N° d'ordre :

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA , BEJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Spécialité : Analyse et Probabilités

Par

BEDHOUCHE Abdelmalek

THÈME

Equations Aux Différences et Solutions Homoclines

Soutenu publiquement, le 31/05/2008 devant le jury composé de :

Mr.	**Dahmani A. Nasser**	Professeur	Président.
Mr.	**Mehidi Noureddine**	Maitre de conférences	Rapporteur.
Mr.	**Akroune Nourredine**	Maitre de conférences	Examinateur.
Mr.	**Berboucha Ahmed**	Maître de Conférences	Examinateur.

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma très grande gratitude à Monsieur Mehidi Noureddine, pour non seulement m'avoir proposé le sujet et accépté d'encadrer ce modeste travail, mais surtout pour m'avoir enseigné le désir et la passion de la recherche. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa disponibilité, son aide et la compréhension dont il a fait preuve tout au long de la conception de ce mémoire de Magister.

Je remercie Monsieur le Professeur Dahmani Abdelnasser, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
J'adresse mes vifs remerciements à Messieurs Akroune Nourredine et Berboucha Ahmed, Maîtres de Conférences à l'Université de Bejaia, pour avoir accépté de lire ce travail et de le juger.

Je remercie aussi les membres du jury pour toutes les corrections qu'ils m'ont suggéré.

Après le bilan de six années d'études à l'université de Bejaia, je remercie sincèrement Messieurs Dahmani, Mehidi, Berboucha, Akroune, Ould Ali ainsi que Monsieur Ait Saidi pour la formation qu'ils m'ont inculqué en ayant jamais économisé leurs efforts dans leur enseignements et sans jamais tricher avec la rigueur mathématique. Ils constituent pour moi, l'exemple de référence au quotidien.

Mes remerciements amicaux s'adressent à Monsieur Kerai Boudjemaa et à Mademoiselle Mohdeb Nadia pour leurs aide inestimable dans la finalisation de ce mémoire.
J'exprime aussi ma profonde gratitude à Monsieur Bouraine Mohand pour son aide dans la " mise en forme " du texte de l'éxposé de ce travail.
Enfin, un petit clin d'oeil à ma famille qui a eu à supporter mon caractère pas toujours agréable.
Une pensée à tous mes camarades de promotion.

A tous mes amis, un grand merci.

Introduction générale

A l'origine, l'objectif de ce travail était de faire le point sur les méthodes utilisées dans la littérature pour étudier les conditions de ressemblance des solutions d'une équation différentielle ordinaire à celles de sa discrétisée. Rapidement, s'est posée une première question : Comment discrétiser? La réponse de novice que nous étions nous suggérait la méthode " naturelle " consistant à approximer la dérivée intervenant dans l'équation différentielle considérée par

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \tag{0.1}$$

Cette méthode est celle utilisée par exemple dans la méthode classique d'Euler, en analyse numérique. Cependant, à la lecture de certains articles du domaine ([1, 5, 9, 13, 4]), on a rapidement constaté que la méthode utilisée pour discrétiser une équation différentielle, consistait à écrire

$$\frac{dx}{dt} = x(n+1) - x(n) \tag{0.2}$$

si bien que l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \tag{0.3}$$

devient

$$x(n+1) - x(n) = f(n, x(n)) \tag{0.4}$$

On s'est alors posé la question de savoir si c'est parceque les solutions des deux équations se " ressemblaient ". A partir de là, ressortait la nécéssité de lire le calcul aux différences.

Ce travail est composé de deux parties principales. La première rend compte dans une certaine mesure de la lecture sur les équations aux différences ([1, 5, 9, 13, 4]). La deuxième, expose certaines méthodes actuellement utilisées dans l'étude de l'existence de solutions homoclines ([3, 6, 10, 11, 8]) avec ou sans discrétisation. On rappelle qu'une solution homocline est une solution tendant vers un point fixe, aussi bien quand n tend vers plus ou moins l'infini.

Le fait que la modélisation de la plupart des phénomènes naturels passe par des mesures de temps discrètes suffit à lui seul à justifier l'interêt qu'on a porté à la lecture des équations aux différences. Si on ajoute la première question posée dans cette introduction, on comprend la place résérvée dans ce travail aux équations aux différences. Dans le calcul aux différences, on commence par définir sur l'espace des suites réelles, un opérateur en posant

$$\Delta(x(n)) = x(n+1) - x(n) \tag{0.5}$$

et donc l'équation discrétisée associée à (0.3) s'écrit,

$$\Delta(x(n)) = f(n, x(n)) \tag{0.6}$$

Pour peu qu'on imagine Δ comme étant l'opérateur de dérivation classique, l'équation précédente rappelle une équation différentielle. On retrouve alors avec cette notation, des " équivalents " des propriétés élémentaires du calcul différentiel classique, en discret. On peut citer, celles conçernant la dérivée du produit des fonctions, d'un rapport de deux fonctions, la formule d'intégration par parties, la dérivée d'un polynôme, la formule de Taylor, l'inégalité de Gronwall-Bellman... Cela est déjà une bonne raison " d'accepter " le type de discrétisation rencontré dans la littérature. Cependant, il y'a beaucoup plus que cela: Toute une théorie parallèle, sur les équations aux différences linéaires scalaires ou non, sur les systèmes aux différences linéaires périodiques ou non (théorie de Floquet , Cosartien, matrice fondamentale, structure algébrique de l'espace des solutions ...), sur la stabilité avec les fonctions de Lyapounov ou autres techniques, sur les transformées de Laplace et leur utilisation dans la résolution d'équations aux différences linéaires, sur le théorème de première approximation (théorème de Hartmann) ou encore sur la classification de Poincaré des systèmes discrets linéaires du plan.

Dans la deuxième partie, on étudie en détails trois articles (choisis pour leur pertinence, leur actualité et la rareté de travaux de recherche dans le domaine des solutions homoclines d'un système dynamique discret) très récents consacrés respectivement, pour les deux premiers au problème d'existence de solutions homoclines d'une équation hamiltonienne discrète et pour le troisième à l'approximation de la solution homocline d'une équation différentielle ordinaire. Rappelons q'un point homocline est dégénéré dans la classification de Poincaré et qu'en outre, il n'est pas simple de donner une caractérisation mathématique d'une solution homocline, traduisible en algorithme.

Dans les deux premiers articles, Manjun ma et Zhiming Guo ([10, 11]) étudient l'existence de solutions homoclines pour l'équation

$$\Delta\left[p(t)\Delta u(t-1)\right] + q(t)u(t) = f(t, u(t)), t \in \mathbb{Z} \tag{0.7}$$

où p, q et f sont considérées dans un premier temps, $T-$périodiques en t et tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{x} = 0$$

Cette équation est la discrétisée de

$$\left[p(t)x'(t)\right]' + q(t)x(t) = f(t, x(t)), t \in I\!R \tag{0.8}$$

Utilisant les techniques d'analyse fonctionnelle, ces deux auteurs ont construit une fonctionelle (inspirée par la forme de l'équation (0.7)), et montrent (en utilisant le mountain pass theorem) que celle-ci admet un point critique qui est en fait une solution homocline non triviale de l'équation (0.7). Dans un deuxième temps, ces mêmes auteurs remplacent l'hypothèse de périodicité entre autres, par le fait que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(t,x)}{x} = 0, \text{ uniformément par rapport à } t$$

Il font alors appel au théorème de Banach-Steinhaus ([12]) toujours dans le même but.

Dans le troisième article, V. Chorostishevskiy et T. Wanner ([8]) exploitent les popriétés des polynômes d'Hermite. Utilisant le fait qu'une solution homocline converge exponentiellement vers le point d'équilibre (quand ce dernier est hyperbolique), ils en déduisent une écriture dans la base hilbertienne de $L^2(I\!R)$ constituée par les fonctions d'Hermite. Ils obtiennent ce qu'on appelle la série de Fourier-Hermite. Partant de celà, il montrent qu'en approximant cette solution homocline par la somme des N premiers termes de cette série, ils obtiennent pour de petites valeurs de N, de très bons résultats car le reste de la série en question converge exponentiellement vers zéro. Ces résultats ont pû être confirmés en considérant un exemple où l'on connait explicitement l'expression de la solution homocline.

1

Equations aux différences

Nous allons commencer ce chapitre par quelques définitions.

Définitions:

1. On appelle équation aux différences autonome, une relation du type

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1.1}$$

où $f : I\!R \to I\!R$ et $n \in I\!N$.

Cette équation est dite non autonome si $x(n+1) = f(n, x(n))$.

Si on impose que $x(n_0) = x_0$, (1.1) devient un problème de Cauchy.

2. En notant $f^n = fofo...of$,

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ..., f^n(x_0)\}$$

sera appelé orbite de x_0.

3. L'équation est dite d'ordre k, si elle met en relation $x(n+k), x(n+k-1), ..., x(n)$.

4. Si $f(x) = ax + b, (a,b) \in I\!R^{\ 2}$, l'équation (1.1) est dite linéaire. Ce type d'équations est résoluble comme le montre la proposition suivante.

Notation: Dans tout ce travail, $x(n, n_0, x_0)$ désignera la solution de (1.1), issue à l'instant n_0 du point x_0, prise à l'instant n.

Proposition 1.0.1 **1**. *L'équation*

$$x(n+1) = a(n)x(n), x(n_0) = x_0 \tag{1.2}$$

a pour solution,

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0$$

2. *L'équation*

$$x(n+1)=a(n)x(n)+f(n),x(n_0)=x_0 \tag{1.3}$$

a pour solution,

$$x(n)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]x_0+\sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}a(i)\right]f(r) \tag{1.4}$$

Preuve. **1**. *On a* $x(n_0+1)=a(n_0)x_0$, $x(n_0+2)=a(n_0+1)a(n_0)x_0$, $....,x(n)=a(n-1)a(n-2)....a(n_0)x_0.$
2. *On a,*

$$x(n_0+1)=a(n_0)x_0+f(n_0)$$

et

$$x(n_0+2)=a(n_0+1)x(n_0+1)+f(n_0+1)=a(n_0+1)a(n_0)x_0+a(n_0+1)f(n_0)+f(n_0+1)$$

Faire alors une réccurence. ■

Cas particuliers:

Si $a(n)=a$ et $x(0)=x_0$ alors, (1.4) devient

$$x(n)=a^nx_0+\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1}f(k)$$

Si $a(n)=a$, $x(0)=x_0$ et $f(x)=b$ alors,(1.4) devient

$$x(n)=\begin{cases} a^nx_0+b\left[\dfrac{a^n-1}{a-1}\right] \text{ si } a\neq 1 \\ x_0+nb \text{ si } a=1\end{cases}$$

Définition 1.0.1 **1**. *Soit* $x^*\in Dom(f)$ *où* $Dom(f)$ *désigne le domaine de* f. *Le point* x^* *est un point d'équilibre de* (1.1) *si* $f(x^*)=x^*$.
2. *Soit* $x\in Dom(f)$ *tel que* $\exists r\in I\!N, f^r(x)=x^*$ *et* $f^{r-1}(x)\neq x^*$. *Un tel point est appelé point d'équilibre éventuel de* (1.1) .

Remarque 1.0.1

$$x(0)=x^*\Rightarrow x(1)=f(x^*)=x^*\Rightarrow x(2)=f(x(1))=f(x^*)=x^*$$
$$\Rightarrow ....\Rightarrow x(n+1)=f(x(n))=f(x^*)=x^*$$

C'est à dire que la solution de (1.1) *issue de* x^* *est la suite constante* $x(n)=x^*,\forall n$.

Remarque 1.0.2 *Dans les équations différentielles ordinaires, une solution non constante ne peut tendre vers un état d'équilibre qu'après un temps infini, et, ne l'atteint jamais. Ceci n'est pas le cas dans les équations aux différences. C'est ce qui justifie la deuxième partie de la définition.*

1.1 Discrétisation par Euler

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = g(x), x(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq b \tag{1.5}$$

Considérons la subdivision régulière de $[t_0, b]$ de pas $h = (b - t_0)/N$. On a donc $t_j = t_0 + jh, j = 0, ..., N$. Adoptons l'approximation d'Euler

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

L'équation (1.5) s'écrit

$$x(t+h) - x(t) = hg(x(t)), x(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq b$$

Pour $t = t_0 + nh$, on aura

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hg(x(t_0 + nh)), x(t_0) = x_0, n = 0, ...N - 1$$

Notons $x(t_0 + nh) = u(n)$. L'équation précédente s'écrit,

$$u(n+1) = u(n) + hg(u(n)), u(0) = x_0, n = 0, ...N - 1 \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) représente l'algorithme d'Euler et approxime d'autant mieux la solution de l'équation (1.5) que h est petit!...

Remarque 1.1.1 *Si x^* est point d'équilibre de* (1.6), *il vérifie $x^* + hg(x^*) = x^*$. C'est à dire $g(x^*) = 0$. Par conséquent, les points d'équilibre de* (1.6) *sont les mêmes que ceux de* (1.5) .

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, l'étude de la stabilité de la solution x^* joue un role central dans la connaissance du comportement des solutions de (1.1).

Définition 1.1.1 **1**. *Le point d'équilibre x^* de* (1.1) *est stable si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0, \forall n \in I\!N, |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$$

2. *Ce point est dit instable, s'il n'est pas stable.*

3. *Le point d'équilibre x^* est dit attractif si,*

$$\exists \delta > 0, |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x(n) = x^*$$

4. *Si $\delta = +\infty$, x^* est dit globalement attractif.*

5. *Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

6. *Si $\delta = +\infty$ et x^* est asymptotiquement stable, alors il est dit globalement asymptotiquement stable.*

Théorème 1.1.1 *Soit l'équation*

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1.7}$$

et x^* un point d'équilibre. Supposons que f soit continument différentiable dans un voisinage de x^*. Alors,

1. $\left|f^{'}(x^*)\right| < 1 \Rightarrow x^*$ *est asymptotiquement stable.*

2. $\left|f^{'}(x^*)\right| > 1 \Rightarrow x^*$ *est instable.*

Preuve. 1. On a $\left|f^{'}(x^*)\right| < M < 1 \Rightarrow$

$$\exists \gamma > 0, \left|f^{'}(x)\right| \leq M, \forall x \in (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$$

Soit $x(0) \in J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$. Le théorème des accroissements finis donne,

$$\exists \xi \in \left]x(0), x^*\right[, |x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)| = \left|f^{'}(\xi)\right| |x(0) - x^*|$$

et donc,

$$|x(1) - x^*| \leq M\, |x(0) - x^*|$$

et par réccurence,

$$|x(n) - x^*| \leq M^n\, |x(0) - x^*| \to 0, \text{ quand } n \to \infty$$

La solution x^* est donc stable.

Comme

$$\lim_{n\to\infty} M^n\, |x(0) - x^*| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$$

On obtient la stabilité asymptotique.

2. On a

$$\left|f^{'}(x^*)\right| > 1 \Rightarrow \exists M > 1, \left|f^{'}(x^*)\right| > M > 1 \Rightarrow$$

$$|x(1) - x^*| = \left|f^{'}(\xi)\right| |x(0) - x^*| \geq M\, |x(0) - x^*| \Rightarrow |x(n) - x^*| \geq M^n\, |x(0) - x^*| \to \infty$$

et donc x^* est instable.

■

Remarque: Le cas $\left|f^{'}(x^*)\right| = 1$ est dit hyperbolique. Il fera l'objet d'une étude à part ci-dessous. On notera dans la suite $\mathcal{V}(x^*)$, un voisinage de x^*.

Théorème 1.1.2 *Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{V}(x^*))$ où x^* est un point d'équilibre de* (1.7) *tel que $f^{'}(x^*) = 1$. Alors,*

i) $f''(x^*) \neq 0 \Rightarrow x^*$ *est instable.*

ii) $f''(x^*) = 0$ *et* $f'''(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ *est instable.*

iii) $f''(x^*) = 0$ *et* $f'''(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ *est asymptotiquement stable.*

Preuve. *i*) On a $f''(x^*) \neq 0$. Deux possibilités:

$$f''(x^*) > 0 \Rightarrow f^{'} \text{ est } \nearrow \text{ dans } \mathcal{V}(x^*) \Rightarrow \exists\varepsilon > 0, f'(x) > 1, \forall x \in I^+ =]x^*, x^* + \varepsilon[$$

$$f''(x^*) < 0 \Rightarrow f^{'} \text{ est } \searrow \text{ dans } \mathcal{V}(x^*) \Rightarrow \exists\varepsilon > 0, f'(x) > 1, \forall x \in I^- =]x^* - \varepsilon, x^*[$$

La même démonstration que celle de la deuxième partie du théorème précédent montre que x^* est instable. Les autres cas sont analogues. ■

1.1.1 Dérivée de Schwartz

Définition 1.1.2 *La quantité*

$$S(f(x)) = \frac{f^{'''}(x)}{f^{'}(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)}\right]^2$$

est appelée dérivée de Schwartz.

Elle a été introduite en 1978 ([9, 5]) par Siager et joue un role important en analyse complexe. En dimension 1 et 2, elle sert dans certaines situations, où l'on passe du comportement simple au chaos.

Proposition 1.1.1 *Soit $P(x)$ un polynôme tel que*

$$P'(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i), \; a_i \in \mathbb{R}$$

Alors $S(P(x)) < 0$.

Preuve.

$$S(P(x)) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(x - a_j)}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(x - a_j)}\right)^2 < 0$$

■

Théorème 1.1.3 *Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{V}(x^*))$ où x^* est un point d'équilibre de (1.7) tel que $f^{'}(x^*) = -1$. Alors,*

i) $S(f(x^*)) < 0 \Rightarrow x^*$ est asymptotiquement stable.

ii) $S(f(x^*)) > 0 \Rightarrow x^*$ est instable.

Preuve. Considérons l'équation

$$y(n+1) = g(y(n)), g(y) = f^2(y) \tag{1.8}$$

$f(x^*) = 0 \Rightarrow g(x^*) = 0$. Supposons que x^* est stable pour (1.8). Alors,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, |x(0) - x^*| \leq \alpha \Rightarrow |g^n(x(0)) - x^*| = \left|f^{2n}(x(0)) - x^*\right| \leq \varepsilon$$

Par ailleurs,

$$\left|f^{2n+1}(x(0))-x^*\right| = |g^n(f(x(0))-g^n(f(x^*))|$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{V}(x^*)$, on aura,

$$|x(0)-x^*| \leq \frac{\alpha}{M} \Rightarrow |f(x(0))-f(x^*)| \leq \alpha \Rightarrow \left|f^{2n+1}(x(0))-x^*\right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left|f^{2n}(x(0))-x^*\right| \leq \varepsilon, \forall n \in I\!N$$

Ceci prouve que la nature en termes de stabilité de x^* dans (1.8), est la même dans (1.7).
Par ailleurs,

$$\frac{d}{dy}(g(y)) = f^{'}(f(y))f^{'}(y) \Rightarrow \frac{d}{dy}(g(x^*)) = \left(f^{'}(x^*)\right)^2 = 1$$

Le théorème précédent est utilisable pour (1.8).

$$\frac{d^2}{dy^2}(g(y)) = \left(f^{'}(f(y))f^{'}(y)\right)^{'} = \left(f^{'}(y)\right)^2 f^{''}(f(y)) + f^{'}(f(y)f^{''}(y) \Rightarrow \frac{d^2}{dy^2}(g(x^*)) = 0$$

D'après le théorème précédent, si $g^{'''}(x^*) > 0$, alors x^* est instable. On a,

$$g^{'''}(x^*) = -2\left(f^{''}(x^*)\right)^2 - f^{'''}(x^*) - (f^{''}(x^*))^2 - f^{'''}(x^*) = -3\left(f^{''}(x^*)\right)^2 - 2f^{'''}(x^*) > 0$$

car $S(f(x^*)) > 0$. D'où

$$x^* \text{ est instable pour } (1.8) \text{ et donc, } x^* \text{ est instable pour } x(n+1) = f(x(n)).$$

■

Ci-dessous, on donne la définition de points et orbites périodiques ainsi que de leur stabilité.

Définition 1.1.3 *Le point b est un point <u>k-périodique</u> de* (1.1) *si*

$$\exists k \in I\!N, f^k(b) = b$$

2. *L'orbite $\mathcal{O}(b) = \left\{b, f(b), ..., f^{k-1}(b)\right\}$ est appelé <u>k-cycle</u>.*

3. *Le point b est stable s'il est stable en tant que point d'équilibre de f^k.*

4. *Le point b est dit asymptotiquement stable, s'il est asymptotiquement stable en tant que point d'équilibre de f^k.*

5. *Le point b est instable s'il est instable en tant que point d'équilibre de f^k.*

Remarque 1.1.2 *Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, si b est stable, alors il en est de même pour $f(b), ..., f^{k-1}(b)$. C'est pour cette raison qu'on parle de <u>k-cycle stable</u>.*
En effet, le théorème des accroissements finis permet d'écrire,

$$f^n(x(0)) - f^k(b) = f^{'}(\xi)\left[f^{n-1}(x(0)) - f^{k-1}(b)\right], \xi \in \left]x(0), b\right[$$

Il suffit alors de faire une réccurence.

Utilisant entre autres le théorème des valeurs intermediaires, on peut montrer le théorème fondamental suivant

Théorème de Sarkovski[9, 4]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Supposons que $x(n+1) = f(x(n))$ possède un point périodique de période 3. Alors f possède des points périodiques de toute période.

1.1.2 Stabilité dans les équations vectorielles d'ordre un

Considérons l'équation

$$\begin{cases} x(n+1) & = f(n, x(n)) \\ x(n_0) & = x_0, x(n) \in \mathbb{R}^k \end{cases} \tag{1.9}$$

Supposons que $f(n, 0) = 0 \ \forall n$. C'est à dire que le point d'équilibre est $x = 0$. Si c'est pas zéro, une translation permet de le ramener à zéro, pour une autre équation similaire.

Définition 1.1.4 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.9) est dit:*

1) stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 > 0, \exists \delta(\varepsilon, n_0), \|x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

uniformément stable si $\delta = \delta(\varepsilon)$ est indépendant de $n_{0.}$

2) attractif si

$$\exists \mu(n_0), \|x_0\| \leq \mu \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$$

uniformément attractif si μ ne dépend pas de n_0.

3) (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) stable et attractif.

4) exponentiellement stable si

$$\exists \delta > 0, \exists M > 0, \exists \eta \in]0, 1[, \|x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| \eta^{n-n_0}$$

5) $x(n, n_0, x_0)$ est bornée si $\exists M > 0, \forall n > n_0, \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$

6)Dans (2) si $\mu = +\infty$, on dit globalement attractif.

7) L_p-stable si il est stable et

$$\exists p > 0, \sum_{j=n_0}^{\infty} \|x(j, n_0, x_0)\|^p < \infty$$

8) Uniformément L_p-stable si la série ci-dessus converge uniformément par rapport à n_0.

Remarque 1.1.3

$$\begin{aligned} \textit{stabilité asymptotique uniforme} &\Rightarrow \textit{stabilité asymptotique} \\ \textit{stabilité uniforme} &\Rightarrow \textit{stabilité} \\ \textit{stabilité asymptotique} &\Rightarrow \textit{stabilité} \end{aligned}$$

L_p-stabilité $\Rightarrow$ stabilité asymptotique (car $\sum_{j=n_0}^{\infty} \|y(j,n_0,y_0)\|^p < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y(j,n_0,y_0) = 0$).

On a aussi le résultat suivant:

$$\text{Exponentielle stabilité } \Rightarrow L_p - \text{stabilité}$$

Preuve. On a,

$$\exists a > 0, \exists \eta \in \left]0,1\right[, \|x(j)\| \leq a \|x_0\| \eta^{j-n_0}$$

D'où

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \|x(j,n_0,x_0)\|^p \leq a^p \|x_0\|^p \sum_{j=n_0}^{\infty} (\eta^p)^{j-n_0} \leq a^p \|x_0\|^p \frac{1}{1-\eta^p}$$

■

1.2 Similitudes avec le calcul différentiel

Notons

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$E(x(n)) = x(n+1)$$

On a

$$E^k(x(n)) = x(n+k)$$

Alors

$$\Delta = E - I \Longrightarrow \Delta^k x(n) = (E-I)x(n)$$

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i E^{k-i} x(n+k-i) \end{aligned}$$

De même

$$E^k(x(n)) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Delta^{k-i} x(n)$$

Si on considère que la mesure du temps est discrète, Δ est l'équivalent de l'opérateur de dérivation dans le continu. Mais voici en vrac, quelques propriétés de cet opérateur.

Proposition 1.2.1 *Δ et E sont des opérateurs linéaires.*

Théorème 1.2.1 *1.* $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0)$

2. $\Delta \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k) \right) = x(n)$

Preuve. 1. $S = x(n_0+1) - x(n_0) + x(n_0+2) - x(n_0+1) + ... + x(n) - x(n-1) = x(n) - x(n_0)$

2. Calcul. ■

Remarque 1.2.1 *On se rappelle que ...*

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt \right) = f(x)$$

Proposition 1.2.2 *Soit*

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k$$

Alors

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \ \forall i \geq 1$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= \left(a_0 (n+1)^k + ... + a_k \right) - \left(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k \right) \\ &= a_0 k n^{k-1} + R, \text{ degré de } R \leq k-2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) n^{k-2} + R_1, \text{ degrés de } R_1 \leq k-3$$

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \ \forall i \geq 1$$

■

Remarque 1.2.2 *Si P est un polynôme de degré k, alors*

$$\frac{d^{k+i} P}{dt^{k+i}} = 0, \ \forall i \geq 1$$

Proposition 1.2.3 *Soit*

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k I$$

Alors

$$p(E)\, b^n = p(b)\, b^n$$

Preuve.

$$\begin{aligned} p(E)\, b^n &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \ldots + a_k b^n \\ &= p(b)\, b^n \end{aligned}$$

■

Généralisation:

$$p(E)\left(b^n g(n)\right) = b^n p(bE)\, g(n)$$

Polynôme factoriel: Posons

$$x^{(k)} = x(x-1)\ldots(x-k+1),\ k \in \mathbb{N}$$

Remarque 1.2.3

$$\begin{aligned} x = n \in \mathbb{N} \ et\ n \geq k &\Longrightarrow n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ &\Longrightarrow n^{(n)} = n! \end{aligned}$$

Extention de Δ et E à des fonctions réelles:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

$$E(f(t)) = f(t+1)$$

On voit ci-dessous que cette fonction factorielle joue le même role que celui joué par la " fonction puissance dans le calcul différentiel ".

Proposition 1.2.4 *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a,*

1. $\Delta x^{(k)} = k x^{(k-1)}$
2. $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)\, x^{(k-n)}$
3. $\Delta^k x^{(k)} = k!$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= (x+1)^{(k)} - x^{(k)} = (x+1)\, x \ldots (x-k+2) - x(x+1)\ldots(x-k+1) \\ &= k x^{(k-1)} \end{aligned}$$

Les autres cas se font de la même manière. ■

Remarque 1.2.4 *On montre de façon calculatoire que*

$$\Delta(x(n)\, y(n)) = E(x(n))\, \Delta(y(n)) + y(n)\, \Delta(x(n)) \tag{1.10}$$

$$\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right)=\frac{y(n)\,\Delta(x(n))-x(n)\,\Delta(y(n))}{y(n)\,E(y(n))}$$

Se rappeler des dérivées d'un produit et d'un rapport...même s'il y'a le $E(x(n))$.

Remarque 1.2.5

$$\Delta F(n)=0\Longrightarrow F(n)=c$$

$$\Delta F(n)=f(n)\Longrightarrow\Delta^{-1}(f(n))=F(n)+c$$

Remarque 1.2.6

$$\Delta\Delta^{-1}f(n)=f(n)$$

$$\Delta^{-1}\Delta F(n)=F(n)+c$$

D'où

$$\Delta\Delta^{-1}=I$$

Mais

$$\Delta^{-1}\Delta\neq I$$

Exemple 1.2.1

$$\Delta^{-1}(f(n))=\sum_{i=0}^{n-1}f(i)+c \tag{1.11}$$

Proposition 1.2.5 Δ^{-1} *est linéaire à une constante près.*

Preuve.

$$\Delta^{-1}(ax_n+by_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(ax(i)+by(i))+c$$

■

Exemple 1.2.2 *1.* $\Delta^{-k}0=c_1n^{k-1}+c_2n^{k-2}+...+c_k$

2. $\Delta^{-k}1=\dfrac{n^k}{k!}+c_1n^{k-1}+c_2n^{k-2}+...+c_k$
3. $\Delta^{-1}n^{(k)}=\dfrac{n^{k+1}}{k+1}+c$. Ici, il faut se rappeler de la primitive de x^k!!

Les deux résultats ci-dessous rappellent d'une certaine façon, l'intégration par parties et la formule de Taylor.

Proposition 1.2.6 *(sommation par parties)*

$$\sum_{k=0}^{n-1}y(k)\,\Delta x(k)=x(n)\,y(n)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k+1)\,\Delta y(k)+c$$

Preuve.

$$(1.10) \Longrightarrow y\,(n)\,\Delta x\,(n) = \Delta\,(x\,(n)\,y\,(n)) - x\,(n+1)\,\Delta y\,(n)$$

On applique Δ^{-1} et utilise (1.11)

$$\sum_{k=0}^{n-1} y\,(k)\,\Delta x\,(k) = x\,(n)\,y\,(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x\,(k+1)\,\Delta y\,(k) + c$$

■

Théorème 1.2.2 *(Formule de Taylor discrète):*

Soit $k \in I\!N$, $k \leq n$ entier naturel. Alors,

$$u(n) = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} C_{n-s-1}^{k-1} \Delta^k u_s$$

Preuve. Posons $u(0) = u_0$. On a,

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i E^i \text{ et } E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^{n} C_k^i \Delta^i$$

$$\Rightarrow \quad u(n) = \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} C_n^{k+j} \Delta^{k+j} u_0$$

$$= \sum_{i=0i}^{k-1n} C_n^i \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} C_n^{k+j} \Delta^k \sum_{s=0}^{j} (-1)^{j-s} C_j^s E^s u_0$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \left[\sum_{j=s}^{n-k} (-1)^{j-s} C_n^{k+j} C_j^s \right] \Delta^k E^s u_0$$

■

1.3 Principe de comparaison

Le théorème qui suit permet d'obtenir des informations sur la solution d'une équation discrète (quand on ne sait pas la résoudre). Il possède un analogue en équations différentielles ordinaires [7].

Théorème 1.3.1 *Soit $g(n, r)$ une fonction non décroissante par rapport à r pour tout $n \in I\!N$, fixé. Supposons aussi que $y(n)$ et $u(n)$ soient des suites vérifiant $\forall n \geq n_0$,*

$$y(n+1) \leq g(n, y(n)) \tag{1.12}$$

$$u(n+1) = g(n, u(n)) \tag{1.13}$$

Alors,

$$y\left(n_0\right) \leq u\left(n_0\right) \Rightarrow y(n) \leq u(n), \forall n \geq n_0$$

Preuve. Supposons que la conclusion soit fausse. Alors,

$$\exists k \geq n_0, y(k) \leq u(k) \text{ et } y(k+1) > u(k+1)$$

Utilisant la monotonie de g et (1.12) ainsi que (1.13), il vient,

$$g(k, u(k)) = u(k+1) < y(k+1) \leq g(k, y(k)) \leq g(k, u(k))$$

qui est une contradiction. ■

1.4 Equations discrètes linéaires générales

Elle s'écrivent sous la forme:

$$y\left(n+k\right) + p_1\left(n\right) y\left(n+k-1\right) + ... + p_k\left(n\right) y\left(n\right) = g\left(n\right) \tag{1.14}$$

Si on pose $n = 0$, on aura

$$y\left(k\right) = -p_1\left(0\right) y\left(k-1\right) - ... - p_k\left(0\right) y\left(0\right) + g\left(0\right)$$

Donc si on connait $y\left(k\right)$ alors on peut calculer $y\left(k+1\right)$.

Théorème 1.4.1 *(existence et unicité). Considérons l'équation*

$$y\left(n+k\right) + p_1\left(n\right) y\left(n+k-1\right) + ... + p_k\left(n\right) y\left(n\right) = g\left(n\right) \tag{1.15}$$

$$y\left(n_0\right) = a_0, y\left(n_0+1\right) = a_1, ..., y\left(n_0+k-1\right) = a_{k-1} \tag{1.16}$$

Le problème (1.15, 1.16) admet une unique solution $y\left(n\right)$.

Preuve. Prendre $n = n_0$, $n_0 + 1$, ... successivement. L'unicité est évidente. ■

Définition 1.4.1 $\{f_1\left(n\right), ..., f_r\left(n\right)\}$ *est un système lié pour* $n \geq n_0$, *si il existe* a_1,..., $a_r \in \mathbb{R}$ *non tous nuls tels que*

$$a_1 f_1\left(n\right) + ... + a_r f_r\left(n\right) = 0, \forall n \geq n_0$$

Il est dit libre dans le cas contraire.

Exemple 1.4.1 $\{3^n, n3^n, n^2 3^n\}$ *est libre pour* $n \geq 1$.

Dans ce qui suit, on s'interesse aux propriétés des solutions de l'équation

$$y(n+k) + p_1(n)\, y(n+k-1) + ... + p_k(n)\, y(n) = 0 \tag{1.17}$$

Définition 1.4.2 *Un système de* $k-$*solutions linéairement indépendantes de (1.17) est appelé système fondamental de solutions.*

Définition 1.4.3

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_r(n+k-1) \end{pmatrix}$$

est appelé Cosartien du système de solutions $\{x_1(n), ..., x_k(n)\}$. *Se rappeler le wronskien...*

Lemme 1.4.1 *(d'Abel) Soit* $\{x_1(n), ..., x_k(n)\}$ *un système de solutions de (1.17). Alors* $\forall n \geq n_0$

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0)$$

Preuve. $k = 3$:

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{pmatrix}$$

D'après la formule (1.14), on a

$$x_i(n+3) = -p_3(n)\, x_i(n) - [p_1(n)\, x_i(n+2) + p_2(n)\, x_i(n+1)], \forall i = 1, ..., 3$$

On remplace dans la dernière ligne et on obtient

$$W(n+1) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i) \right) W(n_0) = (-1)^{3(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) \right) W(n_0)$$

Le cas général se fait de la même manière. ■

Cas particulier: Si

$$p_k(n) = p_k$$

alors

$$W(n) = (-1)^{kn} p_k^n W(0)$$

Corollaire 1.4.1 *Supposons que* $p_k(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. *Alors*

$$W(n) \neq 0, \forall n \geq n_0 \Longleftrightarrow W(n_0) \neq 0$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme d'Abel. ■

Corollaire 1.4.2 $\{x_1(n), ..., x_k(n)\}$ *est un système fondamental* $\Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, W(n_0) \neq 0$.

Exemple 1.4.2 $x(n+2) - \dfrac{3n-2}{n-1} x(n+1) + \dfrac{2n}{n-1} x(n) = 0$.

$\{n, 2^n\}$ est un système fondamental. En effet

$$W(0) = -1 \neq 0$$

Théorème 1.4.2 *(Fondamental): Supposons* $p_k(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. *Alors (1.17) possède un système fondamental de solutions.*

Preuve. Par le théorème d'existence et d'unicité,

$$\exists x_1(n), ..., x_k(n)$$

tels que

$$x_i(n_0 + i - 1) = 1$$

et

$$\begin{aligned} x_i(n_0) &= x_i(n_0+1) = ... = x_i(n_0 + i - \mathbf{2}) = x_i(n_0 + i) = ... \\ &= x_i(n_0 + k - 1) = 0, i = 1, ..., k \end{aligned}$$

C'est à dire k condition initiales. D'où

$$x_1(n_0) = 1,\ x_2(n_0+1) = 1, x_3(n_0+2) = 1, ..., x_k(n_0 + k - 1) = 1$$

et les autres sont nulles. D'où

$$W(n_0) = \det I = 1$$

et donc, $\{x_1(n), ..., x_k(n)\}$ est un système fondamental de solutions. ■

Théorème 1.4.3 *Soit* S *l'ensemble des solutions de (1.17) avec les lois*

$$\begin{cases} (x+y)(n) = x(n) + y(n) \\ (\alpha x)(n) = \alpha x(n) \end{cases}$$

Alors $(S, +, .)$ *est un espace vectoriel de dimension* k.

Preuve. *evidente.* ■

Lemme 1.4.2 *Soit $x_1(n)$ et $x_2(n)$ des solutions de (1.17). Alors $x_1(n)+x_2(n)$ et $\alpha x_1(n)$ sont solutions de (1.17).*

Principe de superposition

Si $x_1(n), ..., x_r(n)$ sont des solutions de (1.17), alors

$$\forall (\alpha_i)_{i=1,r}, \; x(n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i(n)$$

est solution de (1.17).

Réciproque: Soit $\{x_1(n), ..., x_k(n)\}$ un système fondamental de solutions de (1.17). Alors,

$$\forall x(n) \text{ solution de (1.17)}, \exists (\alpha_i)_{i=1,k} \text{ telle que } x(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i(n)$$

Preuve. L'écriture est vraie si

$$\begin{cases} a_1 x_1(n) + ... + a_k x_k(n) = x(n) \\ \vdots \\ a_1 x_1(n+k-1) + ... + a_k x_k(n+k-1) = x(n+k-1) \end{cases} \tag{1.18}$$

Posons

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}$$

et

$$\zeta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

Alors (1.18) s'écrit,

$$X(n)\zeta = \hat{x}(n)$$

où

$$\hat{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{pmatrix}$$

$X(n)$ inversible$\Longrightarrow \zeta = X^{-1}(n)\hat{x}(n)$. Pour $n = n_0$

$$\zeta = X^{-1}(n_0)\hat{x}(n_0)$$

convient au problème. ■

C'est à dire que $(S, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k...

1.4.1 Equations linéaires homogènes à coefficients constants

Considérons

$$x\left(n+k\right)+p_{1}x\left(n+k-1\right)+...+p_{k}x\left(n\right)=0,\ p_{k}\neq 0,\forall k \tag{1.19}$$

On cherche des solutions sous la forme λ^{n}, $\lambda\in\mathbb{C}$...

Par sibstitution, on obtient,

$$\lambda^{k}+p_{1}\lambda^{k-1}+...+p_{k}=0 \tag{1.20}$$

appelée équation caractéristique!

Remarque 1.4.1 *Comme les p_k sont non nuls, donc toutes les solutions sont non nulles.*

Proposition 1.4.1 *λ_1,λ_2,..., λ_k distinctes $\Longrightarrow\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,...,\lambda_k^n\}$ est un système fondamental de solutions de (1.19).*

Preuve. Montrons que $W\left(0\right)\neq 0$.On a

$$W\left(0\right)=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}=\prod_{j=1}^{k-1}\left(\lambda_j-\lambda_k\right)\neq 0$$

$$\Longrightarrow x\left(n\right)=\sum_{i=1}^{k}a_i\lambda_i^n,\ a_i\in\mathbb{C}$$

est la solution générale de (1.19). ■

Remarque 1.4.2 *Supposons que les solutions distinctes de (1.20) sont λ_1,λ_2,..., λ_k avec les ordres de multiplicité m_1,...,m_k.*
Alors,

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left\{\lambda_i^n,n\lambda_i^n,...,n^{m_i-1}\lambda_i^n\right\}$$

est un système fondamental de solutions de (1.19). Donc la solution générale de (1.19) est une combinaison linéaire de ces solutions.

Exemple 1.4.3

$$\begin{cases}x\left(n+3\right)-7x\left(n+2\right)+16x\left(n+1\right)-12x\left(n\right)=0\\ x\left(0\right)=0,x\left(1\right)=1,x\left(2\right)=1\end{cases}$$

$$r^3-7r^2+16r-12=0$$

$$\lambda_1=2=\lambda_2,\ \lambda_3=3$$

$$\Longrightarrow x\left(n\right)=3\left(2^n\right)+2n\left(2^n\right)-3^{n+1}$$

Equations linéaires non homogènes à coefficients constants

Soit

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + ... + p_k y(n) = g(n) \tag{1.21}$$

L'ensemble des solutions de (1.21) n'est pas un espace vectoriel.

Théorème 1.4.4 *y_1 et y_2 solutions de $(1.21) \Rightarrow x = y_1 - y_2$ est solution de*

$$x(n+k) + p_1(n)\, x(n+k-1) + ... + p_k(n)\, x(n) = 0 \tag{1.22}$$

Preuve. Evidente. ■

Théorème 1.4.5 *Toute solution $y(n)$ de (1.21) peut s'écrire*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

où $\{x_1, ..., x_k\}$ est un sytème fondamental de solutions de (1.22) et y_p est une solution particulière de (1.21).

Preuve. $y(n) - y_p(n)$ est une solution de (1.22)

$$\Rightarrow y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

■

Conclusion 1.4.1 *Ainsi, pour résoudre (1.21), il faut en trouver une solution particulière.*

1.4.2 Stabilité dans les équations linéaires de second ordre à coefficients constants

Dans un premier temps, on considère

$$y(n+2) + p_1(n)\, y(n+1) + p_2(n)\, y(n) = 0 \tag{1.23}$$

Supposons que λ_1 et λ_2 soient les racines de l'équation caractéristique associée à (1.23).

1^er cas: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles $\Longrightarrow y(n) = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n = \lambda_1^n \left[\alpha + \beta\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right]$.

Si $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, $\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = 0\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \alpha\lambda_1^n$.

$\lambda_1 > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, $\lambda_1 = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$, $0 < \lambda_1 < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $-1 < \lambda_1 < 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lambda_1 = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\alpha$, $\lambda_1 < -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

<u>2^{eme} cas:</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ réelles $\Longrightarrow y(n) = (an + b)\lambda^n$.

$|\lambda| \geq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, $|\lambda| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

<u>3^{eme} cas:</u> $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0 \Longrightarrow y(n) = a_0 r^n \cos(n\theta - \omega)$, où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)$ et ω est une constante.

$r > 1 \Longrightarrow y(n)$ oscille à l'exterieur de $C((0,0),1)$ avec un module croissant.

$r = 1 \Longrightarrow y(n)$ oscille sur $C((0,0),1)$.

$r < 1 \Longrightarrow y(n)$ oscille dans $C((0,0),1)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Considérons maintenant l'équation

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = M \neq 0 \tag{1.24}$$

Ici, le point d'équilibre est $y^* \neq 0$. On a $y^* + p_1 y^* + p_2 y^* = M$.

C'est à dire:

$$y^* = \frac{M}{1 + p_1 + p_2}$$

est solution particulière de (1.24).

Par conséquent, en notant $y_c(n)$ la solution générale de (1.23)

$$y(n) = y^* + y_c(n)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = y^* \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_c(n) = 0$$

Ceci nous ramène à l'utilisation de λ_1 et λ_2.

1.4.3 Quelques équations non linéaires résolubles

On termine ce chapitre, comme dans les équation différentielles ordinaires, par quelques exemples d'équations aux différences non linéaires, résolubles par changement de variables.

<u>**Equations de Ricatti:**</u>

Elles sont du type,

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0 \tag{1.25}$$

Pour les résoudre, on pose

$$z(n) = \frac{1}{x(n)},\ z(n+1) = \frac{1}{x(n+1)}$$

En divisant par $x(n+1)x(n)$, on obtient

$$1 + p(n)z(n) + q(n)z(n+1) = 0 \tag{1.26}$$

qui est linéaire.

Cas non homogène:

$$y(n+1)\,y(n)+p(n)\,y(n+1)+q(n)\,y(n)=g(n) \tag{1.27}$$

On pose: $y(n)=\dfrac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)$, et on obtient

$$z(n+2)+[q(n)-p(n+1)]\,z(n+1)-[g(n)+p(n)\,q(n)]\,z(n)=0 \tag{1.28}$$

Equation de Ricatti générale:

$$x(n+1)=\frac{a(n)\,x(n)+b(n)}{c(n)\,x(n)+d(n)},c(n)\neq 0 \tag{1.29}$$

avec $a(n)\,d(n)-b(n)\,c(n)\neq 0$, $\forall n\geq 0$.

Poser $c(n)\,x(n)+d(n)=\dfrac{y(n+1)}{y(n)}$, C'est à dire

$$x(n)=\frac{y(n+1)}{c(n)\,y(n)}-\frac{d(n)}{c(n)}$$

D'où (1.29) devient

$$\begin{cases} y(n+2)+p_1(n)\,y(n+1)+p_2(n)\,y(n)=0 \\ y(0)=1 \\ y(1)=c(0)\,x(0)+d(0) \end{cases}$$

où

$$p_1(n)=-\frac{c(n)\,d(n+1)+a(n)\,c(n+1)}{c(n)}$$

et

$$p_2(n)=a(n)\,d(n)-b(n)\,c(n)\,\frac{c(n+1)}{c(n)}$$

Equation homogène:

L'équation

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)},n\right)=0$$

se résoud en posant $z(n)=\dfrac{x(n+1)}{x(n)}$.

Equations produit:

Elles sont de la forme

$$(y(n+k))^{r_1}\,(y(n+k-1))^{r_2}\,...\,(y(n+k))^{r_k+1}=g(n)$$

et pour la résoudre, il faut poser, $z(n)=\log y(n)$.

Elle devient,

$$r_1 z(n+k) + r_2 z(n+k-1) + ... + r_{k+1} z(n) = \log g(n)$$

qui est linéaire.

Exemple 1.4.4 *Soit*

$$x(n+2) = \frac{x^2(n+1)}{x^2(n)}$$

Posons, $z(n) = \log x(n)$. Alors,

$$z(n+2) - 2z(n+1) + 2z(n) = 0$$

dont les solutions sont,

$$z(n) = 2^{n/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

On conclut avec

$$x(n) = \exp(z(n))$$

1.5 Transformation de Laplace dans le cas discret

Soit

$$x(n) = \begin{cases} x(n) \text{ si } n \in I\!N \\ 0 \text{ si } n \in -I\!N \end{cases}$$

La transformée de Laplace de la suite $x(n)$ se définit par

$$L(x(n)) = \sum_{i=0}^{\infty} x(j) z^{-j} = \widehat{x}(z), z \in \mathbb{C} \tag{1.30}$$

Notons

$$R = \lim_{j \to \infty} \left| \frac{x(j+1)}{x(j)} \right|$$

Alors la transformée de Laplace converge si $|z| > R$ et diverge si $|z| < R$. Tout comme dans les équations différentielles linéaires ordinaires, l'application de cette transformée de Laplace à une équation linéaire discrète, produit une équation algébrique. Il " suffira " de résoudre cette dernière et de faire le " chemin inverse " pour trouver la solution de (1.30) .

Pour faire ce " chemin inverse ", on aura besoin de connaitre la transformée de Laplace de quelques suites.

Exemples et propriétés:

1°)

$$L(\alpha^n) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^j = \frac{z}{z-\alpha} \text{ si } |z| > |\alpha|$$

2°) Par dérivation on obtient,

$$L(n\alpha^n) = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} \text{ si } |z| > |\alpha|$$

3°) Par dérivation une nouvelle fois, on obtient,

$$L(n^2\alpha^n) = \frac{\alpha z\,(z+\alpha)}{(z-\alpha)^3} \text{ si } |z| > |\alpha|$$

4°)

$$L(\alpha^n x(n)) = [L(x(n))]\left(\frac{z}{\alpha}\right), |z| > |\alpha|\, R$$

$$L(n^k x(n)) = z\frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz}(....(z\frac{d}{dz}\,[L(x(n))])))$$

5°) On a,

$$L(\sin(wn)) = \frac{1}{2i}\left[L(e^{iwn}) - L(e^{-iwn})\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z-e^{iw}} - \frac{z}{z-e^{-iw}}\right]$$

$$= \frac{z\sin w}{z^2 - 2z\cos w + 1} \text{ si } |z| > 1$$

6°) Sous la condition $|z| > \max\{R_1, R_2\}$ où R_1 et R_2 sont les rayons de convergence de $L(u(n))$ et de $L(v(n))$, L est linéaire.

7°)

$$L(x(n-k)) = z^{-k}L(x(n)), |z| > R. \tag{1.31}$$

8°)

$$L(x(n+k)) = z^{-k}L(x(n)) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{k-r}, |z| > R. \tag{1.32}$$

En particulier,

$$L(x(n+1)) = zL(x(n)) - zx(0), |z| > R.$$

$$L(x(n+2)) = z^2L(x(n)) - z^2x(0) - zx(1), |z| > R$$

9°)

$$\lim_{|z|\to\infty} L(x(n)) = x(0) \tag{1.33}$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)L(x(n)) = \lim_{n\to\infty} x(n) \tag{1.34}$$

Preuve de (1.34) :

On a,

$$(z-1)L(x(n)) - zx(0) = L\left[x(n+1)-x(n)\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\left[x(j+1)-x(j)\right]z^{-j}$$

et par conséquent,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)L(x(n)) = x(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\left[x(j+1)-x(j)\right] = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

10°) Par analogie , on définit le produit de convolution de deux suites par,

$$x(n) * y(n) = \sum_{j=0}^{n} x(n-j)y(j) = \sum_{j=0}^{n} x(n)y(n-j)$$

Comme dans beaucoup de cas, la propriété suivante possède son exact analogue dans le cas continu.

Proposition 1.5.1

$$L(x(n) * y(n)) = L(x(n))L(y(n))$$

Preuve. *On a,*

$$L(x(n) * y(n)) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m} x(m-j)y(j)\right]z^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} y(j)\left[\sum_{m=j}^{\infty} x(m-j)z^{-m}\right]$$

En posant $m-j=s$, on aura

$$L(x(n) * y(n)) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} y(j)z^{-j}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x(s)z^{-s}\right)$$

■

10°) **Inversion de la transformation de Laplace:**

On peut montrer en utilisant les séries de Laurent que, si deux suites $x(n)$ et $y(n)$ ont la même transformée de Laplace, alors elles sont identiques. On notera L^{-1} cette application. inverse Cette propriété permet de revenir à la suite recherchée lors de la résolution d'une équation aux différences linéaire, en utilisant la transformée de Laplace.

Exemple 1.5.1 *Soit*

$$\widehat{x}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

On a

$$\widehat{x}(z) = \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}}$$

Une division euclidienne permet d'ecrire $\widehat{x}(z)$ *comme la somme d'une série en* $\frac{1}{z}$*. En identifiant avec* $\sum_{i=0}^{\infty} x(j)z^{-j} = \widehat{x}(z)$*, on trouve les coefficients* $x(j), j \in I\!N$*. On peut aussi decomposer* $\left(\widehat{x}(z)\right)/z$ *et utiliser les propriétés 1°) et 2°).*

Exemple 1.5.2 *Soit à résoudre*

$$x(n+2)+3x(n+1)+2x(n) = 0, x(0) = 1, x(1) = -4$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$z^2\widehat{x}(z) - z^2 + 4z + 3(z\widehat{x}(z) - z) + 2\widehat{x}(z) = 0$$

qui donne

$$\widehat{x}(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{-2z}{z+1} + \frac{3z}{z+2}$$

En utilisant $L(\alpha^n) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^j = \frac{z}{z-\alpha}$ *et la linéarité de* L*, on obtient*

$$x(n) = -2(-1)^n + 3(-2)^n$$

Equation de Volterra discrète:

L'équivalent de l'équation de Volterra

$$(d/dt)\,(x(t)) = Bx(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds$$

s'écrit dans le cas discret (par discrétisation de l'intégrale),

$$x(n+1)) = Bx(n) + \sum_{j=0}^{n} C(n-j)x(j)$$

C'est à dire

$$x(n+1)) = Bx(n) + C(n) * x(n)$$

L'application de la transformée de Laplace et la proposition ci-dessus montrent que,

$$z\widehat{x}(z) - zx(0) = B\widehat{x}(z) + \widehat{C}(z)\widehat{x}(z)$$

ou encore

$$\widehat{x}(z) = \frac{zx(0)}{z - B - \widehat{C}(z)}$$

Une décomposition en élément simples dans $\mathbb{C}\,[x]$ permet comme ci-dessus de retrouver $x(n)$.

2

Systèmes d'équations aux différences

2.1 Ecriture d'une équation aux différences sous forme de système

Soit

$$y(n+k) + p_1(n)\, y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)\, y(n) = g(n)$$

Posons

$$\begin{aligned}
z_1(n) &= y(n) \\
z_2(n) &= y(n+1) = z_1(n+1) \\
z_3(n) &= y(n+2) = z_2(n+1) \\
&\vdots \\
z_k(n) &= y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1)
\end{aligned}$$

et

$$z(n) = (z_1(n), z_2(n), \ldots, z_k(n))^T$$

Alors

$$\begin{cases}
z_1(n+1) = & z_2(n) \\
z_2(n+1) = & z_3(n) \\
\quad \ldots & \ldots \\
z_{k-1}(n+1) & = z_k(n) \\
z_k(n+1) = & -p_1(n)\, z_k(n) - p_2(n)\, z_{k-1}(n) - \ldots - p_k(n)\, z_1(n) + g(n)
\end{cases}$$

C'est à dire

$$z(n+1) = A(n)\, z(n) + h(n)$$

où $A(n)$ est la matrice d'odre k

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & & & -p_1(n) \end{pmatrix} \text{ et } h(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(n) \end{pmatrix}$$

Il apparait donc que, comme dans les équations différentielles ordinaires, toute équation aux différences linéaire s'écrit sous forme d'un système linéaire d'ordre un. On aurait donc pu (vu la présence du présent chapitre) faire l'économie d'une bonne partie du chapitre précédent. On ne l'a pas fait, pour ne pas minimiser le parallèle entre le continu et le discret.

Considérons le système,

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + ... + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + ... + a_{2k}x_k(n) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + ... + a_{kk}x_k(n) \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n))^T$$

Alors,

$$x(n+1) = Ax(n)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{pmatrix}$$

On a, ,

$$x(n+1) = A^2x(n-1) = ... = A^jx(n-j+1)$$

C'est à dire,

$$x(n) = Ax(n-1) \Rightarrow x(n) = A^2x(n-2) = A^jx(n-j) = A^{n-n_0}x(n_0)$$

Si on pose $x(n_0) = x_0$ alors

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0$$

Il suffit de savoir calculer A^j pour résoudre (2.1).

Considérons les deux systèmes

$$x(n+1) = A(n)\,x(n) \tag{2.2}$$

$$y(n+1) = A(n)\,y(n) + g(n) \tag{2.3}$$

Le résultat suivant affirme l'existence et l'unicité des solutions de (2.3).

Théorème 2.1.1

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^k, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists! x(n, n_0, x_0) \ \textit{solution de (2.2) telle que}\ x(n_0, n_0, x_0) = x_0$$

Preuve. On a

$$x(n_0+1, n_0, x_0) = A(n_0)\,x(n_0) = A(n_0)\,x_0$$

$$x(n_0+2, n_0, x_0) = A(n_0+1)\,x(n_0+1) = A(n_0+1)\,A(n_0)\,x_0$$

$$x(n, n_0, x_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_0$$

où

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)\ldots A(n_0) \ \text{si } n > n_0 \\ I \text{ si } n = n_0 \end{cases}$$

D'où l'existence et l'unicité. ■

Définition 2.1.1 *La famille de suites* $\{x_1(n), \ldots, x_k(n)\}$ *est dite libre pour* $n \geq n_0 \geq 0$ *si*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i(n) = 0, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1\ldots k$$

Notons

$$\Phi(n) = [x_1(n), \ldots, x_k(n)]$$

où $x_i(n)$ est solution de (2.2), $\forall i = 1\ldots k$.

Alors

$$\Phi(n+1) = [A(n)\,x_1(n), \ldots, A(n)\,x_k(n)]$$

$$\Longrightarrow \Phi(n+1) = A(n)\,\Phi(n) \tag{2.4}$$

Définition 2.1.2 *Si* $\Phi(n)$ *est une matrice régulière pour* $n \geq n_0$ *et satisfait* (2.4), *elle est appelée matrice fondamentale de (2.2).*

Remarque 2.1.1

$$\left.\begin{array}{l}\Phi \text{ fondamentale} \\ C \text{ matrice régulière}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi C \text{ est fondamentale}$$

C'est à dire qu'il existe une infinité de matrices fondamentales. Cependant

$$\exists ! \Phi \text{ telle que} \left\{\begin{array}{l}\Phi(n+1)=A(n)\Phi(n) \\ \Phi(n_0)=I\end{array}\right.$$

Notons

$$\Phi(n,m)=\Phi(n)\Phi^{-1}(m),\ n\geq m$$

Les propriétés suivantes sont immédiates.

1. $\Phi^{-1}(n,m)=\Phi(m,n)$
2. $\Phi(n,m)=\Phi(n,r)\Phi(r,m)$
3. $\Phi(n,m)=\prod_{i=m-1}^{n-1} A(i)$

Proposition 2.1.1 *L'unique solution de (2.2) telle que $x(n_0,n_0,x_0)=x_0$ s'écrit*

$$x(n,n_0,x_0)=\Phi(n,n_0)x_0$$

Preuve. La suite $x(n,n_0,x_0)=\Phi(n,n_0)x_0$ vérifie (2.2) car

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \Phi(n+1,n_0)x_0=A(n)\Phi(n,n_0)x_0 \\ &= A(n)x(n) \end{aligned}$$

et

$$x(n_0,n_0,x_0)=\Phi(n_0,n_0)x_0=Ix_0=x_0$$

De plus la solution est unique. ■

Lemme 2.1.1 *(d'Abel):*

$$\forall n\geq n_0>0,\ \det\Phi(n)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}\det A(i)\right]\det\Phi(n_0) \tag{2.5}$$

Preuve. En vertu de (2.4), on a

$$\det\Phi(n+1)=\det A(n)\det\Phi(n)$$

dont le solution est (2.5). ■

Corollaire 2.1.1

$$A \ constante \Longrightarrow \det \Phi(n) = (\det A)^{n-n_0} \det \Phi(n_0)$$

Preuve. Il s'agit d'une application de (2.5). ■

Corollaire 2.1.2 *$\Phi(n)$ est régulière pour $n \geq n_0$ si et seulement si $\Phi(n_0)$ l'est.*

Preuve. La propriété (2.5) et le fait que $\det A(i) \neq 0$, $\forall i \geq n_0$, donnent le résultat. ■

Corollaire 2.1.3 *$x_1(n), ..., x_k(n)$ sont linéairement indépendants pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si $\Phi(n_0)$ est régulière.*

Preuve. C'est une conséquence du corollaire précédent. ■

Théorème 2.1.2 *Il existe k solutions linéairement indépendantes de (2.2) pour $n \geq n_0$.*

Preuve. Pour $i = 1, ..., k$, soit $e_i = \left(0, ..., \underset{i^{eme}}{1}, 0, ...0\right)^T$. Le théorème d'existence donne,

$$\forall i = 1, ..., k, \quad \exists x(n, n_0, e_i) \text{ solution de (2.2) telle que } x(n_0, n_0, e_i) = e_i$$

Reste à prouver que $\{x(n, n_0, e_i)\}_{i=1,...,k}$ est libre. C'est le cas si $\Phi(n_0)$ est régulière. Mais $\Phi(n_0) = I$. ■

Corollaire 2.1.4 *L'ensemble S des olutions de (2.2) est un espace vectoriel de dimension k.*

Preuve.

$$\begin{aligned} x(n, n_0, x_0) &\in S \Longrightarrow x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0) x_0 \\ &\Longrightarrow \dim S \leq k \end{aligned}$$

Théorème précédent implique

$$\dim S \geq k$$

Donc $\dim S = k$. Le fait que c'est un espace vectoriel est evident. ■

Théorème 2.1.3 *Toute solution $y(n)$ de (2.3) peut s'écrire sous la forme*

$$y(n) = \Phi(n) c + y_p(n)$$

où $y_p(n)$ est une solution particulière de (2.3) et c une constante.

Preuve. $y(n) - \Phi(n) c$ est une solution de (2.2). ■

Lemme 2.1.2 *La suite*

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)\, g(r)$$

est une solution particulière de (2.3).

Preuve. On a

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1)\, g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\, \Phi(n, r+1)\, g(r) + \Phi(n+1, n+1)\, g(n) \\ &= A(n)\, y_p(n) + g(n) \ \text{ car } \Phi(n+1, n+1) = I \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.4 *(Variation de la constante) L'unique solution de*

$$\begin{cases} y(n+1) = A(n)\, y(n) + g(n) \\ y(n_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

est

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)\, y_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} \Phi(n, k+1)\, g(k)$$

Preuve. Il s'agit d'une conséquence du théorème et du lemme précédents. ■

Cas particulier: Si $A(n) = A$, alors

$$\Phi(n, n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = A^{n-n_0} \text{ et } \Phi(n, k+1) = \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} A(i)\right] = A^{n-k+1}$$

2.2 Stabilité et rayon spectral

Soit

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{2.7}$$

où $A(n)$ est supposée régulière pour $n \geq n_0$. Soit $\Phi(n)$ une matrice fondamentale. On a $\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$. Rappelons aussi que si $A(n) = A$, alors

$$\Phi(n, m) = \Phi(n - m) = A^{n-m}$$

Le théorème suivant permet d'étudier la stabilité de la solution nulle de (2.7) au moyen de la matrice fondamentale.

Théorème 2.2.1 *(fondamental) La solution* $x = 0$ *de* (2.7) *est:*
(i) *stable* $\Leftrightarrow \exists\ M > 0,\ \ \|\Phi(n)\| \leq M,\ \forall n \geq n_0 \geq 0.$
(ii) *uniformément stable* $\Leftrightarrow \exists\ M > 0,\ \ \|\Phi(n,m)\| \leq M,\ \forall n \geq m \geq n_0 \geq 0.$
(iii) *asymptotiquement stable* $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0.$
(iv) *uniformément asymptotiquement stable* $\Leftrightarrow \exists \eta \in]0,1[\,, \exists\ M > 0, \|\Phi(n,m)\| \leq M\eta^{n-m}, . \forall n \geq m \geq n_0 \geq 0.$

Preuve. Sans perte de généralité, on supposera que $\Phi(n_0) = I$. Par conséquent, $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$.
(i) $[\Leftarrow]$ On a $\|\Phi(n)\| \leq M \Rightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| \leq \varepsilon$ si $\alpha = \varepsilon/M$.
$[\Rightarrow]$ On a $\|x(n, n_0, x_0)\| = \|\Phi(n)x_0\| \leq \varepsilon$ dès que $\|x_0\| \leq \delta$ et donc

$$\|\Phi(n)\| = \underset{\|\xi\|\leq 1}{Sup} \|\Phi(n)\xi\| = \frac{1}{\delta} \underset{\|x_0\|\leq \delta}{Sup} \|\Phi(n)x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = M$$

Les autres cas se font de la même manière. ■

Corollaire 2.2.1 *La solution* $x = 0$ *de* (2.7) *est stable si et seulement si toutes les solutions de* (2.7) *sont bornées.*

Preuve. Passer aux composantes de $\Phi(n)$ dans la partie (i) du théorème ci-dessus. ■

Le théorème suivant permet l'étude de la stabilité, au moyen des a_{ij}.

Théorème 2.2.2 *Notons* $A(n) = (a_{ij}(n))_{i,j}$ *, et supposons que*

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}(n)| \leq 1, n \geq n_0, k \geq j \geq 1$$

Alors, la solution $x = 0$ *de* (2.7) *est uniformément stable.*

Preuve.

$$\|A(n)\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}(n)| \leq 1 \Rightarrow \|\Phi(n,m)\|_1 = \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1$$
$$\leq \|A(n-1)\|_1 \|A(n-2)\|_1 ... \|A(m)\|_1 \leq 1$$

car $\|.\|_1$ est multiplicative. La partie (ii) du théorème précédent donne le résultat. ■

Dans le cas où A est constante, le rayon spectral permet d'étudier la stabilité de la solution nulle. Rappelons qu'une valeur propre est semi simple si le bloc de Jordan J_λ qui lui est associé est diagonal.

Théorème 2.2.3 *Soit*

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{2.8}$$

et

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$$

(i) $x = 0$ est stable dès que $\rho(A) \leq 1$ et toutes les valeurs propres de A de module égal à 1 sont semi simples.
(ii) $x = 0$ est asymptotiquement stable $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Preuve. Soit $A = PJP^{-1}$ où $J = diag(J_1, J_2, ..., J_r)$ et

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Le théorème fondamental dit que la solution $x = 0$ est stable si et seulement si,

$$\exists\ M > 0,\ \ \|A^n\| = \left\|PJ^nP^{-1})\right\| \leq M,\ \forall n \geq n_0 \geq 0$$

C'est le cas si $\|J^n\| \leq (M/\|P\|\,\|P^{-1}\|)$. Par ailleurs, $J^n = diag(J_1^n, J_2^n, ..., J_r^n)$ où

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \complement_n^1\lambda_i^{n-1} & . & ... & \complement_n^{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & . & ... & . \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i^n & \complement_n^1\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

Si $|\lambda_i| < 1$ alors $\|J_i^n\| \to 0, n \to \infty$ et donc $\|J_i^n\|$ est borné et par conséquent le problème est réglé dans ce cas.

Dans les autres cas, le raisonnement est analogue. ■

Remarque 2.2.1 *Si toutes les valeurs propres de (2.8) sont supérieures à un en module, alors on montre de la même façon que toutes les solutions partent à l'infini.*

Remarque 2.2.2 *Si A est une matrice d'ordre trois, de valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ telles que $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ et $|\lambda_3| > 1$, alors $\exists W^s$ (plan) et $\exists W^i$ (droite) tels que:*

i.$\forall x_0 \in W^s$, $x(n, 0, x_0) \to 0$ quand $n \to \infty$ et $x(n, 0, x_0) \in W^s, \forall n > 0$.
ii. $\forall x_0 \in W^i, x(n, 0, x_0) \in W^i$ et $x(-n) \to 0$ quand $n \to \infty$
iii. $x_0 \notin W^1 \cup W^i \Rightarrow |x(n, 0, x_0)| \to 0, n \to \infty$
On est en présence d'un col de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 2.2.3 *Dans le cas d'un système linéaire non autonome, le fait que $\rho(A) < 1$, ne suffit pas à assurer la stabilité de la solution nulle. En effet, soit le système*

$$y(n+1) = A(n)y(n)$$

où

$$A(n) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 9+7(-1)^n \\ 9-7(-1)^n & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $A(n)$ sont pour tout n égales à $\pm 2^{-1/2}$. Donc $\rho(A) < 1$. Cependant, la matrice fondamentale est

$$\Phi(n,0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{-2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{-2n} & 0 \end{pmatrix} & \textit{si } n \textit{ est pair} \end{cases}$$

qui est non bornée.

2.2.1 Sur la résolution numérique d'un système linéaire.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,k}$ et considérons les systèmes

$$Ax = b \tag{2.9}$$

et

$$x(n+1) = Bx(n) + d \tag{2.10}$$

où $B = I - D^{-1}A,\ d = D^{-1}b,\ D = diag(a_{11}, ..., a_{kk})$ et où l'on suppose que $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, ..., k$. Il s'agit de la méthode itérative de Jacobi. Soit x^* tel que $Ax^* = b$. Supposons que A est régulière. Alors x^* est unique.

L'erreur commise dans la résolution de (2.9) en approximant ses solutions par celles de (2.10) est $e(n) = x(n) - x^*$.

On a,

$$Bx^* + d = x^* - D^{-1}Ax^* + D^{-1}b = x^* - D^{-1}b + D^{-1}b = x^* \tag{2.11}$$

La différence entre (2.10) et (2.11) donne

$$e(n+1) = Be(n) \tag{2.12}$$

Enfin,

$$x(n) \to x^* \text{ quand } n \to \infty \Leftrightarrow e(n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow x = o \text{ est asymptotiquement stable pour } (2.12) \Leftrightarrow \rho(B) < 1.$$

2.3 Systèmes linéaires planaires.

Ce qui suit est l'équivalent de la classification de Poincaré. Considérons le système

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{2.13}$$

où $x = (x_1, x_2)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Rappelons que le point d'équilibre x^* de (2.13) est unique si et seulement si $(A - I)x^* = 0$ admet une unique solution. C'est à dire, $\det(A - I) \neq 0$.

Posons $y(n) = x(n) - x^*$. Alors

$$y(n+1) = Ax(n) - x^* = Ax(n) - Ax^* = Ay(n)$$

Donc la stabilité de x^* revient à celle de 0.

Soit $J = P^{-1}AP$ la forme de Jordan associée à A. Alors,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Posons

$$y(n) = P^{-1}x(n) \tag{2.14}$$

Alors (2.13) s'écrit

$$y(n+1) = Jy(n) \tag{2.15}$$

Le comportement qualitatif de (2.13) est identique à celui de (2.15).

Prenons $y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ et $O_{y_0} = \{y(n, 0, y_0), n \geq 0\}$.

<u>Premier cas:</u>

La matrice A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2. Dans ce cas, (2.15) s'écrit

$$\begin{cases} y_1(n+1) & = \lambda_1 y_1(n) \\ y_2(n+1) & = \lambda_2 y_2(n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(n) = \lambda_1^n y_{10} \\ y_2(n) = \lambda_2^n y_{20} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right)$$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ et $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{y_2(n)}{y_1(n)} = \infty$.

<u>Deuxième cas:</u>

La matrice A possède une valeur propre double λ.et est diagonalisable Dans ce cas on a,

$$\begin{pmatrix} y_1(n \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} y_1(n = & \lambda^n y_{10} \\ y_2(n) = & \lambda^n y_{20} \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{y_{20}}{y_{10}}$$

Troisième cas:

La matrice A possède une valeur propre double λ mais n'est pas diagonalisable. Dans ce cas (2.15) s'écrit,

$$\begin{pmatrix} y_1(n \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} y_1(n = & \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20} \\ y_2(n) = & \lambda^n y_{20} \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0.$$

Quatrième cas:

La matrice A possède deux valeurs propres conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$. Dans ce cas on a,

$$\begin{pmatrix} y_1(n \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos(nw) + c_2 \sin(nw) \\ -c_1 \sin(nw) + c_2 \cos(nw) \end{pmatrix}$$

Si $y_1(0) = y_{10}$ et $y_2(0) = y_{20}$, alors en posant $\cos\gamma = \dfrac{y_{10}}{r_0}$, $\sin\gamma = \dfrac{y_{20}}{r_0}$, $w = arctg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ et $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$, on obtient:

$$y_1(n) = |\lambda_1|^n r_0 \cos(nw - \gamma) = r(n)\cos\theta(n)$$
$$y_2(n) = -|\lambda_1|^n r_0 \sin(nw - \gamma) = r(n)\sin\theta(n)$$

avec,

$$r(n) = |\lambda_1|^n r_0$$
$$\theta(n) = -(nw - \gamma)$$

D'où

$$|\lambda_1| < 1 \Rightarrow \text{Foyer asymptotiquement stable}$$
$$|\lambda_1| > 1 \Rightarrow \text{Foyer instable}$$
$$|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \text{centre}$$

2.4 Méthode de Lyapounov

Soit

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{2.16}$$

où $f : I\!R^k \to I\!R^k$ est continue sur $\mathcal{G} \subset I\!R^k$. Soit $x^* \in I\!R^k$ tel que $f(x^*) = x^*$. Soit

$$V : I\!R^k \to I\!R^k$$

et posons $\triangle(V(x)) = V(f(x)) - V(x)$. Alors,

$$\triangle(V(x(n))) = V(f(x(n))) - V(x(n)).$$

Définition 2.4.1 *V est une fonction de Lyapounov de* (2.16) *sur $\mathcal{G} \subset I\!R^k$ si:*
(i) V est une fonction continue sur $\mathcal{G}$.
(ii) $\triangle(V(x)) \leq 0, \forall x, f(x) \in \mathcal{G}$.
V est dite définie positive en x^* si:
(i) $V(x^*) = 0$.
(ii) $\exists \gamma > 0, V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}(x^*, \gamma) - \{x^*\}$.

Théorème 2.4.1 *1°) Si V est une fonction de Lyapounov de* (2.16) *dans un voisinage $\mathcal{V}(x^*)$ et est définie positive en x^*, alors x^* est stable.*
2°) Si de plus $\triangle(V(x)) < 0$, pour tout $x \in \mathcal{V}(x^*)$ et $f(x) \in \mathcal{V}(x^*) - \{x^*\}$, alors x^* est asymptotiquement stable.
3°) Si de plus $\mathcal{V}(x^*) = I\!R^k$ et $V(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$, alors x^* est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. 1°)
Posons $\mathcal{H} = \mathcal{V}(x^*)$ et soit $\alpha_1 > 0$ tel que $\mathcal{B}(x^*, \alpha_1) \subset \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$. La fonction f est continue. Par conséquent,

$$\exists \alpha_2 > 0, x \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_2) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_1) \tag{2.17}$$

Choisissons $0 < \varepsilon \leq \alpha_2$ et soit

$$\psi(\varepsilon) = Inf \ \{V(x), \varepsilon \leq \|x - x^*\| \leq \alpha_1\}$$

La fonction $\psi(x)$ est bien définie car V est continue sur un compact. Le théorème de Heine implique que

$$\exists x_1, \varepsilon \leq \|x_1 - x^*\| \leq \alpha_1, \psi(\varepsilon) = V(x_1) \tag{2.18}$$

Comme V est définie positive, donc

$$V(x^*) < V(x_1) = \psi(\varepsilon)$$

Comme V est continue en x^*, donc

$$\exists\delta \in \left]0, \varepsilon\right[, 0 < \|x - x^*\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \psi(\varepsilon) \tag{2.19}$$

Remarquons que

$$\forall x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \delta), \forall n \geq 0, x(n) \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$$

En effet, dans le cas contraire,

$$\exists x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \delta), \exists m \geq 0, x(r) \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon), \forall r, 1 \leq r \leq m \text{ et } x(m+1) \notin \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$$

Comme $x(m) \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon) \subset \mathcal{B}(x^*, \alpha_2)$, donc $x(m+1) \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_1)$ (...à cause de (2.17)). Par conséquent, $V(x(m+1)) \geq \psi(\varepsilon)$. Mais, en utilisant (2.19), il vient

$$V(x(n+1) \leq V(x(n) \leq ... \leq V(x_0) < \psi(\varepsilon)$$

Il y'a contradiction et par conséquent, x^* est stable.
Les autres points se démontrent de façon analogue. ■

Exemple 2.4.1 *L'équation*

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1 + \beta\left(x(n)\right)^2}, \ \beta > 0$$

a comme points d'équilibre, $x^* = 0$ *et* $x^* = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha - 1}{\beta}}$. *En posant* $y_1(n) = x(n-1)$ *et* $y_2(n) = x(n)$, *l'équation précédente s'écrit*

$$\begin{cases} y_1(n+1) = & y_2(n) \\ y_2(n+1) = & \dfrac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta\left(y_2(n)\right)^2} \end{cases}$$

La fonction $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *est continue et définie positive. Par ailleurs, si* $\alpha^2 - 1 \leq 0$, *le seul point d'équilibre est* $x^* = 0$. *De plus,*

$$\begin{aligned} \triangle(V(y_1(n), y_2(n))) &= y_1^2(n+1) + y_2^2(n+1) - y_1^2(n) - y_2^2(n) \\ &= \left[\frac{\alpha^2}{\left(1 + \beta\left(y_2^2(n)\right)\right)^2} - 1\right] y_1^2(n) \leq \left(\alpha^2 - 1\right) y_1^2(n) \leq 0 \end{aligned}$$

et par conséquent $x^* = 0$ *est stable. Cependant la stabilité asymptotique ne peut être étudiée avec ce théorème vu que* $\triangle(V) = 0$ *sur l'axe* $y_1 = 0$.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes d'instabilité de la solution nulle de l'équation (2.16) . C'est l'équivalent du théorème de Tchétaev.

Théorème 2.4.2 .
Si $\triangle(V)$ est définie positive dans $\mathcal{V}(0)$ et $\exists$ $(a_i)_i$ telle que $a_i \to 0$ quand $i \to \infty$ et $V(a_i) > 0$ pour tout i, alors la solution $x = 0$ de (2.16) est instable.

Preuve. Supposons que $\triangle(V(x)) > 0, \forall x \in \mathcal{B}(0,\eta) - \{0\}$,$V(0) = 0$ et $x = 0$ stable. Il s'en suit que

$$\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \eta, \exists \delta < \varepsilon, \forall n \in I\!N, \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(n,0,x_0)\| < \varepsilon$$

Comme $a_i \to 0$, donc $\exists j \in I\!N,\ \triangle(V(a_j)) > 0$. Prenons $x_0 = a_j$ tel que $\|x_0\| < \delta$. On a alors,

$$\overline{\mathcal{O}(x_0)} \subset \overline{\mathcal{B}(0,\varepsilon)} \subset \mathcal{B}(0,\eta) \Rightarrow \mathcal{O}(x_0) \text{ est bornée.}$$

Comme cet ensemble est fermé, il est donc compact. Par conséquent, $\{V(x(n))\}_n$ est compact; donc borné. Comme $\triangle(V(x(n))) > 0$, il s'en suit que $(V(x(n)))_n$ est croissante; donc convergente vers une valeur c. D'après le théorème de Lasalle ([5] pp $188 - 189$), on conclut que $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$. La continuité de V permet d'écrire,

$$0 < (V(x(n))(x_0) < \lim_{n\to\infty} V(x(n) = 0.$$

Ceci est une contradiction et donc $x = 0$ est instable. ■

Remarque 2.4.1 *Le théorème est vrai si $\triangle(V)$ est définie négative et $V(a_i) < 0$.*

2.5 Stabilité et approximation linéaire

Considérons les deux systèmes

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n, y(n)) \tag{2.20}$$

et

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{2.21}$$

où $A(n) \in \mathcal{M}_k(I\!R)$ est régulière, pour tout n. Supposons que $g : I\!N \times \mathcal{G} \to I\!R^k, \mathcal{G} \subset I\!R^k$ est continue. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}(0))$ et $f(n,0) = 0$. Posons $g(n,y) = f(n,y) - A(n)y(n)$ et $A(n) = \mathcal{J}f|_{y=0}$ la jacobienne de f au point $y = 0$. Il apparait que l'équation

$$y(n+1) = f(n, y(n)) \tag{2.22}$$

s'écrit sous la forme (2.20) .

Rappelons que

$$g(n,y) = o(y) \text{ si } [\forall \varepsilon, \exists \eta > 0, \|y\| < \eta \Rightarrow \|g(n,y)\| < \varepsilon \|y\|, \forall n \in I\!N].$$

Dans le cas autonome, l'équation

$$y(n+1) = f(y(n)) \tag{2.23}$$

va s'ecrire

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)) \tag{2.24}$$

où $A = \mathcal{J}f|_{y=0}$ est constante et $g(y) = f(y) - Ay$. Comme f est différentiable en 0, $f(y) - f(0) - Ay = o(y)$. C'est à dire

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$$

Lemme 2.5.1 *(de Gronwall-Bellman dans le cas discret)*

Soit $z(n)$ et $h(n)$ deux suites telles que $h(n) \geq 0, \forall n \geq n_0 \geq 0$. Si $\exists M > 0$,

$$z(n) \leq M\left[z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j)\right]$$

Alors,

$$\forall n \geq n_0, z(n) \leq z(n_0)\prod_{j=n_0}^{n-1}[1 + Mh(j)] \tag{2.25}$$

et

$$\forall n \geq n_0, z(n) \leq z(n_0)\exp\left[\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j)\right] \tag{2.26}$$

Preuve. Considérons la suite définie par,

$$\begin{cases} u(n) &= M\left[u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j)\right] \\ u(n_0) &= z(n_0) \end{cases} \tag{2.27}$$

Par hypothèse, on a

$$h(j) \geq 0, \forall j \geq n_0 \Rightarrow z(n) \leq u(n), \forall n \geq n_0$$

De (2.27), il vient

$$u(n+1) - u(n) = Mh(n)u(n) \Rightarrow u(n+1) = (1 + Mh(n))\,u(n)$$

dont la solution est

$$u(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1}[1 + Mh(j)]\,u(n_0)$$

qui donne (2.25) . Comme $1 + Mh(j) \leq \exp(Mh(j))$, il en résulte (2.26) . ∎

Le théorème suivant permet d'étudier la stabilité d'une perturbation d'un système linéaire.

Théorème 2.5.1 *Si* $\|g(n, y(n))\| \leq a_n \|y(n)\|$, $a_n \geq 0$, $\sum_{n_0}^{\infty} a_n < \infty$, *et la solution* $x = 0$ *de* (2.21) *est uniformément stable (resp uniformément asymptotiquement stable), alors la solution nulle de* (2.20) *est uniformément stable (resp uniformément asymptotiquement stable).*

Preuve. Supposons que la solution $x = 0$ de (2.21) soit uniformément stable. Par conséquent,

$$\exists M \geq 0, \|\Phi(n, n_0)\| \leq M, \forall n \geq n_0$$

La formule de variation des constantes montre que la solution de (2.20) s'écrit,

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(j, y(j))$$

D'où,

$$\|y(n)\| \leq M \|y_0\| + M \sum_{j=n_0}^{n-1} g_j \|y(j)\|$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme de Gronwall-Bellman,

$$\|y(n)\| \leq M \|y_0\| \exp\left(M \sum_{j=n_0}^{n-1} g_j\right)$$

Il suffit alors que $\|y_0\|$ soit pris suffisament petit de sorte que $M \|y_0\| \exp\left(M \sum_{j=n_0}^{n-1} g_j\right) < \varepsilon$ et la stabilité uniforme de la solution nulle de (2.20) en résulte.

La preuve est analogue pour la stabilité uniforme asymptotique. ■

3

Existence de solutions homoclines dans une classe de systèmes hamiltoniens discrets

3.1 Introduction

Le problème d'existence de solutions homoclines a fait l'objet de nombreux travaux de recherche pour les équations différentielles ordinaires. La plupart de ces travaux sont consacrés à des systèmes hamiltoniens. Récemment, il a été démontré l'existence de ce type de solutions dans les systèmes dynamiques discrets (voir par exemple [10, 11, 2, 7] et les références qui s'y trouvent). C'est le problème qui est étudié dans ce chapitre. Manjun, M.et Zhiming ([10, 11])ont étudié la discrétisée de l'équation différentielle

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t, x(t)) \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par rapport à la seconde variable. Nous allons montrer, l'existence d'une orbite homocline pour la classe d'équations aux différences de second ordre obtenue après la discrétisation de l'équation précédente. La méthode est basée sur l'utilisation du lemme "mountain pass". L'équation (3.1) est équivalente à un système hamiltonien continu non linéaire du premier ordre. En effet:
Posons $p(t)x'(t) = y(t)$. On obtient alors le système

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = & y(t)/p(t) \\ y'(t) = & f(t, x(t)) - q(t)x(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

C'est à dire,

$$(f(t,x(t)) - q(t)x(t))\,dx = \frac{y(t)}{p(t)}dy$$

En integrant, on obtient

$$F(t,x) - \left(x^2/2\right)q(t) = (1/p(t))(y^2/2)$$

avec

$$\int_0^x f(t,s)ds = F(t,x)$$

La fonction hamiltonienne est définie par

$$H(t,X(t)) = -F(t,x(t)) + (1/2)q(t)x^2(t) + (1/2p(t))y^2(t)$$

où $X(t) = \ (x(t),y(t))^T$.

Calculons les dérivées partielles de la fonction hamiltonienne H

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial x} = -f(t,x) + x(t)q(t) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{y(t)}{p(t)} \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Maintenant nous pouvons écrire le système (3.3) sous la forme matricielle

$$X'(t) = JH_X$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$H_X = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial x}\right)^T$$

La matrice J est dite normale sympléctique.

On discrétise l'équation (3.1) en posant

$$x'(t) = x(t+1) - x(t)$$

On obtient l'équation aux différences

$$\Delta\left[\Delta u(t-1)p(t)\right] + q(t)u(t) = f(t,u(t)),\ t \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

3.2 Etude de l'existence d'une orbite homocline pour l'équation aux différences (3.4) dans le cas où p, q et f sont des fonctions périodiques

La forme matricielle de l'équation (3.4) s'écrit:

$$\Delta X(t) = J\nabla H_X(t, u(t+1), z(t)),\ t \in \mathbb{Z}$$

où

$$\begin{aligned}
X(t) &= (u(t), z(t))^T \\
z(t) &= p(t)\Delta u(t-1) \\
H(t, X(t)) &= \frac{1}{2p(t)} z^2(t) + \frac{1}{2} q(t) u^2(t) - F(t, u(t)) \\
F(t, x) &= \int_0^x f(t, s) ds
\end{aligned}$$

et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enonçons le résultat principal de ce chapitre. Notons $N[1, T]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et T.

Dans toute cette section, les fonctions $f(t, x)$, $p(t)$ et $q(t)$ sont supposées périodiques en t, de période T.

Théorème 3.2.1 *Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:*
(H_1) *Pour tout* $t \in N[1, T], p(t) > 0$ *et* $q(t) > 0$.
(H_2) *Pour tout* $t \in N[1, T]$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(t, x)}{x} = 0$.
(H_3) *Il existe une constante* $\beta > 2$ *telle que,*

$$xf(t, x) \leqslant \beta \int_0^x f(t, s) ds < 0 \text{ pour tout } (t, x) \in N[1, T] \times \mathbb{R}$$

Alors, l'équation (3.4) admet une orbite homocline non triviale.

Remarque 3.2.1 *La suite* $u(t) \equiv 0$ *est une solution triviale pour l'équation* (3.4) *(grâce à l'hypothèse* (H_2) *et à la continuité de la fonction* f *par rapport à* x*).*

Proposition 3.2.1 *L'hypothèse* (H_3) *implique que:*
(1) il existe une constante $a > 0$ *telle que*

$$\int_0^x f(t, s) ds \leq -a(|x|)^\beta \text{ pour tout } (t, x) \in N[1, T] \times \mathbb{R} \tag{3.5}$$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(t,x)}{x} = -\infty$

Preuve. (1) En vertu de l'hypothèse (H_3), on a

$$xf(t,x) \leq \beta \int_0^x f(t,s)ds < 0$$

Donc

$$xF'_x(t,x) \leq \beta F(t,x)$$

car

$$\int_0^x f(t,s)ds = F(t,x)$$

Par conséquent, puisque F est négative,

$$\frac{F'_x(t,x)}{F(t,x)} \geq \frac{\beta}{x}$$

Par intégration par rapport à x, il existe $c > 0$ tel que

$$\ln|F(t,x)| \geq \beta \ln(c\,|x|)$$

qui donne

$$|F(t,x)| \geq (c\,|x|)^\beta$$

C'est à dire,

$$F(t,x) \leq -c^\beta\,|x|^\beta$$

Il suffit de prendre $c^\beta = a$.Ceci termine la preuve.

(2) Montrons que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{x} = -\infty$$

On a

$$xf(t,x) \leq \beta \int_0^x f(t,s)ds \leq -a\beta\,|x|^\beta \quad \Leftrightarrow \frac{xf(t,x)}{x^2} \leq \frac{-a\beta\,|x|^\beta}{x^2}$$

D'où

$$\frac{f(t,x)}{x} \leq -a\beta x^{\beta-2}$$

Comme $\beta > 2$, et a, β sont deux constantes strictement positives, on a:

$$-a\beta x^{\beta-2} \to -\infty \text{ quand } x \to +\infty$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{x} = -\infty$$

■

Notations:

Notons par S l'espace vectoriel des suites réelles de la forme:

$$S = \left\{u = \{u(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}, u(t) \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_m = \{u \in S,\ u(2mT + t) = u(t),\ \forall t \in \mathbb{Z}\}$$

L'espace E_m est isomorphe à $\mathbb{R}^{2mT}$. Dans le but d'exploiter la forme de (3.4), on définit le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{t=-mT}^{t=mT-1} [p(t)\Delta u(t-1)\Delta v(t-1) - q(t)u(t)v(t)] \text{ pour tout } u, v \in E_m \tag{3.6}$$

La formule (3.6) permet de définir la norme

$$\|u\|_m^2 = \sum_{t=-mT}^{t=mT-1} \left[p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2\right] \ ,\forall u \in E_m \tag{3.7}$$

L'espace $(E_m, \langle ., .\rangle_m)$ est un espace de Hilbert (de fonctions $2mT$-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$), linéairement homéomorphe à $\mathbb{R}^{2mT}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère la fonctionnelle définie par,

$$I_m(u) = \sum_{t=-mT}^{t=mT-1} \left[(1/2)p(t)(\Delta u(t-1))^2 - (1/2)q(t)(u(t))^2 + F(t, u(t))\right], \forall u \in E_m \tag{3.8}$$

La fonctionelle I_m est continument différentiable et sa dérivée au sens de Fréchet est donnée par

$$\frac{\partial I_m(u)}{\partial u(t)} = -\Delta\left[p(t)\Delta u(t-1)\right] - q(t)u(t) + f(t, \mathrm{u}(t)), t \in N\left[-mT, mT-1\right]$$

en vertu de (3.7) et de (3.8), on peut écrire

$$I_m(u) = (1/2)\|u\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} F(t, u(t)) \tag{3.9}$$

où

$$u = (u(-mT), u(-mT+1), ..., u(mT-1))^T$$

Rappelons la **condition de Palais-Smale**:

Soit H un espace de Hilbert. On dit que la fonctionnelle $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ vérifie la condition de Palais-Smale si, toute suite $\{x_n\} \subset H$ pour laquelle $J(x_n)$ est bornée et $J'(x_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ admet une sous-suite convergente dans H.

La démonstration du théorème necessite celles des cinq lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *Supposons que (H_1) et (H_3) soient vérifiées. Alors I_m satisfait la condition de Palais-Smale.*

Preuve. Notons

$$\begin{aligned}
\zeta_{1,1} &= p(-mT) + p(-mT+1) \\
\zeta_{2,2} &= p(-mT+1) + p(-mT+2) \\
\zeta_{2mT-1,2mT-1} &= p(mT-1) + p(mT-2) \\
\zeta_{2mT,2mT} &= p(mT) + p(mT-1)
\end{aligned}$$

La formule (3.7) est équivalente à

$$\|u\|_m^2 = \langle (Q_m + P_m)u, u \rangle \tag{3.10}$$

où $P_m(t)$ et $Q_m(t)$ sont respectivement les deux matrices de type $2mT \times 2mT$

$$\begin{pmatrix}
\zeta_{1,1} & -p(-mT+1) & 0 & ... & 0 & -p(-mT) \\
-p(-mT+1) & \zeta_{2,2} & -p(-mT+2) & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & \zeta_{2mT-1,2mT-1} & -p(mT-1) \\
-p(mT) & 0 & 0 & ... & -p(mT-1) & \zeta_{2mT,2mT}
\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}
-q(-mT) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
0 & -q(-mT+1) & 0 & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & -q(mT-2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & -q(mT-1)
\end{pmatrix}$$

et

$$u = (u(-mT), u(-mT+1), ..., u(-1), u(0), u(1), ..., u(mT-1)).$$

Grâce à (H_1), la matrice $Q_m + P_m$ est définie positive. Donc toutes ses valeurs propres sont distinctes et positives. Notons par λ_M sa plus grande valeur propre et par λ_m sa plus petite valeur propre. En utilisant (3.10), on a

$$\lambda_m \|u\|^2 \leq \|u\|_m^2 \leq \lambda_M \|u\|^2 \tag{3.11}$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a

$$\|u\|_m^2 = \langle (Q_m + P_m)u, u \rangle \leq \|Q_m + P_m\| \|u\|^2$$

Mais,

$$\|Q_m + P_m\| = \lambda_M$$

Donc,

$$\|u\|_m^2 \leq \lambda_M \|u\|^2$$

Il reste a montrer que

$$\lambda_m \|u\|^2 \leq \|u\|_m^2$$

Notons que pour tout $i \in \{1, ..., 2mT\}$, v_i est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Donc,

$$\forall u \in E_m, \exists(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{2mT}) \in \mathbb{R}^{2mT} \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{i=2mT} \alpha_i v_i$$

On aura alors,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle = \left\langle (Q_m + P_m) \sum_{i=1}^{i=2mT} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_j v_j \right\rangle$$

Ce qui veut dire,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle = \sum_{i=1}^{i=2mT} \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_i \alpha_j \langle (Q_m + P_m)v_i, v_j\rangle$$

Or,

$$(Q_m + P_m)v_i = \lambda_i v_i$$

D'où,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle = \sum_{i=1}^{i=2mT} \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_i \alpha_j \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle$$

Par conséquent,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle = \sum_{i=1}^{i=2mT} \sum_{j=1}^{j=2mT} \lambda_i \alpha_i \alpha_j \langle (v_i, v_j\rangle$$

Comme,

$$\lambda_m = \min_{i \in \{1,......,2mT\}} \{\lambda_i\}$$

Alors,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle \geq \sum_{i=1}^{i=2mT} \sum_{j=1}^{j=2mT} \lambda_m \alpha_i \alpha_j \langle (v_i, v_j\rangle$$

C'est à dire,

$$\langle (Q_m + P_m)u, u\rangle \geq \lambda_m \left\langle \sum_{i=1}^{i=2mT} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_j v_j \right\rangle$$

et donc,

$$\|u\|_m^2 = \langle (Q_m + P_m)u, u\rangle \geq \lambda_m \left\langle \sum_{i=1}^{i=2mT} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_j v_j \right\rangle$$

Enfin

$$\|u\|_m^2 \geq \lambda_m \left\langle \sum_{i=1}^{i=2mT} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{j=2mT} \alpha_j v_j \right\rangle = \lambda_m \|u\|^2$$

Ceci prouve (3.11).

Soit la suite $\{u_n\} \subset E_m$ avec $I_m(u_n)$ bornée et $I'(u_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Il existe $b > 0$ tel que

$$|I_m(u_n)| \leq M$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et la formule (3.9), on aura

$$-M \leq I_m(u_n) = (1/2)\|u_n\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} F(t, u_n(t)) \leq (1/2)\|u_n\|_m^2 - a \sum_{t=-mT}^{mT-1} |u_n(t)|^\beta$$

En utilisant l'inégalité de Holder

$$\sum B^q \geq \left(\sum A.B\right)^q \left(\sum A^p\right)^{(-q/p)}$$

et (3.11), il s'en suit que

$$\sum_{t=-mT}^{mT-1} |u_n(t)|^\beta = \sum_{t=-mT}^{mT-1} \left(|u_n(t)|^2\right)^{\beta/2} \geq \left(\sum_{t=-mT}^{mT-1} 1.\,|u_n(t)|^2\right)^{\beta/2} \left(\sum_{t=-mT}^{mT-1} 1\right)^{(2-\beta)/2} \tag{3.12}$$

Dans notre cas $A = 1$, $B = |u_n(t)|^2$, $q = \beta/2$ et $p = (\beta/(\beta-2))$. Par ailleurs,

$$(3.12) \Leftrightarrow \sum_{t=-mT}^{mT-1} |u_n(t)|^\beta \geq (\|u_n\|^2)^{\beta/2}(2mT)^{(2-\beta)/2}$$

Or $\|u_n\|_m^2 \leq \lambda_M \|u_n\|^2$ (voir (3.11). D'où

$$\sum_{t=-mT}^{mT-1} |u_n(t)|^\beta \geq \left((1/\lambda_M)\|u_n\|_m^2\right)^{\beta/2}(2mT)^{(2-\beta)/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=-mT}^{mT-1} |u_n(t)|^\beta \geq (1/\lambda_M)^{\beta/2}\|u_n\|_m^\beta (2mT)^{(2-\beta)/2}$$

La formule (3.12) devient

$$-M \leq (1/2)\|u_n\|_m^2 - a(1/\lambda_M)^{\beta/2}\|u_n\|_m^\beta (2mT)^{(2-\beta)/2}$$

C'est à dire

$$-(1/2)\|u_n\|_m^2 + a(1/\lambda_M)^{\beta/2}\|u_n\|_m^\beta (2mT)^{(2-\beta)/2} \leq M$$

Comme $\beta > 2$, cette dernière inégalité indique que la suite $\{u_n\}$ admet une sous suite convergente dans E_m. D'où I_m satisfait la condition de Palais-Smale. ■

Lemme 3.2.2 *(Mountain Pass lemma ([10])). Soit E un espace de Banach et $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaisant la condition de Palais-Smale. Notons*

$$\partial\mathcal{B}_\rho(0) = \{u \in E, \|u\| = \rho\}$$

$$\bar{\mathcal{B}}_\rho(0) = \{u \in E, \|u\| \leq \rho\}$$

Supposons aussi que

$$\begin{cases} 1.\ I(0) = 0 \\ 2.\ \exists \rho, \alpha > 0 \text{ tels que } I\mid_{\partial\mathcal{B}_\rho(0)} \geq \alpha \\ 3.\ \exists e \in E \setminus \bar{\mathcal{B}}_\rho(0) \text{ tel que } I\ (e) \leq 0 \end{cases}$$

Alors I admet une valeur critique $c \geq \alpha$ donnée par

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} I(g(s)) \text{ où } \Gamma = \{g \in C([0,1], E), g(0) = 0,\ g(1) = e\}. \tag{3.13}$$

Nous admettons ce lemme. On va maintenant montrer le résultat suivant:

Proposition 3.2.2 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle I_m admet une valeur critique notée c_m.*

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$, quelconque fixé. Utilisant le lemme ci dessus, on a $I_m \in C^1(E_m, \mathbb{R})$ et $I_m(0) = 0$. Grâce à (H_2), il existe $\rho > 0$ tel que

$$|F(t,x)| \leq (1/4)\lambda_m x^2 \text{ pour tout } |x| \leq (\rho/\sqrt{\lambda_m}) \text{ et } t \in N\,[-mT, mT-1]$$

Par conséquent, pour tout $u \in E_m$ et $\|u\|_m \leq \rho$, on a grâce à (3.11),

$$|u(t)| \leq \|u\| \leq (1/\sqrt{\lambda_m})\,\|u\|_m\,,\ \forall t \in \mathbb{N}\,[-mT, mT-1]$$

Comme

$$I_m(u) = (1/2)\,\|u\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} F(t, u(t))$$

alors

$$I_m(u) \geq (1/2)\,\|u\|_m^2 - (1/4)\lambda_m \sum_{t=-mT}^{mT-1} (u(t))^2 \text{ (car } F(t,x) \geq -(1/4)\lambda_m x^2)$$

D'où

$$I_m(u) \geq (1/2)\,\|u\|_m^2 - (1/4)\lambda_m\,\|u\|^2 \geq (1/2)c_m^2 - (1/4)\lambda_m\,\|u\|_m^2 = (1/4)\,\|u\|_m^2$$

En prenant $a = (1/4)\rho^2 > 0$, on obtient $I_m(u) \mid_{\partial\mathcal{B}_\rho} \geq a$. Donc I_m satisfait la deuxième hypothèse du lemme précédent. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in E_m \setminus \{0\}$, nous avons

$$\begin{aligned} I_m(\alpha\omega) &\leq (1/2)\alpha^2 \|\omega\|_m^2 - a \sum_{t=-mT}^{mT-1} |\alpha\omega|^\beta && (3.14) \\ &\leq (1/2)\alpha^2 \|\omega\|_m^2 - a\,|\alpha|^\beta (2mT)^{(2-\beta)/2} \|\omega\|_m^\beta (1/\lambda_M)^{\beta/2} && (3.15) \end{aligned}$$

Enfin, la troisième hypothèse du lemme est vérifiée. Ainsi, I_m admet une valeur critique c_m donnée par (3.13) avec $E = E_m$ et $\Gamma = \Gamma_m$. ■

On note par u_m le point critique de I_m sur E_m. On a $u_m \neq 0$ car $c_m > 0$.

Lemme 3.2.3 *Supposons que (H_1) et (H_3) sont vérifiées. Alors il existe une constante d indépendante de m telle que*

$$\|u_m\|_m \leq d,\ \forall m \in \mathbb{N}$$

Preuve. Soit $w \in E_1 - \{0\}$ tel que

$$w(+T) = 0, w(-T) = 0, I_1(w) \leq 0$$

On définit la fonction

$$e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : e_m(t) = \begin{cases} w(t) & si \quad t \in \mathbb{N}\,[-T;T] \\ 0 & si \quad T \leq |t| \leq mT \end{cases}$$

On a $e_m \in E_m$ et $I_m(e_m) = I_1(e_1) \leq 0$. On note $g_m(s) = se_m \in \Gamma_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $I_m(g_m(s)) = I_1(g_1(s))$. Comme

$$c_m = \inf_{g_m \in \Gamma_m,} \max_{s \in [0,1]} I_m(g_m(s))$$

(voir le lemme mountain pass), alors on obtient

$$c_m \leq \max_{s\in[0,1]} I_m(g_m(s)) = \max_{s\in[0,1]} I_1(g_1(s)) = d_1$$

où d_1 est indépendant de m.

Montrons que

$$\|u_m\|_m \leq d, \forall m \in \mathbb{N}$$

On a,

$$\begin{aligned} I'_m(u_m)u_m &= \sum_{t=-mT}^{mT-1} ((-\triangle[p(t)\triangle u_m(t-1)]u_m(t)) - q(t)(u_m(t))^2 \\ &\quad + \sum_{t=-mT}^{mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t) \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} I'_m(u_m)u_m &= \sum_{t=-mT}^{mT-1} (-[p(t+1)\triangle u_m(t) - p(t)\triangle u_m(t-1)]u_m(t) - q(t)(u_m(t))^2) \\ &+ \sum_{t=-mT}^{mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t) \end{aligned}$$

Or

$$u_m(t) = \triangle u_m(t-1) + u_m(t-1)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I'_m(u_m)u_m &= \sum_{t=-mT}^{mT-1} (-[p(t+1)\triangle u_m(t)u_m(t) - p(t)\triangle u_m(t-1)(\triangle u_m(t-1) + u_m(t-1))]) \\ &- \sum_{t=-mT}^{mT-1} (q(t)(u_m(t))^2 + f(t, u_m(t))u_m(t)) \end{aligned}$$

Qui donne,

$$\begin{aligned} I'_m(u_m)u_m &= \sum_{t=-mT}^{mT-1} (-p(t+1)\triangle u_m(t)u_m(t) + p(t)\triangle u_m(t-1)u_m(t-1)) \\ &+ \sum_{t=-mT}^{mT-1} (p(t)(\triangle u_m(t-1))^2 - q(t)(u_m(t))^2 + f(t, u_m(t))u_m(t)) \end{aligned}$$

Mais,

$$\sum_{t=-mT}^{mT-1} (-p(t+1)\triangle u_m(t)u_m(t) + p(t)\triangle u_m(t-1)(u_m(t-1)) = 0$$

et

$$\sum_{t=-mT}^{mT-1} (p(t)(\triangle u_m(t-1))^2 - q(t)(u_m(t))^2) = \|u_m\|_m^2$$

Finalement on trouve,

$$I'_m(u_m)u_m = \|u_m\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t)$$

Comme $I'_m(u_m) = 0$, alors on peut écrire,

$$c_m = I_m(u_m) - \frac{1}{2} I'_m(u_m)u_m$$

C'est à dire,

$$c_m = \frac{1}{2}\|u_m\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} F(t, u_m(t) - \frac{1}{2}(\|u_m\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t))$$

Donc,

$$c_m = \sum_{t=-mT}^{mT-1} F(t, u_m(t) - \frac{1}{2} \sum_{t=-mT}^{mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t))$$

Enfin,

$$c_m = \sum_{t=-mT}^{mT-1} [F(t, u_m(t) - \frac{1}{2} f(t, u_m(t))u_m(t)]$$

Par ailleurs,

$$c_m = \sum_{k=-mT}^{k=mT-1} [F(t, u_m(t)) - \frac{1}{2} f(t, u_m(t))u_m(t)] \geq (1 - \frac{\beta}{2}) \sum_{k=-mT}^{k=mT-1} F(t, u_m(t)).$$

et,

$$I_m(u) = \frac{1}{2} \|u\|_m^2 + \sum_{k=-mT}^{k=mT-1} F(t, u(t))$$

Ce qui donne,

$$\|u_m\|_m^2 = 2c_m - 2 \sum_{k=-mT}^{k=mT-1} F(t, u_m(t)) \leq (2 + \frac{4}{\beta - 2})d_{1.}$$

Il suffit de prendre

$$\sqrt{(2 + \frac{4}{\beta - 2})d_1} = d$$

■

Lemme 3.2.4 ([*10*]) *Supposons* (H_1) *et* (H_3) *vérifiées. Alors,*

$$\exists \lambda_1 \, , \lambda_2 > 0, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \lambda_1 \|u\|^2 \leq \|u\|_m^2 \leq \lambda_2 \|u\|^2 \ \ et \ \lambda_1 \|u\|_{l_m^\infty}^2 \leq \|u\|_m^2$$

où l_m^∞ *désigne l'espace des fonctions réelles bornées sur* $[-mT, mT-1]$*, muni de la norme*

$$\|u\|_{l_m^\infty} = \max_{t \in [-mT, mT-1]} \{|u(t)|\}, \forall u \in l_m^\infty$$

Preuve. La preuve de ce résultat est contenue dans celle du premier lemme de cette section. ■

Lemme 3.2.5 *Supposons que les hypothèses* (H_1)-(H_3) *sont vérifiées. Alors*

$$\exists \delta, \, \eta > 0, \, \forall m \in \mathbb{N}, \, \delta \leq \|u\|_{l_m^\infty} \leq \eta$$

Preuve. De l'hypothèse $(H2)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta(\varepsilon)$ tel que

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon |x| \ \text{ pour } \ |x| \leq \delta(\varepsilon) \tag{3.16}$$

Supposons que $\|u_m\|_{l_m^\infty} \leq \delta(\varepsilon)$, alors en vertu de (3.16), on obtient

$$|f(t, u_m(t))| \leq \varepsilon |u_m(t)| \text{ pour } t \in [-mT, mT-1].$$

Comme u_m est un point critique pour la fonctionnelle I_m, donc

$$I'_m(u_m)u_m = \|u_m\|_m^2 + \sum_{t=-mT}^{t=mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t) = 0$$

qui donne

$$\|u_m\|_m^2 = -\sum_{t=-mT}^{t=mT-1} f(t, u_m(t))u_m(t) \leq \varepsilon \sum_{t=-mT}^{t=mT-1} |u_m(t)|^2$$

qui veut dire

$$\|u_m\|_m^2 \leq \varepsilon \|u_m\|^2 \leq \varepsilon \frac{1}{\lambda_m} \|u_m\|_m^2.$$

Si on prend $\varepsilon = \lambda_m/2$, la dernière inégalité est vraie si et seulement si, $\|u_m\| = 0$. Ceci est contradictoire avec ($\|u_m\| \neq 0$). Ceci prouve l'existence d'une constante $\delta > 0$, indépendante de m vérifiant,

$$\|u_m\|_{l_m^\infty} \geq \delta(\varepsilon), \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme (3.2.4) on a

$$\lambda_1 \|u\|_{l_m^\infty}^2 \leq \|u\|_m^2$$

C'est à dire,

$$\|u_m\|_{l_m^\infty}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u_m\|_m^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} d$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Preuve. 3.2.1 Soit $\{u_m\} \subset E_m$ restreinte à $N[-T, T]$. Il est clair que $\{u_m\}$ est isomorphe a $\mathbb{R}^{2T+1}$. Il existe une sous suite $\{u_{m_k}^1\}$ de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}}$ et $u^1 \in E_1$ telle que $\|u_{m_k}^1 - u^1\|_1 \to 0$ quand $m_k \to \infty$
Soit $\{u_{m_k}^1\}$ restreinte à $N[-2T, 2T]$. Il est clair que $\{u_{m_k}^1\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{4T+1}$. Il existe une sous suite $\{u_{m_k}^2\}$ de $\{u_{m_k}^1\}$ satisfaisant $u_2 \notin \{u_{m_k}^2\}$ et il existe $u^2 \in E_2$ telle que $\|u_{m_k}^2 - u^2\|_2 \to 0$ quand $m_k \to \infty$.
En répétant cette procédure pour $m \in \mathbb{N}$, en général, il existe $\{u_{m_k}^p\}$ sous suite de $\{u_{m_k}^{p-1}\}$, $u_p \notin \{u_{m_k}^p\}$, $u^p \in E_P$ tels que $\|u_{m_k}^p - u^p\|_p \to 0$ quand $m_k \to \infty$ pour tout $p = 1, 2, ...$De plus, on a

$$\|u^{p+1} - u^p\|_p \leq \|u_{m_k}^{p+1} - u^{p+1}\|_p + \|u_{m_k}^p - u^p\|_p + \|u_{m_k}^{p+1} - u_{m_k}^p\|_p \to 0 \text{ quand } m_k \to \infty$$

D'où $u^p \to u_\infty$ quand $p \to \infty$, où $u_\infty(s) = u^p(s)$, pour $s \in N[-pT, pT]$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $\{u_{m_k}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une sous suite de $\{u_{m_k}^p\}$, $\forall p \geq 1$. Il s'en suit que

$$\|u_{m_k}^k - u_\infty\|_k = \|u_{m_k}^k - u^k\|_k \to 0 \text{ quand } m_k \to \infty,\ k \in \mathbb{N}$$

C'est à dire

$$u_{m_k} \to u_\infty \text{ quand } m_k \to \infty \text{ dans } E_{loc}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$$

avec

$$E_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) = \left\{ u \in S, \|u\|_\infty = \sum_{t=-\infty}^{t=\infty} \left[p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2 \right] < \infty \right\}$$

Comme $u_\infty(t) \to 0$, $\triangle u_\infty(t-1) \to 0$, quand $|t| \to \infty$, et en vertu de (3.8), (3.13) et $c_m \leq d_1$ on a

$$\forall u \in E_{m_k},\ 0 < I_{m_k}(u_{m_k}) =$$

$$\sum_{t=-m_kT}^{t=m_kT-1} \left[(1/2)p(t)(\Delta u_{m_k}(t-1))^2 - (1/2)q(t)(u_{m_k}(t))^2 + F(t, u_{m_k}(t)) \right] \leq d_1 \tag{3.17}$$

où d_1 est indépendant de m_k et

$$I'_{m_k}(u_{m_k}) = 0 \tag{3.18}$$

On fait tendre m_k vers l'infini dans (3.17) en utilisant la continuité de $F(t, x)$ et $F^{'}(t, x)$. On obtient,

$$\begin{aligned} I_\infty(u_\infty) &= \sum_{t=-\infty}^{t=\infty} \left[(1/2)p(t)(\Delta u_\infty(t-1))^2 - (1/2)q(t)(u_\infty(t))^2 + F(t, u_\infty(t)) \right] && (3.19) \\ &\leq d_1, \forall u \in E_\infty && (3.20) \end{aligned}$$

et

$$I'_\infty(u_\infty) = 0 \tag{3.21}$$

La formule (3.21) montre que u_∞ est une solution homocline de (3.4).

Il reste à montrer que $u_\infty \neq 0$. Supposons que $u_\infty = 0$; donc $u_{m_k} \to 0$ quand $m_k \to \infty$. Comme $\lambda_1 \|u\|^2_{l^\infty_m} \leq \|u\|^2_m$, alors $\|u_{m_k}\|^2_{l^\infty_m} \to 0$. C'est à dire $\max_{t \in \mathbb{N}[0,T]} |u_{m_k}(t)| \to 0$, quand $m_k \to \infty$. Ceci contredit le lemme (3.2.5) . ■

3.3 Existence de solution homocline pour l'équation aux différences (3.4) dans le cas où p, q et f sont des fonctions non périodiques

Dans la section qui precède, on a démontré l'existence d'une solution homocline dans l'équation aux différences (3.4) quand les fonctions p, q et f sont périodiques. L'objet de cette section est de montrer le même résultat, en supprimant l'hypothèse de périodicité et en remplaçant $(H1)$ et $(H2)$ respectivement par:

$(\mathbf{H}_1')$ Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $p(t) > 0$, $q(t) > 0$ et $\lim_{t \to \pm\infty} q(t) = -\infty$.

$(\mathbf{H}_2')$ $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(t,x)}{x} = 0$, uniformément par rapport à $t \in N\,[1,T]$.

Soit E l'espace de Hilbert defini par,

$$E = \left\{ u \in S, \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} [p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2] < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} [p(t)(\Delta u(t-1))\Delta v(t-1) - q(t)(u(t))(v(t))], \forall u, v \in E$$

La norme correspondante est

$$\|u\|_E^2 = \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} [p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t)]^2, \forall u \in E$$

Designons par l_I^2 l'espace des fonctions à carré sommable dans l'intervale I qu'on munit de la norme

$$\|u\|_I^2 = \sum_{t \in I} |u(t)|^2$$

La sommation est faite sur les entiers contenus dans I. De même, l^2 désignera l'espace des fonctions à carré sommable dans $\mathbb{Z}$ muni de la norme

$$\|u\|^2 = \sum_{t \in \mathbb{Z}} |u(t)|^2$$

On définit la fonctionnelle J par,

$$J : E \to \mathbb{R} : u \to J(u) = \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} [p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2 + F(t, u(t))]$$

où

$$F(t,x) = \int_0^x f(t,s)ds$$

Le résultat principal de cette section est le suivant:

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1'), (\mathbf{H}_2')$ *et* (H_3), *l'équation (3.4) admet une solution homocline* u *telle que*

$$0 < \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} [p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2 + F(t, u(t))] < \infty$$

Pour le démontrer, on a besoin du lemme suivant:

Lemme 3.3.1 *Soit $\{u_k\} \subset E$ telle que $u_k \to u$ dans E. Alors $u_k \to u$ dans l^2.*

Preuve. Supposons que $u_k \to 0$ dans E . Le théorème de Banach-Steinhaus ([12]) implique que

$$A = \sup_k \|u_k\|_E < \infty$$

Par hypothèse,

$$q(t) < 0 \ \forall t \in \mathbb{Z} \text{ et } \lim_{|t| \to \infty} q(t) = -\infty$$

En utilisant la définition de la limite pour la fonction $q(t)$ au voisinage de (-∞) on a,

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_0 < 0$ tel que:

$$\frac{-1}{q(t)} \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{Z}(-\infty, T_0)$$

où $\mathbb{Z}(-\infty, T_0)$ désigne l'ensemble des entiers compris entre $-\infty$ et T_0.

De même, il existe $T_1 > 0$ tel que

$$\frac{-1}{q(t)} \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{Z}(T_1, +\infty).$$

Il est clair que $u_k \to 0$ dans E_I (grâce a l'hypothèse $(\mathbf{H}_1')$), où

$$\begin{aligned} E_I &= \left\{ u \in S_I : \sum_{t \in I} [p(t)(\Delta u(t-1))^2 - q(t)(u(t))^2] < +\infty \right\} \\ S_I &= \{u = u(t), \ u(t) \in \mathbb{R}, t \in I\} \end{aligned}$$

et

$$I = \mathbb{Z}(T_0, T_1).$$

La suite $\{u_k\}$ est bornée dans E_I; donc $\{u_k\}$ est bornée dans l_I^2. Comme l_I^2 est séparé, on a $u_k \to 0$ sur I ; donc il existe une constante k_0 telle que

$$\sum_{t \in I} |u_k(t)|^2 \leq \varepsilon, \ \forall k \geq k_0 \tag{3.22}$$

Comme

$$\frac{-1}{q(t)} \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{Z}(-\infty, T_0)$$

On a

$$\sum_{t=-\infty}^{T_0} |u_k(t)|^2 \leq -\varepsilon \sum_{t=-\infty}^{T_0} q(t) |u_k(t)|^2 \leq \varepsilon A^2 \tag{3.23}$$

De la même façon ,

$$\frac{-1}{q(t)} \leq \varepsilon, \forall t \in \mathbb{Z}(T_1, +\infty).$$

Donc

$$\sum_{t=T_1}^{\infty} |u_k(t)|^2 \leq \varepsilon A^2. \tag{3.24}$$

Comme ε est arbitraire et d'après les formules (3.22), (3.23) et (3.24), on a

$$u_k \to 0 \text{ dans } l^2.$$

■

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème ci-dessus.

Preuve. du théorème 3.3.1 On sait que

$$J \in C^1(E, \mathbb{R}), J(0) = 0$$

Rappelons les deux conditions suivantes extraites du " moutain pass lemma "

$$\begin{array}{ll} (A1) & \exists \rho, \alpha > 0 \text{ tel que } J\ |_{\partial \mathcal{B}_\rho(0)} \geq \alpha \\ (A2) & \exists e \in E \setminus \bar{\mathcal{B}}_\rho(0) \text{ tel que } J\ (e) \leq 0 \end{array}$$

Comme J satisfait la condition de Palais-Smale, il suffit donc de justifier les conditions $(A1)$ et $(A2)$. En vertu du lemme (3.3.1) il existe une constante $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\|u\| \leq \alpha_0 \|u\|_E \,, u \in E$$

D'autre part en vertu de l'hypothèse $(\mathbf{H}_1')$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|u\|_\infty \leq \alpha_1 \|u\|_E$$

où,

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{Z}} |u(t)|\,.$$

Comme

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(t,x)}{x} = 0 \text{ uniformément pour } t \in \mathbb{Z}$$

Alors,

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0\ ), (\forall x \in \mathbb{R}), (|x| < \delta \implies \left| \frac{f(t,x)}{x} \right| \leq \varepsilon)$$

Mais,

$$\int_0^x f(t,s)ds = F(t,x).$$

Donc,

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0\ ), (\forall x \in \mathbb{R})(|x| < \delta \implies \left| \frac{F_x'(t,x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon)$$

Par intégration par rapport à x, on trouve

$$|F(t,x)| \leq \varepsilon |x|^2 \;, \forall \; |x| < \delta.$$

Prenons $\rho = \dfrac{\delta}{\alpha_1}$ et $\|u\|_E \leq \rho$. On aura,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\delta}{\alpha_1}\alpha_1 = \delta.$$

Donc

$$F(t,u(t)) \geq -\varepsilon |u(t)|^2 . \tag{3.25}$$

La formule (3.25) donne,

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} F(t,u(t)) \geq -\varepsilon \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} |u(t)|^2 = -\varepsilon \|u\|^2 \geq -\varepsilon\alpha_0^2 \|u\|_E^2 .$$

Si $\|u\|_E = \rho$, alors

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 + \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} F(t,u(t)) \geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \varepsilon\alpha_0^2 \|u\|_E^2$$

D'où

$$J(u) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon\alpha_0^2)\|u\|_E^2 = (\frac{1}{2} - \varepsilon\alpha_0^2)\rho^2$$

Il suffit de choisir $\varepsilon = 1/4\alpha_0^2$ pour avoir,

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2 = \alpha > 0$$

et donc la condition $A(1)$ est vérifiée.

Il nous reste à vérifier la condition $A(2)$. Soit

$$J(\sigma u) = \frac{\sigma^2}{2}\|u\|_E^2 + \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} F(t,\sigma u), \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

Soit $\widetilde{u} \in E$ tel que $\left|\widetilde{u}(t)\right| \geq 1$ sur un intervalle entier non vide $I \subset \mathbb{Z}$. Comme

$$xf(t,x) \leq \beta F(t,x) < 0$$

Alors pour tout $\sigma \geq 1$, on a

$$J(\sigma\widetilde{u}) \leq \frac{\sigma^2}{2}\left\|\widetilde{u}\right\|_E^2 + \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} F(t,\sigma\widetilde{u}) \leq \frac{\sigma^2}{2}\left\|\widetilde{u}\right\|_E^2 - \sum_I \left|\sigma\widetilde{u}\right|^\beta \alpha_1(t)$$

D'où,

$$J(\sigma\widetilde{u}) \leq \frac{\sigma^2}{2}\left\|\widetilde{u}\right\|_E^2 - \sigma^\beta \sum_I \left|\widetilde{u}\right|^\beta \alpha_1(t)$$

Comme $\beta > 2$, on peut trouver $\sigma \geq 1$ tel que $\left\|\sigma\widetilde{u}\right\| > \rho$ et $J(\sigma\widetilde{u}) \leq 0 = J(0)$. Par conséquent, la condition $A(2)$ est bien verifiée. Ceci achève la démonstration du théoreme. ■

4

Méthode spectrale pour le calcul des solutions homoclines d'une équation différentielle autonome d'ordre deux

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de calculer approximativement la solution homocline , dont on connait l'existence, pour une équation différentielle donnée. C'est le travail réalisé par Korostyshevskiy. R.et Wanner. T. ([7]) et exposé ci-dessous. Deux raisons justifient l'opportinuité de ce travail. La première est qu'il est généralement impossible de connaitre l'expression analytique d'une telle solution. La deuxième est qu'il n'est pas évident de donner une caractérisation mathématique de cette solution homocline, traduisible en algorithme. Les deux auteurs ci-dessus ont eu l'idée d'utiliser le fait que dans le cas hyperbolique, la solution homocline tend exponentiellement vers le point critique. Ils font alors usage des fonctions d'Hermite dont on rappelle quelques propriétés ci-dessous.

4.2 Sur les polynômes et fonctions d'Hermite

Dans la suite, $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ désignera l'espace des fonctions réelles à carré intégrable pour la mesure μ donnée par

$$d\mu(x) = e^{-x^2} dx$$

La suite des monomes

$$m_n : x \longmapsto x^n, n = 0, ...$$

est totale dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. En appliquant la méthode d'orthonormalisation de Shmidt à la suite $(m_n)_{n\geq 0}$, on trouve des polynômes successifs (P_n) de degrés $n = 0, 1, ...$deux à deux orthogonaux. Si on les normalise dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, il forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Posons

$$\varphi_0(x) = e^{-x^2}$$

et constatons que pour tout entier $n \geq 0$, la dérivée n^{ième} de φ_0 est de la forme

$$\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$$

où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant égal à 2^n. On trouve ainsi les premiers de ces polynômes

$$H_0 = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x, ...$$

Posons aussi pour tout $n \geq 1$,

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2} = (-1)^n \varphi_0^n(x)$$

On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\varphi_n = -\varphi'_{n-1}$$

Pour tout entier k, $n \geq 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x)\,dx = \left[-x^k \varphi_{n-1}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + k\int_{\mathbb{R}} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,dx = k\int_{\mathbb{R}} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,dx$$

car $x^k\varphi_{n-1}(x)$ est de la forme $P(x)e^{-x^2}$. D'où, on déduit par réccurence, lorsque $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\varphi_n(x)\,dx = k!\int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-k}(x)\,dx = 0$$

(puisque $n - k > 0$, on voit que la fonction φ_{n-k} est la dérivée d'une fonction qui tend vers 0 en $\pm\infty$; d'où la nullité de l'intégrale). On déduit que φ_n est orthogonale aux monomes de degré $< n$; on voit aussi que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n\varphi_n(x)\,dx = n!\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\,dx = \sqrt{\pi}n!$$

On a donc pour tout $k < n$, la relation d'orthogonalité

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} H_k(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{4.1}$$

puisque H_k est combinaison linéaire de monômes de degrés $< n$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 2^n x^n\varphi_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}2^n n!$$

La fonction φ_0 est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Donc sa série de Taylor au point x la représente partout. Par conséquent, pour tout h

$$\varphi_0(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_0^{(n)}(x) \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} \frac{h^n}{n!}$$

En particulier, pour $h = -t$, on aura

$$e^{-(x-t)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \right) e^{-x^2}$$

Après multiplication par e^{x^2}, on obtient la fonction génératrice des polynômes d'Hermite

$$G(x,t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

Ce qui précède nous donne une suite orthogonale de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, en posant

$$\Psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}, \text{ pour tout } n \geq 0$$

Ce sont les fonctions d'Hermite. En effet, la relation (4.1) donne quand $m \neq n$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_m(x) \Psi_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

Les fonctions (ψ_n) ne sont pas de norme 1 dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Pour avoir une suite orthonormée, on prendra pour tout $n \geq 0$, la fonction

$$\psi_n : x \to \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

Ce système est total; donc il constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. La totalité des $(\psi_n)_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ se déduit de la totalité des $(H_n)_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$: si g est une fonction indicatrice d'intervalle borné, on peut trouver un polynôme P (combinaison linéaire de polynômes d'Hermite) tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \left| g(x) e^{x^2/2} - P(x) \right| e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \left| g(x) - P(x) e^{-x^2/2} \right|^2 dx < \varepsilon$$

Ceci montre que la combinaison linéaire de fonctions d'Hermite $P(x) e^{-x^2/2}$ approxime g dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

Propriétés des fonctions d'Hermite:

Les fonctions d'Hermite h_0 et h_1 sont données par

$$h_0(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-t^2/2} \text{ et } h_1(t) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}} t e^{-t^2/2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, la fonction d'Hermite satisfait la formule de réccurence

$$h_{n+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} t h_n(t) - \sqrt{\frac{n}{n+1}} h_{n-1}(t).$$

On a les propriétés suivantes:

$P(1)$ La famille de fonctions d'Hermite $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ est orthonormée et totale dans $L^2(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel.

$P(2)$ Il existe une constante c positive telle que

$$|h_0(t)| \leq c \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{et } |h_n(t)| \leq \frac{c}{n^{1/12}} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

$P(3)$ La dérivée de la fonction d'Hermite est donnée par l'expression

$$\frac{d}{dt} h_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2}} h_{n-1}(t) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} h_{n+1}(t), n \in \mathbb{N}$$

$P(4)$ Pour tout $\lambda \geq -1/3$ et pour tout $\tau > 0$, il existe une constante $c(\lambda, \tau) > 0$ telle que

$$|h_n(t)| \leq \frac{c(\lambda, \tau)}{|t|^{\lambda}} n^{(6\lambda - 1)/12} \text{ pour } |t| \geq \tau \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

4.3 Système algébrique de dimension infinie

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} u' &= f(u) \\ u(0) &= 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où $f = (f_1, f_2, ...f_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ polynomial et u est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $v \in L^2(\mathbb{R})$. Grâce à la propriété $(P1)$, on peut associer à la fonction v une unique suite $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{.....}) \in l^2$ telle que

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{v}_k h_k(t) \text{ où } \mathbf{v} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{.....}) \in l^2 \tag{4.3}$$

et

$$\boldsymbol{v}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) h_k(t) dt \text{ pour } k \in \mathbb{N}_0 \text{ et } v \in L^2(\mathbb{R}). \tag{4.4}$$

L'équation (4.2) s'écrit sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{u}^{(1)} & = & f_1\left(u^{(1)},...,u^{(d)}\right) \\ \dot{u}^{(2)} & = & f_2\left(u^{(1)},...,u^{(d)}\right) \\ .... & .. & ... \\ \dot{u}^{(d)} & = & f_d\left(u^{(1)},...,u^{(d)}\right) \end{array}\right. \tag{4.5}$$

où

$$u(t)=\left(u^{(1)}(t),u^{(2)}(t),...u^{(d)}(t)\right)^T$$

et

$$f(u(t)) = \left(f_1\left(u(t)\right), f_2\left(u(t)\right)...f_d\left(u(t)\right)\right) \in \mathbb{R}^d$$

Supposons qu'il existe une solution homocline $u(t)$ pour le système (4.5) . Alors:

$$\forall i \in N[1,d]\ , \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k^{(i)} \frac{dh_k(t)}{dt} = f_i(u(t)) \tag{4.6}$$

où

$$u(t) =(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k^{(1)} h_k(t), ..., \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k^{(d)} h_k(t))$$

La fonction $dh_k(t)/dt$ dépend de $h_{k-1}(t)$ et $h_{k+1}(t)$. Pour cette raison, l'équation algébrique non linéaire (4.6) est difficile. L'utilisation de la technique suivante a pour but de la simplifier.

Soit l'opérateur ϕ defini de l^2 dans l^2 par ses composantes,

$$(\phi(v))_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}} v_{k+1} - \sqrt{\frac{k}{2}} v_{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

La formule (4.7) est inspirée de la forme de la fonction $h^{'}(t)$. En effet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k^{(i)} \frac{dh_k(t)}{dt} = f_i(\mathbf{u}(t)),\ i \in N[1,d]$$

Comme

$$\frac{dh_k(t)}{dt} = \sqrt{\frac{k}{2}} h_{k-1}(t) - \sqrt{\frac{k+1}{2}} h_{k+1}(t)$$

On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\mathbf{u}_k^{(i)} (\sqrt{\frac{k+1}{2}} h_{k+1}(t) - \sqrt{\frac{k}{2}} h_{k-1}(t)) = f_i(u(t))$$

En effectuant le changement d'indices

$$k+1 = K \text{ et } k-1 = K^{'}$$

On obtient

$$\sum_{K'=0}^{\infty} \sqrt{\frac{K'+1}{2}} \mathbf{u}_{K'+1}^{(i)} h_{K'}(t) - \sum_{K=0}^{\infty} \sqrt{\frac{K}{2}} \mathbf{u}_{K-1}^{(i)} h_K(t) = f_i(u(t))$$

De la méme façon on écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{\frac{k'+1}{2}}\mathbf{u}_{k+1}^{(i)}h_k(t)-\sqrt{\frac{k}{2}}\mathbf{u}_{k-1}^{(i)}h_k(t))=f_i(u(t))$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\phi\mathbf{u}^{(i)})_k h_k(t)=f_i(u(t))=f_i(u^{(1)}(t),u^{(2)}(t),...,u^{(d)}(t)) \tag{4.8}$$

L'équation (4.2) peut être mise sous la forme,

$$F\left(\mathbf{u}^{(1)},\mathbf{u}^{(2)},...\mathbf{u}^{(d)}\right)=0 \tag{4.9}$$

Comme $i\in N[1,d]$, on retrouve un système à d équations algébriques non linéaires de dimension infinie. Cette dimension pose problème. Pour ramener ce système à une forme raisonable, on va faire appel à Hermite!

4.3.1 La condition de phase

Soit $\hat{u}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ une fonction bornée et intégrable et u la solution homocline de l'équation autonome (4.2). On sait que $\forall\tau\in\mathbb{R},$ la fonction

$$v_\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d,\ t\to v_\tau(t)=u(t-\tau)$$

est aussi solution homocline pour l'équation (4.2). Parmi toutes ces solutions homoclines, on cherche celle qui approxime la fonction $\hat{u}$. cela revient à chercher une valeur de τ telle que la quantité

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{u}(t)-u(t-\tau)\right|^2dt$$

soit minimale ($\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$). En effet posons,

$$e(\tau)=\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{u}(t)-u(t-\tau)\right|^2dt=\sum_{i=1}^{d}\left\|(\hat{u}^{(i)}(t)-u^{(i)}(.-\tau)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

et donc,

$$\begin{aligned}e(\tau)&=\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{u}(t)-u(t-\tau)\right|^2dt=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{d}(\hat{u}^{(i)}(t)-u^{(i)}(t-\tau))^2\\&=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{d}[(\hat{u}^{(i)}(t))^2-2\hat{u}^{(i)}(t)u^{(i)}(t-\tau)+(u^{(i)}(t-\tau))^2]dt\end{aligned}$$

Mais, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\hat{u}^{(i)}(t)u^{(i)}(t-\tau)dt=0$$

D'où

$$\lim_{|\tau|\to\infty} e(\tau) = \sum_{i=1}^{d} (\left\| \hat{u}^{(i)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\| u^{(i)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2).$$

Cette dernière égalité indique qu'il existe une valeur $\tau \in \mathbb{R}$ pour la quelle $e^{'}(\tau) = 0$. Mais,

$$e^{'}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{u}(t+\tau) - u(t) \right|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \hat{u}(t+\tau) - u(t), \hat{u}^{'}(t+\tau) \right\rangle dt$$

$$e^{'}(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \hat{u}(t) - u(t-\tau), \hat{u}^{'}(t) \right\rangle dt.$$

La solution homocline u qui approxime la solution $\hat{u}$ vérifie donc la condition suivante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \hat{u}(t) - u(t), \hat{u}^{'}(t) \right\rangle dt = 0 \tag{4.10}$$

La dernière égalité s'écrit sous la forme,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{d} (\sum_{k=0}^{\infty} (\overset{\wedge}{\mathbf{u}}_k^{(i)} - \mathbf{u}_k^{(i)}).h_k(t)).(\sum_{k=0}^{\infty} (\phi \overset{\wedge}{\mathbf{u}}^{(i)})_k.h_k(t)) \right] dt = 0 \tag{4.11}$$

Comme,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t)h_j(t)dt = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} (h_i(t))^2\, dt = 1, \forall i \in \mathbb{N}\,[1,d]$$

alors (4.11) devient,

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=0}^{\infty} (\overset{\wedge}{\mathbf{u}}_k^{(i)} - \mathbf{u}_k^{(i)})(\phi \overset{\wedge}{\mathbf{u}}^{(i)})_k = 0$$

Définition 4.3.1 *Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la solution homocline de l'équation* (4.2) *qui converge exponentiellement vers zéro quand $t \to \pm\infty$. Considérons*

$$\hat{u} = \left(\hat{u}^{(1)}, ..., \hat{u}^{(d)} \right) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

une solution approximant u et supposons que toutes les composantes de $\hat{u}^{'}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$. L'identité

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\overset{\wedge}{\mathbf{u}}_k^{(i)} - \mathbf{u}_k^{(i)} \right) \left(\phi \overset{\wedge}{\mathbf{u}}^{(i)} \right)_k = 0 \tag{4.12}$$

est appelée la condition de phase pour la suite $\mathbf{u} \in l^2$ définie par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, ..., \mathbf{u}^{(d)})$.

Le système approximant de dimension finie:

Notons par

$$X_N = Vect\,(h_0, h_1, ..., h_{N-1}) \subset L^2(\mathbb{R}), N \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbf{X}_N = \left\{ v \in l^2, v_j = 0, \forall j \geq N \right\}$$

Notons P_n l'opérateur de projection

$$P_n : l^2 \to \mathbb{R},\ P_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Définition 4.3.2 *Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une solution homocline de l'équation (4.2) qui converge exponentiellement vers zéro quand $t \to \pm\infty$. Le système de dimension finie à $(Nd-1)$ équations*

$$P_n F_i(\mathbf{v}^{(1)}, ..., \mathbf{v}^{(d)}) = 0,\ n = 0, ..., N-1,\ i = 1, ..., d,\ (n,k) \neq (N-1, d) \tag{4.13}$$

d'inconnues $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbf{X}_N$, $i = 1, ..., d$, couplé avec la condition

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\overset{\wedge}{\mathbf{u}}{}_n^{(i)} - \mathbf{v}_n^{(i)} \right) \left(\phi \overset{\wedge}{\mathbf{u}}{}^{(i)} \right)_n = 0 \tag{4.14}$$

est appelé système approximant d'ordre N.

4.4 Théorème de convergence

Nous allons montrer que pour N fixé, le système de dimension finie (4.14) peut être résolu numériquement. On montre aussi que plus N augmente, mieux est l'approximation.

Considérons les ensembles suivants

$$\mathbf{K}_{A,S} = \left\{ \mathbf{v} \in l^2,\ |\mathbf{v}_k| \leq \frac{A}{k^S} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } |\mathbf{v}_0| \leq A \right\} \subset l^2, A > 0, S > 0.$$

et

$$K_{A,S} = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}),\ v = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k h_k \text{ avec } \mathbf{v} \in \mathbf{K}_{A,S} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

Lemme 4.4.1 *Soient $A > 0$, et $S > 17/12$. Alors,*
(a) Toute fonction appartenant à l'ensemble $K_{A,S}$ est de classe C^1.
(b) La fonction $v' \in K_{A',S'}$, $A' = A(1+2^S)/2^{1/2}$ et $S' = S - 1/2$.
(c) L'ensemble $K_{A,S}$ est compact.

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{K}_{A,S}$ arbitraire, fixé, et $v = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{v}_j h_j$. Posons

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{v}_j h_j(t) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

En conséquence de la propriété $(P2)$ des fonctions d'Hermite, on a pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ l'estimation $|\mathbf{v}_j h_j(t)| \leq AC/j^{S+1/2}$, ainsi que $|\mathbf{v}_0 h_0(t)| \leq AC$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les fonctions d'Hermite sont continues, et donc on a la convergence uniforme de la suite $\{w_k\}$ dans $\mathbb{R}$. Ceci fait que v est continue et $\{w_k\}$ converge uniformément vers v dans $\mathbb{R}$. De plus, la dernière estimation donne

$$|\mathbf{v}(t)| \leq AC + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{AC}{j^{S+1/12}} \leq 2AC\frac{12S-5}{12S-11} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

On note que chaque w_k est différentiable et la propriété (P_3) des fonctions d'Hermite donne

$$w_k' = \frac{v_1}{\sqrt{2}} h_0(t) + \sum_{j=1}^{k} \frac{v_{j+1}\sqrt{j+1} - v_{j-1}\sqrt{j}}{\sqrt{2}} h_j(t) - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}} v_k h_{k+1}(t), \; \forall \; k \in \mathbb{N}.$$

En définissant A' et S' comme dans (b), on peut vérifier facilement que $w_k' \in K_{A',S'}$. Comme ci-dessus, on a la convergence uniforme de la suite $\{w_k'\}$, qui implique la différentiabilité continue de v, et la convergence uniforme de $\{w_k'\}$ vers v'. Ceci montre que le $N^{ième}$ coéfficient d'Hermite-Fourier de la fonction v' est donné par $(\Phi v)_n$. Ceci termine la démonstration de (a).

Finalement, on a

$$|v'(t)| \leq A'c + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A'c}{j^{S'+1/12}} \leq 2A'c\frac{12S-11}{12S-17} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

où c désigne la constante de la propriété (P_4). Cette estimation montre que l'ensemble $K_{A,S}$ est équicontinu. On peut vérifier que $K_{A,S}$ est fermé par rapport à la convergence uniforme dans $\mathbb{R}$. On a ainsi vérifié (c). ■

Le résultat suivant établit que, si la suite des approximations obtenues en résolvant le $N^{ième}$ système approximant pour des valeurs croissantes de N, a des composantes qui decroient assez rapidement, alors en fait, on aura calculé une approximation de l'orbite homocline de (4.2) qui satisfait la condition de la phase (4.10).

Théorème 4.4.1 *Supposons que le $N^{ième}$ système approximant (4.14), (4.13) a une solution*

$$\mathbf{v}^{(1),N}, ..., \mathbf{v}^{(d),N} \in X_N \text{ pour tout } N \geq N_0$$

En outre, supposons qu'il existe deux constantes indépendantes $A > 0$ et $S > 23/12$ telles que

$$\mathbf{v}^{(1),N}, ..., \mathbf{v}^{(d),N} \in \mathbf{K}_{A,S} \text{ pour tout } N \geq N_0$$

Soit $v^{(i)N} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(d)}$ la fonction dont les coefficients d'Hermite-Fourier sont donnés par $v^{(i)N}$ pour $i = 1, ..., d$. On pose $v^N = \left(v^{(1)N}, v^{(2)N}, ..., v^{(d)N}\right)$. Alors il existe une fonction *différentiable $u^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(d)}$ et une sous suite $\{v^{N_p}\}$ convergente vers u^* uniformément dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. De plus u^* est une solution homocline pour l'équation différentielle ordinaire qui satisfait*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \hat{u}(t) - u^*(t), \hat{u}'(t) \right\rangle dt = 0 \tag{4.15}$$

($\langle . \rangle$ représente le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$).

Preuve. Toutes les fonctions $v^{(i),N}$ sont continument différentiables. Elles sont contenues dans l'ensemble compact $K_{A,S} \subset C(\mathbb{R})$, et leurs dérivées sont contenues dans l'ensemble compact $K_{A',S'} \subset C(\mathbb{R})$ car $S' = S - 1/2 > 17/12$. Ainsi, on peut trouver une sous suite indexée par $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i = 1, ..., d$, $\{v^{i,N_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\dot{v}^{i,N_p}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément dans $\mathbb{R}$. Ceci implique l'existence de fonctions continument différentiables $u^{i,*}$ telles que

$$v^{i,N_p} \to u^{i,*} \text{ et } \dot{v}^{i,N_p} \to \dot{u}^{i,*} \text{ uniformément dans } \mathbb{R}$$

Comme toutes les fonctions $\{v^{i,N_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ sont contenues dans le même ensemble compact $K_{A,S}$, leurs valeurs absolues sont bornées par une certaine constante M. Ainsi, on a pour tout t dans $\mathbb{R}$ et $k = 1, ..., d$, l'estimation

$$\left|f_k\left(v^{N_p}(t)\right) - f_k\left(u^*(t)\right)\right| \leq \max_{\|u\|_\infty \leq M} |\nabla f_k(u)| \cdot \left|v^{N_p}(t) - u^*(t)\right|$$

qui donne

$$f_k\left(v^{N_p}(t)\right) \to f_k\left(u^*(t)\right) \text{ uniformément dans } \mathbb{R} \text{ pour tout } k = 1, ..., d$$

Soit $n \in \mathbb{N}_0$ arbitraire, fixé. Définissons l'opérateur de projection

$$\pi_n : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \pi_n(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)h_n(t)dt, \forall w \in L^2(\mathbb{R}) \tag{4.16}$$

En conséquence de (4.16) et la condition de phase (4.12), on a

$$\pi_n \dot{v}^{(k),N_p} = \pi_n f_k\left(v^{N_p}\right) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ pour tout } k = 1, ..., d$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle u^*(t) - v^{N_p}(t), \hat{u}'(t) \right\rangle dt = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=N_p}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_n^{(i)} \left(\mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}^{(i)}\right)_j$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $N_p > n + 1$. Comme l'opérateur π_n est continu pour la norme de la convergence uniforme, on peut passer à la limite $p \to \infty$ dans les deux dernières identités. Ceci donne

$$\pi_n \dot{u}^{(k),*} = \pi_n f_k\left(u^*\right) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ pour tout } k = 1, ..., d$$

ainsi que la validité de la condition de phase (4.10). La propriété (P_1) termine la démonstration du théorème. ■

4.4.1 Ce que donne l'ordinateur quand $N = 2$

Considérons le système de second ordre ([8])

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} &= xy^2 - \lambda(1-x) \\ \mu\dfrac{d^2y}{dt^2} &= y - xy^2 \end{cases} \tag{4.17}$$

où μ et λ sont deux paramètres réels . Pour $\mu\lambda = 1$ et $0 < \mu < 2/9$, le système (4.17) admet une solution homocline dont la forme explicite est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) &=& 1 - \dfrac{3\mu}{1+\sqrt{1-9\mu/2}\cosh(t/\sqrt{\mu})} \\ y(t) &=& \dfrac{3}{1+\sqrt{1-9\mu/2}\cosh(t/\sqrt{\mu})} \end{array} \right\}$$

Dans le cas $\mu = 1/5$, les solutions approchées pour le système (4.17) sont de la forme

$$x_N(t) = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n h_n(t) \text{ et } y_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n h_n(t)$$

Considérons le cas $N = 2$. Nous obtenons pour $t = 0$ et $t = 1$, les deux systèmes algébriques suivants:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{\pi^{1/4}}\alpha_0 + \dfrac{1}{\pi^{1/2}}\beta_0^2 + \dfrac{1}{\pi^{3/4}}\beta_0^2\alpha_0 &= 0 \\ \dfrac{6}{\pi^{1/4}}\beta_0 + \dfrac{5}{\pi^{1/2}}\beta_0^2 + \dfrac{5}{\pi^{3/4}}\beta_0^2\alpha_0 &= 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -3\sqrt{2}\alpha_1 + \frac{1}{e\sqrt{\pi}}(\pi^{1/4}\sqrt{e} - 0.8 + \sqrt{2}\alpha_1)(4+\sqrt{2}\beta_1)^2 + 4 &= 0 \\ -7\sqrt{2}\beta_1 - \frac{5}{e\sqrt{\pi}}(\pi^{1/4}\sqrt{e} - 0.8 + \sqrt{2}\alpha_1)(4+\sqrt{2}\beta_1)^2 + 20 &= 0 \end{cases}$$

Le calcul des coefficients d'Hermite-Fourier à l'aide de la méthode de Newton, donne les solutions suivantes.

$$x_2(t) = 1 - 0.45e^{-t^2/2} + 0.0001te^{-t^2/2}$$

et

$$y_2(t) = 2.27e^{-t^2/2} - 0.05te^{-t^2/2}$$

Le couple $(x_2(t), y_2(t))$ est censé approximer la solution homocline théorique $(x(t), y(t))$ du système (4.17).

En utilisant les deux égalités précédentes, on démontre de façon calculatoire que,

$$\|x - x_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \approx (0.94)\, e^{-2\left(2^{0.5}\right)}$$

et

$$\|y - y_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \approx (4.6)\, e^{-2\left(2^{0.5}\right)}$$

On voit bien apparaitre la proximité exponentielle entre la solution exacte et la solution approchée.

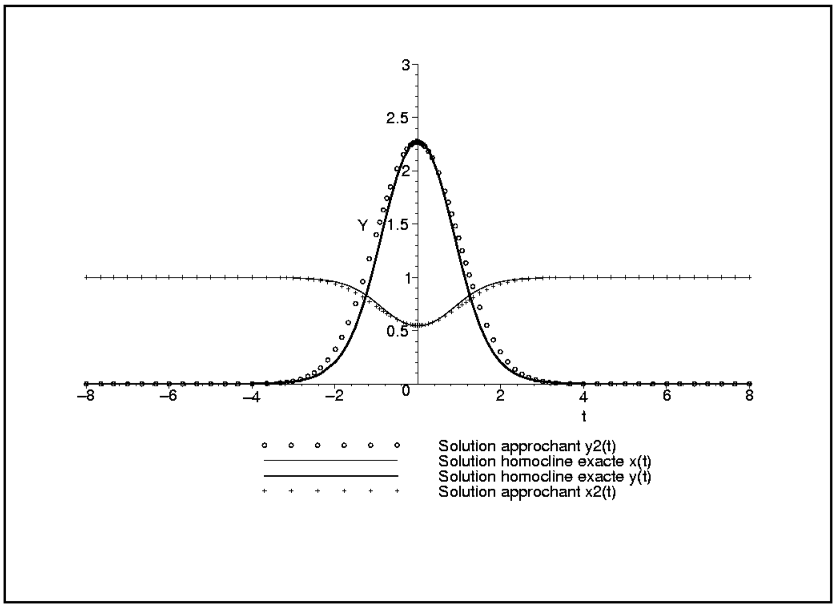

Figure 1. La solution homocline exacte et approchée de (4.17) quand $N = 2$.

Conclusion 4.4.1 *Le présent travail a permis d'une part de mettre en relief le parallèle existant entre le calcul aux différences et le calcul différentiel dans leurs différents aspects. Les solutions homoclines ont fait l'objet d'une attention particulière, vus les problèmes qu'elles continuent à poser. Des résultats d'existence et d'approximation de telles solutions ont étés établis. Dans le cas de l'existence, celà a été fait après une discrétisation classique. Il serait intéréssant de voir si cette solution homocline existe toujours en discrétisant par le shéma d'Euler (ou par d'autres shémas de discrétisation). Par ailleurs, il serait intéréssant de voir si le résultat d'approximation de la solution homocline établi dans le chapitre quatre est adaptable à une solution homocline d'une équation hamiltonienne discrète. Il nous semble que ces deux pistes constituent un sujet de recherche original et prometteur.*

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and applications, Marcel Dekker, Inc, 2000.

[2] A. Aghajani, A. Moradifam, On the homoclinic orbits of the generalized Liénard equations, Applied Mathematics Letters, 20 (345-351), 2007.

[3] S-N. Chow, J.K. Hale, Methods of Bifurcation Theory, Springer Verlag, New York, 1982.

[4] R. Devaney, A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiments, Addison-Wesley, 1992.

[5] S.N. Elaydi, Introduction to difference equations, Second edition, Springer 1999.

[6] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, Dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer Verlag, New York, 1983.

[7] P. Korman, A. C. Lazer, Homoclinic orbits for a class of symmetric Hamiltonian systems, Electon. J. Differential Equations 1994 (1), pp 1-10.

[8] R. Korostyshevskiy, T. Wanner, A Hermite spectral method for the computation of homoclinic orbits and associated functionals, Journal of computational and applied mathematics 206, 986-1006, 2007.

[9] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Application, Second Edition, Marcel Dekker, Inc, New York, 2002.

[10] M. Manjun, G. Zhiming, Homoclinic orbits for second order self-adjoint difference equations, Journal of mathematical analysis and applications 323, 513-521, 2006.

[11] M. Manjun, G. Zhiming, Homoclinic orbits and subharmonics for nonlinear second order difference equations, Nonlinear Analysis 67 (2007) 1737-1745.

[12] L. Samuelides, L. Touzillier, Analyse fonctionnelle, Cepadues, Editions, 1989.

[13] S. Wiggins, Introduction to Applied Dynamical Systems ans Chaos, Springer, Second Edition, 2003.