

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A. Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

en

Recherche Opérationnelle

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

*La théorie des jeux en files d'attente
Markoviennes*

présenté par :

Ziani Sofiane & Madi Lamine

devant le jury composé de :

Présidente	M ^{me} K. Adel	M. A. A	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteurs	M ^{me} F. Aoudia	M. C. B	U. A/Mira Béjaïa.
	M ^r M.S. Radjef	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineur	M ^r F. Arezki	M. A. A	U. A/Mira Béjaïa.
Examinatrice	M ^{elle} K. Bouchebah	M. A. B	U. A/Mira Béjaïa.

Béjaïa, juin 2012.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement *M^{me}* F.AOUDIA et *M^r* M.S.RADJEF qui nous ont permis de bénéficier de leur encadrement. Les conseils qu'ils nous ont prodigué, la patience, la confiance qu'ils nous ont témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.

Nous tenons également à remercier *M^{me}* K. ADEL d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Nous remercions également *M^{elle}* K.Bouchebah et *M^r* F.AREZKI d'avoir accepté de faire part du jury et consacré leurs temps à la lecture et à la correction de ce Projet.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.



Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents que j'aime beaucoup pour leur précieux soutien.

À mes frères : Habib et Nassim.

À mes sœurs : Karima et Aya.

À mes oncles et Tantes.

À mes très chers grands parents

À tout les membres de la famille Madi et Krim.

À tout mes amis et camarades surtout Farouk.

À toute la promotion R.O 2012.

Et à mon binôme : Sofiane.

Lamine

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parent qui m'ont soutenus tout au long de mon cursus universitaire.

À mes frères : Nabil et Abdenour.

À mes sœurs : Fahima et karima.

À tout les membres de la famille Ziani et Benabdeslam.

À tout mes amis.

À toute la promotion R.O 2012.

Et à mon binôme : Lamnie.

Sofiane

Table des matières

Table des Matières	i
Table des Figures	vi
Tableau des notations	ix
Introduction	1
1 Notions élémentaires de la théorie des jeux	4
1.1 Définition d'un jeu	5
1.1.1 Joueurs	5
1.1.2 La rationalité des joueurs	5
1.1.3 Les stratégies	5
1.1.4 Fonction d'utilité (fonction gain)	6
1.2 Représentation des jeux	6
1.2.1 Jeux sous forme stratégique	6
1.2.2 Jeux sous forme extensive	6
1.3 Classification des jeux	7
1.3.1 Selon l'ordre	7
1.3.2 Selon les relations entre les joueurs	7
1.3.3 Selon les gains des joueurs	8
1.3.4 Selon l'information	8
1.4 Jeux finis et jeux infinis	9
1.5 Les jeux symétriques	9
1.6 Concepts de solution	9
1.6.1 Équilibres de Nash	9
1.6.2 Équilibre de Pareto	10
1.7 Dominance	10

1.7.1	Stratégie strictement dominée	10
1.7.2	Stratégie faiblement dominée	10
1.7.3	Équilibre en stratégies dominantes	10
1.8	Jeux à deux joueurs	11
1.8.1	Jeu matriciel	11
1.8.2	Jeux bi-matriciels	11
2	Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes	13
2.1	Processus stochastiques	13
2.1.1	Processus de Comptage	13
2.1.2	Processus de Poisson	14
2.1.3	Loi d'un Processus de Poisson	14
2.1.4	Loi exponentielle	15
2.1.5	Processus de Poisson et loi exponentielle	15
2.2	Chaîne de Markov à temps discret	15
2.3	Chaînes de Markov à temps continu	16
2.4	Processus de naissance et de mort	16
2.5	Les files d'attente	17
2.5.1	Processus d'arrivée	17
2.5.2	Temps de service	18
2.5.3	Structure et discipline de la file	18
2.5.4	Notation de Kandall	19
2.6	Files d'attente Markoviennes	20
2.7	Analyse mathématique	20
2.8	Caractéristiques d'un système de files d'attente	20
2.8.1	Formules de Little	21
2.9	Description du modèle M/M/1	21
2.9.1	Caractéristiques de la file M/M/1	21
3	Théorie des jeux dans les files d'attente Markoviennes	24
3.1	Introduction	24
3.2	Étude d'une File d'attente M/M/1 simple et observable	25
3.2.1	Description du modèle	25
3.2.2	Le jeux associé	25
3.3	File d'attente M/M/1 simple et non-observable	25
3.4	File d'attente M/M/1 avec possibilité d'inspection	26
3.4.1	Le modèle	26

3.5	File d'attente $M/M/1$ avec panne du serveur	27
3.5.1	Description du modèle	27
3.5.2	Modélisation sous forme d'un jeu :	27
3.5.3	Règles du jeu	28
3.6	File d'attente $M/M/1$ avec vacances	29
3.6.1	Le modèle	29
3.6.2	Le jeu associé	29
3.7	File d'attente $M/M/1$ avec contrôle du service	30
3.7.1	Le modèle	30
3.7.2	Le jeu associé	31
3.8	File d'attente $M/M/1$ partitionnée	31
3.8.1	Le Modèle	31
3.9	Etude d'une file d'attente $M/M/1$ avec temps d'installation	32
3.9.1	Description du modèle	32
3.9.2	Règles et jeux associés	33
3.9.3	L'équilibre dans le Cas complètement observable	34
3.9.4	L'équilibre dans le cas presque observable	35
3.9.5	Équilibre en stratégie mixte pour les cas non-observable	37
3.9.6	Cas presque non-observable	37
3.9.7	Cas complètement non-observable	39
3.10	Concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne	40
3.10.1	Le Modèle mathématique	40
3.10.2	Modélisation sous forme d'un jeu	40
3.11	Concurrence entre s serveurs dans une file d'attente Markovienne	41
3.11.1	Modélisation sous forme d'un jeu	41
3.12	Conclusion	42
4	Analyse de la décision des clients dans les files d'attente avec arrivées par groupes de taille fixe et effets de l'information	43
4.1	Cas du modèle $M^2/M/1$	44
4.2	Cas observable	45
4.2.1	Caractéristiques du système	45
4.2.2	Modélisation sous forme d'un jeu	47
4.2.3	Résolution du jeu	49
4.3	Cas non-observable	51
4.3.1	Caractéristiques du système	51
4.3.2	La fonction génératrice de la distribution stationnaire	52

4.3.3	Le nombre moyen de clients dans le système	54
4.3.4	Le temps moyen de séjour \bar{T}_s	55
4.3.5	Résolution du jeu	55
4.4	Généralisation : Cas du modèle $M^k/M/1$	56
4.4.1	Cas observable	57
4.4.2	Cas non-observable	60
4.4.3	Le jeu associé	62
4.5	Effets de l'information : Application numérique	65
4.6	Conclusion	70
	Conclusion	72
	Bibliographie	72

Table des figures

1.1	Exemple d'un jeu sous forme extensive	7
2.1	Graphe du processus de naissance et de mort	17
2.2	file d'attente	18
2.3	Graphe de transition de la file $M/M/1$	22
3.1	La file d'attente $M/M/1$ avec temps d'installation	33
3.2	La file d'attente $M/M/1$ observable avec temps d'installation et structure récompense-coût	34
3.3	La file d'attente $M/M/1$ presque observable avec temps d'installation et avec récompense-coût	37
4.1	Graphe de transition de la file $M^2/M/1$	45
4.2	La forme extensive du jeu associé au système $M^2/M/1$ observable	49
4.3	La file d'attente $M^2/M/1$ observable et avec récompense-coût	50
4.4	La file d'attente $M^2/M/1$ non observable et avec récompense-coût	52
4.5	Interface du programme de la file $M^k/M/1$ observable	66
4.6	Interface du programme de la file $M^k/M/1$ non observable	66
4.7	Variation du rapport r en fonction du taux d'arrivée λ	67
4.8	Variation du rapport r en fonction de la récompense R avec saturation du système	68
4.9	Variation du rapport r en fonction de la récompense R sans saturation du système	69
4.10	Variation du rapport r en fonction du coût d'attente C avec temps de simulation petit	69

Tableau des notations

Paramètres	Signification
I	L'ensemble des joueurs
S_i	L'ensembles des stratégies du joueurs i
U_i	La fonction d'utilité du joueur i
λ	Le taux d'arrivée au système
$N(t)$	Le nombre de clients dans le système à l'instant t
P_n	La probabilité que le nombre de clients dans le système soit égal à n
$\frac{1}{\lambda}$	Le temps moyen entre deux arrivées
λ_e	Le taux d'entrée
μ	Le taux de service
$\frac{1}{\mu}$	La durée moyenne de service
μ_h	Le taux de service est élevé
μ_l	Le taux de service est faible
ρ	Le coefficient d'utilisation du système
s	Le nombre de serveur
M	Loi exponentielle
G	Loi général
D	Loi constante
E_k	Loi d'Erlang
H_k	Loi hyperexponentielles
\bar{N}	Le nombre moyen de clients dans le système
\bar{N}_q	Le nombre moyen de clients dans la file d'attente
\bar{T}_s	Le temps moyen de séjour d'un client dans le système
\bar{T}_q	le temps moyen d'attente dans la file.
R	Récompense
C	Coût d'attente par unité de temps
n_e	Seuil d'entrée au système

θ	Coût fixe d'entrée à la file
C_I	Le coût d'inspection de la file
P_I	La probabilité d'inspecter la file
P_B	La probabilité de quitter sans inspecter la file
P_J	La probabilité de rejoindre la file sans l'inspecter
ξ	Le taux de panne
$1/\eta$	La durée moyenne de réparation
$I(t)$	L'état du serveur
α_i	La part du marché de chaque serveurs
NCS	Le nombre de clients entrés au système
NCT	Le nombre total de client

Introduction

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909-1920, avec les travaux de A.K.Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. La théorie mathématique s'est ensuite fructueusement développée, notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek[29]...etc, et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques.

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, l'étude mathématique de ces phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients", se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société, les exemples ne manquent pas :

- attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration),
- réseaux téléphoniques,
- circulation de pièces dans un atelier,
- programmes dans un système informatique,...etc

Le modèle mathématique de base des files d'attente est le suivant : des clients arrivent suivant un certain processus. Quand un client arrive, si un guichet est libre, il se présente à celui-ci pour être servi, sinon il se met en attente et sera servi lorsqu'un guichet sera libre et que les clients arrivés avant lui auront été servis (à moins qu'un système de priorités plus complexe ne soit mis en place). Les temps de service suivent une certaine loi de probabilité.

Pendant ces dernières décennies, il y'a une tendance à étudier les systèmes de files d'attente d'un point de vue économique. Plus précisément, une certaine structure récompense-coût est imposée sur les systèmes d'attente, qui reflète le désir du service par les clients et leurs mécontentements d'attente.

Les clients sont autorisés à prendre des décisions concernant leurs actions dans le système. Par exemple, ils peuvent décider s'il y'a lieu de rejoindre ou bien de quitter, dans l'objectif de maximiser leurs profits. En tenant compte du fait que les autres clients ont le même objectif, la décision prise par un client influe sur la décision des clients potentiels. Cette situation peut être considérée comme un jeu entre les clients.

La question que les clients se posent dans une file d'attente avec une structure récompense-coût est quand est ce qu'ils doivent rejoindre le système ou bien quitter. Il existe généralement deux scénarios, selon que :

- les clients prennent leurs décisions en observant la taille du système, on parle alors du cas observable.
- les clients prennent leurs décisions d'entrer ou non au système sans observer la file d'attente, on parle alors du cas non observable.

L'étude des files d'attente sous l'angle de la théorie des jeux a été initiée par P.Naor[28] qui a étudié une file d'attente $M/M/1$ avec une structure récompense-coût totalement observable. Son travail a été complété par Edelson et Hildebrand en 1975[14], qui considèrent la même file d'attente dans le cas non observable. Par la suite beaucoup de travaux ont vu le jour, en considérant d'autres modèles de files d'attente [6], [7], [13], [17], [18], [19], [36],...etc.

Lorsque la file d'attente est observable, les clients suivent la stratégie du seuil. En d'autres termes les clients décident de rejoindre la file d'attente si la taille du système est en dessous d'un certain nombre n_e et décident de la quitter sinon. Lorsque la file n'est pas observable, alors les clients décident de rejoindre la file avec une certaine probabilité p .

Dans ce travail on s'est proposé d'étendre l'étude aux modèles d'attentes avec arrivées par groupes de taille fixe. Dans un premier lieu, on a considéré le modèle $M^2/M/1$ en suivant la même méthodologie adoptée par les autres auteurs. Après avoir fait une analyse mathématique complète du modèle, qui consiste à déterminer le régime transitoire et le régime stationnaire afin de calculer ses performance à savoir le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour, on a réalisé une étude via la théorie des jeux en introduisant la structure récompense-coût pour les deux types d'information disposée au clients : cas observable et non observable.

En second lieu, on a généralisé l'étude sur le modèle $M^k/M/1$, $k \geq 2$, où une analyse mathématique du modèle a été faite, suivie d'une analyse via la théorie des jeux. Cette étude théorique a été complétée par une application numérique où on s'est intéressé à voir l'effet de l'information

disposée aux clients sur le système.

Ce manuscrit s'articule au tours de quatre chapitres, dont le premier et le deuxième sont consacrés à la présentation de certains éléments de la théorie des jeux et de la théorie des files d'attente qui nous seront utiles dans les chapitres qui suivent. Le troisième chapitre est consacré à la présentation d'une synthèse plus ou moins exhaustive sur les travaux réalisés sur l'application de la théorie des jeux en files d'attente Markoviennes. Le dernier chapitre où l'on trouve notre propre contribution est consacré à l'étude des modèles Markoviens avec arrivées par groupes décrit précédemment.

Notions élémentaires de la théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux est un champ des mathématiques qui a pour objet d'établir et d'étudier les principes et les règles mathématiques pouvant intervenir dans l'analyse des différents types de comportement et des issues possibles lors d'une interaction stratégique entre plusieurs preneurs de décisions (appelés agents en économie et joueurs en théorie des jeux).

En effet, dans la vie de tous les jours, des preneurs de décisions (hommes politiques, consommateurs, producteurs, comités d'entreprise, citoyens) ont à faire un choix parmi plusieurs actions possibles. Dans un grand nombre de problèmes décisionnels, au moins les deux premiers des aspects suivants sont présents :

- il y a au moins deux preneurs de décision,
- il y a une interaction entre les décisions dans le sens où l'issue finale pour un des preneurs de décision dépend non seulement de l'action qu'il a choisie, mais aussi des actions choisies par d'autres décideurs,
- il y a un ou plusieurs éléments d'incertitude.

Un des buts de la théorie des jeux est d'abord de créer des modèles mathématiques de base. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l'interaction, puis d'introduire des concepts de solution pour décrire les issues possibles d'un jeu, et enfin, d'appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux.

L'objectif de ce chapitre est de donner les éléments de base de la théorie des jeux, en commençant par définir les jeux et leurs caractéristiques, ainsi que leurs concepts de solutions.

1.1 Définition d'un jeu

Un 'jeu' est une situation où des joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance qui seront les règles du jeu. Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associée un gain (ou paiement), positif ou négatif, pour chacun des participants.

1.1.1 Joueurs

Un joueur peut être une personne, un groupe de personnes, une société, une région, un parti politique, un pays ou la Nature. Si dans un jeu, il y'a N joueurs ($N \geq 2$) qui participent au jeu, on notera par $I = \{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des joueurs.

1.1.2 La rationalité des joueurs

C'est la capacité de compréhension du jeu, de calcul et de raisonnement par induction à rebours et la connaissance commune du jeu. Chaque joueur comprend le jeu, il sait que les autres comprennent aussi le jeu et sait qu'ils savent qu'il comprend le jeu et sait qu'ils savent qu'il sait qu'ils comprennent aussi le jeu[30],...etc.

1.1.3 Les stratégies

Stratégies pures :

Une stratégie pure est la spécification d'une action pour un joueur à chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures de ce joueur et par $s_i \in S_i$ une stratégie pure, et $|S_i| = m_i$ le nombre de stratégie du joueur "i".

Stratégie mixte :

Considérons un jeu fini, c-à-d un jeu où les ensembles de stratégies pures des joueurs $i \in I$ contiennent un nombre fini de stratégies $|S_i| = m_i < \infty$. Une stratégie mixte du joueur "i" est une distribution de probabilités α définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i. On notera par

$$\Delta_{m_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i}\} \quad (1.1)$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur $i \in I$, où α_j est la probabilité que le joueur "i" joue sa stratégie pure $s_j \in S_i$.

1.1.4 Fonction d'utilité (fonction gain)

C'est une fonction attribuée à chaque joueur, elle est utilisée pour définir les préférences des joueurs. La fonction d'utilité est plus élevée pour un choix de décision donné si le joueur préfère cette décision par rapport à une autre.

Pour tout $i \in I = \{1, \dots, N\}$, on associe une fonction U_i définie sur l'ensemble $S = \prod_{j=1}^N S_j$ des issues possibles du jeu :

$$\begin{aligned} U_i : S = \prod_{j=1}^N S_j &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \in S &\longrightarrow U_i(s) \end{aligned}$$

Où : $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ une issue du jeu.

1.2 Représentation des jeux

Les jeux peuvent être représentés sous deux formes[5].

1.2.1 Jeux sous forme stratégique

Un jeu sous forme normale (ou bien stratégique) s'écrit de la manière suivante :

$$\langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I} \rangle, \quad (1.2)$$

où :

$I = \{1, \dots, N\}$ représente l'ensemble des joueurs et S_i représente l'ensemble des stratégies du joueur i , $i \in I$.

Pour chaque joueur i , on définit une fonction d'utilité : $U_i : \prod_{j=1}^N S_j \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque ensemble de stratégies associe le gain du joueur i [22].

1.2.2 Jeux sous forme extensive

Un jeu sous forme extensive est défini par :

- Un ensemble $I = \{1, \dots, N\}$ de joueurs.
- Un arbre fini composé d'un ensemble de nœuds et d'un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup.
- Une fonction de nommage qui indique à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer.
- Une fonction de gains qui associe à chaque nœud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs.

-Une partition des nœuds en un ensemble d'information représentant les croyances des joueurs[22].

L'exemple de la figure 1.1 est un jeu sous forme extensive :

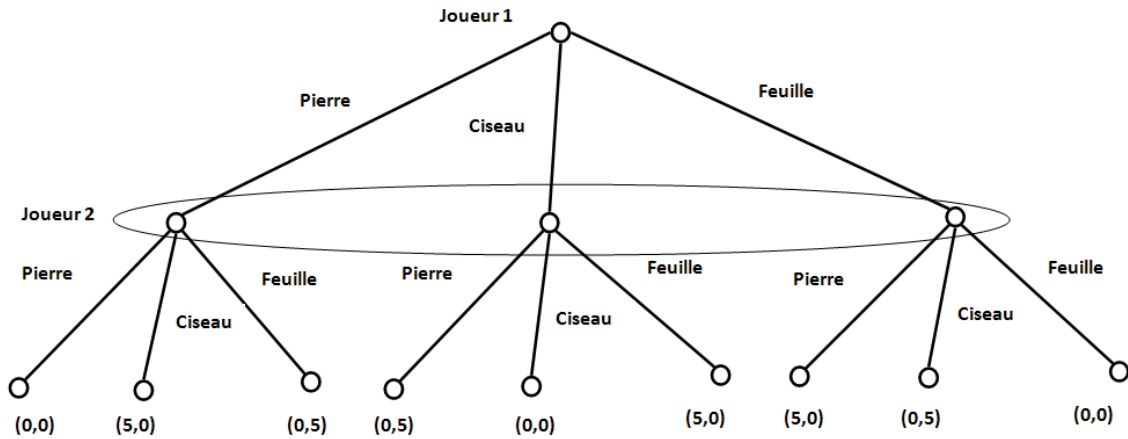


FIGURE 1.1 – Exemple d'un jeu sous forme extensive

1.3 Classification des jeux

Il existe plusieurs classifications possibles des jeux. Nous allons définir quelques catégories :

1.3.1 Selon l'ordre

Jeux statiques

Un jeu est dit statique lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions, et reçoivent ensuite leurs gains respectifs [5]. La représentation adéquate est la forme normale.

Jeux séquentiels

Un jeu séquentiel est un jeu dont les joueurs interviennent les uns après les autres, la représentation la plus adéquate est la forme extensive [11].

1.3.2 Selon les relations entre les joueurs

Une caractéristique fondamentale des jeux est que le gain obtenu par un joueur dépend de ses choix, mais aussi des choix effectués par les autres joueurs.

Il convient alors de distinguer deux grandes familles de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs

Jeux coopératifs

Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement entre eux et passer des accords (par exemple sous forme d'un contrat). Ils forment alors une coalition et recherchent l'intérêt général suivi d'un partage des gains entre tous les joueurs[5].

Jeux non coopératifs

Dans ce type de jeux, chaque joueur essaye de maximiser sa fonction d'utilité en tenant compte de la stratégie des autres, il n'est donc pas possible de former des coalitions.

1.3.3 Selon les gains des joueurs

Les jeux non coopératifs se divisent en deux grandes familles : les jeux à somme nulle, et ceux à somme non nulle.

Jeux à somme nulle

Les jeux à somme nulle sont tous les jeux où la somme algébrique des gains des joueurs est nulle pour chaque issue du jeu, ce que gagne l'un est nécessairement perdu par un autre.

Jeux à somme non nulle

Un jeu est dit à somme non nulle, si au moins pour une situation du jeu la somme des gains des joueurs n'est pas nulle.

1.3.4 Selon l'information

Jeux à information parfaite

On dit qu'un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs.

Jeux à information imparfaite

On dit qu'un jeu est à information imparfaite lorsqu'un joueur atteint un point de décision où il ne connaît pas toutes les actions des autres joueurs qui l'ont précédés [30].

Jeux à information complète

Un jeu est dit à information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement la structure du jeu[27], c'est-à-dire : l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information de chaque joueur et l'histoire du jeu.

Jeux à information incomplète

Un jeu est dit à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

1.4 Jeux finis et jeux infinis

On dit qu'un jeu est fini si l'ensemble des stratégies de chaque joueur est fini, autrement dit :

$\forall i \in I$, l'ensemble S_i contient un nombre fini de stratégies.

Ainsi, un jeu est dit infini s'il existe un $i \in I$ tel que l'ensemble S_i est infini.

1.5 Les jeux symétriques

Un jeu est dit symétrique, si tous les joueurs possèdent les mêmes stratégies, et la même fonction d'utilité.

1.6 Concepts de solution

1.6.1 Équilibres de Nash

L'équilibre de Nash, introduit par John Nash en 1950, est un concept fondamental en théorie des jeux. Il décrit une issue du jeu dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie étant donnée la stratégie de chacun de ses rivaux.

Équilibre de Nash en stratégies pures

Une situation $s^* = \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*\} \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu (1.2) si :

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i, \forall i \in I \quad (1.3)$$

Où :

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$$

En d'autres termes, un équilibre de Nash est une issue du jeu dont aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement[5].

Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour le jeu (1.2) est un ensemble de stratégies mixtes α^* tel que :

$$U_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*), \forall \alpha_i \in \Delta_{m_i}, \forall i \in I \quad (1.4)$$

Où $\Delta_{m_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i}, \sum_{i=1}^{m_i} \alpha_i = 1\}$

Ainsi, il a été démontré que tout jeu fini sous forme stratégique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes[5].

1.6.2 Équilibre de Pareto

On dit que $\bar{s} \in S$ est un équilibre de pareto du jeu (1.2) si pour n'importe quelle situation $\tilde{s} \in S$, le système d'inégalités suivant est vérifié :

$$U_i(\bar{s}_i) \geq U_i(\tilde{s}_i), \text{ dont au moins une est stricte, } \forall i \in I[10].$$

1.7 Dominance

1.7.1 Stratégie strictement dominée

Une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur "i" est dite strictement dominée s'il existe une stratégie $s'_i \in S_i$ telle que :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, U_i(s_i, s_{-i}) < U_i(s'_i, s_{-i}) \quad (1.5)$$

On dira dans ce cas que s_i est strictement dominée par s'_i ou que s'_i domine strictement s_i .

1.7.2 Stratégie faiblement dominée

Une stratégie $s_i \in S_i$ du joueur "i" est dite faiblement dominée, si :

$\exists s'_i \in S_i$, telle que, $\forall s_{-i} \in S_{-i}, U_i(s_i, s_{-i}) \leq U_i(s'_i, s_{-i})$

1.7.3 Équilibre en stratégies dominantes

Une situation $s = (s_1, s_2, \dots, s_N) \in S$ est appelée équilibre en stratégies dominantes si $\forall i \in I$, chaque composante $s_i \in S_i$ est une stratégie dominante pour le joueur i [4], c-à-d :

$$\forall i \in I, \forall s'_i \in S_i, U_i(s_i, s_{-i}) > U_i(s'_i, s_{-i}) \quad (1.6)$$

1.8 Jeux à deux joueurs

L'un des premiers types à avoir fait l'objet d'études intensives en théorie des jeux est : les jeux à deux joueurs. Cela est dû au fait qu'on puisse ramener l'étude des jeux à N joueurs à celle d'un jeu à deux joueurs, en considérant l'interaction entre un joueur i et les $N - i$ restants. Dans ce qui suit, on présentera les principaux résultats concernant les jeux à deux joueurs, ces derniers comportent deux catégories : jeux finis à deux joueurs à somme nulle et à somme non-nulle.

1.8.1 Jeu matriciel

Un jeu matriciel est un jeu fini à deux joueurs à somme nulle. Il est dit matriciel parce qu'il peut être complètement identifié par la matrice des gains d'un des joueurs. Un jeu matriciel est représenté comme suit :

$$J = \langle S_1, S_2, A \rangle \quad (1.7)$$

Où :

$S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{m_1}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur (P_1).

$S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{m_2}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur (P_2).

$A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m_1}$; $j = \overline{1, m_2}$; a_{ij} est le gain du premier joueur quant il joue sa stratégie $x_i \in S_1$ et le joueur 2 joue sa stratégie $y_j \in S_2$.

Concept de solution

Dans les jeux à deux joueurs et à somme nulle, le concept d'équilibre de Nash correspond au point selle, donnée par la définition suivante :

Définition 1.8.1. Une situation $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre point-selle du jeu matriciel (1.7) si :

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, \forall i = \overline{1, m_1}, \forall j = \overline{1, m_2}.$$

1.8.2 Jeux bi-matriciels

Un jeu fini à deux joueurs à somme non nulle peut être représenté par deux $m_1 \times m_2$ – matrices A et H , où A est la matrice des gains du joueur (P_1) et H représente la matrice des

gains du joueur (P_2). Pour les deux matrices, les lignes correspondent aux stratégies pures de (P_1) et les colonnes correspondent aux celles de (P_2) d'où l'appellation de jeu bi-matriciel.

Lorsque les deux joueurs ont choisi leurs stratégies pures $x_i \in S_1$ et $y_j \in S_2$, la situation qui en résulte est décrite par le couple (x_i, y_j) . Un jeu bi-matriciel est représenté comme suit :

$$J_2 = \langle S_1, S_2, A, H \rangle \quad (1.8)$$

Où :

$S_1 = \{x_1, x_2 \dots x_{m_1}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur (P_1).

$S_2 = \{y_1, y_2 \dots y_{m_2}\}$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur (P_2).

A est la matrice des gains du joueur (P_1), définie par la relation suivante :

$A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = U_1(x_i, y_j)$, $\forall i = \overline{1, m_1}, \forall j = \overline{1, m_2}$.

H est la matrice des gains du joueurs (P_2), définie par la relation suivante :

$H = (h_{ij})$, où $h_{ij} = U_2(x_i, y_j)$, $\forall i = \overline{1, m_1}, \forall j = \overline{1, m_2}$.

Concept de solution

Définition 1.8.2. Une situation $(x_{i^*}, y_{j^*}) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre de Nash du jeu bi-matriciel (1.8) si :

$$\begin{aligned} a_{i^*j^*} &\geq a_{ij^*}, \forall i = \overline{1, m_1} \\ h_{i^*j^*} &\geq h_{i^*j}, \forall j = \overline{1, m_2} \end{aligned}$$

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des éléments de bases de la théorie des jeux, qui nous seront utiles pour les chapitres qui suivent. Pour pouvoir comprendre les analyses des systèmes d'attente que nous avons abordé dans notre travail, on a jugé utile d'introduire le chapitre 2 qui comporte quelques rappels sur les processus stochastiques et les files d'attentes Markoviennes.

Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes

Introduction

L'évaluation des performances d'un système s'avère nécessaire. Étant donné que l'on ne peut pas mesurer directement les paramètres de performance sur le système réel, il s'agit alors de proposer un formalisme mathématique permettant de le décrire au mieux. Il est alors très intéressant de donner beaucoup d'importance à l'étape de modélisation. Dans ce chapitre nous allons présenter brièvement quelques définitions et principaux résultats sur les processus stochastiques et les files d'attente. On parlera en particulier des files d'attente Markoviennes et on s'attardera sur l'analyse du modèle $M/M/1$.

2.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités (Ω, F, p) [34], où $X(t)$ représente l'état du processus au temps t . L'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelé l'espace des états du processus noté par \mathbf{E} .

2.1.1 Processus de Comptage

Désignons par $N(t)$ le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$, en supposant que $N(0) = 0$. On cherche à déterminer la distribution de cette variable aléatoire discrète .

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ l'instant d'occurrence du $n^{\text{ème}}$ événement, le processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé *processus de comptage* à temps continu associé à $(S_n)_{n \geq 1}$ si ses réalisations sont des

fonctions en escalier non décroissantes[23].

Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positives.
2. $N(u+t) - N(u)$ représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle semi-ouvert $]u, u+t]$.

On s'intéresse au comptage du nombre d'occurrences d'un évènement, par exemple :

- Appels téléphoniques à un standard,
- Prises de poisson par un pêcheur,
- Naissances d'individus,
- Arrivée, de clients à un guichet,
- L'occurrence d'accidents dans une entreprise,
- Le nombre d'étudiants présents dans une salle.

2.1.2 Processus de Poisson

Définition 2.1.1. On dit qu'un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson s'il satisfait aux trois conditions suivantes [1] :

- * Le processus $N(t)$ est homogène dans le temps : c'est-à-dire que le nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps de longueur t ne dépend que de t . Autrement dit, $P(N(s+t) - N(s) = k) = P(N(t) = k) = p_k(t)$.
- * Le processus $N(t)$ est à accroissements indépendants : c'est-à-dire que le nombre d'évènements se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. $P(N(s+t) - N(s) = k, N(s) = j) = P(N(s+t) - N(s) = k)P(N(s) = j) = p_k(t)p_j(s)$
- * La probabilité que deux évènements ou plus se produisant dans un petit intervalle (Δt) est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul évènement. Autrement dit,

$$p_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & (k \geq 2) \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 1) \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 0) \end{cases}$$

Le coefficient λ est appelé *intensité du processus de Poisson*.

2.1.3 Loi d'un Processus de Poisson

Si un processus de comptage $N(t)$ satisfait aux trois conditions précédentes alors sa distribution de probabilité est donnée par :

$$P(N(t) = k) = P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

pour la quelle on obtient les caractéristiques suivantes :

$$E[N(t)] = \lambda t \text{ et } V[N(t)] = \lambda t$$

2.1.4 Loi exponentielle

Une variable aléatoire T à valeurs dans R_+ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si sa fonction de répartition est donnée par :

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Sa fonction de densité est alors donnée par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, sa moyenne est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et sa variance est $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Notons que la loi exponentielle est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire que l'on exprime formellement par :

$$\forall s, t \geq 0; P(T > t + s | T > s) = P(T > t)$$

2.1.5 Processus de Poisson et loi exponentielle

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ , et T_n la durée séparant le $(n - 1)^{\text{ème}}$ et le $n^{\text{ème}}$ évènement.

Théorème 2.1.1. [1] *Les temps d'attente T_n d'un processus de Poisson de paramètre λ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ .*

Théorème 2.1.2. [1] *Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux évènements consécutifs sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ .*

2.2 Chaîne de Markov à temps discret

Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ à temps discret, défini sur un espace d'états \mathbf{E} fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov suivante :

$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout états $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in \mathbf{E}$.

En d'autres termes, une chaîne de Markov est un processus stochastique dont la dépendance au passé est résumée par la seule observation présente.

Une chaîne de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, pour toute paire d'états (i, j) et tout instant n :

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i]; \forall k \geq 0 \text{ [31].}$$

2.3 Chaînes de Markov à temps continu

Une chaîne de Markov à temps continu est un processus $\{X(t), t \in R^+\}$ à valeurs discrètes dans \mathbf{E} qui satisfait aux hypothèses suivantes [25] :

- H_1 : $X(t)$ est un processus Markovien. C'est à dire que pour toute suite d'instants $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in R^+$ $P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$.
- H_2 : $X(t)$ est un processus homogène, c'est à dire que pour tout $s, t \in R^+$ et $i, j \in \mathbf{E}$: $P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i)$.

2.4 Processus de naissance et de mort

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ une chaîne de Markov à temps continu dont l'espace des états est égal à \mathbf{E} et A sa matrice génératrice. Cette chaîne est appelée processus de naissance et de mort, si ses intensités de transition vérifient :

$$a_{ij} = 0 \text{ si } |i - j| \geq 2$$

Autrement dit, un processus de naissance et de mort est une chaîne de Markov à temps continu définie sur l'espace des états $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ et telle que, depuis n'importe quel état i , les seules transitions possibles se font soit dans l'état $i - 1$, soit dans l'état $i + 1$ [20].

L'état $X(t)$ d'un tel processus est généralement interprété comme la taille d'une population donnée au temps t . Chaque augmentation d'une unité du nombre d'individus correspond à une naissance et chaque diminution d'une unité correspond à une mort.

On note :

$$\lambda_i = a_{i,i+1}, i = 0, 1, 2, \dots$$

le taux de naissance dans l'état i et

$$\mu_i = a_{i,i-1}, i = 0, 1, 2, \dots$$

le taux de mort dans l'état i (évidemment $\mu_0 = 0$). Nous obtenons ainsi :

$$a_{ii} = -\lambda_i - \mu_i, i = 0, 1, 2, \dots$$

La matrice génératrice de la chaîne est :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le graphe représentatif de ce processus est donné par la figure suivante :

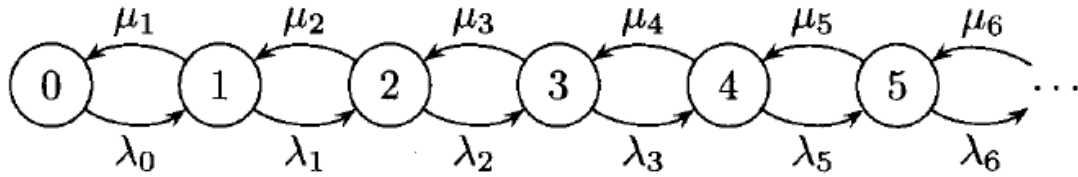


FIGURE 2.1 – Graphe du processus de naissance et de mort

2.5 Les files d'attente

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation, ...).

L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités, appelées "clients", se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon, il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant un ordre spécifique[9].

Une file d'attente est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station.

Afin de spécifier complètement une file d'attente, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

2.5.1 Processus d'arrivée

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$.

Si A_n désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client dans le système. On note par T_n la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du $(n-1)^{\text{ème}}$ client et du $(n)^{\text{ème}}$ client, on aura alors : $T_n = A_n - A_{n-1}$.

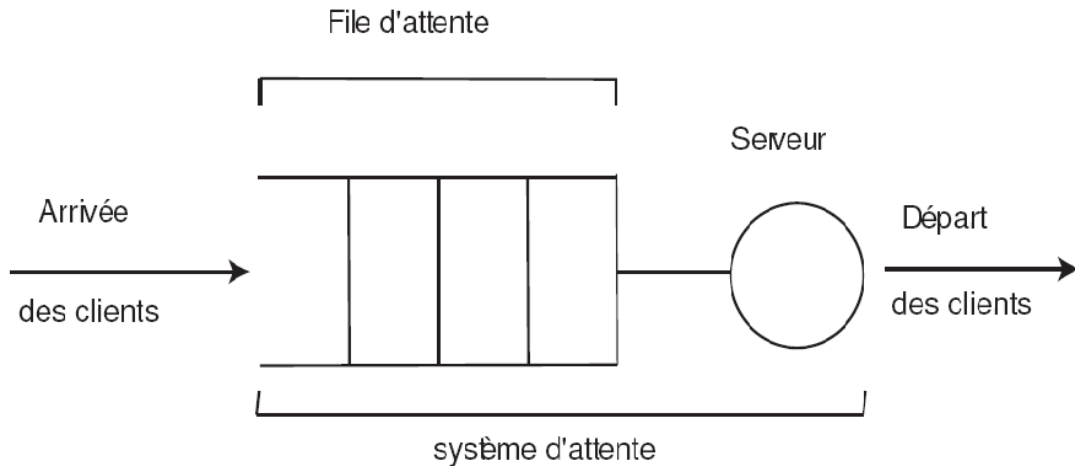


FIGURE 2.2 – file d'attente

2.5.2 Temps de service

On note par Y_n la variable aléatoire mesurant l'instant de départ du n^{eme} client du système et B_n la variable aléatoire mesurant le temps de service du n^{eme} client.

Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet, qu'un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client.

Les temps de service consécutifs sont décrits par des variables B_n indépendantes et identiquement distribuées. Si μ est le taux de service, alors $\frac{1}{\mu}$ est la durée moyenne de service.

2.5.3 Structure et discipline de la file

Nombre de serveurs

Une station peut disposer d'un ou de plusieurs serveurs en parallèle. Soit s le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, s'il trouve un serveur libre, ce dernier entre dans le système. Si tous les serveurs sont occupés, le client se place dans la file en attente qu'un serveur se libère.

La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ils possèdent donc la même distribution) et indépendants les uns des autres. On parle alors de service homogène.

Capacité de la file

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit N la capacité de la file (incluant le ou les clients en service). Une file à capacité illimitée vérifie $N = +\infty$. Lorsque la capacité de la file est limitée et qu'un client arrive alors que cette

dernière est pleine, le client est perdu.

Discipline de service

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file pour pouvoir déterminer le tour de chaque client pour effectuer son service. Les disciplines les plus courantes sont [33] :

- FIFO (first in, first out) ou (premier arrivé, premier servi) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Le premier client arrivé sera le premier à quitter la file.
- LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served) ou DAPS (dernier arrivé, premier servi). Cela correspond à une file, dans laquelle le dernier client arrivé sera le premier traité, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file mono-serveur.
- RANDOM (aléatoire) : Le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.
- Round-Robin (cyclique). Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum Q de leur temps de service et sont replacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser les systèmes informatiques ;

2.5.4 Notation de Kendall

Pour la classification des systèmes d'attente, on recourt à une "notation symbolique" dite notation de Kendall [15]. Cette notation comprend des symboles rangés dans l'ordre, elle est noté par $A \setminus B \setminus s \setminus N \setminus D \setminus O$ tel que :

- A indique la loi des temps inter-arrivées des clients,
- B indique la loi des temps de services,
- s indique le nombre de serveurs,
- N indique la capacité de la salle d'attente, ce dernier sera supprimé si $N = \infty$.
- D indique la discipline du service.
- O la source des clients potentiels, qui peut être fini ou infini, homogène ou hétérogène.

Les lois des deux premiers symboles sont donnés par :

- M : loi exponentielle,

- G : loi générale,
- D : loi constante (déterministe),
- E_k : loi de Erlang d'ordre k ,
- H_k : loi hyperexponentielle.

2.6 Files d'attente Markoviennes

Lorsque les deux quantités, les inter-arrivées et le service sont exponentiellement distribués, on parle alors de files d'attente Markoviennes. Celles-ci sont caractérisées par le fait que le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant t est de naissance et de mort.

La distribution du temps de service la plus simple à étudier est la distribution exponentielle. Cependant, la propriété "*sans mémoire*" de la loi exponentielle fait que celle-ci n'est généralement pas très réaliste pour modéliser les phénomènes réels. On est donc souvent obligé de recourir à d'autres distributions, on parle alors de files d'attente non Markoviennes.

2.7 Analyse mathématique

En premier lieu, on s'intéresse au nombre $N(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t et on note $P_n(t) = P[N(t) = n]$ les probabilités d'états définissant le régime transitoire du processus $(N(t), t \geq 0)$.

Le régime stationnaire du processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par les distributions stationnaires de ce processus : $P_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P[N(t) = n]; (n = 0, 1, 2, \dots)$.

2.8 Caractéristiques d'un système de files d'attente

À partir de la distribution stationnaire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$, on peut obtenir d'autres caractéristiques du système telles que :

- \bar{N} : le nombre moyen de clients dans le système,
- \bar{N}_q : le nombre moyen de clients dans la file d'attente,
- \bar{T}_s : le temps moyen de séjour d'un client dans le système (attente + service),
- \bar{T}_q : le temps moyen d'attente dans la file.

2.8.1 Formules de Little

Le nombre moyen de clients dans le système est donné par la relation suivante :

$$\bar{N} = E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n. \quad (2.1)$$

Soit \bar{N}_q le nombre de clients se trouvant dans la file d'attente, on peut alors écrire le nombre moyen de clients dans la file d'attente comme suit :

$$\bar{N}_q = E(N_q) = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-s)p_n. \quad (2.2)$$

Pour trouver \bar{T}_s et T_q , on fait souvent appel aux formules de Little, celles-ci sont données par le théorème 2.8.1, plus précisément pour le modèle M/M/1

Théorème 2.8.1. (*Formules de Little [35]*) :

Si λ_e est le taux d'entrée et $\frac{1}{\mu}$ est le temps moyen de service, alors on a :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \lambda_e \bar{T}_s. \\ \bar{N}_q &= \lambda_e \bar{T}_q. \\ \bar{N} &= N_q + \frac{\lambda_e}{\mu}. \\ \bar{T}_s &= T_q + \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

2.9 Description du modèle M/M/1

On considère un système formé d'une file de capacité infinie et d'un seul serveur. La discipline de service de la file est *FIFO*. Le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux λ (ce qui équivaut à dire que les inter-arrivées ont une distribution exponentielle de paramètre λ) et le temps de service d'un client est une variable aléatoire ayant une distribution exponentielle de taux μ .

2.9.1 Caractéristiques de la file M/M/1

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ le processus de naissance et de mort qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant $t \geq 0$ et P_n ses distribution d'états.

Le graphe de transition qui caractérise cette file est donné par la figure suivante :

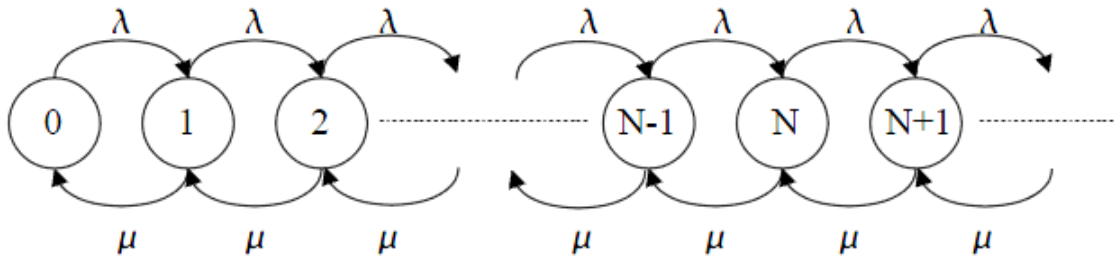


FIGURE 2.3 – Graphe de transition de la file M/M/1

Les équations d'équilibre de ce système sont donné comme suit :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ pour } n=0.$$

$$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}, \text{ pour } n \geq 1.$$

Par recurrence, on obtient :

$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$. En posant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et en se servant du fait que les P_n définissent une distribution de probabilité, on peut alors écrire : $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$. Ce qui nous permet d'obtenir la probabilité $P_0 = 1 - \rho$. Ainsi on aura l'expression finale des probabilités d'états du processus, données par :

$$P_n = \rho(1 - \rho) \quad (2.3)$$

Le nombre moyen de client dans le système

Le nombre moyen de clients dans le système peut être donné de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n \\ &= \rho(1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n P_{n-1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{N} = \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (2.4)$$

Le nombre moyen de client dans la file

Ce nombre est donné comme suit :

$$\bar{N}_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) P_n = \frac{\rho^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (2.5)$$

Le temps moyen de séjour dans le système

On utilisant les formule de Little, on obtient :

$$\overline{T_s} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (2.6)$$

Le temps moyen de séjour dans la file

Ce temps moyen peut être aussi déterminé en utilisant les formules de Little :

$$\overline{T_q} = \frac{\overline{N_q}}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (2.7)$$

Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre, les processus stochastiques gouvernants certains modèles d'attente, à savoir les files d'attentes Markoviennes. On s'est intéressé en particulier au modèle $M/M/1$.

Théorie des jeux dans les files d'attente Markoviennes

3.1 Introduction

Il existe deux types de travaux concernant l'application de la théorie des jeux en files d'attente markoviennes :

- Des travaux qui considèrent que les joueurs sont les serveurs, où les jeux sont simultanés et non-coopératifs.
- Des travaux qui considèrent que les joueurs sont les clients, où les jeux sont considérés séquentiels et non-coopératifs.

Le premier travail qui a été réalisé concernant ce thème, a été effectué en 1969 par P.Naor sur un modèle $M/M/1$, où il a étudié le comportement des clients dans une station de péage [28]. Depuis, plusieurs travaux ont vu le jour [[31],[13],[7],[8],[19],[36],[6],[17],[18],[14],[28],[21]],...etc.

L'intérêt de ce chapitre est de présenter quelques modèles de files d'attentes markoviennes étudiées dans la littérature via la théorie des jeux. On commence par la présentation des modèles de jeux entre les clients, on terminera par ceux où les joueurs sont les serveurs.

3.2 Étude d'une File d'attente M/M/1 simple et observable

3.2.1 Description du modèle

Soit une file d'attente $M/M/1/FIFO$, où les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ , le taux de service est μ .

Chaque client paye un coût fixe θ d'entrée à la file, et un coût C par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système, et reçoit une récompense R s'il est servi [28].

Lorsqu'un client arrive et trouve n clients dans le système, son temps moyen de séjour dans le système est alors : $\frac{n+1}{\mu}$.

3.2.2 Le jeux associé

On peut modéliser cette situation par un jeu entre les clients. Chaque client possède deux alternatives, soit entrer soit quitter. Lorsqu'un client i arrive au système, et trouve n clients, sa fonction d'utilité est donné par :

$$U_i = (R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \theta)j \quad (3.1)$$

Où :

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si entrer} \\ 0 & \text{si quitter} \end{cases}$$

Cette fonction est la même pour tous les joueurs, on peut dire alors que ce jeu est symétrique.

On suppose qu'il n'existe pas de coût pour un client qui ne rejoint pas la file d'attente, mais si un client décide d'entrer, alors il ne pourra plus revenir sur sa décision.

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$, le processus qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant $t \geq 0$. L'objectif était de trouver une taille critique n_e , telle qu'au moment d'arrivée d'un client, si $N(t) \leq n_e$ alors le client rejoint la file, sinon il quitte.

3.3 File d'attente M/M/1 simple et non-observable

Le travail de Naor [28], a été complété par B.Edelson et D.Hildebrand[14], en considérant une autre situation. Ces auteurs supposent que les clients qui arrivent n'observent pas la taille du système. Ils prennent leurs décision d'entrer ou de quitter sans connaître l'état du système.

Les stratégies de chaque joueur sont alors : $\{\text{entrer}, \text{quitter}\}$. La fonction d'utilité d'un client i est $U_i(q, p)$, donnée lorsque ce client utilise les stratégies mixtes $(q, 1 - q)$ et les autres utilisent les stratégies mixtes $(p, 1 - p)$. Cette fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante :

$$U(q, p) = q\left(R - \frac{C}{\mu - p\lambda} - \theta\right) \quad (3.2)$$

L'objectif était de trouver l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

3.4 File d'attente M/M/1 avec possibilité d'inspection

Un autre travail a vu le jour, et le modèle considéré par les auteurs est une généralisation de ceux qui précèdent, du fait qu'il englobe les deux situations (observable et non observable) [18].

3.4.1 Le modèle

Considérons une file d'attente $M/M/1$, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ , le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ .

Au moment de leurs arrivées, les clients choisissent entre trois options :

- rejoindre la file.
- quitter.
- inspecter la file ensuite choisir d'entrer où de quitter.

Le coût d'attente est $C_W > 0$ par unité de temps. Le coût d'inspection de la file est $C_I \geq 0$.

Après être servis, les clients reçoivent une récompense $R > 0$.

Supposons que chaque client inspecte la file avec la probabilité P_I , quitte sans inspecter la file avec la probabilité P_B et rejoint la file sans l'inspecter avec la probabilité $P_J = 1 - P_I - P_B$.

Le taux d'entrée devient alors :

$$\lambda_e = \begin{cases} (1 - P_B)\lambda & \text{si } n < n_e \\ P_J\lambda & \text{si } n \geq n_e \end{cases}$$

Lorsqu'un nouveau client arrive, il calcule son bénéfice. Notons par :

U_B : La fonction d'utilité d'un client pour le cas de quitter sans inspecter la file.

U_J : La fonction d'utilité d'un client pour le cas de rejoindre la file sans l'inspecter et U_I pour le cas d'inspection.

Ainsi, on aura :

$$U_B = 0 \quad (3.3)$$

$$U_I = \sum_{i=0}^{n_e-1} P_n \left(R - \frac{C_W(n+1)}{\mu} \right) - C_I \quad (3.4)$$

$$U_J = \sum_{i=0}^{\infty} P_n \left(R - \frac{C_W(n+1)}{\mu} \right) \quad (3.5)$$

Le but des clients est de maximiser leurs gains. L'objectif de ce travail était de trouver les stratégies mixtes qui correspondent aux probabilités : P_B, P_I, P_J .

Remarque 3.4.1. Notons que si un client décide d'inspecter la file, alors on se retrouve dans un jeu similaire à celui défini par P.Naor, et s'il décide de ne pas inspecter la file alors on se retrouve dans le jeux définie par N.Edelson et D.Hildebrand.

3.5 File d'attente M/M/1 avec panne du serveur

Ce travail consiste à étudier le comportement des clients dans une file d'attente Markovienne de type $M/M/1$ à un seul serveur non fiable, réalisé par O.Boudali et A.Economou [6] .

3.5.1 Description du modèle

On considère une file d'attente à un seul serveur, à capacité infinie, les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ , le service s'effectue suivant une distribution exponentielle de paramètre μ . Le système est sujet à des pannes aléatoires du serveur se réalisant avec un processus de poisson de paramètre ξ .

Lorsque une panne se réalise, tous les clients sont ainsi forcés à quitter le système, et le serveur devient alors inactif, et une réparation du système est lancée. La durée de réparation est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\eta$. Durant la réparation, aucun client n'est accepté. Finalement, on suppose que le temps de service, temps de réparation, inter arrivé et inter-catastrophes sont mutuellement indépendants .

L'état du système à l'instant t se représente par la paire $(N(t), I(t))$ telle que :

$N(t)$: représente le nombre de clients dans le système à l'instant t .

$I(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t , et prend la valeur 1 si le système est opérationnel ou bien 0 si le système est sous réparation.

3.5.2 Modélisation sous forme d'un jeu :

L'ensemble des joueurs sont les clients. Les alternatives de chaque joueur sont soit :

- Soit rejoindre le système (r).
- Soit quitter (q).

Les fonctions de gains des clients, diffèrent selon l'information disposée, celles-ci sont données plus explicitement dans la section suivante .

3.5.3 Règles du jeu

Chaque client reçoit une récompense de R_s unités lorsqu'il sera servi, ou bien une compensation de R_f unités dans le cas où il est forcé de quitter le système due à une panne, et perd un coût C par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système (dans la file ou bien dans le service).

L'objectif des clients est de maximiser leurs bénéfices nets. Et leurs décisions sont supposées irrévocables. On peut considérer que cette situation est un jeu symétrique entre eux.

Deux cas sont considérés selon l'information disposée aux clients :

Cas observable :

Les clients observent le nombre de clients ($N(t)$) dans le système, ensuite ils décident de rejoindre ou bien de quitter.

Les alternatives de chaque joueur sont : soit entrer, soit quitter.

Lorsqu'un client arrive et trouve le système à l'état $(n,1)$, alors sa fonction de gain s'écrit de la manière suivante :

$$U_{obs}(n) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + R_f \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] - \frac{C}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right], n \geq 0 \quad (3.6)$$

Telle que :

$\left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1}$ est la probabilité d'être servi ;

$\frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right]$ est le temps moyen d'attente.

Les auteurs ont trouvé l'équilibre de Nash pour ce jeu.

Cas non-observable :

Les clients n'observent pas $N(t)$. Dans ce cas la fonction d'utilité d'un client est alors :

$$U_{nobs}(1, q) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nobs}(k, 1) U_{obs}(k) \quad (3.7)$$

$P_{nobs}(k, 1)$ représente la probabilité qu'il y ait k client dans le système lorsque le serveur est actif.

Il s'agit donc de chercher l'équilibre en stratégies mixtes tel qu'un client qui arrive entre avec la probabilité p_e .

3.6 File d'attente $M/M/1$ avec vacances

L'objectif visé est de maximiser le bien être individuel et social des clients, et de déterminer un meilleur taux d'entrée au système[17].

3.6.1 Le modèle

On considère une file d'attente $M/M/1/FIFO$ avec vacance, où lorsqu'il n'y a plus de clients dans le système, on observe alors une fermeture du service, et le serveur reprend ses fonctions lorsque le nombre de clients dans la file d'attente a atteint un nombre critique N . On dit alors que le serveur utilise la 'N-politique' .

3.6.2 Le jeu associé

Chaque client reçoit une récompense de R unités pour un service rendu, et un coût d'attente C par unité de temps pour le séjour effectué dans le système, On note alors :

\overline{T}_s : le temps moyen d'attente dans le système ;

\overline{T}_s^i : le temps moyen d'attente conditionnel .

On peut associer deux différents jeux à ce système, selon l'information dont on dispose :

Cas non observable :

Les clients qui arrivent n'observent pas la taille de la file. Dans ce cas , la stratégie " quitter " pour tous les clients est un équilibre de Nash (avec $N > 1$), le serveur ne revient jamais au fonctionnement, donc $\lambda = 0$ est toujours un taux d'équilibre.

Vu que cet équilibre n'est pas intéressant alors, le travail se concentre plus sur un équilibre positif. On sait que la fonction d'utilité d'un client est :

$$U(q, p) = q(R - C\overline{T}_s) \quad (3.8)$$

Qui est donnée lorsque ce client utilise les stratégies mixtes $(q, 1 - q)$ et les autres utilisent les stratégies mixtes $(p, 1 - p)$.

On cherche à trouver l'équilibre en stratégies mixtes, un taux d'entrée optimal et le N qui

optimise le bien être social.

Cas observable :

Les clients observent l'état du système et la fonction d'utilité d'un client qui rejoint la file sachant l'existence de n clients dans le système est :

$$U_i = (R - \theta \overline{T}_s^i) j \quad (3.9)$$

Telle que :

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si entrer} \\ 0 & \text{si quitter} \end{cases}$$

On cherche dans ce cas l'équilibre en stratégies pures, en déterminant le seuil des stratégies, ensuite déterminer le taux d'entrée optimal et le nombre N -optimal.

3.7 File d'attente M/M/1 avec contrôle du service

L'étude s'est porté sur un système de file d'attente de type $M/M/1/FIFO$ [36].

3.7.1 Le modèle

Les clients arrivent selon un processus de poisson de taux λ . Le serveur utilise la politique du seuil B . Plus précisément, lorsque le nombre de clients dans le système est inférieur ou égale à un seuil B alors le serveur travail avec un taux faible μ_h , autrement il utilise un taux plus élevé μ_l , avec $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Les clients sont supposés identiques, et prennent leurs décisions de quitter ou de rejoindre la file au moment de leurs arrivées.

On dit alors que le serveur adopte la politique (B, μ_h, μ_l) .

Il existe une récompense de R unités pour chaque client qui effectue un service dans le système.

Il existe également un coût d'attente C par unité de temps aussi longtemps que le client reste dans le système (en file d'attente ou en service).

3.7.2 Le jeu associé

L'ensemble des joueurs est constitué de l'ensemble des clients. Chaque joueur dispose de deux alternatives :

- 1- Rejoindre le système.
- 2- Quitter.

La fonction d'utilité est la même pour tous les joueurs.

Chaque client qui arrive est informé de la politique du service (capacité élevée ou pas du serveur), par contre il n'est pas au courant du nombre de clients dans le système.

Notons par $U(q, p)$ l'utilité obtenue par un client lorsqu'il utilise la stratégie mixte q et les autres utilisent la stratégie mixte p .

Les clients entrent au système suivant un processus de Poisson de taux $\lambda_e = \lambda p$.

L'équilibre en taux d'entrée est : $\lambda_e^* = \lambda p_e$, où p_e est une stratégie d'équilibre symétrique.

La fonction d'utilité d'un client est alors :

$$U(q, p) = q(R - C\overline{T}_s(\lambda p)), \quad (3.10)$$

où :

$\overline{T}_s(\lambda p)$ représente le temps moyen de séjour d'un client dans le système.

On s'intéresse à trouver un équilibre pour les clients, et un taux d'entrée optimal dans les deux cas. Il peut y'avoir plusieurs équilibres, par exemple : lorsque le taux d'arrivé est petit et le serveur travaille doucement (mais toujours $\frac{\lambda}{\mu} < 1$) et un autre lorsque le taux d'arrivée est élevé et le serveur travaille rapidement.

3.8 File d'attente M/M/1 partitionnée

Ce travail a été réalisé par A.Economou et S.Kanta, où ils ont étudié une file d'attente $M/M/1/FIFO$ partitionnée[13].

3.8.1 Le Modèle

On considère une file d'attente de type $M/M/1$, où les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ . Le temps de service des clients est supposé exponentiel de paramètre μ . L'espace du système est partitionné en compartiment. Chacun a une capacité de "a"

clients. On s'intéresse aux comportements des clients lorsqu'ils peuvent décider entre rejoindre le système ou quitter le système aux moments de leurs arrivées.

On suppose qu'il existe une structure de récompense-coûts (chaque client reçoit une récompense de R unité pour un service rendu, et perd un coût C par unité de temps). L'objectif des clients est de maximiser leurs bénéfices nets.

Les clients ont des informations partielles sur le nombre de clients présents dans le système, on peut considérer, ainsi deux cas d'information pour les clients :

1^{er} cas : Les clients observent le numéro du compartiment dans lequel ils vont entrer, mais ils ne sont pas informés sur leurs positions à l'intérieur du compartiment, donc s'il existe n client dans le système au moment de l'arrivée d'un client, alors son information sera le numéro du compartiment $i = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor + 1$ dans lequel il va entrer s'il décide de rejoindre le système.

La fonction d'utilité d'un client peut être donnée par :

$$U^N = R - \frac{C}{\mu} \{E[N|N \in \{(i-1)a, (i-1)a+1, \dots, ia-1\}] + 1\} \quad (3.11)$$

2^{me} cas :

Les clients observent leurs position dans le compartiment dans lequel ils vont entrer, mais ils ne sont pas informés du numéro du compartiment. S'il existe n client dans le système au moment de l'arrivée d'un client, son information est alors : la position $i = (n \bmod a) + 1$.

L'objectif est de chercher les équilibres de Nash dans chaque cas.

3.9 Etude d'une file d'attente $M/M/1$ avec temps d'installation

A. Beretas et A. Economou ont étudié la file d'attente $M/M/1/FIFO$ avec temps d'installation [7]. L'objectif de ce travail est de trouver les équilibres de Nash, en étudiant plusieurs cas, selon l'observation du système par les clients.

3.9.1 Description du modèle

On considère une file d'attente de capacité infinie à un seul serveur. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ , le temps de service est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$. Le service se désactive dès que la file devient vide. Dès qu'un client arrive à une file vide, un processus d'installation de service est lancé. Le temps requis pour cette installation est exponentiellement distribué de paramètre θ . Pendant l'installation, les clients continuent d'arriver. Finalement, on suppose que le temps des inter arrivées, le temps de service, et le

temps d'installation sont mutuellement indépendants.

On représente l'état du système à l'instant t par la paire $(N(t), I(t))$, telle que :

$N(t)$:représente le nombre de client dans le système à l'instant t .

$I(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t , qui prend la valeur 1 ou bien 0 selon qu'il soit disponible ou pas.

Le processus $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continue et à espace d'état $E=\{(n, i), 0 \leq i \leq 1, n \geq i\}$. son graphe de transition est donné par la figure suivante :

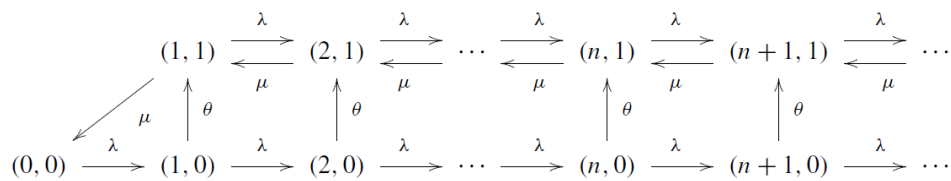


FIGURE 3.1 – La file d'attente M/M/1 avec temps d'installation

3.9.2 Règles et jeux associés

On s'intéresse au comportement des clients lorsque ils ont le choix entre rejoindre ou bien quitter le système au moment de leurs arrivées.

On considère que chaque client reçoit une récompense de R unités pour un service effectué, ça reflète leurs satisfaction d'être servi. Il existe aussi un coût de C unités par unité de temps que le client perd pour son attente dans le système.

Les joueurs sont alors l'ensemble des clients, et leurs stratégies sont : soit entrer ou bien quitter lors de leurs arrivés.

Ce jeu est un jeu symétrique. Chaque client a pour objectif de maximiser son gain.

On suppose que : $R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}$, Cette condition stipule que la récompense de service est supérieure au coût d'attente pour le client qui trouve le système vide.

Finalement, la décision des clients est supposée irrévocable .

On distingue quatre cas , selon l'information disposée aux clients à l'instant de leurs arrivés :

- **Cas complètement observable** : Les clients observent $(N(t), I(t))$.
- **Cas presque observable** : Les client observent juste $N(t)$.
- **Cas presque non-observable** : Les client observent seulement $I(t)$.

- **Cas complètement non-observable** : Les clients n'observent pas l'états du système.

3.9.3 L'équilibre dans le Cas complètement observable

Le temps moyen de séjour d'un client qui décide de rejoindre le système, après avoir observé l'état du système (n, i) est : $\frac{n+1}{\mu} + \frac{1-i}{\theta}$. Sa fonction d'utilité peut être écrite sous la forme suivante :

$$U = (R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C(1-i)}{\theta})j \tag{3.12}$$

où :

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si entrer} \\ 0 & \text{si quitter} \end{cases}$$

Le client préfère donc d'entrer si cette valeur est positive, et il est indifférent entre entrer et quitter si cette valeur est nulle, mais on suppose qu'il préfère d'entrer. Dans ce dernier cas, un client qui arrive décide de rejoindre le système si et seulement si :

$$n + 1 \leq \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu(1-i)}{\theta} \tag{3.13}$$

Par conséquent on aura le résultat suivant :

Théorème 3.9.1. [7]

Dans une file d'attente $M/M/1$ avec temps d'installation, et complètement observable, il existe des seuils : $(n_e(0), n_e(1)) = (\lceil \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} \rceil - 1, \lceil \frac{R\mu}{C} \rceil - 1)$, tel que la stratégie "entrer si $N(t) \leq n_e(I(t))$, et quitter autrement", est l'unique équilibre en stratégie pure, de plus, elle est toujours une stratégie dominante.

Si les clients suivent ces seuils de stratégie, alors le système est une chaîne de Markov similaire à la précédente, mais à espace d'état restreint :

$$S = ((n, 0), 0 \leq n \leq n_e(0)+1) \cup ((n, 1), 1 \leq n \leq n_e(1)+1).$$

Le graphe de transition est donné par la figure suivante :

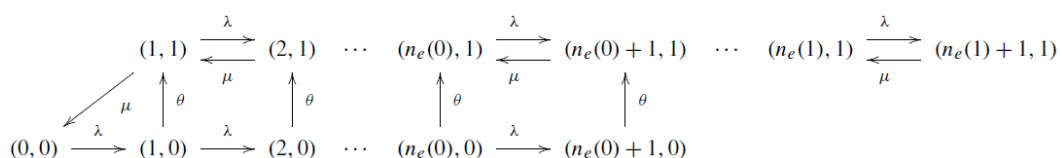


FIGURE 3.2 – La file d'attente $M/M/1$ observable avec temps d'instalation et structure récompense-coût

Proposition 3.9.1. [7] Soit une file d'attente M/M/1 avec temps d'installation, et $\sigma \neq 1 \neq \rho \neq \sigma$, là où les clients suivent la politique du seuil $(n_e(0), n_e(1))$, avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et $\sigma = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}$ les probabilités stationnaires $(p(n, i) : (n, i) \in E)$ sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 P(1, 1) &= \left[\frac{1}{\rho(1-\sigma)(1-\rho)} - \frac{1}{(1-\sigma)(1-\rho)} \sigma^{n_e(0)+1} + \frac{1}{(1-\rho)(\sigma-\rho)} \rho^{n_e(1)+2} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{n_e(0)+1}\right) \right]^{-1} \\
 P(n, 0) &= \frac{1}{\rho} \sigma^n P(1, 1), n = 0, 1, \dots, n_e(0) \\
 P(n_e(0) + 1, 0) &= \frac{1}{(1-\rho)} \sigma^{n_e(0)+1} P(1, 1) \\
 P(n, 1) &= \frac{1}{\sigma - \rho} (\sigma^n - \rho^n) P(1, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(0) \\
 P(n, 1) &= \frac{1}{\sigma - \rho} (\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1}) \rho^{n-n_e(0)-1} P(1, 1) \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

où :

$$n = n_e(0) + 1, \dots, n_e(1) + 1, \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}$$

Ceci veut dire que lorsque un client arrive, la probabilité qu'il trouve le système à l'état $(n_e(0) + 1, 0)$ ou bien $(n_e(1) + 1, 1)$ et donc quitter, est égale à $P(n_e(0) + 1, 0) + P(n_e(1) + 1, 1)$. Le bénéfice social par unité de temps lorsque tous les clients suivent la politique du seuil $(n_e(0), n_e(1))$ est égale à :

$$U_s = R\lambda(1 - P(n_e(0) + 1, 0) - P(n_e(1) + 1, 1)) - C \left(\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} nP(n, 0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} nP(n, 1) \right) \tag{3.15}$$

Les probabilités stationnaires données par la proposition précédente seront utilisées ainsi pour des calculs concernant le cas presque observable.

3.9.4 L'équilibre dans le cas presque observable

Les clients qui arrivent observent seulement le nombre de clients dans le système. Le temps moyen de séjour d'un client qui trouve n clients dans le système est :

$$\frac{n+1}{\mu} + \frac{\pi_{I/N}(0/n)}{\theta}$$

Où $\pi_{I/N}(0/n)$ est la probabilité que le client trouve le serveur à état 0 (inactif), en présence de n clients dans le système .

Le bénéfice net de ce client est :

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C\pi_{I/N}(0/n)}{\theta}$$

On cherche les stratégies d'équilibres. Pour cela on doit d'abord calculer $\pi_{I/N}(0/n)$. Dans ce cas, on note n_e le seuil d'entrée

$$\pi_{I/N}(0/n) = \frac{P(n, 0)}{P(n, 0) + P(n, 1)1_{\{n \geq 1\}}}$$

Si l'on note n_e le seuil d'entrée, on aura :

$$\pi_{I/N}(0/n) = [1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^n)]^{-1}, n = 0, 1, \dots, n_e.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \pi_{I/N}(0/n_e + 1) &= [1 + \frac{\theta}{\mu} \frac{\theta+\mu}{\mu-\lambda-\theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}) + \frac{\theta}{\mu}]^{-1} \\ &= [1 + \frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e+1})]^{-1} \end{aligned}$$

On introduit la fonction :

$f(x, n) = R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}[1 + \frac{\lambda x + \theta}{\mu-\lambda-\theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^n)]^{-1}$, qui nous sera utile pour trouver les stratégies d'équilibre . Soit :

$$F_U(n) = f(1, n), F_L(n) = f(0, n), n = 0, 1, 2, \dots$$

On peut voir que $F_U(0) = F_L(0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_U(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_L(n) = -\infty$$

D'où il existe un nombre n_U telle que :

$$F_U(0), F_U(1), \dots, F_U(n) \geq 0 \text{ et } F_U(n_U + 1) \leq 0$$

On remarque aussi que $F_L(n) \leq F_U(n), n = 1, 2, 3, \dots$

Donc $F_L(n_U + 1) \leq 0$ et $F_L(0) > 0$. D'où il existe $n_L \leq n_U$ telle que :

$$F_L(n_L) > 0 \text{ et } F_L(n_L + 1), \dots, F_L(n_U), F_L(n_U + 1) \leq 0.$$

Théorème 3.9.2. [7] Dans une file d'attente M/M/1 presque observable avec temps d'installation, toutes les stratégies pures "entrer si $N(t) \leq n_e$ et quitter autrement", pour $n_e = n_L, n_{L+1}, \dots, n_U$ sont des stratégies d'équilibres.

Preuve. [7] Considérons l'arrivée d'un client, et supposons qu'il trouve le nombre de clients dans le système $n \leq n_e$ et décide d'entrer. Son bénéfice est alors égal à :

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}[1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^n)]^{-1} = f_U(n) > 0$$

Donc, ce client préfère d'entrer, car s'il quitte, il aura un gain égal à 0.

Si ce client trouve $n = n_e + 1$ clients et décide d'entrer, son bénéfice est :

$$R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu - \lambda - \theta} (1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e+1}) \right]^{-1} = f_L(n_e + 1) \leq 0$$

Donc le client préfère de quitter .

3.9.5 Équilibre en stratégie mixte pour les cas non-observable

Dans ce cas, les clients qui arrivent n'observent pas le nombre de clients présents dans le système.

3.9.6 Cas presque non-observable

Les clients observent seulement l'état du serveur aux moment de leurs arrivées. Les stratégies mixtes des clients est un vecteur $(q(0), q(1))$.

Le taux d'entrée devient $\lambda(i) = \lambda q(i)$. Lorsque le serveur est à l'état i , notons par $(P_{pn}(n, i) : (n, i) \in S)$, les distributions stationnaires correspondantes à ce système. Le graphe de transition est alors :

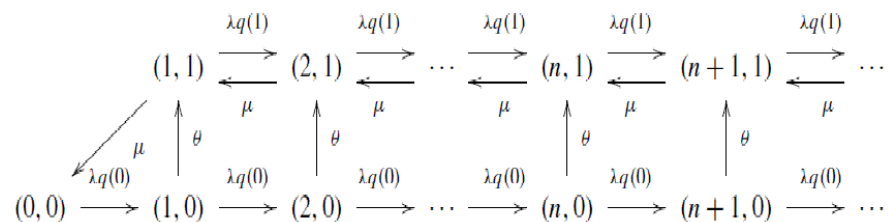


FIGURE 3.3 – La file d'attente $M/M/1$ presque observable avec temps d'installation et avec récompense-coût

On note par $\rho(0) = \frac{\lambda(0)}{\mu}$, $\rho(1) = \frac{\lambda(1)}{\mu}$ et $\sigma(0) = \frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta}$

Ainsi, l'expression des probabilités stationnaires sont données par la proposition suivante.

Proposition 3.9.2. [7] *Considérons une file d'attente $M|M|1$ avec temps d'installation et $\sigma(0) \neq \rho(1)$, où les clients observent l'état i du serveur au moment de leur arrivée et entre avec la probabilité $q(i)$. Les probabilités stationnaires $(P_{pn}(n, i) : (n, i) \in E)$ sont :*

$$P_{pn}(n, 0) = \frac{(1 - \sigma(0))(1 - \rho(1))}{1 - \rho(1) - \rho(0)} \sigma(0)^n; n = 0, 1.. \tag{3.16}$$

$$P_{pn}(n, 1) = \frac{(1 - \sigma(0))(1 - \rho(1))\rho(0)}{(1 - \rho(1) + \rho(0))(\sigma(0) - \rho(1))} (\sigma(0)^n - \rho(1)^n); n = 1, 2... \tag{3.17}$$

Si on considère un client qui trouve le serveur à l'état i au moment de son arrivée, son temps moyen de séjour est donnée par :

$$\frac{E[N/i] + 1}{\mu} + \frac{1 - i}{\theta}$$

Où :

$E[N/i]$ est le nombre moyen de client dans le système lorsque le serveur est à l'état i . Ainsi, le bénéfice d'un tel client qui décide d'entrer est :

$$R - \frac{C(E[N/i] + 1)}{\mu} - \frac{C(1 - i)}{\theta}$$

Pour calculer $(E[N/i] + 1)$, on calcule d'abord $\pi_{N/I}(n|i)$, qui est la probabilité que le client trouve n clients dans le système sachant que le serveur est à l'état i . Autrement dit,

$$\pi_{N/I}(n|i) = \frac{P(n, i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(k, i)}$$

À partir de laquelle on aura :

$$E(N/i) = \sum_{k=1}^{\infty} n \pi_{N/I}(n/i)$$

En utilisant la proposition 2 , on trouve :

$$E(N/0) = \frac{\sigma(0)}{1 - \sigma(0)}$$

$$E(N/1) = \frac{\rho(1)}{1 - \rho(1)} + \frac{1}{1 - \sigma(0)}.$$

D'ou le résultat suivant.

Théorème 3.9.3. [7] Dans une file d'attente $M/M/1$ presque non observable avec temps d'installation et $\lambda < \mu$, il existe un équilibre en stratégie mixte $(q_e(0), q_e(1))$, observer $I(t)$ et entrer avec la probabilité $q_e(I(t))$. Le vecteur $(q_e(0), q_e(1))$ est donné comme suit :

$$\text{cas 1 : } \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\mu}$$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta), 0) & \text{si } R \in (\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}) \\ (1, 0), & R \in [\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu}] \\ (1, \frac{1}{\lambda}(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}})) & R \in [\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu}, \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu - \lambda}] \\ (1, 1) & R \in [\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu}, \infty] \end{cases}$$

$$\text{cas 2 : } \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta), \frac{\mu - \theta}{\lambda}) & R \in (\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}) \\ (1, \frac{1}{\lambda}(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta}})) & R \in [\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu - \lambda}] \\ (1, 1) & R \in [\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \infty] \end{cases}$$

cas 3 : $\frac{1}{\mu - \theta} < \frac{1}{\theta}$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta), 1) & R \in (\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}) \\ (1, 1) & R \in [\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \infty] \end{cases}$$

Par exemple :

Considérons un client qui trouve le serveur à l'état 0 au moment de son arrivée, s'il décide d'entrer, son bénéfice est :

$$R - \frac{C(E[N^-|0]+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} = R - \frac{C}{\mu(1-\sigma(0))} - \frac{C}{\theta} = R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}$$

La aussi on observe deux cas :

a) $\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta} < R \leq \frac{C(\lambda + \mu)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}$

Dans ce cas, si tous les clients qui trouvent le système vide et entrent avec la probabilité $q_e(0) = 1$, alors un client qui arrive et entre obtient un gain négatif. Ainsi, $q_e(0) = 1$ n'est pas un équilibre.

Si tous les clients utilisent $q_e(0) = 0$, alors un client qui arrive et décide d'entrer aura un gain positif, donc ce n'est pas aussi un équilibre .

Il existe un seul équilibre $q_e(0) = \frac{1}{\lambda}(\frac{\mu\theta R}{\mu} - \mu - \theta)$, qui satisfait $R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta} = 0$, là où les clients sont indifférents entre entrer et quitter.

b) : $\frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} < R$

Dans ce cas, un client qui arrive aura un gain positif, s'il décide d'entrer $q_e(0) = 1$.

3.9.7 Cas complètement non-observable

Les clients n'observent ni l'état du serveur ni le nombre de client dans le système, la stratégie mixte des clients sera notée par q , les distributions stationnaires sont données par la proposition 2 telles que : $q(0) = q(1) = q$.

Théorème 3.9.4. [7] *Dans une file d'attente $M|M|1$ totalement non-observable avec temps d'installation et $\lambda < \mu$, il existe un équilibre en stratégie mixte 'entrer avec la probabilité q_e telle que :*

$$q_e = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(\mu - \frac{C}{R-\frac{C}{\theta}}) & , R \in (\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C}{\mu-\theta} + \frac{C}{\theta}) \\ 1 & \text{si } R \in [\frac{C}{\mu-\theta} + \frac{C}{\theta}, \infty[\end{cases}$$

Considérons l'arrivée d'un client, s'il décide d'entrer, son bénéfice est alors : $R - \frac{C}{\mu}(E[N] + 1)\frac{C}{\theta}P_r[I = 0]$, où $E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\sigma}{1-\sigma}$
 Où : $P_r[I = 0] = 1 - \rho$, avec $\rho = \frac{\lambda q}{\mu}$ et $\sigma = \frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}$

3.10 Concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne

Un autre type de travaux est celui où les joueurs sont les serveurs du système. Ce travail consiste à étudier la concurrence entre deux serveurs dans une file d'attente Markovienne en déterminant les meilleurs taux de service à fournir par chaque serveur. Ce travail a été réalisé par E.Kalai et M.Kamien [21].

3.10.1 Le Modèle mathématique

On considère une file d'attente Markovienne à deux serveurs où les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ formant une seule file, et le service s'effectue suivant une distribution exponentielle.

Chaque serveur fonctionne indépendamment de l'autre, et détermine sa capacité de service μ_i pour maximiser son gains ($i = \overline{1,2}$). Le coût d'opération d'une capacité de service μ est $C(\mu)$. Chaque serveurs gagne R unités pour chaque service rendu.

Lorsque un client arrive et que les deux serveurs sont libres, alors il se dirige vers l'un d'entre eux d'une manière équiprobable, et s'il trouve un serveur libre et l'autre occupé alors , le client se dirigera vers le serveur libre.

3.10.2 Modélisation sous forme d'un jeu

Cette situation peut être modélisée par un jeu sous forme normale, tel que :

- L'ensemble des joueurs sont les deux serveurs.
- Les stratégies des serveurs sont les taux de services à fournir, chaque serveurs choisit une stratégie $\mu_i, i = \overline{1,2}$

Le jeu s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{U_i(\mu_1, \mu_2)\}_{i \in I} \rangle,$$

où :

$I = \{1, 2\}$ est l'ensemble des joueurs.

μ_i est la stratégie du joueur.

$U_i(\mu_1, \mu_2)$ est la fonction d'utilité du joueur i , qui est donné comme suit :

$$U_i(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2) - C(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 > \lambda \\ R\mu_i - C(\mu_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $\alpha_i(\mu_1, \mu_2)$: est la part du marché de chaque serveur.

Chaque serveur essaye de maximiser son gain .

Les deux joueurs choisissent le taux de service à fournir d'une manière simultanée. La question qui se pose est alors :

Quelle est la meilleure stratégie à jouer de façon à maximiser le gain d'un serveur.

Le problème consiste à déterminer l'équilibre de Nash pour ce jeu.

Après résolution ; les stratégies qui procurent un équilibre de Nash sont :

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_c$ telle que μ_c est une valeur à déterminer.

3.11 Concurrence entre s serveurs dans une file d'attente Markovienne

V.Kinching, S.Choi et M.Huang ont généralisé l'étude précédente, en maintenant les mêmes règles, mais en considérant plusieurs serveurs[8]. Le modèle est alors : $M/M/s/FIFO$

3.11.1 Modélisation sous forme d'un jeu

Dans ce modèle, le jeu s'écrit de la manière suivante :

$$\langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)\}_{i \in I} \rangle$$

Telle que :

$I = \{1, 2, \dots, s\}$: est l'ensemble des s serveurs.

$\{\mu_i\}_{i \in I} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$, est l'ensemble des stratégies de chaque serveur.

$$U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) - C(\mu_i) & \text{si } \sum_{j=1}^n \mu_j > \lambda \\ R\mu_i - C(\mu_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $U_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ présente le gain du joueur i par unité de temps (fonction d'utilité).

Avec $\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$: est la part du marché de chaque serveur.

Après résolution du jeu, les résultats obtenus sont les suivants :

Les stratégies qui procurent un équilibre de Nash sont :

$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s = \mu_c$, telle que μ_c est une valeur à déterminer.

3.12 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des différents modèles d'attentes Markoviens avec des structures de récompense-coût.

L'objectif de ces travaux est d'étudier le comportement des clients au moment de leurs arrivées au système en déterminant les stratégies que les clients suivent pour pouvoir maximiser leurs gains, pour les jeux entre les clients; et d'étudier la concurrence entre les serveurs, en déterminant le meilleur taux de service à fournir par chaque serveur, en se basant sur le taux des autres, pour les jeux entre les serveurs.

Notons que tous ces modèles considèrent l'arrivée des clients individuellement. Nous proposons au prochaine chapitre l'analyse des modèles d'attente Markoviens avec arrivées par groupes de taille fixe, via la théorie des jeux.

Analyse de la décision des clients dans les files d'attente avec arrivées par groupes de taille fixe et effets de l'information

Introduction

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les clients arrivent un par un. Cependant dans diverses situations réelles, les clients arrivent en groupe d'une taille fixe ou bien plus généralement de taille aléatoire. Ces situations peuvent être représentées par des modèles d'attente avec arrivées par groupes.

Les systèmes d'attente avec arrivées par groupes ont été surtout étudiés pour la modélisation des phénomènes réels (par exemple : les systèmes informatiques), afin d'obtenir des informations sur leurs comportements. Parmi les auteurs qui ont étudié les caractéristiques des systèmes d'attente avec arrivées par groupes, on peut citer : Medhi.J[26], Arrun.B and Gautan[2], Leeh.W[24] ,...etc. Dans ces travaux, les auteurs considèrent des groupes de taille X aléatoire.

Dans ce chapitre, on propose une nouvelle approche mathématique, consistant en l'étude des modèles de file d'attente avec arrivées par groupes de taille fixe et avec la structure de récompense-coût. On s'est intéressé premièrement à déterminer les caractéristiques des modèles considérés, puis à déterminer les meilleures décisions à prendre par les clients dans l'objectif de maximiser leurs gains, tout en se basant sur l'information disposée. Pour cela, nous avons

étudié tout d'abord la file d'attente $M^2/M/1$, en suite on a généralisé les résultats obtenus au cas du modèle $M^k/M/1$.

4.1 Cas du modèle $M^2/M/1$

On considère une file d'attente Markovienne $M^2 \setminus M \setminus 1$, où les clients arrivent par groupes de deux clients suivant un processus de Poisson de taux λ . Le temps de service est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$, la capacité de la file est infinie et le service s'effectue selon la politique FIFO.

Le temps de service et les inter-arrivées sont mutuellement indépendants. Notre système est décrit par le processus $\{N(t), t \geq 0\}$. On suppose que chaque client reçoit une récompense de R unités lorsqu'il est servi. Il existe également un coût d'attente C par unité de temps aussi longtemps que le client reste dans le système (dans la file ou bien dans le service). Un client qui ne rejoint pas la file aura un gain égal à zéro.

Lorsqu'un groupe de deux clients arrivent, ils seront placés dans la file d'une manière aléatoire, pour cela on suppose de plus que lorsqu'un groupe de deux clients arrive, chaque client peut passer avant l'autre (classement dans la file) avec une probabilité $1/2$. On suppose aussi que $R - \frac{3C}{2\mu} > 0$, cette condition stipule que lorsque deux clients arrivent et trouvent le système vide, alors ils auront un gain positif s'ils décident de rejoindre le système. Cependant, la décision d'un client est supposée irrévocable (un client qui rejoint le système ne peut plus le quitter avant d'être servi).

Les clients sont supposés identiques et prennent leurs décisions au moment de leurs arrivées, dans l'objectif de maximiser leurs gains.

L'objectif de ce travail est de déterminer les meilleures décisions à prendre par les clients au moment de leurs arrivées au système. Cette étude nécessite une analyse mathématique complète du modèle $M^2/M/1$ afin de déterminer les caractéristiques qui interviennent quant à la prise de décision à savoir, le temps moyen de séjour, le nombre moyen de clients en attente dans la file ou dans le système, ...etc, selon le cas qui se présente. Dans ce modèle, nous allons considérer les deux cas suivants :

- **1- Cas observable :**

Les clients observent totalement la taille du système au moment de leurs arrivées.

- **2- Cas non-observable :**

Les clients n'observent pas la taille du système au moment de leurs arrivées.

4.2 Cas observable

Au moment de leurs arrivées, les clients sont totalement informés de la taille du système.

4.2.1 Caractéristiques du système

La détermination du graphe de transition nous aide à écrire les équations de l'état d'équilibre. Ce graphe est donné par la figure (4.1) suivante :

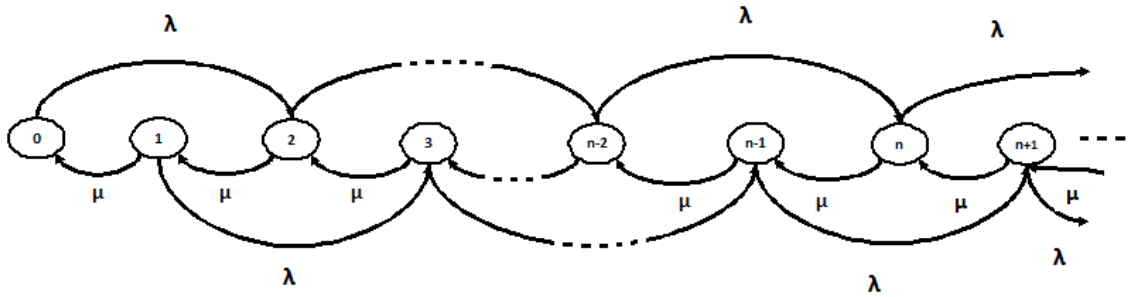


FIGURE 4.1 – Graphe de transition de la file $M^2/M/1$

On peut alors écrire les équations de balance correspondantes à ce système :

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1, \text{ pour } n = 0. \\ (\lambda + \mu) P_1 &= \mu P_2, \text{ pour } n = 1. \\ (\lambda + \mu) P_n &= \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-2}, \text{ pour } n \geq 2. \end{aligned}$$

Où :

$P_n = P[N(t) = n]$, $\forall t \geq 0$ sont les probabilités d'état du système.

La fonction génératrice de la distribution stationnaire

Notons que la fonction génératrice de la distribution stationnaire s'écrit sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} P_n z^n \quad (4.1)$$

En multipliant chaque coté des équations de l'état d'équilibre par z^n et en sommant terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda P_0 z^0 + (\mu + \lambda) P_1 z + \sum_{n \geq 2} (\lambda + \mu) P_n z^n &= \mu P_1 + \mu P_2 z + \sum_{n \geq 2} (\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-2}) z^n \\ \Leftrightarrow \lambda P_0 + (\mu + \lambda) P_1 z + (\lambda + \mu) \sum_{n \geq 2} P_n z^n &= \mu P_1 + \mu P_2 z + \mu \sum_{n \geq 2} P_{n+1} z^n + \lambda z^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^{n-2} \end{aligned}$$

En posant : $j = n + 1 \Rightarrow n = j - 1$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^{\infty} P_j z^j - \frac{1}{z} \sum_{j=3}^{\infty} P_j z^j &= \frac{1}{z} [f(z) - (P_0 + P_1 z + P_2 z^2)]. \\ \Leftrightarrow \lambda P_0 + (\mu + \lambda) P_1 z + (\mu + \lambda) [f(z) - (P_0 + P_1 z)] &= \mu P_1 + \mu P_2 z + \frac{\mu}{z} [f(z) - P_0 - P_1 z - P_2 z^2] + \lambda z^2 f(z) \\ \Leftrightarrow \lambda P_0 + (\mu + \lambda) P_1 z + (\mu + \lambda) f(z) - (\mu + \lambda) P_0 - (\mu + \lambda) P_1 z &= \mu P_1 + \mu P_2 z + \frac{\mu}{z} f(z) - \frac{\mu}{z} P_0 - \mu P_1 - \mu P_2 z + \lambda z^2 f(z) \\ &\Leftrightarrow f(z) [(\mu + \lambda) + \frac{\mu}{z} - \lambda z^2] = (\mu - \frac{\mu}{z}) P_0 \\ &\Leftrightarrow f(z) = (\mu - \frac{\mu}{z}) P_0 \left[\frac{z(\mu + \lambda) - \mu - \lambda z^3}{z} \right]^{-1} \\ &\Leftrightarrow f(z) = P_0 (\mu - \frac{\mu}{z}) \frac{z}{z(\mu + \lambda) - \mu - \lambda z^3} \end{aligned}$$

D'où :

$$f(z) = P_0 \left[\frac{z\mu - \mu}{z(\mu + \lambda) - \mu - \lambda z^3} \right] \quad (4.2)$$

La condition qui nous donne P_0 est :

$$\begin{aligned} f(1) = \sum_{n \geq 0} P_n = 1 &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[P_0 \left(\frac{\mu}{(\mu + \lambda) - 3z^2} \right) \right] \\ &\Leftrightarrow f(1) = \frac{\mu P_0}{\mu - 2\lambda} = 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$P_0 = \frac{\mu - 2\lambda}{\mu} = 1 - 2 \frac{\lambda}{\mu} \quad (4.3)$$

Ainsi, le régime stationnaire de ce système existe si : $\frac{2\lambda}{\mu} < 1$.

On pose $\rho = \frac{2\lambda}{\mu}$ donc $\mu = \frac{2\lambda}{\rho}$, l'équation (4.2) devient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right) \left[\frac{z \frac{2\lambda}{\rho} - \frac{2\lambda}{\rho}}{z \left(\frac{2\lambda}{\rho} + \lambda\right) - \frac{2\lambda}{\rho} - \lambda z^3} \right] \\ &\Leftrightarrow f(z) = 2(1 - \rho) \frac{z\lambda - \lambda}{\rho} \frac{\rho}{2\lambda\rho + \lambda\rho z - 2\lambda - \lambda\rho z^3} \\ &\Leftrightarrow f(z) = 2(1 - \rho) \left(\frac{z - 1}{2z + \rho z - 2 - \rho z^3} \right) = \frac{2(1 - \rho)(z - 1)}{2(z - 1) + \rho z(1 - z^2)} \\ f(z) &= \frac{2(1 - \rho)(z - 1)}{2(z - 1) - \rho z(1 - z)(1 + z)} = \frac{2(1 - \rho)}{2 - \rho z(1 + z)} \quad (4.4) \end{aligned}$$

L'expression finale de la fonction génératrice de la distribution stationnaire est donnée par :

$$f(z) = \frac{2(1 - \rho)}{2 - \rho z - \rho z^2} \quad (4.5)$$

Ce résultat peut ainsi nous aider à calculer le nombre moyen de clients dans le système.

Le nombre moyen de clients dans le système

Notons par \bar{N} , le nombre moyen de clients dans le système, donné par l'expression suivante :

$$\bar{N} = [f'(z)]_{z=1}$$

Pour cela, calculons :

$$f'(z) = \frac{-2(1-\rho)(-\rho-2\rho z)}{(2-\rho z-\rho z^2)^2}$$

On obtient alors pour $z = 1$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-2(1-\rho)(-3\rho)}{(2-2\rho)^2} = \frac{6\rho(1-\rho)}{4(1-\rho)^2} = \frac{3\rho}{2(1-\rho)} \\ f'(1) &= \frac{3}{2} \frac{2\frac{\lambda}{\mu}}{2(1-2\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{3\lambda}{\mu(\frac{\mu-2\lambda}{\mu})} \end{aligned} \quad (4.6)$$

D'où le nombre moyen de clients dans le système est donné par l'expression suivante :

$$\bar{N} = \frac{3\lambda}{\mu - 2\lambda} \quad (4.7)$$

Le temps moyen de séjour

En utilisant les formules de Little et grace au résultat donné précédemment, on peut trouver le temps moyen de séjour d'un client dans le système, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{T}_s = \frac{\bar{n}}{\text{taux d'entrée}}$$

Qui n'est autre que :

$$\bar{T}_s = \frac{3}{2\mu - 4\lambda} \quad (4.8)$$

4.2.2 Modélisation sous forme d'un jeu

Les clients observent la file d'attente au moment de leurs arrivées, ensuite ils prennent une décision qui leurs permet de maximiser leurs gains. Cette situation peut être modélisée par un jeu entre les deux clients qui arrivent. Les alternatives possibles pour un client sont :

-Entrer (E).

-Quitter (Q).

Les deux clients prennent la décision d'entrer ou bien de quitter d'une manière simultanée.

L'expression de ce jeu est donnée comme suit :

$$J = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I} \rangle \quad (4.9)$$

Tel que :

$I = \{1, 2\}$: est l'ensemble des joueurs (groupes de 2 clients qui arrivent au système).

$S_i = \{s^1(t), s^2(t), s^3(t)\}$ sont les stratégies du client i , $\forall i \in \{1, 2\}$

Où :

$$s^1(t) = \begin{cases} \text{entrer} & \text{si } N(t) \leq n \\ \text{quitter} & \text{sinon} \end{cases}, \forall n=0,1,2,\dots$$

$s^2(t) = \text{Entrer}$.

$s^3(t) = \text{Quitter}$.

$U_i(s_i, s_{-i})$: est la fonction d'utilité de chaque client ($i = \overline{1, 2}$), qui est la même pour les deux, puisqu'on est dans un cadre d'un jeu symétrique.

La fonction d'utilité :

Considérons l'arrivée de deux clients au système, et supposons que ces derniers trouvent n clients dans le système, chaque client aura alors un gain : $R - \frac{C(n+1)}{\mu}$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$ (s'il passe le premier) et aura un gain : $R - \frac{C(n+2)}{\mu}$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$ (s'il passe en second).

Notons par $y_i \in \{0, 1\}$ la valeur qui caractérise l'action du joueur " i ", $i \in \{1, 2\}$ qui est définie de la manière suivante :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i = \text{entrer} \\ 0 & \text{si } s_i = \text{quitter} \end{cases}, \forall i = \overline{1, 2}$$

On peut alors écrire l'expression de la fonction d'utilité comme suit :

$$U_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} R - C \frac{2n+1+y_1+y_2}{2\mu} & \text{si } y_i = 1 \\ 0 & \text{si } y_i = 0 \end{cases}$$

La forme extensive de ce jeu est donnée par la figure suivante :

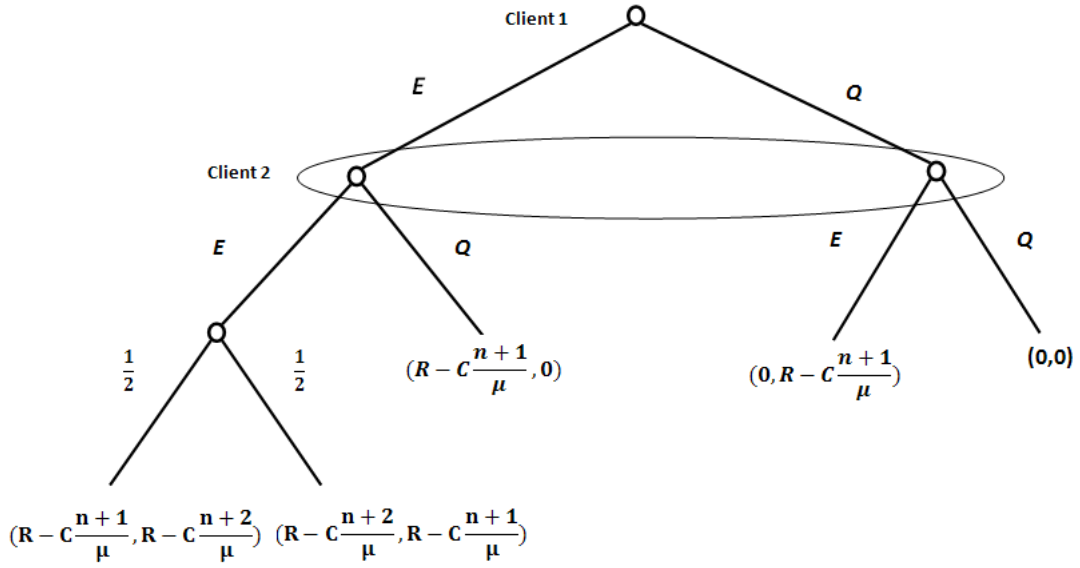


FIGURE 4.2 – La forme extensive du jeu associé au système $M^2/M/1$ observable

4.2.3 Résolution du jeu

L'objectif des clients est de maximiser leurs bénéfices. Un client décide alors de rejoindre le système s'il aura un gain positif. On suppose, de plus, qu'il préfère de rejoindre le système même s'il aura un gain nul, cela reflète son désir d'être servi. Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$U_i(E, E) \geq 0 \Rightarrow R - \frac{C(2n+3)}{2\mu} \geq 0 \Rightarrow 2n + 3 \leq \frac{2\mu R}{C}.$$

$$\Rightarrow 2n \leq \frac{2\mu R - 3C}{C} \Rightarrow n \leq \frac{2\mu R - 3C}{2C}.$$

Puisque n ne prend que les valeurs entières, on peut alors écrire :

$$U_i(E, E) \geq 0 \Rightarrow n \leq \left\lfloor \frac{2\mu R - 3C}{2C} \right\rfloor \tag{4.10}$$

Ce qui nous permet d'introduire le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Dans une file d'attente $M^2/M/1/FIFO$ observable, avec $2\lambda < \mu$, il existe un seuil $n_e = \left\lfloor \frac{2\mu R - 3C}{2C} \right\rfloor$ tel que, les stratégies "entrer si $N(t) \leq n_e$, quitter autrement" procurent un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Preuve. *Considérons l'arrivée de deux clients à l'instant t , et supposons qu'ils trouvent un certain nombre n_1 de clients dans le système qui est inférieur ou égal au seuil n_e . Le gain espéré par chacun des deux clients s'ils décident d'entrer est alors : $R - C \frac{(2n_1+3)}{2\mu} \geq 0$. Par conséquent, ces deux clients préfèrent d'entrer, car un client qui décide de quitter aura un gain inférieur ou égal à celui procuré s'il a décidé d'entrer.*

Maintenant, supposons que ces deux clients trouvent un certain nombre n_2 de clients dans le système qui est supérieur à n_e . Lorsque les deux clients décident de quitter, chacun d'eux aura un gain nul et si un client décide d'entrer, il aura un gain : $R - C \frac{n_2+1}{\mu} < 0$, par conséquent ce client n'a pas intérêt à rejoindre le système.

Le graphe de transition devient alors :

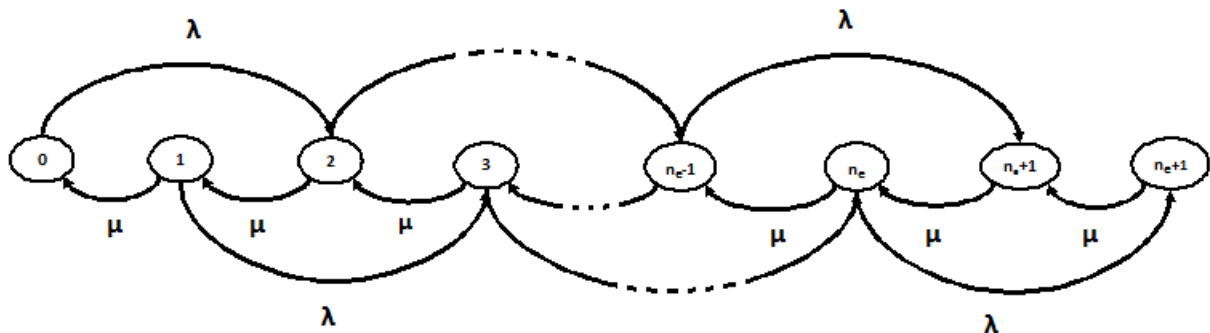


FIGURE 4.3 – La file d'attente $M^2/M/1$ observable et avec récompense-coût

Pour bien comprendre le jeu, utilisons les matrices, qui peuvent être construites au moment d'arrivées des clients.

À chaque état du système, on peut associer un jeu entre les deux clients. Supposons alors une arrivée de deux clients, on peut ainsi traiter deux cas :

1. La taille du système est $n_1 \leq n_e$. Dans ce cas, les matrices de gain de chaque client sont données par :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} E \\ Q \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ Q \end{array} & \begin{pmatrix} (R - C \frac{2n_1+3}{2\mu}, R - C \frac{2n_1+3}{2\mu}) & (R - C \frac{n_1+1}{\mu}, 0) \\ (0, R - C \frac{n_1+1}{\mu}) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Par conséquent, les stratégies qui procurent l'équilibre de Nash sont (E, E) .

2. La taille du système est $n_2 > n_e$. Dans ce cas, les matrices de gain de chaque client est donnée par :

$$A = \begin{array}{c} E \\ Q \end{array} \left(\begin{array}{cc} (R - C \frac{2n_2+3}{2\mu}, R - C \frac{2n_2+3}{2\mu}) & (R - C \frac{n_2+1}{\mu}, 0) \\ (0, R - C \frac{n_2+1}{\mu}) & (0, 0) \end{array} \right)$$

Par conséquent, les stratégies qui procurent un équilibre de Nash sont (Q, Q)

Les clients ont intérêt à jouer l'équilibre de Nash défini dans le théorème (4.2.1), cela leurs permettra de maximiser leurs gains.

4.3 Cas non-observable

Dans ce cas, les clients ne sont pas au courant de la taille du système au moment de leurs arrivées, ils ne savent pas si c'est bénéfique d'entrer ou bien de quitter. Par conséquent, chaque client entre au système avec une certaine probabilité p , que nous allons déterminer par la suite.

On remarque dans ce cas que l'interaction n'existe pas seulement entre les deux clients qui arrivent au système mais entre une infinité de clients puisque chaque client prend une décision en fonction d'une infinité de clients, on peut modéliser cette situation par un jeu sous forme normale qui peut être écrit comme suit :

$$J = \{I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I}\},$$

où :

I représente l'ensemble des joueurs qui sont les clients.

$S_i = \{E, Q\}$: est l'ensemble de stratégies de chaque joueur.

$U_i(p) = p(R - C\overline{T_s})$: est la fonction d'utilité de chaque joueur.

4.3.1 Caractéristiques du système

Pour définir la fonction d'utilité d'un client, il est nécessaire de déterminer les caractéristiques du système, en commençant par la fonction génératrice de la distribution stationnaire et le nombre moyen de clients dans le système, pour pouvoir déterminer le temps moyen de séjour d'un client.

4.3.2 La fonction génératrice de la distribution stationnaire

Le graphe de transition qui correspond à ce système est donné par la figure suivante :

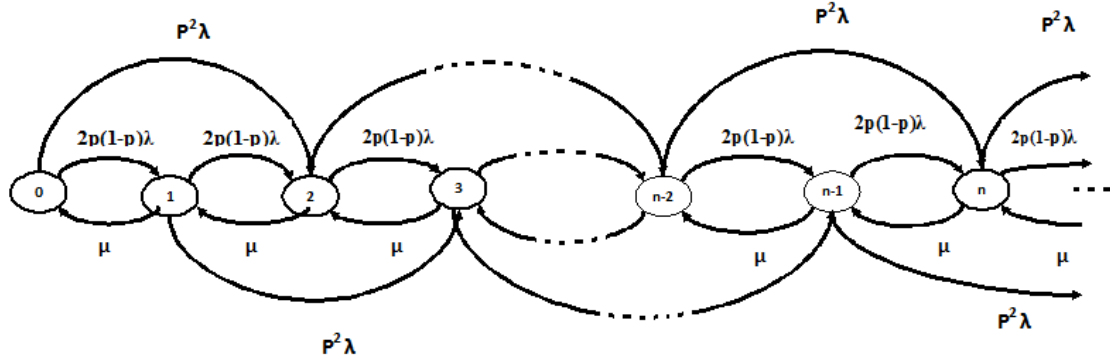


FIGURE 4.4 – La file d’attente $M^2/M/1$ non observable et avec récompense-coût

Les équations de l’état d’équilibre sont données comme suit :

Pour $n = 0$:

$$(p^2\lambda + 2p(1-p)\lambda)P_0 = \mu P_1 \Leftrightarrow \lambda p(2-p)p_0 = \mu P_1$$

Pour $n = 1$:

$$(p(2-p)\lambda + \mu)P_1 = 2p(1-p)\lambda P_0 + \mu P_2$$

Pour $n \geq 2$

$$(p(2-p)\lambda + \mu)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda p^2 P_{n-2} + \lambda 2p(1-p)P_{n-1}$$

On peut alors écrire :

$$\lambda p(2-p)P_0 + (p(2-p)\lambda + \mu)P_1 z + (p(2-p)\lambda + \mu) \sum_{n \geq 2} P_n z^n = \mu P_1 + (\mu P_2 + 2p(1-p)\lambda P_0)z + \mu \sum_{n \geq 2} P_{n+1} z^n + \lambda p^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2} z^n + 2\lambda p(1-p) \sum_{n \geq 2} P_{n-1} z^n.$$

En posant $j = n + 1$, cela implique que $n = j - 1$, et on pourra écrire

$$\lambda p(2-p)P_0 + (\lambda p(2-p) + \mu)P_1 z + (\lambda p(2-p) + \mu)(f(z) - P_0 - P_1 z) = \mu P_1 + (\mu P_2 + 2\lambda p(1-p)P_0)z + \frac{\mu}{z}(f(z) - P_0 - P_1 z - P_2 z^2) + \lambda p^2 z^2 f(z) + 2\lambda p(1-p)z(f(z) - p_0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda p(2-p)P_0 + \lambda p(2-p)p_1 z + \mu P_1 z + \lambda p(2-p)f(z) + \mu f(z) - \lambda p(2-p)P_0 - \mu P_0 - \lambda p(2-p)P_1 z - \mu P_1 z = \mu P_1 + \mu P_2 z + 2\lambda p(1-p)P_0 z + \frac{\mu}{z}f(z) - \frac{\mu}{z}P_0 - \mu P_1 z - \mu P_2 z + \lambda p^2 z^2 f(z) + 2\lambda p(1-p)z f(z) - 2\lambda p(1-p)P_0 z$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda p(2-p)f(z) + \mu f(z) - \mu P_0 = \frac{\mu}{z}f(z) - \frac{\mu}{z}P_0 + \lambda p^2 z^2 f(z) + 2\lambda p(1-p)zf(z) \\
&\Leftrightarrow f(z)[\lambda p(2-p) + \mu - \frac{\mu}{z} + \lambda p^2 z^2 + 2\lambda p(1-p)z] = \mu P_0 - \frac{\mu}{z}P_0 \\
&\Leftrightarrow f(z)[\lambda p(2-p) + \mu - \frac{\mu}{z} + \lambda p^2 z^2 + 2\lambda p(1-p)z] = P_0(\mu - \frac{\mu}{z})
\end{aligned}$$

D'où :

$$f(z) = P_0 \left(\frac{\mu - \frac{\mu}{z}}{\lambda p(2-p) + \mu - \frac{\mu}{z} - \lambda p^2 z^2 - 2\lambda p(1-p)z} \right) \quad (4.11)$$

Pour déterminer P_0 , il suffit de calculer $\lim_{z \rightsquigarrow 1} f(z)$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= P_0 \left(\frac{z\mu - \mu}{\lambda p(2-p)z + \mu z - \mu - \lambda p^2 z^3 - 2\lambda p(1-p)z^2} \right) \\
\lim_{z \rightsquigarrow 1} f(z) &= \lim_{z \rightsquigarrow 1} \left(P_0 \frac{\mu}{\lambda p(2-p) + \mu - 3\lambda p^2 z^2 - 4\lambda p(1-p)z} \right) \\
&= P_0 \frac{\mu}{2\lambda p - \lambda p^2 + \mu - 3\lambda p^2 - 4\lambda p + 4\lambda p^2} \\
&\Leftrightarrow P_0 \frac{\mu}{-2\lambda p + \mu} = 1 \Leftrightarrow P_0 = \frac{\mu - 2\lambda p}{\mu}
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$P_0 = 1 - \frac{2\lambda p}{\mu} \quad (4.12)$$

En posant $\rho = \frac{2\lambda p}{\mu}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(1 - \frac{2\lambda p}{\mu}\right) \left[\frac{\left(\frac{2\lambda p}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho z}\right)}{\lambda p(2-p) + \frac{2\lambda p}{\rho} - \frac{2\lambda p}{\rho z} - \lambda p^2 z^2 - 2\lambda p(1-p)z} \right] \\
f(z) &= \frac{(1-\rho)\left(\frac{2\lambda p}{\rho}z - \frac{2\lambda p}{\rho}\right)}{\lambda p(2-p)z + \frac{2\lambda p}{\rho}z - \frac{2\lambda p}{\rho} - \lambda p^2 z^3 - 2\lambda p(1-p)z^2} \\
f(z) &= \frac{(z-1)\frac{2\lambda p(1-\rho)}{\rho}}{\lambda p(2-p)z + \frac{2\lambda p}{\rho}z - \frac{2\lambda p}{\rho} - \lambda p^2 z^3 - 2\lambda p(1-p)z^2} \\
f(z) &= \frac{(z-1)\frac{2p(2-\rho)}{\rho}}{p(2-p)z + \frac{2p}{\rho}z - \frac{2p}{\rho} - p^2 z^3 - 2p(1-p)z^2} \\
f(z) &= \frac{2p(2-\rho)(z-1)}{p(2-p)\rho z + 2pz - 2p - p^2 \rho z^3 - 2p(1-p)\rho z^2}
\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{2(1-\rho)(z-1)}{(2-p)\rho z + 2z - 2 - p\rho z^3 - 2(1-p)\rho z^2}$$

$$f(z) = \frac{2(1-\rho)(z-1)}{((2-p)\rho + 2)z - p\rho z^3 - 2(1-p)\rho z^2 - 2}$$

$$f(z) = \frac{2(z-1)(1-\rho)}{2(z-1) - p\rho z(z - \frac{p-2}{p})(z-1)}$$

$$f(z) = \frac{2(z-1)(1-\rho)}{(z-1)[2 - p\rho z(z - \frac{p-2}{p})]}$$

D'où :

$$f(z) = \frac{2(1-\rho)}{2 - p\rho z(z + \frac{2-p}{p})} \quad (4.13)$$

4.3.3 Le nombre moyen de clients dans le système

L'expression $\bar{N} = [f'(z)]_{z=1}$ nous permet de déterminer le nombre moyen de clients dans le système. Ainsi, on aura :

$$f'(z) = \frac{2(1-\rho)(2p\rho z - \rho(p-2))}{[2 - p\rho z(z - \frac{p-2}{p})]^2}$$

Cherchons a présent $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{2(1-\rho)(2p\rho - \rho(p-2))}{[2 - p\rho(1 - \frac{p-2}{p})]^2}$$

$$f'(1) = \frac{2(1-p)(p\rho + 2\rho)}{[2 - p\rho(\frac{2}{p})]^2}$$

$$f'(1) = \frac{2\rho(1-\rho)(p+2)}{4(1-\rho)^2}$$

Finalement :

$$\bar{N} = f'(1) = \frac{\rho(p+2)}{2(1-\rho)} \quad (4.14)$$

4.3.4 Le temps moyen de séjour \bar{T}_s

De même, en utilisant les formules de Little, on obtient l'expression du temps moyen de séjour \bar{T}_s donné par : $\bar{T}_s = \frac{\bar{N}}{\text{taux d'entrée}}$

$$\begin{aligned}\bar{T}_s &= \frac{\frac{\rho(p+2)}{2(1-\rho)}}{(1.2p(1-p) + 2p^2)\lambda} \\ \Leftrightarrow \bar{T}_s &= \frac{(p+2)\rho}{2(1-\rho)(2p(1-p) + 2p^2)\lambda} \\ \Leftrightarrow \bar{T}_s &= \frac{(p+2)\rho}{2(1-\rho)(2p - 2p^2 + 2\lambda p^2)\lambda} \\ \Leftrightarrow \bar{T}_s &= \frac{(p+2)\rho}{4p\lambda(1-\rho)}\end{aligned}$$

En remplaçant ρ par $\frac{2p\lambda}{\mu}$, on aura :

$$\begin{aligned}\bar{T}_s &= \frac{\frac{2p\lambda}{\mu}(p+2)}{4p\lambda(1 - \frac{2p\lambda}{\mu})} \\ \Leftrightarrow \bar{T}_s &= \frac{\frac{2}{\mu}(p+2)}{\frac{4}{\mu}(\mu - 2p\lambda)}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\bar{T}_s = \frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}. \quad (4.15)$$

La fonction d'utilité d'un client s'écrit alors sous la forme :

$$U(p) = p\left(R - C \frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}\right) \quad (4.16)$$

4.3.5 Résolution du jeu

Si le gain moyen d'un client est positif ou nul lorsqu'on remplace la valeur de p par 1 dans la fonction d'utilité des clients, donc tous les clients entrent au système, sinon le gain moyen d'un client est négatif, mais cela ne veut pas dire forcément que lorsqu'un client entre au système aura un gain négatif puisque on a fixé au début la condition $R > \frac{3C}{2\mu}$ (au moins le gain obtenu par les deux clients qui arrivent au système lorsque sa taille égale à zéro est positif), pour cela les clients entrent au système avec une certaine probabilité p . L'objectif est alors de trouver la stratégie mixte de sécurité p_e , tel que chaque client entre au système avec la probabilité p_e .

Un client est indifférent entre rejoindre et quitter le système s'il obtient un gain nul en le rejoignant.

$$\begin{aligned} U(p) = 0 &\Rightarrow R - C \frac{p+2}{2(\mu-2\lambda p)} = 0 \Rightarrow 2R(\mu-2\lambda p) - C(p+2) = 0 \\ &\Rightarrow 2R\mu - 4R\lambda p - Cp - 2C = 0 \Rightarrow p = \frac{2R\mu - 2C}{4R\lambda + C} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cela nous permet alors d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Dans une file d'attente $M^2/M/1/FIFO$ non observable avec $2\lambda < \mu$, il existe un équilibre en stratégies mixtes, "entrer avec la probabilité p_e ", tel que :*

$$p_e = \begin{cases} 1 & \text{si } R \in [\frac{3C}{2\mu-4\lambda}, \infty[\\ \frac{2R\mu-2C}{4R\lambda+C} & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. Lorsque $R \in [\frac{3C}{2\mu-4\lambda}, \infty[$, tous les clients préfèrent d'entrer au système, car $U(1) = R - C \frac{3}{2(\mu-2\lambda)} > 0$, aucun client n'a intérêt à ne pas rejoindre le système car sinon il aura un gain nul.

Supposons maintenant que $R < \frac{3C}{2\mu-4\lambda}$, donc "entrer avec la probabilité 1" n'est pas un équilibre de Nash, supposons alors que tous les clients entrent au système avec la probabilité p_e , le gain espéré par un client est : $U(p_e) = p_e(R - C \frac{p_e+2}{2(\mu-2p_e\lambda)}) = 0$, soit alors un des deux clients qui arrivent au système qui dévie unilatéralement et choisi une probabilité p d'entrée au système ($p \neq p_e$), son gain est alors :

$$U(p_e, p) = p(R - C \frac{p_e+2}{2\mu-4\lambda p_e}) = 0, \text{ ce client n'a pas donc intérêt à changer de stratégie.}$$

Dans cette section, Nous avons pu déterminer les équilibres de Nash que les clients peuvent suivre pour pouvoir maximiser leurs gains dans le modèle $M^2/M/1$ pour les deux cas (observable et non-observable), nous allons maintenant généraliser l'étude dans la section qui suit.

4.4 Généralisation : Cas du modèle $M^k/M/1$

Supposons maintenant qu'à un instant t il y'a k clients qui arrivent au système, la file d'attente est alors notée $M^k/M/1/FIFO$.

On considère la même structure de récompense-coût définie dans le modèle précédent, et les mêmes hypothèses sous les changements suivants :

On suppose que lorsqu'un groupe de k clients arrivent, chaque client du groupe peut être classé dans la i^{eme} place parmi k avec une probabilité $\frac{1}{k}$.

Finalement, on suppose que $R - C \frac{k+1}{2\mu} > 0$. Cette condition stipule que lorsqu'un groupe de k clients arrive, ces derniers obtiennent des gains moyens positifs s'ils trouvent le système vide et ils décident de rejoindre la file. De la même manière que le modèle $M^2/M/1$, on définira le jeu correspondant en fonction de l'information disposée aux clients.

4.4.1 Cas observable

Modélisation sous forme de jeu

Cette situation peut être modélisée par un jeu entre les k clients qui arrivent au même temps au système, les clients étant informés de l'état du système, ils vont alors prendre la décision d'entrer ou bien de quitter en fonction de cette information et d'une manière simultanée.

Le jeu peut être écrit sous la forme suivante :

$$J = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I} \rangle, \quad (4.18)$$

où :

$I = \{1, \dots, k\}$ est l'ensemble des joueurs qui est constitué de l'ensemble des k clients.

$\{S_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}} = \{s^1(t), s^2(t), s^3(t)\}$ est l'ensemble des stratégies de chaque client.

Avec

$$s^1(t) = \begin{cases} \text{entrer}(E) & \text{si } N(t) \leq n \\ \text{quitter}(Q) & \text{sinon} \end{cases}, \forall n=0,1,2,\dots$$

$$s^2(t) = \text{Entrer}(E).$$

$$s^3(t) = \text{Quitter}(Q).$$

$U_i(s_i, s_{-i})$: est la fonction d'utilité de chaque client " i ", $i \in \{1, \dots, k\}$ que nous allons déterminer ci-après.

Lorsqu'un groupe de k clients arrive et observent n clients dans le système, si tous ces clients décident d'entrer alors le gain moyen de chacun est donné par :

$$U_i(E, \dots, E) = R - C \left(\frac{n+1}{\mu} \frac{1}{k} + \frac{n+2}{\mu} \frac{1}{k} + \dots + \frac{n+k}{\mu} \frac{1}{k} \right) = R - C \left(\frac{1}{k\mu} \left(\sum_{i=1}^k n+i \right) \right).$$

$$= R - C\left(\frac{1}{k\mu}(kn + \sum_{i=1}^k i)\right) = R - C\left(\frac{1}{k\mu}(kn + \frac{(1+k)k}{2})\right) = R - C\left(\frac{n}{\mu} + \frac{1+k}{2\mu}\right). \quad (4.19)$$

Notons par $y_i \in \{0, 1\}$ la valeur qui caractérise l'action du joueur "i", $i \in \{1, \dots, k\}$ qui est définie de la manière suivante :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i = \text{entrer} \\ 0 & \text{si } s_i = \text{quitter} \end{cases}, \forall i = \overline{1, k}$$

La fonction d'utilité de chaque client peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$U_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} R - C \frac{2n+1+\sum_{j=1}^k y_j}{2\mu} & \text{si } y_i = 1 \\ 0 & \text{si } y_i = 0 \end{cases}$$

Les clients décident tous de rejoindre le système s'ils auront un gain moyen positif.

$$\text{On a } U(E, \dots, E) \geq 0 \Rightarrow R - C \frac{2n+k+1}{2\mu} \geq 0 \Rightarrow 2R\mu - C(2n+k+1) \geq 0 \Rightarrow 2n+k+1 \leq \frac{2R\mu}{C}$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{\frac{2R\mu}{C} - k - 1}{2}$$

D'où :

$$U(E, \dots, E) \geq 0 \Rightarrow n \leq \frac{2R\mu - C(k+1)}{2C} \quad (4.20)$$

Et puisque n ne peut prendre que des valeurs entières, donc :

$$U(E, \dots, E) \geq 0 \Rightarrow n \leq \left\lfloor \frac{2R\mu - C(k+1)}{2C} \right\rfloor \quad (4.21)$$

On pose

$$n_e = \left\lfloor \frac{2R\mu - C(k+1)}{2C} \right\rfloor$$

Lorsque $N(t) \leq n_e$ tous les clients préfèrent de rejoindre la file d'attente. L'équilibre de Nash est alors "entrer" pour tous les clients. Si $N(t) \in \{n_e + 1, \dots, n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ alors s'il existe un nombre L qui satisfait les deux conditions suivantes :

- (a). $L \leq k - 2j$, $j = N(t) - n_e$, $j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$
- (b). $L + 1 > k - 2j$

Alors l'équilibre de Nash existe lorsque L clients entrent et $k - L$ clients quittent, sinon l'équilibre de Nash est quitter. Si $N(t) > n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, alors l'équilibre de Nash est "quitter". Tous ces équilibres seront donnés par le théorème qui suit.

Puisque L, k, j sont des entiers, alors au lieu de parler des condition (a) et (b), on parle tout simplement de la condition (c) suivante :

(c). $L = k - 2j, j = N(t) - n_e, j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$.

Théorème 4.4.1. *Dans une file d'attente $M^k/M/1/FIFO$ observable par les clients, avec $\lambda k < \mu$, il existe un seuil $n_e = \lfloor \frac{2R\mu - C(k+1)}{2C} \rfloor$ tel que les stratégies suivantes procurent des équilibres de Nash en stratégies pures :*

{	<p>entrer</p> <p>L clients entrent et $k-l$ clients quittent</p> <p>quitter</p>	<p>si $N(t) \leq n_e$</p> <p>si $\exists L$ satisfaisant (c), si $N(t) \in \{n_e + 1, \dots, n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$;</p> <p>si $N(t) > n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ou bien si $N(t) \in \{n_e + 1, \dots, n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$</p> <p>et $\nexists L$ qui satisfait la condition (c).</p>
---	---	--

tel que :

$$n_e = \lfloor \frac{2R\mu - C(k+1)}{2C} \rfloor.$$

la condition (c) est donnée comme suit :

(c). $L = k - 2j, j = N(t) - n_e, j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$, avec $L \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$.

Preuve. *Considérons une arrivée de k clients qui trouvent la taille du système $n_1 \leq n_e$. Si ces clients entrent au système, alors le gain correspondant pour chacun est $R - C \frac{2n_1 + k + 1}{2\mu} \geq 0$. Si un client décide de quitter, il aura un gain nul, donc il n'a pas intérêt à ne pas rejoindre le système.*

Supposons maintenant que ces k clients trouvent la taille du système $n_2 \in \{n_e + 1, \dots, n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ tel qu'il existe un nombre $L \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ pour lequel la condition (c) est vérifiée, on sait de plus que $R - C \frac{2n_e + 1 + k}{2\mu} \geq 0$, lorsque L clients entrent au systèmes, ils auront des gains : $R - C \frac{2(n_e + j) + 1 + L}{2\mu} = R - C \frac{2n_e + 2j + 1 + L}{2\mu} \geq R - C \frac{2n_e + 1 + k}{2\mu}, j = N(t) - n_e, j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$, aucun de ces clients n'a intérêt à quitter car sinon il aura un gain nul et aucun des $k - L$ clients n'a intérêt à rejoindre le système car sinon il aura un gain $R - C \frac{2n_e + 2j + 2}{2\mu} < 0$, donc dans ce cas il existe une multiplicité d'équilibres de Nash pour lesquels L clients entrent et $k - L$ clients quittent.

Si $n_2 \in \{n_e + 1, \dots, n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ et il n'existe pas un nombre L qui satisfait la condition (c) alors tous les clients préfèrent de quitter car si un client décide de rejoindre le système, il aura un gain $R - C \frac{2n_e + 2j + 2}{2\mu} < 0$.

Si la taille du système est $n_3 > n_e + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, aucun client n'a intérêt à rejoindre le système car celui qui le rejoint aura un gain $R - C \frac{2n_3 + 2}{2\mu} < 0$

L'un des inconvénients de l'équilibre de Nash est qu'ils peut exister plusieurs, comme on l' a vu sur notre cas lorsque L clients entrent et $k - L$ quittent. Puisqu'il existe L places qui procurent un gain moyen positif, on propose alors que chaque client entre au système avec la probabilité $\frac{L}{k}$.

4.4.2 Cas non-observable

Les clients ne sont pas au courant de la taille du système au moment de leurs arrivées. Pour cela, ils vont entrer avec une certaine probabilité p qui satisfait certaines conditions que nous allons déterminer par la suite. Nous allons tout d'abord déterminer les caractéristiques de ce système qui nous seront utiles pour la détermination de la fonction d'utilité des clients.

Caractéristiques du système

À chaque instant d'arrivée, il y'a k clients qui arrivent au système. Chaque client entre avec une probabilité p . Le nombre de clients qui entrent au système à chaque instant d'arrivée est une variable aléatoire de loi binomial de paramètre k et p . Si on note cette variable aléatoire par X , alors $X \rightsquigarrow B(k, p)$,

$$P(X = i) = C_k^i p^i (1 - p)^{k-i} = b_i, \quad i = \{0, 1, \dots, k\}.$$

La fonction génératrice de la distribution stationnaire

On peut écrire les équations de balance correspondantes à ce système :

$$\begin{cases} \lambda \sum_{i=1}^k b_i P_0 = \mu P_1, & n=0 \\ (\lambda \sum_{i=1}^k b_i + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^n P_{n-i} b_i, & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Ce système peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \lambda(1 - b_0) P_0 = \mu P_1, & n=0 \\ (\lambda(1 - b_0) + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^n P_{n-i} b_i, & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Les équations de l'état d'équilibre peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 + \lambda b_0 P_0 \\ (\lambda + \mu) P_n = \mu P_{n+1} + \lambda \sum_{i=0}^n P_{n-i} b_i, & n \geq 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Pour résoudre ce système, nous allons utiliser les deux fonctions génératrices suivantes :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad \text{et} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

En multipliant chaque coté des équations (4.22) par z^n , et en sommant terme à terme, nous obtenons :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n = \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} b_i z^n \quad (4.23)$$

Remarquons que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{n-i} b_i z^n &= P_0 b_0 z^0 + P_1 b_0 z^1 + P_2 b_0 z^2 + P_0 b_1 z^2 + \dots + \sum_{i=0}^n P_{n-i} b_i z^n + \dots \\ &= b_0 z^0 (P_0 z^0 + P_1 z^1 + P_2 z^2 + \dots + P_n z^n + \dots) + b_1 z^1 (P_0 z^0 + P_1 z^1 + \dots) + \dots + b_n z^n (P_0 z^0 + P_1 z^1 + \dots) + \dots \\ &= f(z) \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = f(z) B(z) \end{aligned}$$

L'équation (4.23) devient alors :

$$\lambda f(z) + \mu[f(z) - P_0] = \frac{\mu}{z}(f(z) - P_0) + \lambda B(z) f(z)$$

D'où :

$$f(z) = \frac{\mu P_0 (1 - z)}{\mu(1 - z) - \lambda z(1 - B(z))} \quad (4.24)$$

Sachant que $\lim_{z \rightarrow 1} B'(z) = E(X)$ et $f(1) = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$, on aura alors :

$$\frac{-\mu P_0}{-\mu + \lambda E(X)} = 1 \Leftrightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda E(X)}{\mu}$$

Ainsi, le régime stationnaire de ce système existe si $\rho = \frac{\lambda E(X)}{\mu} < 1$.

Comme $P_0 = 1 - \rho$

On peut alors écrire :

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = \sum_{i=0}^k C_k^i (pz)^i (1-p)^{k-i} = (pz + 1 - p)^k$$

La fonction génératrice de la distribution stationnaire devient alors :

$$f(z) = \frac{\mu p_0 (1 - z)}{\mu(1 - z) - \lambda z(1 - (pz + 1 - p)^k)} \quad (4.25)$$

En dérivant par rapport à z , on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \mu p_0 \left(\frac{-\mu(1-z) + \lambda z + (1-z) - \lambda z(1 - (pz+1-p)^k) - (1-z)[- \mu - \lambda + \lambda(pz+1-p)^k + k \lambda p z (pz+1-p)^{k-1}]}{[\mu(1-z) - \lambda z(1 - (pz+1-p)^k)]^2} \right) \\ f'(z) &= \mu p_0 \left(\frac{\lambda - \lambda(pz + 1 - p)^k - \lambda k p z (1 - z)(pz + 1 - p)^{k-1}}{[\mu(1 - z) - \lambda z(1 - (pz + 1 - p)^k)]^2} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le nombre moyen de clients dans le système

Pour obtenir le nombre moyen de client dans le système, on calcule $:\lim_{z \rightsquigarrow 1} f'(z)$. Ainsi,

$$\lim_{z \rightsquigarrow 1} f'(z) = \lim_{z \rightsquigarrow 1} [\mu p_0 \left(\frac{-2\lambda k p (pz+1-p)^{k-1} + 2\lambda k p z (pz+1-p)^{k-1} - \lambda k (k-1) p^2 z (1-z) (pz+1-p)^{k-1}}{2(-\mu - \lambda + \lambda(pz+1-p)^k + \lambda k z p (pz+1-p)^{k-1}) (\mu(1-z) - \lambda z (1-(pz+1-p)^k))} \right)]$$

$$\lim_{z \rightsquigarrow 1} f'(z) = \lim_{z \rightsquigarrow 1} [\mu p_0 \frac{-2k(k-1)\lambda p^2 (pz+1-p)^{k-1} + 2\lambda k p (pz+1-p)^{k-1} + 2k(k-1)\lambda p^2 z (pz+1-p)^{k-2} - b}{2a + 2(-\mu - \lambda + \lambda(pz+1-p)^k + \lambda k p z (pz+1-p)^{k-1})^2}]$$

Où :

$$a = [\lambda k p (pz+1-p)^{k-1} + \lambda k p (pz+1-p)^{k-1} + \lambda k (k-1) p^2 z (pz+1-p)^{k-1}] [\mu(1-z) - \lambda z (1-(pz+1-p)^k)]$$

$$\text{et } b = -\lambda k (k-1) p^2 (1-2z) (pz+1-p)^{k-1} - \lambda k (k-1)^2 p^3 z (1-z) (pz+1-p)^{k-2}$$

$$\lim_{z \rightsquigarrow 1} f'(z) = \mu p_0 \frac{-2k(k-1)\lambda p^2 + 2\lambda k p + 2k(k-1)\lambda p^2 + \lambda k (k-1) p^2}{2(-\mu - \lambda + \lambda + \lambda k p)}$$

$$\lim_{z \rightsquigarrow 1} f'(z) = \mu p_0 \frac{2\lambda k p + \lambda k (k-1) p^2}{2(\lambda k p - \mu)}$$

Finalement,

$$\bar{N} = \mu(1-\rho) \frac{2\lambda k p + \lambda k (k-1) p^2}{2(\lambda k p - \mu)} \quad (4.27)$$

Le temps moyen de séjour

On peut écrire l'expression du temps moyen de séjour :

$$\bar{T}_s = \frac{\bar{n}}{\text{taux d'entrée}} = \frac{\bar{n}}{E(X)\lambda}$$

$$\bar{T}_s = \frac{\lambda k p ((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p) \lambda k p}$$

D'où :

$$\bar{T}_s = \frac{((k-1)p + 2)}{2(\mu - \lambda k p)} \quad (4.28)$$

4.4.3 Le jeu associé

Cette situation peut être modélisée par un jeu entre les clients du moment que chaque client prend sa décision en fonction d'une infinité de clients. Ce jeu peut être défini comme suit :

$$J = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I}, \rangle \quad (4.29)$$

avec :

I : représente l'ensemble des joueurs qui est constitué de l'ensemble des clients.

$S_i = \{E, Q\}$: représente l'ensemble des stratégies de chaque client.

$U_i(P) = P(R - C \frac{(2+(k-1)P)}{2(\mu-\lambda kP)})$: représente la fonction d'utilité de chaque client "i".

Résolution du jeu

Étant donné que les clients ne sont pas informés de l'état du système, on cherche alors à trouver un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Si $U(p) \geq 0$ pour $p=1$, alors tous les clients ont intérêt à rejoindre la file, si $U(1) < 0$, cela ne veut pas dire que celui qui rejoint le système aura forcément un gain négatif puisque la condition $R - C \frac{k+1}{2\mu} > 0$ stipule qu'au moins lorsque le système est vide, les k clients auront un gain moyen positif s'ils rejoignent le système, il faudrait alors dans ce cas chercher une autre probabilité d'entrée au système.

Un client est indifférent entre rejoindre la file ou bien quitter, si son gain est nul en le rejoignant. Autrement dit,

$$\begin{aligned}
 U(p) = 0 &\Rightarrow R - C \frac{(2+(k-1)p)}{2(\mu-\lambda kp)} = 0 \\
 &\Rightarrow 2\mu R - 2\lambda kpR - 2C - C(k-1)p = 0 \\
 &\Rightarrow (2\lambda kR + C(k-1))p = 2\mu R - 2C \\
 &\Rightarrow p_e = \frac{2\mu R - 2C}{2\lambda kR + C(k-1)}. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Notons que $U_i(p, q)$ représente le gain espéré d'un client lorsqu'il utilise la stratégie mixte p , alors que les autres utilisent la stratégie mixte q .

D'après ce résultats nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.4.2. *Dans une file d'attente $M^k/M/1/FIFO$ non-observable, avec $\lambda k < \mu$, l'équilibre de Nash en stratégies mixtes est donné par : "entrer avec la probabilité P_e ", telle que :*

$$P_e = \begin{cases} 1, & \text{si } R \in [\frac{(k+1)C}{2(\mu-\lambda k)}, \infty[\\ \frac{2\mu R - 2C}{2\lambda kR + C(k-1)}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. *Supposons que $U(1) \geq 0 \Leftrightarrow R \in [\frac{(k+1)C}{2(\mu-\lambda k)}, \infty[$, tous les clients auront un gain positif; aucun client n'a intérêt à quitter.*

Supposons maintenant que $U(1) < 0$. Si tous les clients utilisent la stratégie mixte de sécurité $(p_e, 1 - p_e)$, un client qui rejoint le système aura un gain $R - C \frac{(2+(k-1)p_e)}{2(\mu-\lambda k p_e)} = 0$. Considérons une arrivée de k clients au système et supposons qu'un seul d'entre eux choisit une probabilité d'entrée $p_1 \neq p_e$, son gain est alors :

$$U(P_e, P_1) = P_1 \left(R - C \frac{(2+(k-1)P_e)}{2(\mu-\lambda k P_e)} \right) = 0$$

Ce client n'a pas donc intérêt à changer de stratégies unilatéralement.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas un autre équilibre de Nash en stratégies mixtes.

1^{er} cas : $U(1) \geq 0$

C'est évident. En effet, si tous les clients utilisent une probabilité d'entrée $P \neq 1$, alors un client qui dévie unilatéralement en utilisant la stratégie mixte $(1, 0)$ aura un gain supérieur.

2^{me} cas : $U(1) < 0$ Supposons que tous les clients utilisent une probabilité d'entrée au système $p_2 \neq p_e$, alors on peut observer deux cas :

1. Si $p_2 > p_e$:

Dans ce cas $U(P_2) = R - C \frac{(2+(k-1)p_2)}{2(\mu-\lambda k p_2)} < 0$, où un client qui dévie unilatéralement en utilisant la probabilité d'entrée $P_{21} = 0$, aura un gain $U(p_{21}, p_2) = 0$. Ce client a intérêt à changer de stratégie. Donc "entrer avec la probabilité p_2 " n'est pas un équilibre en stratégies mixtes.

2. Si $p_2 < p_e$, dans ce cas le gain espéré de chaque client est : $U(p_2) = p_2 \left(R - C \frac{(2+(k-1)p_2)}{2(\mu-\lambda k p_2)} \right) > 0$. Un client qui dévie unilatéralement en utilisant la probabilité d'entrée $P_{22} > p_2$ aura un gain : $U(p_{22}, p_2) = p_{22} \left(R - C \frac{(2+(k-1)p_2)}{2(\mu-\lambda k p_2)} \right) > U(p_2)$, ce client préfère alors de dévier, "entrer avec la probabilité p_2 " n'est pas un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

L'unique équilibre de Nash est alors "entrer avec la probabilité p_e ".

4.5 Effets de l'information : Application numérique

Dans cette section, nous allons étudier est-ce que le serveur est motivé à révéler l'information sur la taille du système aux clients, en supposant qu'il possède le pouvoir de le faire.

Le serveur peut utiliser une des deux politiques suivantes :

- Informer l'ensemble des clients.
- Ne pas informer l'ensemble des clients.

On les appelle respectivement politique 1 et 2. Chaque politique possède des avantages et des inconvénients, qu'on peut citer comme suit :

◇ *Politique 1*

★ *Avantage :*

Les clients entrent régulièrement au système tant que sa taille ne dépasse pas le seuil $n_e + \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

★ *Inconvénient :*

Il y'a des pertes de clients, puisque ces derniers n'entrent pas au système si sa taille a dépassé le seuil $n_e + \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

◇ *Politique 2*

★ *Avantage :*

Les clients peuvent entrer au système même si sa taille dépasse très grandes, puis qu'ils ne sont pas informés.

★ *Inconvénient :*

Perte de clients, puisque ces derniers entrent au système avec la probabilité p_e , et même si la taille du système est nulle, il se peut que des clients n'entrent pas au système.

Le serveur choisi la politique qui lui procure un meilleur gain, étant donné qu'il gagne un certain gain R' pour chaque client servi, et si on s'intéresse à un intervalle de temps $[t_0, t_1]$, qui peut être l'intervalle entre l'ouverture du système et sa fermeture, le gain du serveur pendant cette période peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$U_s = R'N, \text{ avec } N : \text{représente le nombre de clients servis pendant la période } t_1 - t_0$$

Pour déterminer la politique que le serveur doit choisir, on a pu réaliser deux programmes informatiques reflétant les deux politiques, qui nous permettent de déterminer les caractéristiques du système $M^k/M/1$ et de faire une comparaison entre les résultats obtenus.



FIGURE 4.5 – Interface du programme de la file $M^k/M/1$ observable

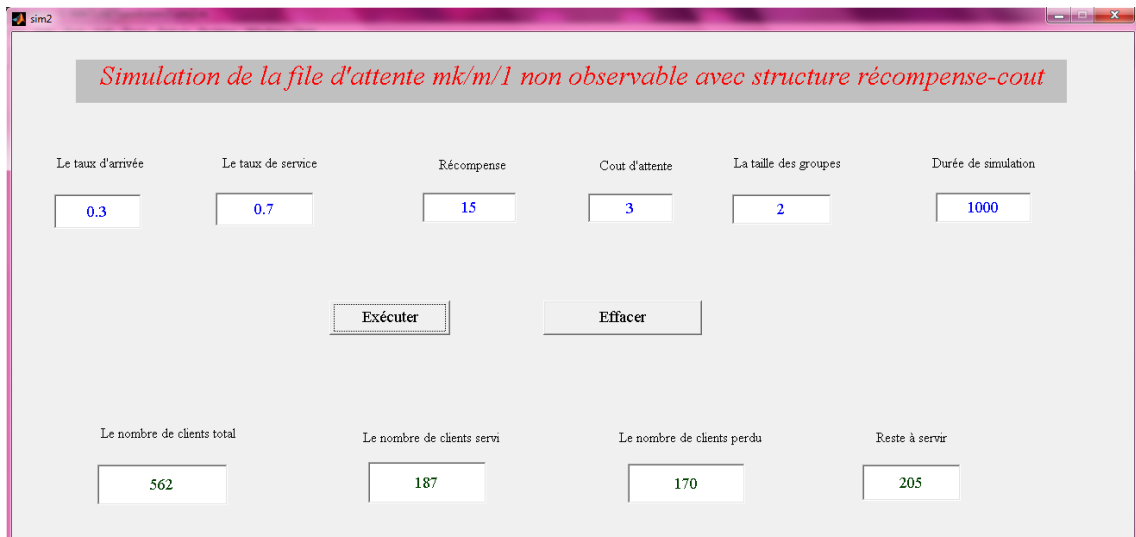


FIGURE 4.6 – Interface du programme de la file $M^k/M/1$ non observable

Pour pouvoir comparer entre ces deux politiques, on calcule le rapport :

$$r = \frac{NCS}{NCT} \quad (4.31)$$

tels que :

NCS : représente le nombre de clients entrés au système.

NCT : représente le nombre total de clients , en d'autres termes, ensemble des clients arrivés au système.

La meilleure politique est celle qui donne un rapport plus grand. En faisant varier les différents paramètres du modèle, on peut calculer à chaque fois le rapport (4.31) et en effectuant plusieurs observations, on peut alors dessiner les graphes correspondants en fonction du paramètre varié.

On remarque que dans la plupart des cas, la politique 2 (ne pas informer l'ensemble des clients) est meilleure que la politique 1 (informer l'ensemble des clients), comme on le voit dans la figure suivante :

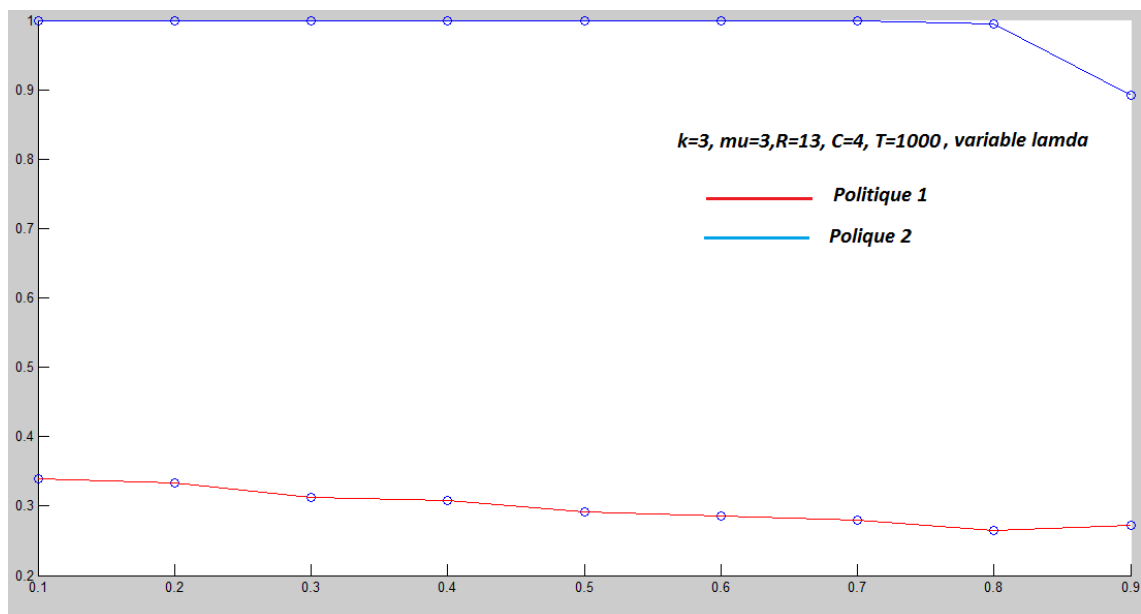


FIGURE 4.7 – Variation du rapport r en fonction du taux d'arrivée λ

Ce graphe est obtenu en faisant varier le taux d'arrivée tout en fixant les paramètres : $k = 3$ (Taille du groupe), $\mu = 3$ (Taux de service), $R=13$ (Récompense de service), $C = 4$ (Coût d'attente par unité de temps) pour un temps de simulation de 1000 unité de temps.

On remarque aussi que le nombre de clients qui entrent au système diminue lorsque ρ (coefficient d'utilisation du système) est proche de 1 c-à-d que le système est proche de la saturation. Cela est dû au fait que dans la première politique on atteint rapidement le nombre n_e (seuil d'entrée au système), par conséquent aucun client ne rejoint la file lorsque $N(t) > n_e + \lceil \frac{k}{2} \rceil$, en d'autres termes, une régulation du nombre de clients qui entrent au système est atteinte rapidement (à partir de l'instant où $N(t) = n_e$). Dans la deuxième politique cet effet n'est pas fort car les clients ne savent pas si le système est saturé ou non, mais on observe comme même que lorsque le système est proche de la saturation alors le nombre de clients entrant au système diminue car la probabilité d'entrée au système est fonction de ρ .

Le graphe de la figure (4.8) est obtenu en faisant varier la récompense des clients tout en fixant les paramètres k, λ, μ, C .

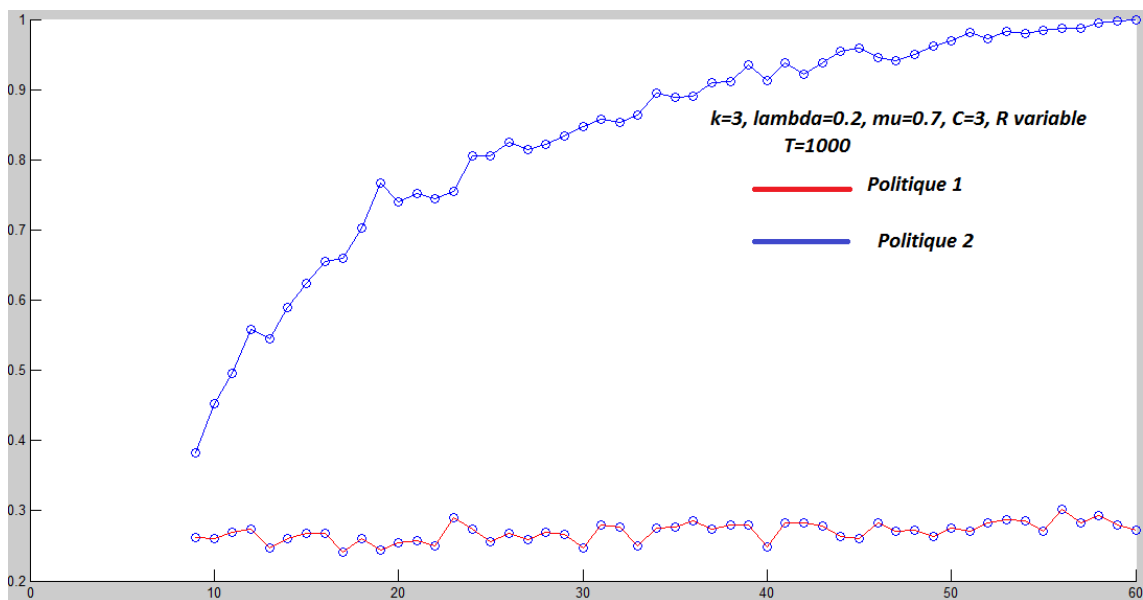


FIGURE 4.8 – Variation du rapport r en fonction de la récompense R avec saturation du système

Dans cette figure on remarque bien que dans la deuxième politique, le rapport entre le nombre de clients qui sont entrés et le nombre total de clients augmente en fonction de la récompense de service, par contre il n'y a pas une augmentation dans la première politique car le système est saturé, les clients observent cette saturation au moment de leur arrivées (malgré que la récompense augmente, la saturation existe toujours). Dans la deuxième politique malgré que leurs décision dépend de ρ mais ils n'observent pas la saturation du système et leurs décision dépend beaucoup plus de la récompense de service (R).

Dans le cas de non saturation du système, comme c'est le cas donné par la figure(4.9), même pour la politique 1 il y'a une augmentation du nombre de clients qui entrent au système.

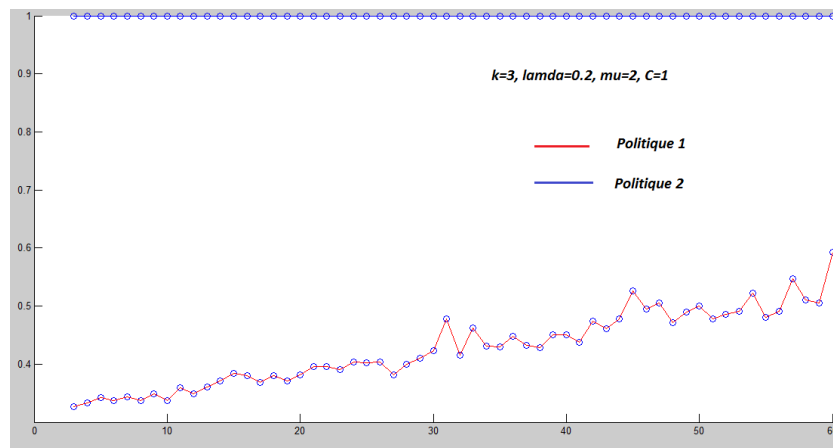


FIGURE 4.9 – Variation du rapport r en fonction de la récompense R sans saturation du système

Les résultats obtenus concernant la meilleure politique s'expliquent par le fait que dans la première politique, les clients sont très prudents, du fait qu'ils observent d'abord la taille du système avant de prendre la décision d'entrer ou bien de quitter, ce qui n'est pas le cas pour la deuxième politique.

On peut trouver des cas où la politique 1 donne des résultats meilleurs que la deuxième, comme on le voit bien sur la figure (4.10).

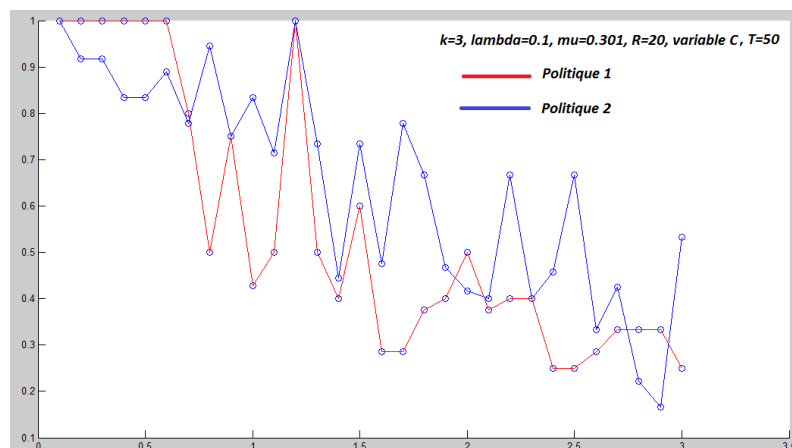


FIGURE 4.10 – Variation du rapport r en fonction du coût d'attente C avec temps de simulation petit

La figure (4.10) est obtenue en variant le paramètre C qui représente le coût d'attente par unité

de temps de chaque client tout en fixant les paramètres k , λ , μ , R , pour un temps de simulation de 50 unités de temps. On remarque bien qu'il existe des valeurs de C , là où la politique 1 est meilleure que la politique 2, puisque il n'y a pas beaucoup de clients qui sont perdus du fait que le temps de simulation est petit, on remarque aussi que le nombre de clients qui entrent au système diminue en fonction du coût d'attente cela dans les deux politiques, chose qui est logique puisque les clients prennent des décisions en fonction du paramètre C .

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé les décisions des clients au moment de leurs arrivées à un système de file d'attente $M^k/M/1$, puis nous avons déterminé les meilleures décisions à prendre par les clients dans les deux politiques (observable et non-observable).

Nous avons également effectué une application numérique dans le but de voir le changement du nombre de clients qui entre au système en fonction des différents paramètres et de faire une comparaison entre ces deux politiques dans le but de déterminer la meilleure politique qui arrange le serveur.

On peut dire que la meilleure politique dépend des paramètres du système, après avoir déterminé ces paramètres, on peut faire une comparaison directe entre les deux politiques.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, après avoir présenté les différents concepts de la théorie des jeux et de la théorie des files d'attente, il a été présenté un état de l'art sur l'application de la théorie des jeux dans certaines files d'attente Markoviennes, là où on a constaté que dans le cas où les clients observent l'état du système aux instants de leurs arrivées, ils rejoignent la file si la taille du système est inférieure ou égale à un certain seuil n_e qui peut être déterminé en fonction des paramètres du système, et dans le cas où les clients n'observent pas l'état du système, ils entrent avec une certaine probabilité p . Si les clients suivent ces stratégies, cela leur permettra de maximiser leurs gains. On a vu un autre type de jeu, il s'agit de la concurrence entre les serveurs dans une file d'attente Markovienne, où chaque serveur choisit une stratégie (taux de service à fournir) qui lui permet de maximiser son gain.

La travail que nous avons réalisé concernant l'étude des files d'attente sous la perspective de la théorie des jeux se situe dans la file d'attente $M^k/M/1$, où les clients arrivent par groupes d'une taille fixe k et prennent leurs décisions de rejoindre ou de ne pas rejoindre le système d'une façon à maximiser leurs gains en tenant compte du type de l'information disposée (cas observable, cas non-observable). Nous avons constaté que même les caractéristiques du système changent par rapport à un état simple (sans structure récompense-coût), après ces caractéristiques nous avons déterminé les équilibres de Nash correspondant à chaque cas. Finalement nous avons effectué une comparaison entre les deux cas étudiés, cette comparaison s'avère nécessaire du fait que c'est le serveur ou bien le contrôleur du système qui peut décider sur le type d'information à mettre en disposition des clients.

L'étude que nous avons réalisé nous a permis de déceler une perspective intéressante. Il s'agit de l'étude de la file d'attente $M^X/M/1$ avec structure récompense-coût, où les clients arrivent par groupes de taille aléatoire X . Dans le cas où les clients observent l'état du système, on peut analyser facilement le comportement des clients d'une manière générale (sans préciser la loi de la variable aléatoire X), mais dans le cas non-observable, il est nécessaire de connaître

la loi de la variable aléatoire X pour pouvoir déterminer la probabilité d'entrée au système.

On peut éventuellement penser à définir d'autres jeux sur d'autres modèles de files d'attente Markoviennes et discuter la possibilité d'étendre l'étude aux modèles d'attente non-Markoviens.

Bibliographie

- [1] Alan R.(1988). Processus stochastiques avec application aux phénomènes d'attente et fiabilité. Edition 1. Presses Polytechnique Romandes.
- [2] Arun B and Gautam C.(1997). On a batch arrival poisson queue with generalized vacation. The indian journal of statistics, volume 59, series b, p 369-383.
- [3] Baynat B.(2000). Théorie des files d'attentes : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit. Hermes science publication.
- [4] Binmore K.(1999). Jeux et théorie des jeux. Debeck.
- [5] BONZON E.(2007). Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens. These de doctorat. Université Paul Sabatier de Toulouse 3.
- [6] Boudali O. and Economou A. (2007). Equilibrium balking strategies in the single server Markovian queue with catastrophes. ArXiv Journal, 1107-2219
- [7] Burnetas A. and Economou A. (2007) Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. Journal of Queueing Systems , 213-228.
- [8] Ching W, Choi S and Huang M. (2008). Optimal Service Capacity in a Multiple-server Queueing System : A Game Theory Approach.
- [9] Claudie H. (2008). Eléments de la théorie des files d'attente. Technical report. Université Toulouse 2, France.
- [10] Corine T. (2009). La théorie des jeux pour le partage de ressources dans les grands systèmes distribués. Technical report. Grenoble Rhône-Alpes.
- [11] Desquilbet J. Théorie des jeux. Technical report. Université d'Artois.
- [12] Dunkel J. and Schultz A S. (2006). On the complexity of pure-strategy nash equilibria in congestion and local-effect games. Technical report, Options Research Center, Massachusetts Institute of Technology.

- [13] Economou A. and Kanta S. (2008). Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space. *Queueing Systems Journal*. 59, 237-269.
- [14] Edelson M. Hildebrand K. (1975). Congestion tolls for Poisson queueing processes. *Econometrica Journal*. 43, 81–92
- [15] Fabrice V.(2003). Les files d’attentes : Modélisation et évaluation de performances de réseaux. Technical report. Université Lyon, France.
- [16] Géraud N.(2005). La théorie des jeux quelques notions basiques, et son application à la relation client-consultant.
- [17] Guo P. and Hassin R. (2011). Strategic behavior and social optimization in markovian vacation queues. *Journal of Operations Research* 59(4), 986-997.
- [18] Hassin R. and Ricky G. (2011). Equilibrium in a two dimensional queueing game : When inspecting the queue is costly.
- [19] Haviv M. (20 Juillet 2009). Strategic customer behavior in a single server queue. Technical report. Department of Statistics. University of Jerusalem.
- [20] Hêche J, Dominique W, Thomas M.(2002). Recherche opérationnelle pour ingénieur. tome 2. Presses Polytechniques Romandes.
- [21] Kalai E, Kamien M. and Rubinovitch, M. (1992). Optimal Service Speeds in a Competitive Environment. *Manag. Sci. Journal*. 38, 1154–1163 .
- [22] Konieczny S. Introduction à la théorie des jeux. Technical report. Konieczny@cril.univ-artois.fr. Université d’Artois.
- [23] Lebarbier E. and Robin S. Processus de Poisson, processus de naissances et morts. Technical report. Université paris, France.
- [24] Leeh W.(1988). $M/G/1$ batch arrival queue with variable vacation. *Asian pacific. Oper Res. journal*, p24-26.
- [25] Lionel B. (Septembre 2004). Processus stochastiques : processus de poisson et chaîne de Markov.
- [26] Medhi J.(1991). Stochastic models in queueing theory. Academic press, Boston and San diego.
- [27] Murat Y.(2003). Introduction à la théorie des jeux. Dunod.
- [28] Naor P.(1969). The regulation of queue size by levying tolls. *Econometrica Journal*. 37, 15–24.
- [29] Pardoux E. (2006). Processus de Markov et applications algorithmes, réseaux, Technical report. finance.

- [30] Pénard T. (2004). La théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques. Technical report. Université de rennes1.
- [31] Philippe N. (1994). Basic elements of queueing theory : application to medelling of computer systems. Technical report. The university of Massachusetts.
- [32] Radjef M S. (2011/2012). Théorie des jeux différentiel. Cour Master 2. Université A.mira.Bejaia.
- [33] Raj J.(2008). Introduction to queueing theory. Technical report. Washington university.
- [34] Rubino G.(2006). Processus stochastiques. Tech report. Université INRIA/IRISA Rennes, France.
- [35] Stephan R and Heig V. (2009). Modélisation stochastique. Technical report. Files d'attentes.
- [36] Yiannis. and Burnetas A. (2011). Customer Equilibrium and Optimal Strategies in an $M/M/1$ Queue with Dynamic Service Control. arXiv Journal. 1112-1372 v1.
- [37] Zamir S et Laraki R, Paris 1, Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique. Cours de théorie des jeux.

Résumé

Le problème étudié est l'analyse de la décision des clients au moment de leurs arrivées à un système de file d'attente lorsque celle-ci est dotée d'une structure de récompense-coût, en considérant la file d'attente Markovienne $M^k/M/1$, là où les clients arrivent par groupes de taille fixe k , selon l'information disposée au clients :

- Cas observable : les clients observent l'état du système au moment de leurs arrivées.
- Cas non-observable : les clients n'observent pas l'état du système.

L'objectif est de déterminer les meilleures décisions à prendre par les clients dans les deux politiques, en trouvant la solution des deux problèmes, cela permettra aux clients de maximiser leurs gains.

Mots clés : Filles d'attente Markoviennes, arrivées par groupes, jeux, équilibre de Nash, structure récompense-coût.

Abstract

The problem studied is the analyse of customer's decision when they arrive into queue system with reward-cost structure, the queue considered is a Markovian $Mk/M/1$ queue where the customers arrive by groups of fixed size k , according to the information that is disponible to the customers :

- Observable case : the customers observe the system state when they arrive.
- Unobservable case : the customers do not observe the system state when they arrive.

The goal is to determine the best decision that customers should take in both politics, by solving the two problems, the customers could maximise their utilities.

Key words : Markovian queue, batch arrival, game, Nash equilibrium, reward-cost structure.