Modelling* 30, pp. 1–6, 1999.
- [11] J. Artalejo, "A classified bibliography of research on retrial queues : progress in 1990-1999," *TOP* 7, pp. 187–211, 1999.
- [12] J. Artalejo and A. Gómez-Corral, *Retrial Queuing systems : a Computation Approach*. Springer Edition, Berlin, 2008.
- [13] Q. Choo and B. Conolly, "New results in the theory of repeated orders queuing systems," *Journal of Applied Probability* 16, pp. 335–356, 1979.
- [14] G. Falin, "A survey of retrial queues," *Queuing Systems* 7, pp. 127–167, 1990.
- [15] T. Yang and J. Templeton, "A survey on retrial queues," *Queuing Systems* 2, pp. 201–233, 1987.

- [16] T. Yang and H. Li, "On the steady-state queue size distribution of the discrete-time Geo/G/1 queue with repeated customers," *Queueing Systems* 21, pp. 199–215, 1995.
- [17] H. Tijms, *A First Course in Stochastic Models*. Wiley, Chichester, 2003.
- [18] S. Stepanov, *The Numerical Methods of Calculation for Systems with Repeated Calls*. Nauka, Moscow, 1983.
- [19] M. Kotzurek and D. Stoyan, "A quantitative continuity theorem for mean stationary waiting time in GI/G/1," *Mathematische Operationsforschung und Statistik* 7, pp. 595–599, 1976.
- [20] W. Whitt, "Quantitative continuity results for the GI/G/1 queue," Bell Laboratories report, 1981.
- [21] V. Zolotarev, "General problems of the stability of mathematical models," 41 st International Statistical Institute, New Delhi, 1977.
- [22] F. Fricker, C. Guillemin and P. Robert, "Perturbation analysis of an M/M/1 queue in a diffusion random environment," *Queueing Systems : Theory and Applications* 61, pp. 1–35, 2009.
- [23] E. Núñez Queija, R. Altman and K. Avrachenkov, "Analyzing M/M/1 queues with perturbations in the arrival process," *Advances in Applied Probability* 36, pp. 839–853, 2004.
- [24] M. Benaouicha and D. Aïssani, "Strong stability in a G/M/1 queueing system," *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 71, pp. 22–32, 2004.
- [25] K. Abbas and D. Aïssani, "Strong stability of the embedded markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers," *Applied Mathematical Modelling* 34, pp. 2806–2812, 2010.
- [26] S. Albin, "Analyzing M/M/1 queues with perturbations in the arrival process," *Journal of the Operational Research Society* 35, pp. 303–309, 1984.
- [27] J. Keleny and J. Snell, *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, New York, 1960.
- [28] B. Heidergott and A. Hordijk, "Taylor series expansions for stationary markov chains," *Advances in Applied Probability* 35, pp. 1046–1070, 2003.
- [29] K. Abbas, B. Heidergott, and D. Aïssani, "A functional approximation for the M/G/1/N queue," *Discrete Event Dynamic Systems*, pp. 93–104, 2013.
- [30] S. Ouazine and K. Abbas, "A functional approximation for retrial queues with two way communication," *Annals Of Operational Research*, 2016, (In press).
- [31] S. Ouazine and K. Abbas, "Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation," *Applied Mathematical Modelling Journal* 40, pp. 1137–1156, 2016.
- [32] V. Kulkarany and H. Liang, *Retrial Queues Revisited*, in *Frontier in Queuing*. CRC Press, Boca Raton FL, 1996.
- [33] G. Falin, "Single–line repeated orders queuing systems," *Optimization* 17, pp. 649–667, 1986.
- [34] G. Fayolle, "A single telephone exchange with delayed feedbacks," *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*, pp. 245–253, 1986. Elsevier Science, Amsterdam.

- [35] K. Farahmand, "Single line queue with repeated demands," *Queuing Systems* 7, pp. 223–228, 1990.
- [36] A. Gomez-Corral, "Stochastic analysis of single server retrial queue with the general retrial times," *Naval Research Logistics* 46, pp. 561–581, 1999.
- [37] B. Krishna Kumar and D. Arivudainambi, "An M/G/1 queue retrial queue with bernoulli schedules and general retrial times," *Computers and Mathematics with Applications* 43, pp. 15–30, 2002.
- [38] A. Rungg, *Processus stochastique*. Presses Poltechniques romandes, Lausanne, 1989.
- [39] A. Lee, *Applied Queuing Theory*. MacMillan, New York, 1960.
- [40] A. Aïssani, "A survey on retrial queuing models," *Actes des Journées Statistiques Appliquées*, U.S.T.H.B, pp. 1–11, 1994.
- [41] G. Falin and J. Templeton, *Single-Line Repeated Orders Queuing Systems*. Chapman and Hall, London, 1997.
- [42] J. Amador and J. Artalejo, "The M/G/1 retrial queue : New descriptors of the customer's behavior," *Journal of Computational and Applied Mathematics* 223, pp. 15–26, 2009.
- [43] B. Taylor, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. London, 1715.
- [44] A. Dufetel, *Analyse*. Vuibert, 2011.
- [45] D. Heyman and C. Harris, "Numerical solution of linear equations arising in markov chain models," *ORSA Journal on Computing* 1, pp. 52–60, 1989.
- [46] J. Barlow, "Stable computation with the fundamental matrix of a markov chain," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 22, pp. 230–241, 2000.
- [47] W. Grassmann, M. Taksar, and D. Heyman, "Regenerative analysis and steady state distributions," *Operational Research* 33, pp. 1107–1116, 1985.

Résumé

Dans ce mémoire, nous appliquons une nouvelle approche basée sur les développement en séries de Taylor des chaînes de Markov, pour l'analyse d'un système d'attente M/G/1/N avec rappels. Nous avons pour cela, utilisé les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire, associée aux chaînes de Markov ergodiques à temps discret et à espace d'états fini en fonction de sa matrice fondamentale. Spécifiquement, nous nous sommes intéressés à l'application de cette nouvelle approche sous des contextes différents, analyse de sensibilité et approximation fonctionnelle. Plusieurs résultats numériques ont été présentés.

Mots-clés : Systèmes de file d'attente ; Chaînes de Markov ; Systèmes d'attente avec rappels ; Matrice fondamentale ; Développement en séries de Taylor ; Mesures de performances.