

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes dynamiques discrets, autonomes, modélisés par des transformations ponctuelles bidimensionnelles et non inversibles (appelées aussi Endomorphismes). Cette notion est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements complexes ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications est caractérisée par la présence de singularités appelées courbes critiques. Ce type de singularités, introduit pour la première fois par C. Mira en 1964, est la généralisation de la notion de points critiques dans le cas unidimensionnel. Elles interviennent dans la détermination des aires absorbantes et chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition des comportements chaotiques. On montre que ses bifurcations sont dues à leurs interactions avec les courbes critiques, en expliquant la formation d'auto-intersection intervenant pour une variété instable d'un col et l'apparition d'oscillation pour une courbe invariante fermée. On s'intéresse aussi, aux bifurcations de contact entre la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur avec les lignes critiques et les aires chaotiques. Ces dernières interviennent dans la fractalisation des bassins d'attraction et la destruction de l'attracteur chaotique.

Abstract

In this memory, our interest concern the discrete, autonomous, dynamical systems modeled by two-dimensional and noninvertible specific transformations (also called Endomorphisms). This concept is an essential property for the analysis of the complex or chaotic behaviors of these systems. In the space of the phases, this property of noninvertibility of the applications is characterized by the presence of singularities called critical curves. This type of singularities, introduced for the first time by C Mira in 1964, is the generalization of the concept of critical points in the unidimensional case. They intervene in the determination of the absorbing and chaotic surfaces, in the characterization of the properties of these surfaces and also to explain global bifurcations. The study of the succession of the bifurcations allows to understand the mechanisms which lead to the appearance of the chaotic behaviors. It is shown that its bifurcations are due to their interactions with the critical curves, by explaining the formation of self-intersection intervening for an unstable variety of a saddle and the appearance of oscillation for a closed invariant curve. We are also interested on the contact bifurcations between the boundary of the basin of attraction of attractor with the critical lines and the chaotic surfaces. These last intervene in the fractalisation of the basins of attraction and the destruction of chaotic attractor.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abderrahmane Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MAGISTER

En

Mathématiques

Option

Analyse et Probabilités

Thème :

Sur certains aspects des systèmes dynamiques
discrets bidimensionnels

Présenté par :

YAHIAOUI Yanis

Devant le jury composé de :

Mr. DAHMANI Abdelnasser	Président	Professeur	U. de Béjaïa
Mr. AKROUNE Nourredine	Rapporteur	Maître de Conférences	U. de Béjaïa
Mr. AMROUNE Abdelaziz	Examineur	Maître de Conférences	U. de M'sila
Mr. BERBOUCHA Ahmed	Examineur	Maître de Conférences	U. de Béjaïa
Mr. MEHIDI Noureddine	Examineur	Professeur	U. de Béjaïa

Université A. MIRA – Béjaïa, 02 décembre 2009

Remerciements

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur Nouredine AKROUNE, Maître de Conférences à l'Université de Béjaïa, pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction du présent mémoire. Je lui exprime ma reconnaissance pour sa disponibilité et pour ses idées pertinentes. Je le remercie pour ses précieux conseils et orientations..

Je suis heureux de pouvoir remercier Mr. DAHMANI A. Nasser, Professeur à l'université de Béjaïa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance. Qu'il veuille agréer l'expression de ma haute considération.

Je remercie profondément Messieurs MEHIDI Nouredine, Professeur à l'université de Béjaïa, BERBOUCHA Ahmed, Maître de Conférences à l'Université de Béjaïa et AMROUNE Abdelaziz, Maître de Conférences à l'Université de M'Sila, d'avoir accepté d'examiner ce travail et m'honorer par leurs présence parmi les membres du jury. Je leurs exprime mon profond respect et toute ma gratitude.

Je remercie vivement tous les enseignants qui ont assuré ma formation au sein du département de mathématiques de l'Université de Béjaïa. Je leur en suis très reconnaissant.

Merci à mes collègues : Rachid, Malek, Rafik, Ferroudj, ... qui ont contribué à rendre la vie en salle de PG particulièrement agréable. Merci également à tout mes amis : Ghilas, Moumene, Farid, Souad, ... en particulier à Malek et Robert, pour leurs soutien et encouragements au cours de la réalisation de ce prodigieux travail.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu dans les moments difficiles.

Dédicaces

Je dédie ce prodigieux travail :
A mes très chers parents.
A toute ma famille. . .

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes dynamiques discrets, autonomes, modélisés par des transformations ponctuelles bidimensionnelles et non inversibles (appelées aussi Endomorphismes). Cette notion est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements complexes ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications est caractérisée par la présence de singularités appelées courbes critiques. Ce type de singularités, introduit pour la première fois par C. Mira en 1964, est la généralisation de la notion de points critiques dans le cas unidimensionnel. Elles interviennent dans la détermination des aires absorbantes et chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition des comportements chaotiques. On montre que ses bifurcations sont dues à leurs interactions avec les courbes critiques, en expliquant la formation d'auto-intersection intervenant pour une variété instable d'un col et l'apparition d'oscillation pour une courbe invariante fermée. On s'intéresse aussi, aux bifurcations de contact entre la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur avec les lignes critiques et les aires chaotiques. Ces dernières interviennent dans la fractalisation des bassins d'attraction et la destruction de l'attracteur chaotique.

Abstract

In this memory, our interest concern the discrete, autonomous, dynamical systems modeled by two-dimensional and noninvertible specific transformations (also called Endomorphisms). This concept is an essential property for the analysis of the complex or chaotic behaviors of these systems. In the space of the phases, this property of noninvertibility of the applications is characterized by the presence of singularities called critical curves. This type of singularities, introduced for the first time by C Mira in 1964, is the generalization of the concept of critical points in the unidimensional case. They intervene in the determination of the absorbing and chaotic surfaces, in the characterization of the properties of these surfaces and also to explain global bifurcations. The study of the succession of the bifurcations allows to understand the mechanisms which lead to the appearance of the chaotic behaviors. It is shown that its bifurcations are due to their interactions with the critical curves, by explaining the formation of self-intersection intervening for an unstable variety of a saddle and the appearance of oscillation for a closed invariant curve. We are also interested on the contact bifurcations between the boundary of the basin of attraction of attractor with the critical lines and the chaotic surfaces. These last intervene in the fractalisation of the basins of attraction and the destruction of chaotic attractor.

Table des matières

Table des matières	6
Introduction	7
1 Définitions et Notions Générales	11
1.1 Préliminaires et Notations	11
1.2 Notion de Singularité	16
1.2.1 Point Périodique - Point Fixe	16
1.2.2 Attracteurs	17
1.3 Stabilité	18
1.4 Variété Stable et Instable	20
1.4.1 Variété Instable	20
1.4.2 Variété Stable	21
1.5 Conjugaison Topologique	22
1.6 Sensibilité aux Conditions Initiales	25
1.7 Bifurcations	25
1.7.1 Bifurcation Fold ou noeud-col	25
1.7.2 Bifurcation Flip ou doublement de période	26
1.7.3 Bifurcation de Neïmark-Hopf	27
1.7.4 Bifurcations Globales	29
1.7.5 Bifurcations Homoclines	29
1.8 Chaos	30
1.9 Exposants de Lyapunov	31
1.10 La Section de Poincaré	34
1.11 Les Fractales	36
1.12 Conclusion	36
2 Caractérisation des Lignes Critiques dans le Plan de Phases	37
2.1 Transformation Ponctuelle	37
2.2 Courbes Critiques	38
2.2.1 Définitions et Propriétés Générales	38
2.2.2 Propriétés des trajectoires ([B84])	40
2.3 Classification des Transformations Non Inversibles(TNI)	41
2.3.1 Feuilletage du plan des phases	41
2.4 Conclusion.	50

3	Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée d'un Endomorphisme Bidimensionnel de Type $(Z_0 - Z_2)$	51
3.1	Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée	51
3.1.1	Bifurcation $\langle \lambda = \tilde{\lambda} \rangle$ intersection avec LC_{-1}	52
3.2	Interaction d'un Arc de Courbe avec les Lignes Critiques	53
3.3	Caractérisation de la Variété Instable $W^u(p)$	56
3.3.1	Variété instable de p	56
3.4	Bifurcations de la Variété Instable $W^u(p)$	57
3.4.1	Bifurcation $\langle \lambda = \lambda^* \rangle$ créant des oscillations de $W^u(p)$	58
3.5	Intersection d'une courbe invariante fermée Γ avec une branche instable $W^u(p)$ d'un col p	59
3.5.1	Exemple et résultats numériques.	60
3.6	Conclusion.	70
4	Bifurcations de Bassins d'Attraction des Endomorphismes Bidimensionnels de Type $(Z_0 - Z_2)$	71
4.1	Bifurcations de Bassins d'Attraction	71
4.1.1	Définitions et Propriétés Générales	71
4.1.2	Bassin connexe \leftrightarrow Bassin non connexe	73
4.1.3	Bassin non connexe \leftrightarrow Bassin connexe	74
4.1.4	Bassin simplement connexe \leftrightarrow Bassin multiplement connexe	74
4.1.5	Modification du nombre d'îlots de D ou apparition d'une nouvelle arborescence	75
4.1.6	Exemple et résultats numériques.	76
4.2	Aire Absorbante et Aire Chaotique	92
4.2.1	Détermination des Zones Absorbantes et Chaotiques	93
4.2.2	Bifurcation des Zones Absorbantes et Chaotiques	94
4.2.3	Exemple et résultats numériques.	94
4.3	Conclusion.	99
	Conclusion Générale et Perspectives	101
	Bibliographie	101

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les continus et les discrets.

La notion de chaos, qui trouve ses fondements dans l'article de Lorenz (1963), a connu un développement mathématique dans les années 1970 (Ruelle et Takens, 1971), suivi d'un véritable essor scientifique et populaire dans les années 1980. Le développement de l'informatique n'est pas étranger au succès rencontré, de par la facilité des simulations et la beauté de certains résultats obtenus. On dit qu'un système dynamique est chaotique s'il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI). La propriété de SCI se traduit par le fait que la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Géométriquement, l'attracteur chaotique peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. Toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur. Le système est contraint à évoluer de manière imprévisible dans une région bien définie de l'espace des phases. Dans le cas où le système dynamique modélise un phénomène physique, la propriété de SCI montre la difficulté à prédire le comportement asymptotique de ce phénomène. En effet, toute mesure effectuée sur une grandeur physique contient un bruit demesuré qui fait que la trajectoire du système modélisé et celle du système réel divergeront au bout d'un temps fini. Aussi précise que soit la modélisation, il est impossible de prédire le comportement du système réel à long terme. On peut ajouter que l'observateur, en effectuant sa mesure, influence nécessairement le système

qu'il souhaite modéliser et modifie ainsi sa trajectoire : on retrouve un paradoxe du type quantique, mais pour des phénomènes macroscopiques. Il est intéressant de noter que le chaos apparaît sur des systèmes à petit nombre de variables d'état. Une condition nécessaire à l'apparition du chaos est que le système soit non linéaire. C'est la complexité des dynamiques produites par des systèmes dont la définition tient en quelques lignes qui a, dans un premier temps, étonné les chercheurs et suscité l'essentiel des travaux entrepris sur la question. Pour des systèmes dont le nombre de variables d'état est élevé, l'étude s'est développée plus tardivement. Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres (dits de contrôle), qui agissent sur les caractéristiques de la fonction d'évolution du système. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La variation continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la nature des régimes dynamiques développés dans le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. La route vers le chaos par quasi-périodicité, dite à la Ruelle et Takens (1971), est un des scénarios génériques marquant le passage du point fixe au chaos. Elle met en jeu une série de bifurcations menant à des dynamiques de plus en plus complexes. A chaque bifurcation, un nouveau mode se superpose à celui qui est déjà en place, menant d'un cycle limite à un tore, puis enfin au chaos. Il existe d'autres scénarios, comme par exemple la route vers le chaos par doublement de période.

Les systèmes dynamiques sont le plus souvent décrits par des systèmes d'équations différentielles d'ordre p :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \Lambda, t), X \in \mathbb{R}^p, \Lambda \in \mathbb{R}^q \quad (1)$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \Lambda), X \in \mathbb{R}^p, \Lambda \in \mathbb{R}^q \quad (2)$$

où X est l'état du système et Λ l'ensemble de ces paramètres. Le système (1) est dit non autonome car F dépend du temps, le système (2) est dit autonome (F indépendante du temps). Ce type d'équations fait intervenir une variation continue du temps. Suivant les problèmes concrets considérés, certains systèmes peuvent être modélisés par des équations faisant intervenir une variation discrète du temps, appelées transformations ponctuelles ou récurrences de la forme :

$$X_{n+1} = T(X_n, \Lambda) \quad (3)$$

$$X_{n+1} = T(X_n, \Lambda, n) \quad (4)$$

la transformation (3) est autonome, (4) est non autonome. Une solution de (3) ou (4) est formée par une suite de points X_n , $n \in \mathbb{N}$, où X_0 est appelé condition initiale et les points X_1, X_2, X_3, \dots sont les itérés successifs de X_0 . Ces solutions sont également appelées trajectoires discrètes de phase ou suite itérée ou encore orbites.

Une classe particulière de transformations ponctuelles joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué : les transformations non inversibles (ou *TNI*). Elles se différencient des transformations dites inversibles par le fait qu'un point de l'espace de phase ne possède pas un antécédent unique mais peut en avoir zéro, un ou plusieurs suivant la région de l'espace considérée.

L'objet de ce mémoire consiste en une étude des aspects de la dynamique complexe générée par des systèmes non linéaires régis par des équations aux récurrences appelées transformations ponctuelles et expliquer les mécanismes qui ramènent à :

1. Fractalisation des bassins d'attraction.
2. L'apparition des comportements chaotiques.

Le terme "dynamique complexe" est utilisé pour caractériser tout comportement à caractère non périodique, notamment les régimes chaotiques.

Les concepts introduits dans le premier chapitre, constituent des notions de base indispensables à l'étude des systèmes dynamiques discrets. Nous avons vu que les singularités sont utilisées pour cerner la structure des solutions, les exposants de Lyapunov nous renseignent sur les propriétés de stabilité locale d'un attracteur, la notion de variété stable permet de déterminer la frontière de bassin d'attraction et la variété instable détermine l'aire absorbante mixte. On a aussi défini quelques bifurcations courantes : bifurcation noeud-col, bifurcation doublement de période et bifurcation Neimark-Hopf. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition du chaos.

Nous avons introduit dans le deuxième chapitre la notion de Ligne Critique, qui joue un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques discrets. Elles interviennent dans la détermination des aires absorbantes et chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et leurs bassins d'attraction. Une courbe critique peut être constituée d'une ou de plusieurs branches. Ces branches séparent le plan en régions ouvertes, où tous les points d'une même région, ont le même nombre d'antécédents de premier rang.

Le troisième chapitre est consacré pour introduire et étudier la notion de bifurcation d'une courbe invariante fermé, cette bifurcation est importante car elle est responsable

de la transformation de cette courbe en un attracteur chaotique. On a montré que les bifurcations des ensembles invariants sont dues à leurs interactions avec les lignes critiques on a expliqué la formation d'auto-intersection intervenant pour une variété instable d'un col et l'apparition d'oscillation pour une courbe invariante fermée. Des algorithmes, des programmes (en maple) et des logiciels graphiques performants ont été réalisés afin de mener à bien ce travail.

Le dernier chapitre est consacré pour étudié les bifurcations de contact entre la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur avec les lignes critiques et les aires chaotiques, ces bifurcations ont été étudiées pour les endomorphismes de type $Z_0 - Z_2$, qui est le cas basique pour d'autres types d'endomorphismes plus compliqués, c'est à dire de degrés minimale afin que ces bifurcations apparaissent de la façon la plus clair possible.

1

Définitions et Notions Générales

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les principales notions de la théorie des systèmes dynamiques, ainsi que certaines de leurs propriétés que l'on utilisera dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Préliminaires et Notations

Définition 1.1.1.

On appelle système dynamique, un triplet (X, T, f) où X est un espace métrique (généralement $X \subseteq \mathbb{R}^n$), T est l'ensemble \mathbb{R}, \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , et f une application continue de $X \times T$ dans X vérifiant :

$$\begin{cases} f(x, 0) = x, \forall x \in X \\ f(f(x, t), \tau) = f(x, t + \tau), \forall t, \tau \in T; \forall x \in X \end{cases}$$

X : espace des phases ou espace d'états.

T : espace temporel.

f : flot du système dynamique ou fonction d'évolution.

La fonction f décrit la façon dont le système évolue au cours du temps. Si cette fonction ne dépend pas du temps, le système est autonome. Le choix de l'espace temporel T est décisif, et dépend en général du phénomène que l'on souhaite modéliser. Si $T = \mathbb{R}$, le système (X, T, f) est dit continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$, le système (X, T, f) est dit discret.

Les systèmes à temps continu sont les équations et les systèmes différentiels classiques. Ils servent à décrire l'évolution des systèmes physiques (en mécanique, en électricité, etc.) Une équation différentielle du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) , \quad x(0) = x_0 , \quad x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

permet de définir un système dynamique **autonome** (i.e indépendant du temps) à temps continu (X, \mathbb{R}^+, f) , où f est la solution de (1.1) définie par :

$$f(x_0, t) = x_0 + \int_0^t F(x(\xi))d\xi , \quad f(x_0, 0) = x_0$$

L'existence et l'unicité de la solution de (1.1) est assuré par le théorème suivant :

Théorème 1.1.1.

Soit F une fonction à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} F : U \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) \end{aligned}$$

où $U \subset \mathbb{R}^n$ et $I \subset \mathbb{R}$. Considérons le système différentiel :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t) \quad (1.2)$$

On suppose de plus que le système est soumis à la condition initiale :

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I \text{ et } x_0 \in U.$$

Si la fonction F est continue de $U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ et k -Lipschitzienne en x , (i.e. si F vérifie la condition de Lipschitz) :

$$\exists k > 0 \quad / \quad \forall (x, t) \in U \times I, \quad \forall (y, t) \in U \times I, \quad \|F(x, t) - F(y, t)\| \leq k \|x - y\|$$

alors il existe une et une seule solution $x(t)$ de (1.2) définie pour tout $t \in J$, $J \subset I$ étant un intervalle centré sur t_0 , vérifiant la condition initiale donnée.

Ce théorème est à rapprocher de la notion de déterminisme en physique classique : si un système suit une loi d'évolution donnée (l'équation différentielle), les mêmes causes (les conditions initiales) produisent les mêmes effets.

Exemple 1.

Considérons l'équation différentielle autonome suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = e^{-\varphi(t)} \\ \varphi(0) = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{fixé}) \end{cases}$$

La solution de ce système est :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \varphi(x, t) = \ln(t + e^x) \end{aligned}$$

Cette solution définit un système dynamique continu $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \varphi)$.

En effet ;

- 1) φ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- 2) $\varphi(x, 0) = \ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}_+ :$

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(x, t), \tau) &= \varphi(\ln(t + e^x), \tau) \\ &= \ln(\tau + e^{\ln(t + e^x)}) \\ &= \ln(\tau + t + e^x) \\ &= \varphi(x, t + \tau). \end{aligned}$$

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets, pour cela nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.1.2.

Un système dynamique discret est un triplet (X, T, f) , formé par un espace temporel T généralement $T = \mathbb{N}$, un espace métrique non vide $X \subseteq \mathbb{R}^n$ appelé espace des phases, et par une fonction continue $f : X \longrightarrow X$.

Pour un état $x_0 \in X$ fixé, l'orbite d'état initial $x_0 \in X$ est la suite $\varphi_{x_0} : \mathbb{N} \longrightarrow X$ qui indique l'état du système à chaque instant $n \in \mathbb{N}$. Si au temps $n = 0$, le système se trouve en x_0 alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_{x_0}(n) = f^n(x_0) \tag{1.3}$$

où $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_n(x)$.

L'orbite $(\varphi_{x_0}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ peut être vue comme la solution de l'équation aux différences autonome avec condition initiale x_0 :

$$x(t + 1) = f(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad x(0) = x_0 \tag{1.4}$$

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est complètement déterminé par l'application f de X dans X telle que :

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.5}$$

l'application f est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle.

Remarque.

Lorsque l'application f est différentiable dans \mathbb{R}^2 et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, le système dynamique discret $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f)$ est équivalent au système dynamique holomorphe $(\mathbb{C}, \mathbb{N}, g)$ où :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \\ g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (i^2 = -1) \end{aligned}$$

Exemple 2.

Les deux systèmes dynamiques $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f(x, y) = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b))$, $(\mathbb{C}, \mathbb{N}, g(z) = z^2 + c)$ sont équivalents, où $c = a + ib \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

En effet,

i) f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

ii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -2y \end{aligned}$$

les conditions de Cauchy-Riemann sont donc vérifiées.

iii) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} g(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) \\ &= (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b) \\ &= (x + iy)^2 + (a + ib) \\ &= z^2 + c \end{aligned}$$

Définition 1.1.3. Réversibilité

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est dit **réversible** si et seulement si la fonction f est un homéomorphisme (c.a.d. bijective et bicontinue).

Définition 1.1.4.

Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret, un sous-ensemble A de X est dit **positivement invariant** (resp. **strictement positivement invariant**) si et seulement si $f(A) \subseteq A$ (resp. $f(A) = A$).

Si A est un ensemble positivement invariant alors on a évidemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(A) \subseteq A \tag{1.6}$$

Définition 1.1.5. Transitivité

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est **transitif** si et seulement si pour chaque couple d'ensembles non-vides ouverts $A, B \subseteq X$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f^k(A) \cap B \neq \emptyset \tag{1.7}$$

Définition 1.1.6. Trajectoire

Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret, et d une distance sur X .

On appelle **trajectoire ou orbite** d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble

$$\theta(x) = \{f^t(x) / t \in \mathbb{N}\} \tag{1.8}$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par $\theta(x) = \{f^t(x) / t \in \mathbb{Z}\}$ ainsi que l'orbite négative de x par $\theta_-(x) = \{f^{-t}(x) / t \in \mathbb{N}\}$.

Définition 1.1.7. Ensemble Limite Positif

Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret, on appelle **ensemble limite positif** d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X / \forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t \geq t_0 : d(y, f^t(x)) < \epsilon\} \tag{1.9}$$

- 1) Un point x est dit **récurrent** si $x \in \omega(x)$, il est **transitoire** s'il n'est pas récurrent.
- 2) On notera $\omega(A)$ l'ensemble limite d'un ensemble A

$$\omega(A) = \bigcup_{x \in A} \omega(x) \tag{1.10}$$

Définition 1.1.8. Bassin d'Attraction

Le bassin d'Attraction, noté $B(A)$, d'un ensemble $A \subset X$ est l'ensemble des points (ou encore des condition initiales) de l'espace des phases tels que toutes les trajectoires qui en sont issues, convergent asymptotiquement vers A .

Autrement dit :

$$B(A) = \{x \in X / \omega(x) \subset A\} \tag{1.11}$$

Le plus grand ouvert connexe contenant A est appelé **bassin immédiat d'Attraction**, noté $BI(A)$.

1.2 Notion de Singularité

1.2.1 Point Périodique - Point Fixe

Définition 1.2.1. Point Périodique-Point Fixe

Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret. Un point $x \in X$ est appelé point périodique de période $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $f^k(x) = x$ et pour tout $h < k$ on a $f^h(x) \neq x$. Le cycle engendré par x est alors $\xi = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, où $x_i = f^i(x)$, $i = 0, \dots, (k - 1)$. Les points périodiques de période 1 sont les points fixes de f et sont parfois appelés points d'équilibre.

Nous notons $P_k(f)$ l'ensemble des points périodiques de période k . L'ensemble de tous les points périodiques est :

$$P(f) = \{x \in X / \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in P_k(f)\} \tag{1.12}$$

les éléments de $P(f)$ sont appelés singularités de dimension 0.

Lorsque la dimension de l'espace des phases X est supérieure à un, il existe des singularités de dimension un, qui sont les **courbes invariantes** par l'application f (ou f^k , $k \in \mathbb{N}^*$).

Dans le plan des phases ($X = \mathbb{R}^2$), une courbe définie par l'équation : $\Gamma(x, y) = C$, où $C \in \mathbb{R}$, est invariante par l'application f (ou f^k), si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(f(x, y)) = \Gamma(x, y) \quad \text{ou} \quad \Gamma(f^k(x, y)) = \Gamma(x, y)$$

Exemple 3.

Soit $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy))$ un système dynamique discret; le cercle unité $\Gamma(x, y) = C_{((0,0),1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ est invariant par l'application f .

En effet,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(f(x, y)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 + y^2)^2 = 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = \Gamma(x, y)
 \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. Régularité

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est dit **régulier** si et seulement si l'ensemble des points périodiques est dense dans (X, d) .

Autrement dit :

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists y \in P(f) / d(x, y) \leq \epsilon \quad (1.13)$$

1.2.2 Attracteurs

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités (états stationnaires) plus générales que les points périodiques, ce sont les **Attracteurs**. Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'un attracteur. En général, un attracteur est défini comme une partie fermée de l'espace des phases qui attire les orbites issues de son voisinage. Dans ce mémoire, on adoptera la définition suivante donnée par **Guckenheimer-Holmes** [GH83].

Définition 1.2.2.1. Attracteur

Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret. Une partie A de X est appelée **attracteur** si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

- 1) A est fermée .
- 2) A est positivement invariante .
- 3) A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0$$

1.3 Stabilité

Définition 1.3.1.

Soit $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret.

i) Un point d'équilibre x est **stable** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall y \in X, \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f^n(y), x) < \epsilon \quad (1.14)$$

ii) Un point d'équilibre x est dit **attractif** si :

$$\exists \eta > 0 / \forall y \in X \text{ } d(x, y) < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = x \quad (1.15)$$

iii) Un point d'équilibre x est dit **instable** si il n'est pas stable.

Lorsque la récurrence f est différentiable, la nature stable ou instable d'un cycle d'ordre k est caractérisée par les valeurs propres de la matrice Jacobienne de f^k prise en un point quelconque de ce cycle, on appelle ces valeurs propres les **multiplicateurs** du cycle.

Lorsque la récurrence f est n -dimensionnelle ($\dim X = n$), un cycle d'ordre k a évidemment n multiplicateurs $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. On pose $\rho_i = |\lambda_i|$ dans la suite.

le cycle est dit asymptotiquement stable ou **attractif**, si $\rho_i < 1, \forall i = 1, \dots, n$. Il est dit instable ou **répulsif**, si au moins un de ses multiplicateurs λ_i est tel que $\rho_i > 1$.

Lorsque la récurrence f est **unidimensionnelle**, le multiplicateur d'un point fixe ou d'un k -cycle est égale à :

1) Pour x^* un point fixe de f :

$$\rho = |f'(x^*)| \quad (1.16)$$

2) Pour $\xi = \{x_1^*, \dots, x_k^*\}$ un cycle d'ordre k de f :

$$\rho = \prod_{i=1}^{i=k} |f'(x_i^*)| \quad (1.17)$$

Lorsque la récurrence f est **bidimensionnelle**, on classifie les points fixes et les cycles selon les valeurs de leurs multiplicateurs λ_1 et λ_2 ainsi que de leurs modules ρ_1 et ρ_2 .

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

a-1) Un point fixe ou un cycle est dit **col** si :

$$\rho_1 < 1 < \rho_2 \quad (1.18)$$

Signalons qu'un col est toujours répulsif.

b-2) Un point fixe ou un cycle est dit **noeud attractif** (resp. **répulsif**) si :

$$\rho_i < 1, \quad i = 1, 2 \quad (\text{resp. } \rho_i > 1, \quad i = 1, 2) \quad (1.19)$$

2) $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$:

a-1) Un point fixe ou un cycle est dit **foyer attractif** (resp. **répulsif**) si :

$$\rho_1 = \rho_2 < 1 \quad (\text{resp. } \rho_1 = \rho_2 > 1) \quad (1.20)$$

Exemple 1.3.1. Transformation de Chirikov [J79]

Soit le système dynamique discret $([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{N}, T)$ généré par la transformation T définie par :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi y_n, & k > 0 \\ y_{n+1} = y_n + x_{n+1} \end{cases}$$

Les points fixes (x^*, y^*) de cette application sont :

$$x^* = 0 \quad \text{et} \quad y^* = 0, \frac{1}{2}.$$

La matrice jacobienne de l'application aux points fixes s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm k \\ 1 & 1 \pm k \end{pmatrix}$$

Où le signe $+$ correspond à $y^* = \frac{1}{2}$ et le signe $-$ correspond à $y^* = 0$. L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - (2 \pm k)\lambda + 1 = 0$$

Le point fixe (x^*, y^*) est stable si :

$$|2 \pm k| < 2.$$

On en déduit que le point fixe $(x^*, y^*) = (0, \frac{1}{2})$ est toujours instable. Le point fixe $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est stable si $0 < k < 4$. Considérons un cycle d'ordre p :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi y_i, \\ y_{i+1} = y_i + x_{i+1} \\ x_{p+1} = x_1, \quad y_{p+1} = y_1, \quad i = 1, \dots, p \end{cases}$$

La matrice jacobienne du cycle s'écrit :

$$M = \prod_{i=1}^p \begin{pmatrix} 1 & -k \cos 2\pi y_i \\ 1 & 1 - k \cos 2\pi y_i \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - \text{Trace}M \lambda + 1 = 0$$

On en déduit les valeurs propres de M :

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\beta \pm 2\sqrt{\beta(\beta - 1)}, \text{ avec } \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Trace}M$$

Si $0 < \beta < 1$, le p -cycle est stable. Sinon, les valeurs propres sont réelles avec :

$$|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$$

et le p -cycle est instable.

1.4 Variété Stable et Instable

1.4.1 Variété Instable

Soit $(X \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret, et x^* un point répulsif de f et U un voisinage de x^* .

Définition 1.4.1.1. Variété Instable Locale [ABG02]₁

On appelle $W_{loc}^u(x^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U , qui converge vers x^* .

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x \in U : x_{-p} \in f^{-p}(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, x_{-p} \in U\} \quad (1.21)$$

Définition 1.4.1.2. Variété Instable Globale [ABG02]₁

On appelle $W^u(x^*)$ ensemble instable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^n ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers x^* .

$$W^u(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{-p} \in f^{-p}(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^u(x^*)) \quad (1.22)$$

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble instable global.

Propriété 1.4.1.1. [ABG02]₁

1) $W^u(x^*)$ est invariant par f :

$$f(W^u(x^*)) = W^u(x^*).$$

2) Si f est un endomorphisme, en général $W^u(x^*)$ n'est pas invariant par f^{-1} et on a :

$$f^{-1}(W^u(x^*)) \supseteq W^u(x^*).$$

3) L'invariance de $W^u(x^*)$ par f^{-1} a lieu lorsque f est inversible.

1.4.2 Variété Stable

Soit $(X \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret, et x^* un point fixe de f , attractif ou répulsif.

Définition 1.4.2.1. Variété Stable Locale [ABG02]₁

On appelle $W_{loc}^s(x^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers x^* .

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U : x_p = f^p(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, x_p \in U\} \quad (1.23)$$

Définition 1.4.2.2. Variété Stable Globale [ABG02]₁

On appelle $W^s(x^*)$ ensemble stable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^n dont la séquence d'images successives converge vers x^* .

$$W^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_p = f^p(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{loc}^s(x^*)) \quad (1.24)$$

Remarque.

- i) Si x^* est un point fixe attractif, l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.
- ii) Si f est un difféomorphisme, les ensembles stable et instable global sont des variétés.

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble stable global.

Propriété 1.4.2.1. [ABG02]₁

1) $W^s(x^*)$ est invariant par f^{-1} :

$$f^{-1}(W^s(x^*)) = W^s(x^*).$$

2) Si f est un endomorphisme, en général $W^s(x^*)$ n'est pas invariant par f et on a :

$$f(W^s(x^*)) \subseteq W^s(x^*).$$

3) L'invariance de $W^s(x^*)$ par rapport à f a lieu lorsque f est inversible.

4) Dans le cas d'un point fixe x^* de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de x^* , lorsque f est inversible, se réduit à x^* lui même. Lorsque f est non inversible, l'ensemble stable global de x^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de x^* . Ceci s'écrit :

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x^*) \quad \text{et} \quad \forall x \in W^s(x^*), \exists m \in \mathbb{N} : f^m(x) = x^*$$

5) Les définitions des ensembles stable et instable d'un cycle d'ordre k , se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de f^k .

1.5 Conjugaison Topologique

La notion de conjugaison topologique est introduite pour identifier les systèmes dynamiques qui ont le même comportement qualitatif.

Définition 1.5.1.

Un système dynamique discret $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ est **topologiquement semi-conjugué** avec le système dynamique discret (Y, \mathbb{N}, g) si et seulement si, il existe une fonction continue et surjective $\psi : X \rightarrow Y$ telle que : $\psi \circ f = g \circ \psi$.

Définition 1.5.2.

Deux systèmes dynamiques (X, \mathbb{N}, f) et (Y, \mathbb{N}, g) sont **topologiquement conjugués** si et seulement si la fonction $\psi : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme ; c'est-à-dire ,

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1} = g$$

Propriétés.

i) Si x^* est un point fixe de f , alors $\psi(x^*)$ est un point fixe de g .

En effet, comme x^* est un point fixe de f et $(g \circ \psi)(x) = (\psi \circ f)(x)$, alors pour $x = x^*$ on a :

$$g(\psi(x^*)) = \psi(f(x^*)) = \psi(x^*)$$

ii) si ψ est un difféomorphisme, alors $g'(\psi(x^*)) = f'(x^*)$.

En effet,

$$(g \circ \psi)'(x) = (\psi \circ f)'(x) \Leftrightarrow g'(\psi(x))\psi'(x) = \psi'(f(x))f'(x)$$

Pour $x = x^*$ on obtient :

$$g'(\psi(x^*))\psi'(x^*) = \psi'(x^*)f'(x^*)$$

Comme $\psi'(x^*) \neq 0$, alors :

$$g'(\psi(x^*)) = f'(x^*)$$

Exemple 4.

Soient $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, f(x) = ax^2 + bx + c)$ et $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, g(x) = x^2 + p)$ deux systèmes dynamiques discrets, où $p \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, posons $\psi(x) = ax + \frac{b}{2}$

i) ψ est un homéomorphisme sur \mathbb{R} .

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \psi \circ f(x) &= \psi(f(x)) \\ &= a(ax^2 + bx + c) + \frac{b}{2} \\ &= a^2x^2 + abx + ac + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ \psi(x) &= g(\psi(x)) \\ &= \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + p \\ &= a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} + p \end{aligned}$$

D'où, $f(x) = ax^2 + bx + c$ est conjugué avec $g(x) = x^2 + p$ en posant :

$$p = ac + \frac{2b - b^2}{4}$$

Notons la simplification qui en découle, car le nombre de paramètres passe de trois (ie : a, b et c) à un (le paramètre p).

Exemple 5.

Soit ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) un système dynamique discret, où $a > 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$, et considérons, pour $\beta \in \mathbb{R}$, l'application $\psi(x) = \sqrt{a}x + \beta$.

Pour une valeur précise de β , le système dynamique discret engendré par f est topologiquement conjugué au système dynamique discret engendré par g , où $g(x) = x^3 + px + q$. En effet, ψ est un homéomorphisme sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \psi^{-1}(x) &= \psi \circ f(\psi^{-1}(x)) \\ &= \psi \circ f\left(\frac{x - \beta}{\sqrt{a}}\right) \\ &= \psi\left[f\left(\frac{x - \beta}{\sqrt{a}}\right)\right] \\ &= (x - \beta)^3 + \frac{b}{\sqrt{a}}(x - \beta)^2 + c(x - \beta) + d\sqrt{a} + \beta \\ &= x^3 + \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - 3\beta\right)x^2 + \left(3\beta^2 - \frac{2b\beta}{\sqrt{a}} + c\right)x - \beta^3 + (1 - c)\beta + d\sqrt{a} = g(x) \end{aligned}$$

Pour que g s'écrive sous la forme $(x^3 + px + q)$, il faut prendre :

$$\frac{b}{\sqrt{a}} - 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{b}{3\sqrt{a}}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} p = c - \frac{b^2}{3a} \\ q = \sqrt{a}\left(d - \frac{bc}{3a} + \frac{b}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

et ψ vérifie donc :

$$\psi^{-1} \circ g = f \circ \psi^{-1} \text{ ou encore } g \circ \psi = \psi \circ f$$

Les deux systèmes ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, f$) et ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, g$) sont donc topologiquement conjugués via ψ ; ils possèdent les mêmes propriétés (leurs points fixes et leurs cycles,...).

La conjugaison nous permet de ramener le premier système ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, f$), qui dépend de quatre paramètres (a, b, c, d), au second ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, g$) qui ne dépend que de deux (p et q).

1.6 Sensibilité aux Conditions Initiales

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples pour lesquels deux trajectoires, issues de points de départ, dont la distance est trop petite pour être observable, se séparent au bout d'un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle jusqu'à ce que toute mémoire sur les points de départ soit perdue : on appelle ce phénomène Sensibilité aux Conditions Initiales (en abrégé : SCI).

Définition 1.6.1.

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est dit **sensible aux conditions initiales** (S.C.I) si et seulement si :

$\exists \epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on a :

$$\forall \eta > 0, \exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \eta \text{ et } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon \quad (1.25)$$

Donc un système est (S.C.I) si pour chaque état x , il existe des points arbitrairement voisins de x dont les orbites respectives s'écartent de celles de x au cours de l'évolution du système. La sensibilité aux conditions initiales est une notion centrale dans la théorie du chaos ([D89]).

Définition 1.6.2. **Expansivité**

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est **positivement expansif** si et seulement si :

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x, y \in X (x \neq y), \exists n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon \quad (1.26)$$

1.7 Bifurcations

Soit $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f_\mu)$ un système dynamique discret ; $\mu \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$) un vecteur paramètre, on suppose que f_μ dépend continûment de μ . La variation quantitative de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs du système dans l'espace des phases, tels que : l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité, le changement de type de singularités, etc... Ces changements sont regroupés sous l'appellation de **bifurcations**.

Ci-après, on présente les différentes bifurcations couramment observées.

1.7.1 Bifurcation Fold ou noeud-col

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre k , de stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et ont un multiplicateur λ égal à 1. Cette

bifurcation s'écrira :

↪ Pour $\dim X = 1$:

$$\emptyset \xrightarrow{\lambda = 1} \xi_s^k + \xi_i^k \quad (1.27)$$

où X désigne l'espace des phases,

\emptyset signifie l'absence de cycles d'ordre k ,

ξ_s^k désigne un cycle d'ordre k stable,

ξ_i^k désigne un cycle d'ordre k instable.

↪ Pour $\dim X = 2$:

$$\emptyset \xrightarrow{\lambda = 1} N_s^k + C^k \quad (1.28)$$

où N_s^k un noeud stable et C^k un col.

1.7.2 Bifurcation Flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu, lorsqu'un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $\lambda = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$ stable. On écrira :

↪ Pour $\dim X = 1$:

$$\xi_s^k \xrightarrow{\lambda = -1} \xi_i^k + \xi_s^{2k} \quad (1.29)$$

ou

$$\xi_i^k \xrightarrow{\lambda = -1} \xi_s^k + \xi_i^{2k} \quad (1.30)$$

↪ Pour $\dim X = 2$:

$$N_s^k \xrightarrow{\lambda = -1} N_i^k + N_s^{2k} \quad (1.31)$$

ou

$$N_i^k \xrightarrow{\lambda = -1} N_s^k + N_i^{2k} \quad (1.32)$$

Les cycles résultants sont confondus pour la valeur de bifurcation $\lambda = -1$.

Exemple 1.7.2. Transformation de Hénon

Soit le système dynamique discret $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, T)$ généré par la transformation T définie par :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n, \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

i) Pour $a > -\frac{(1-b)^2}{4}$, cette application a deux points fixes : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec :

$$x_1 = \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} > 0, \quad y_1 = bx_1$$

$$x_2 = \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} < 0, \quad y_2 = bx_2$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = DT(x, y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

J a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$$

On déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point col. L'autre point fixe est stable si :

$$a < \frac{3(1-b)^2}{4}$$

Si $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$, on a :

$$\lambda_1((x_1, y_1)) = b \text{ et } \lambda_2((x_1, y_1)) = -1$$

C'est une bifurcation de doublement de période et le début d'une cascade de doublements de périodes.

ii) Pour $a = -\frac{(1-b)^2}{4}$, il y a un point fixe (x^*, y^*) avec :

$$x^* = \frac{b-1}{2a}, \quad y^* = bx^*$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -b$$

On déduit que Le point $a = -\frac{(1-b)^2}{4}$ est un point de bifurcation noeud-col.

iii) Pour $a < -\frac{(1-b)^2}{4}$, il y a 0 point fixe.

1.7.3 Bifurcation de Neïmark-Hopf

Cette bifurcation est définie pour $\dim X \geq 2$ et a lieu lorsqu'un cycle d'ordre k stable a deux multiplicateurs complexes $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \rho \exp(i\theta)$, dont le module ρ passe par la valeur 1. Pour $\dim X = 2$ on a

$$F_s^k \overleftarrow{\rho=1} F_i^k + CFI_s^k \tag{1.33}$$

où F_s^k et F_i^k désignent deux cycles foyers d'ordre k , le premier stable et le second instable. CFI_s^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes stables, chacune d'elles entourant un foyer du cycle F_i^k .

Exemple 1.7.3. Transformation logistique retardée

Soit le système dynamique discret $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, F)$ généré par la transformation F définie par :

$$F : \begin{cases} x_{k+1} = rx_k(1 - y_k), & r > 0 \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Cette application a deux points fixes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 = y_1 = 0$ et $x_2 = y_2 = 1 - \frac{1}{r}$. La matrice jacobienne évaluée au point fixe (x_2, y_2) est :

$$DF(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle a pour équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda + r - 1 = 0$$

On en déduit les valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}.$$

Si $r > \frac{5}{4}$, les valeurs propres sont complexes avec $|\lambda_{1,2}|^2 = r - 1$. Pour $r = 2$, le point fixe (x_2, y_2) perd sa stabilité. Les valeurs propres sont alors $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ et le système présente une bifurcation de Neïmark-Hopf. La bifurcation est présentée sur la figure 1.7.3.



Figure (1.7.3) : Bifurcation de Neïmark-Hopf $\lambda = 2.01$.

1.7.4 Bifurcations Globales

Elles correspondent à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente. Il existe quatre types de bifurcations d'ensembles invariants :

1. Bifurcation de la courbe invariante fermée :
 - (a) Auto-intersections de la courbe invariante fermée (contact avec les lignes critiques). On reviendra en détail sur les lignes critiques au chap.2.
 - (b) Coexistence de cycle avec la courbe invariante fermée.
2. Bifurcation de la variété instable d'un point col (cycle col) :
 - (a) Auto-intersections de la variété instable (contact avec les lignes critiques).
 - (b) Cette bifurcation est toujours suivie par une bifurcation homocline.
3. Intersection de la courbe invariante fermée et la variété instable d'un point col.
4. Bifurcations de bassins d'attraction.

1.7.5 Bifurcations Homoclines

Soit x un point fixe répulsif de f .

Définition 1.7.5.1. [ABG02]₁

Un point y est appelé homocline à x si :

$$y \in W^s(x) \cap W^u(x).$$

Définition 1.7.5.2. *Orbite Homocline* [ABG02]₁

On appelle orbite homocline $\tau(y)$ associée au point homoclinique y appartenant à $U(x)$ (voisinage de x), l'ensemble des itérés successifs de y , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse de f_{loc}^{-1} dans $U(x)$.

$$\tau(y) = \{\dots, y_{-n}, \dots, y_{-2}, y_{-1}, y, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$$

où, $y_n = f^n(y) \rightarrow x$ et $y_{-n} = f_{loc}^{-1}(y) \rightarrow x$

Remarque.

Il existe une infinité d'orbites homocline associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demi-trajectoire positive, mais diffèrent par leur demi-trajectoire négative.

Définition 1.7.5.3. [ABG02]₁

Soient x_1 et x_2 deux points fixes répulsifs de f . Un point y est appelé *hétérocline* si :

$$y \in W^s(x_1) \cap W^u(x_2).$$

Définition 1.7.5.4. *Orbite Hétérocline* [ABG02]₁

Soient x_1 et x_2 deux points fixes répulsifs de f . Une orbite hétérocline de y est l'ensemble des itérés successifs de y , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse f_{loc}^{-1} de f dans $U(x_1)$.

$$\tau'(y) = \{\dots, y_{-n}, \dots, y_{-2}, y_{-1}, y, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$$

où, $y_n = f^n(y) \rightarrow x_1$ et $y_{-n} = f_{loc}^{-1}(y) \rightarrow x_2$

Définition 1.7.5.5. *Bifurcation Homocline*

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre λ , et soit x un point fixe répulsif de f . On dit qu'en $\lambda = \lambda^*$ une bifurcation homocline de x a lieu, si en traversant la valeur λ^* il y a apparition ou disparition d'une infinité d'orbites homoclines.

1.8 Chaos

Un rôle très important dans la théorie moderne des systèmes dynamiques est joué par les phénomènes chaotiques. Pour les systèmes dynamiques discrets, plusieurs notions ont été introduites pour caractériser ce type de comportement : l'entropie ou les exposants de Lyapunov (Ruelle, Takens, Lorenz...).

Dans l'espace de phase, le chaos donne lieu à des trajectoires appelées attracteur chaotiques. [Devaney, 1989] a proposé la définition suivante, couramment utilisée dans la littérature.

Définition 1.8.1. *Chaos*

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est **chaotique** si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) *Sensitivité aux conditions initiales* (voir déf. 1.6.1)
- 2) *Il est régulier* (voir déf. 1.2.2)
- 3) *Il est transitif* (voir déf. 1.1.5)

Devaney justifie sa définition en caractérisant un système dynamique chaotique par trois éléments :

1. Il est imprévisible. C'est la sensibilité aux conditions initiales : même si on bouge à peine les données initiales, au bout d'un certain nombre d'itérations, le système sera très différent. Bien entendu, un tel comportement rend extrêmement difficile (même pour un ordinateur) le calcul de $f^n(x)$ pour un x donné, puisque la moindre erreur d'arrondi a des conséquences catastrophiques.
2. Il est indécomposable. Cela signifie qu'on ne peut pas le partager en deux intervalles indépendants et stables. C'est, bien entendu, la transitivité qui interdit cela.
3. Il n'est pas aléatoire. En effet, il a des éléments de régularité, à savoir les points périodiques, qui sont partout denses.

Définition 1.8.2. *Chaos Expansif*

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est appelé **chaotique expansif** si et seulement si :

- 1) Il est transitif (voir déf. 1.1.5)
- 2) Il est régulier (voir déf. 1.2.2)
- 3) Il est expansif (voir déf. 1.6.2)

Le théorème suivant est énoncé dans ([D89]).

Théorème 1.8.3.

Soient (X, \mathbb{N}, f) , (Y, \mathbb{N}, g) deux systèmes dynamiques discrets tels que :

- 1) (X, \mathbb{N}, f) est chaotique.
- 2) (X, \mathbb{N}, f) est topologiquement conjugué à (Y, \mathbb{N}, g)

Alors, (Y, \mathbb{N}, g) est aussi chaotique.

Définition 1.8.4. *Attracteur Chaotique*

Un sous-ensemble de l'espace des phases est un attracteur chaotique si et seulement si c'est un attracteur contenant une orbite dense, présentant une sensibilité aux conditions initiales et possédant une structure fractale [XU06].

1.9 Exposants de Lyapunov

La sensibilité aux conditions initiales peut aussi être caractérisée par des coefficients appelés exposants de Lyapunov.

Définition 1.9.1.

Soit $(X \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret, avec f différentiable.

Soit $D(f(x_0))$ la matrice jacobienne de f en un point x_0 et notons par $D(f^m(x_0))$ la matrice jacobienne de la composée m fois de f au point x_0 .

$$D(f^m(x_0)) = \prod_{k=1}^{k=m} D(f(x_{m-k})) \tag{1.34}$$

où $x_k = f^k(x_0)$. Ecrivons les modules des valeurs propres de $D(f^m(x_0))$ par ordre décroissant :

$$j_1(m, x_0) \geq j_2(m, x_0) \geq \dots \geq j_n(m, x_0)$$

Les nombres de Lyapunov de la trajectoire $f(x_0, \mathbb{N})$ sont donnés par :

$$\sigma_i(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} j_i(m, x_0)^{\frac{1}{m}}, \quad i = 1, \dots, n \tag{1.35}$$

Les exposants de Lyapunov de la trajectoire issue du point x_0 sont donnés par :

$$\mu_i(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln j_i(m, x_0)}{m}, \quad i = 1, \dots, n \tag{1.36}$$

et on a :

$$\mu_1(x_0) \geq \mu_2(x_0) \geq \dots \geq \mu_n(x_0)$$

Définition 1.9.2. ([FOY83])

Un système dynamique discret $(X \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ est dit sensible aux conditions initiales s'il admet au moins un exposant de Lyapunov strictement positif.

Exemple 6. Transformation de Baker Généralisée

Soit le système dynamique discret $([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{N}, f)$ généré par la transformation f définie par :

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n & \text{si } y_n < \alpha \\ \frac{1}{2} + \lambda_b x_n & \text{si } y_n > \alpha \end{cases}, \quad y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} y_n & \text{si } y_n < \alpha \\ \frac{1}{1-\alpha} (y_n - \alpha) & \text{si } y_n > \alpha \end{cases}$$

avec $\alpha > 0, \lambda_a > 0, \lambda_b > 0$, tous les trois inférieurs ou égales à $\frac{1}{2}$, et $\lambda_a < \lambda_b$.

La matrice jacobienne de f au point $X = (x, y)$ est diagonale et dépend seulement de y , soit :

$$Df((x, y)) = \begin{pmatrix} \chi_1(y) & 0 \\ 0 & \chi_2(y) \end{pmatrix}$$

où

$$\chi_1(y) = \begin{cases} \lambda_a & \text{si } y < \alpha \\ \lambda_b & \text{si } y > \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } y < \alpha \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } y > \alpha \end{cases}$$

Les modules des valeurs propres de la matrice jacobienne $D(f^n(X_0)) = \prod_{k=1}^{k=n} D(f(X_{n-k}))$ sont $j_1(n, X_0)$ et $j_2(n, X_0)$, avec $j_1(n, X_0) > j_2(n, X_0)$, définie par :

$$j_1(n, X_0) = \prod_{k=1}^{k=n} \chi_2(y_{n-k})$$

$$j_2(n, X_0) = \prod_{k=1}^{k=n} \chi_1(y_{n-k})$$

Il en découle que les nombres de Lyapunov de la trajectoire issue du point $X_0 = (x_0, y_0)$ sont :

$$\sigma_1(X_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} j_1(n, X_0)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\chi_2(y_{n-1}) \cdot \chi_2(y_{n-2}) \cdot \chi_2(y_{n-3}) \cdots \chi_2(y_0))^{\frac{1}{n}}$$

$$\sigma_2(X_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} j_2(n, X_0)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\chi_1(y_{n-1}) \cdot \chi_1(y_{n-2}) \cdot \chi_1(y_{n-3}) \cdots \chi_1(y_0))^{\frac{1}{n}}$$

Par conséquent, les exposants de Lyapunov de la trajectoire issue du point $X_0 = (x_0, y_0)$ sont :

$$\begin{aligned} \mu_1(X_0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln j_1(n, X_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \chi_2(y_{n-k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_\alpha}{n} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{n_{1-\alpha}}{n} \ln \frac{1}{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2(X_0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln j_2(n, X_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \chi_1(y_{n-k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_\alpha}{n} \ln \lambda_a + \frac{n_{1-\alpha}}{n} \ln \lambda_b \right) \end{aligned}$$

n_α est le nombre de fois où la trajectoire est dans l'ensemble $\{(x, y) / y < \alpha\}$ et $n_{1-\alpha}$ est le nombre de fois où la trajectoire appartient à l'ensemble $\{(x, y) / y > \alpha\}$.

Ces nombres sont donnés par un résultat démontré dans [FOY83] et énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 1.9.1. ([FOY83])

Avec les notations précédemment utilisées, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_\alpha}{n} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_{1-\alpha}}{n} = 1 - \alpha$$

Ainsi, en utilisant le théorème 1.9.1 on obtient :

$$\mu_1 = \left(\alpha \ln \frac{1}{\alpha} + (1 - \alpha) \ln \frac{1}{1 - \alpha} \right) > 0$$

$$\mu_2 = \left(\alpha \ln \lambda_a + (1 - \alpha) \ln \lambda_b \right) < 0$$

Par suite, le système dynamique discret $([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{N}, f)$ est sensible aux conditions initiales.

1.10 La Section de Poincaré

Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie.

Considérons un système différentiel autonome défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

ou sous forme vectorielle $\dot{x} = f(x)$

Supposons que ce système ait une solution $x(x_0, t_0; t) = \varphi_t(x_0)$ de période T .

Définition 1.1. On appelle section de poincaré, une hypersurface Σ de dimension $n - 1$, transverse au champ de vecteur f en x_0 , c'est-à-dire que le produit scalaire $\langle f(x_0), n(x_0) \rangle \neq 0$, où $n(x_0)$ est la normale à Σ en x_0 .

Soit $V \subseteq \Sigma$ un voisinage de x_0 , on appelle l'application de premier retour de poincaré,

l'application $P : V \longrightarrow \Sigma$ est définie par : $x_1 = \varphi_\tau(x)$, où $\tau = \tau(x)$ et le temps mis par la trajectoire avec point initial x pour retourner à Σ pour la première fois. Ce temps est proche de T et par construction on a $\tau(x_0) = T$ et $P(x_0) = x_0$

L'application de premier retour de poincaré est donc un cas particulier des applications itérées. La stabilité du point fixe x_0 , donc de la solution périodique, est décrite au premier ordre par la matrice jacobienne $M = DP(x_0)$.

Théorème 1.10.1. 1. Si toutes les valeurs propres de M ont leur module < 1 , alors le point fixe x_0 est attractif.

2. Si une valeur propre de M a son module > 1 , alors le point fixe x_0 est répulsif.

3. Si M n'a pas de valeur propre avec module > 1 mais au moins une des valeurs propres a un module $= 1$, alors le point fixe x_0 est indifférent (stable ou instable).

Exemple 1.10.1. Considérons le système suivant [R90] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \mu x - \mu x \sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - \mu y \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

En passant aux coordonnées polaire, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système devient :

$$\frac{dr}{dt} = \mu r(1 - r), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

Par un calcul élémentaire, on obtient la solution :

$$\phi_t(r_0, \theta_0) = \left(\frac{r_0}{r_0 - (r_0 - 1)e^{-\mu t}}, t + \theta_0 \right)$$

Le cercle $r = 1$ est un cycle limite de période 2π . Comme section de poincaré, nous prenons la demi-droite Σ d'équation $y = 0$, $x > 0$ (ou $\theta = 0$). L'application de poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est définie par :

$$P(x) = \frac{x}{x - (x - 1)e^{-2\pi\mu}}$$

La linéarisation de P au point $x_0 = 1$ est :

$$DP(x_0 = 1) = \frac{dP}{dx}(x_0 = 1) = e^{-2\pi\mu}$$

On en déduit :

1. Si $\mu > 0$, le point fixe x_0 est stable, donc la solution périodique est aussi stable.
2. Si $\mu < 0$, le point fixe x_0 est instable, donc la solution périodique est aussi instable.
3. Si $\mu = 0$, le point fixe x_0 est stable (la solution du système est un cercle).

1.11 Les Fractales

Fractale est un mot inventé par Benoît Mandelbrot en 1974 sur la racine latine fractus qui signifie brisé. Fractal était au départ un adjectif : les objets fractals. On nomme fractale (ou fractal, nom masculin beaucoup moins usité que le féminin fractale) une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques. Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

1. Il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes.
2. Il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels.
3. Il est exactement ou statistiquement autosimilaire c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties. En d'autres termes, si nous agrandissons une petite partie d'une forme fractale, nous retrouvons une structure similaire à la structure globale. C'est une métonymie d'une partie pour le tout.

1.12 Conclusion

Les concepts introduits dans ce chapitre, constituent des notions de base indispensables à l'étude des systèmes dynamiques discrets.

Nous avons vu que les singularités sont utilisées pour cerner la structure des solutions, les exposants de Lyapunov nous renseignent sur les propriétés de stabilité locale d'un attracteur, la notion de variété stable permet de déterminer la frontière de bassin d'attraction et la variété instable détermine l'aire absorbante mixte. On a aussi défini quelques bifurcations courantes : bifurcation noeud-col, bifurcation doublement de période, et bifurcation Neïmark-Hopf. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition du chaos.

2

Caractérisation des Lignes Critiques dans le Plan de Phases

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les principales notions de lignes critiques et feuilletage du plan des phases pour les transformations non inversibles, ainsi que leurs propriétés que l'on utilisera dans les chapitres ultérieurs. Plusieurs travaux ont montré l'importance des lignes critiques dans les bifurcations des bassins (Mira et Gumowski (MG[80])), Gardini([G91]), etc).

2.1 Transformation Ponctuelle

Soit la récurrence, ou transformation ponctuelle T sous la forme explicite :

$$X_{n+1} = T_\xi(X_n) = F(X_n, \xi) , \quad \xi \in \mathbb{R}^p , \quad X_n \in \mathbb{R}^q \quad (2.1)$$

ou , $F \in C^r$ $r \geq 1$, par rapport à la variable X et au vecteur paramètre ξ . On dit que X_{n+1} est le conséquent de rang un de X_n , et X_n est l'antécédent de rang un de X_{n+1} . On note par $F^{-n}(X)$ l'ensemble des antécédents de rang n de X . Lorsque la transformation T admet une inverse T^{-1} unique, (2.1) est dit inversible (T difféomorphisme). S'il existe des points de l'espace des phases qui n'ont pas d'antécédents de rang un ou qui en ont plusieurs,(2.1) est dite non inversible (T endomorphisme) [GM80]. Si la récurrence est non inversible, on peut parler de notions de point critique, ligne critique, courbe critique ou variété critique.

2.2 Courbes Critiques

Nous allons introduire maintenant la notion de Courbe Critique qui joue un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques discrets. La non inversibilité des applications définissant des systèmes dynamiques est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements compliqués ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications est caractérisée par la présence de singularités appelées **courbes critiques**. Ce type de singularités, introduit pour la première fois par **Mira** en 1964, est la généralisation de la notion de points critiques dans le cas unidimensionnel. Les courbes critiques constituent un outil fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires : elles interviennent dans la détermination des aires absorbantes et chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et leurs bassins d'attraction.

2.2.1 Définitions et Propriétés Générales

Définitions 2.2.1. [RBC98], [GM80]

Soit T une application non inversible de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . On appelle courbe critique de l'application T , le lieu géométrique LC (abrégé de Ligne Critique) des points de \mathbb{R}^n , qui ont au moins deux antécédents de premier rang confondus.

Autrement dit :

$$LC = \{x' \in \mathbb{R}^n / T(x) = x' \text{ admet au moins 2 antécédents confondus}\}$$

Lorsque l'application T est différentiable, l'ensemble LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n en lesquels le Jacobien de T est égal à zéro.

Autrement dit :

$$LC_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \det(DT(x)) = 0\}$$

Propriétés 2.2.1. [ABG02]₂

1) *L'ensemble LC_{-1} est un sous ensemble de dimension $n-1$ de \mathbb{R}^n , avec par définition*

$$T(LC_{-1}) = LC$$

2) *La courbe LC_{-1} est l'analogue bidimensionnel de l'ensemble des points pour lesquels une application différentiable unidimensionnel admet des extrêmes locaux.*

3) Dans le cas où l'application T n'est pas différentiable, la courbe de non différentiabilité joue généralement le rôle de LC_{-1} .

4) On appelle courbe critique de rang k , l'image de rang k de LC .

$$LC_k = T^k(LC)$$

5) Une courbe critique peut être constituée d'une ou de plusieurs branches. Ces branches séparent le plan en régions ouvertes notées Z_i , où tous les points d'une même région, ont le même nombre d'antécédents de premier rang; et on a :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \leq n} \overline{Z_i}$$

Exemple 1

Soit $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret généré par $f(x) = x' = x^2 + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ soit :

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

Le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{x \in \mathbb{R} / f'(x) = 0\} \\ &= \left\{-\frac{\lambda}{2}\right\} \\ &= C_{-1}(\text{notation}) \end{aligned}$$

Les lignes critiques sont données par :

$$LC = f(LC_{-1}) = \left\{-\frac{\lambda^2}{4}\right\} = C$$

La récurrence définie par f^{-1} qui s'écrit :

$$x_n = \frac{1}{2}(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4x_{n+1}}) \tag{2.3}$$

admet deux déterminations. Pour des points initiaux $x_0 / x_0 > C$, il existe deux antécédents M_{-1}^1, M_{-1}^2 , donnés par (2.3).

Pour $x_0 < C$, les points x_0 n'ont pas d'antécédents.

Par suite, l'espace des phases est séparé en deux régions ouvertes Z_0, Z_2 définie par :

$$Z_0 = \{x \in \mathbb{R} / x < C\}, \quad Z_2 = \{x \in \mathbb{R} / x > C\}$$

Voire la figure (2.2.1).

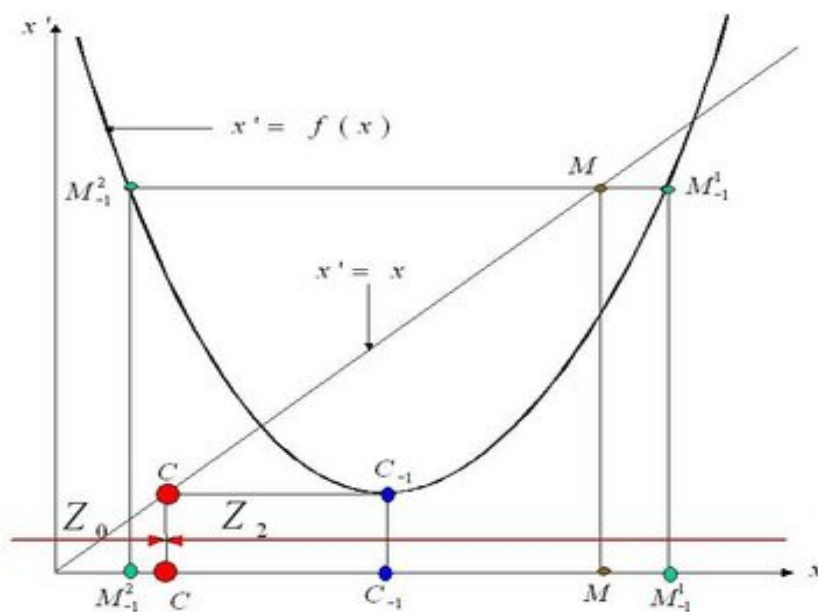


Figure (2.2.1) : Plan de phase ($Z_0 - Z_2$).

2.2.2 Propriétés des trajectoires ([B84])

On considère une récurrence réelle du second ordre à inverse non unique :

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n, \beta), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n, \beta) \tag{2.4}$$

β un paramètre réel, f et g des fonctions satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :

- i) f et g sont continues, au moins une fois différentiable par-rapport à leurs arguments.
- ii) f et g sont des fonctions continues, linéaire par morceaux.

Proposition.2.2.3.1. [B84]

Sous les hypothèses i), toute trajectoire qui traverse LC_{i-m} en un point a_o , est tangente à LC_i en $a_m = T^m(a_o) = (f^m(a_o), g^m(a_o))$ et est située au moins dans le voisinage de a_m du côté de LC_i où le nombre d'antécédents de rang m est le plus grand; LC_{i-m} représentant l'union des antécédents de rang m de LC_i .

Proposition.2.2.3.2. [B84]

Le conséquent de rang un d'un point d'intersection de LC_{-1} et LC_j , $j \in \mathbb{N}$, est un point de tangence entre LC et LC_{j+1} ; LC_{j+1} étant situé au moins dans le voisinage du point de contact du côté de LC où le nombre d'antécédents de rang un est le plus grand.

Proposition.2.2.3.3. [B84]

La suite des conséquents de rang v , $v \in \mathbb{N}^$ d'un point d'intersection de LC_{-1} et LC_j , $j \in \mathbb{N}$, est une suite de points de tangence entre LC_{v-1} et LC_{v+j} ; LC_{v+j} étant situé au moins dans le voisinage du point de contact du côté de LC_{v-1} où le nombre d'antécédents de rang v est le plus grand.*

2.3 Classification des Transformations Non Inversibles(TNI)

2.3.1 Feuilletage du plan des phases

Pour la recherche des antécédents de rang un de tout point M pris dans l'une quelconque des régions limitées par la ligne critique, le plan (x_n, y_n) peut être considéré comme la superposition d'autant de feuillets qu'il y a d'antécédents de rang un ; ces feuillets étant reliés entre eux par des *lignes de pliage* qui correspondent dans le plan (x_n, y_n) à la ligne critique de T ([B84]).

La structure des antécédents d'un ensemble de points et en particulier leurs positions relatives sont obtenues, après avoir repéré cet ensemble sur les divers feuillets, en *dépliant* ces feuillets sur un plan, la structure obtenue correspond qualitativement à celle qui découle, dans le plan (x_n, y_n) d'une recherche des antécédents de l'ensemble de points par la récurrence inverse ([B84]).

Sur le plan déplié, les lignes de pliage deviennent les antécédents de rang un de la ligne critique.

Ces résultats établis pour une transformation T se généralisent pour une transformation T^m , en remplaçant la recherche des antécédents de rang un par celle des antécédents de rang m . Un antécédent de rang m d'un point M_n , noté M_{n-m} , vérifie $T^m(M_{n-m}) = M_n$ ([B84]).

La notion de feuilletage du plan des phases est fondamentale pour la compréhension des propriétés relatives aux transformations non inversibles (TNI). Ces propriétés concernent tout particulièrement les "attracteurs chaotiques", les bassins d'attractions, les ensembles invariants et leurs bifurcations. Le feuilletage repose sur l'existence de singularités *ligne critique* pour la dimension 2 ([M97]).

Elles sont classées dans un ordre de complexité croissante avec le symbolisme suivant :

▷ Plan de phase de type $(Z_0 - Z_2)$

On distingue sur la courbe LC une seule branche séparant le plan \mathbb{R}^2 en deux régions. Une région Z_0 pour laquelle les points (x_{n+1}, y_{n+1}) n'ont pas d'antécédents. Une région

Z_2 pour laquelle les points (x_{n+1}, y_{n+1}) ont deux antécédents de rang un.

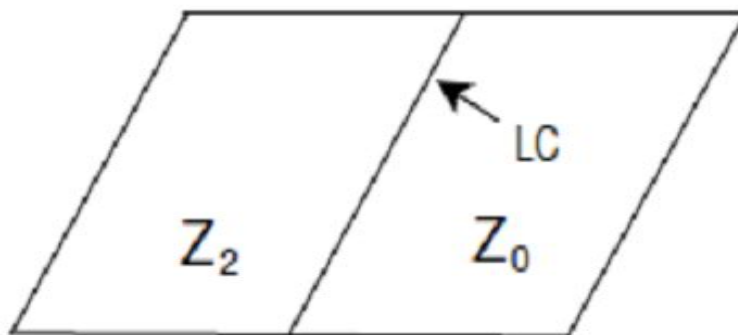


Figure (2.3.1) : Plan de phase $(Z_0 - Z_2)$.

Exemple 2.

Soit le système dynamique généré par $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = y - \lambda x + x^2, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

T est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_0 - Z_2$. En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - \lambda = 0\} \end{aligned}$$

Les lignes critiques sont donc :

$$LC = T(LC_{-1}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x - \frac{\lambda^2}{4}\}$$

La récurrence définie par $T_{1,2}^{-1}$ qui s'écrit :

$$T_{1,2}^{-1} : \begin{cases} x_t = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + y_{t+1} - x_{t+1}} \\ y_t = x_{t+1}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

comporte deux déterminations. Pour des points initiaux $(x_0, y_0) / y_0 > x_0 - \frac{\lambda^2}{4}$, il existe deux antécédents M_{-1}^1, M_{-1}^2 , donnés par $T_{1,2}^{-1}$.

Pour $y_0 < x_0 - \frac{\lambda^2}{4}$, les points (x_0, y_0) n'ont pas d'antécédents.

Par suite, l'espaces des phases est séparé en deux régions ouvertes Z_0, Z_2 définie par :

$$Z_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x - \frac{\lambda^2}{4}\}, \quad Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x - \frac{\lambda^2}{4}\}$$

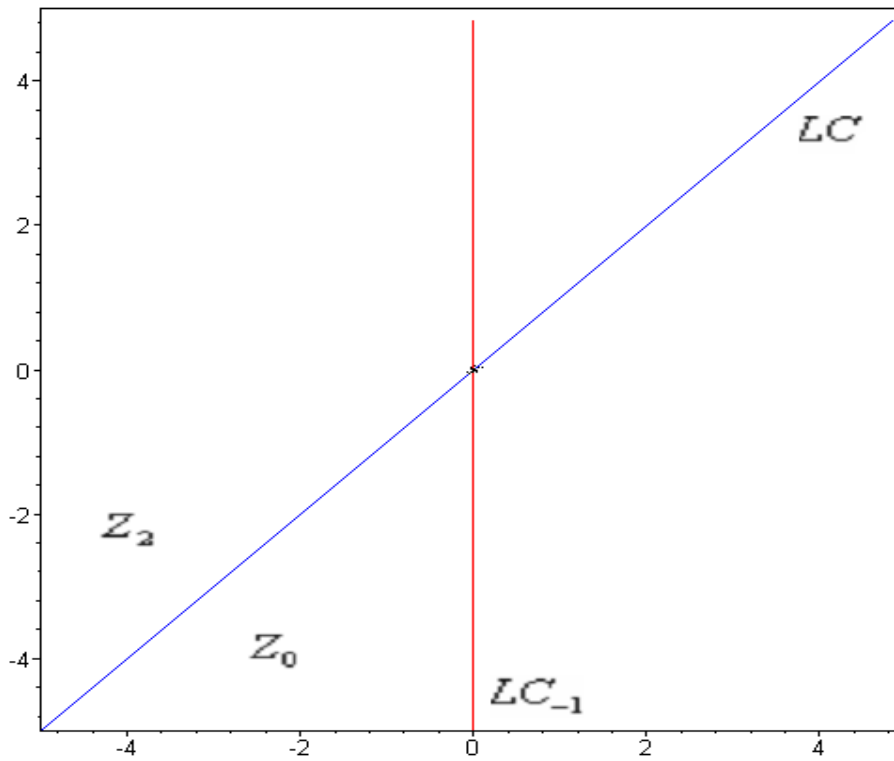


Figure (2.3.2) : Les Lignes critiques pour $\lambda = 0$

▷ **Plan de phase de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$**

La courbe LC est discontinue. Elle est formée de deux segments disjoints L et L' divisant le plan \mathbb{R}^2 en trois régions. Deux régions Z_1^1 et Z_1^2 avec un seul antécédent de rang un, est une troisième régions Z_3 pour laquelle, tout point possède trois antécédents distinctes de rang un.

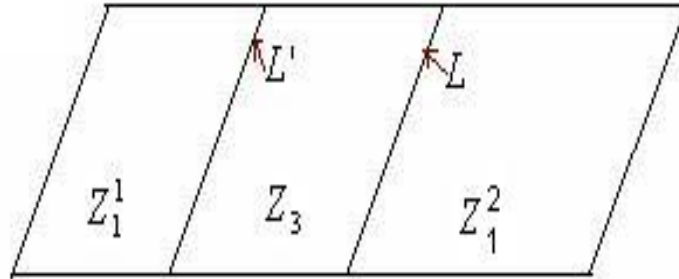


Figure (2.3.3) : Plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) d'une TNI $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$.

Exemple 3.

Soit le système dynamique généré par $H : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$H : \begin{cases} x' = x + y - x^3 \\ y' = y - x \end{cases}$$

H est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$.

En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\} \\ &= L_{-1} \cup L'_{-1} \end{aligned}$$

Par application de H , on obtient la représentation paramétrique de LC

$$LC = H(LC_{-1}) = \left(t, t \pm \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right) = L \cup L'$$

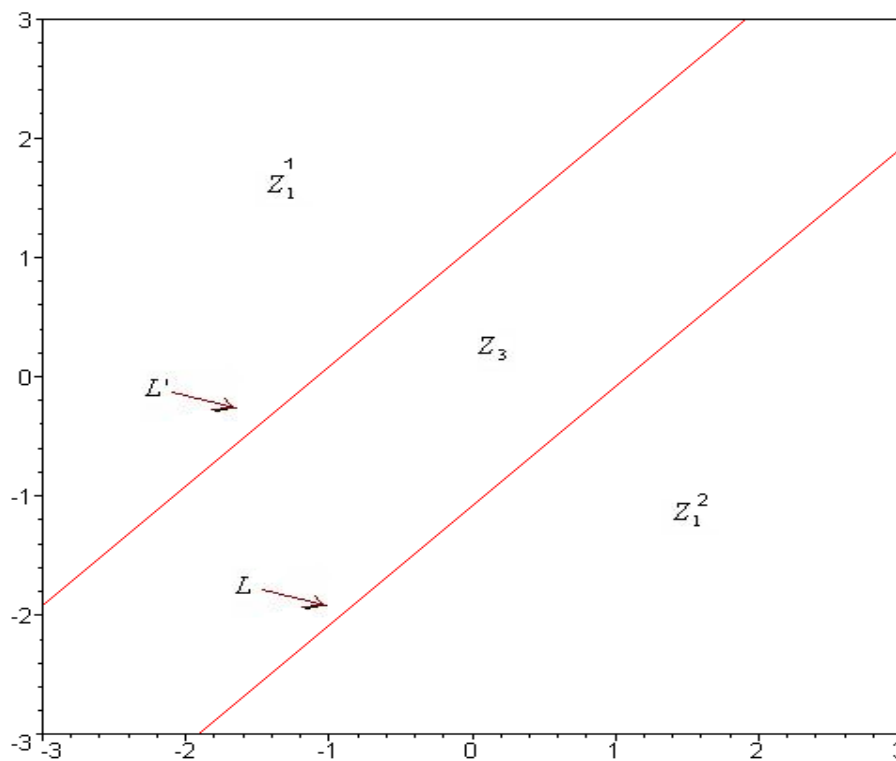


Figure (2.3.4) : Les Lignes critiques de H

▷ **Plan de phase de type** ($Z_1 < Z_3$)

LC possède un point cuspidal C (ou de rebroussement) créant un "cap" dans Z_3 pénétrant dans Z_1 .

$$LC = L \cup L' \quad \text{et} \quad L \cap L' = \{C\}$$

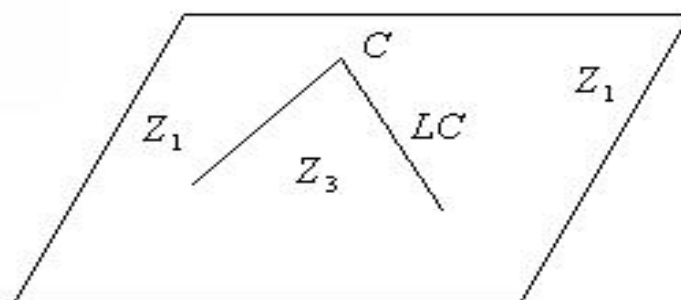


Figure (2.3.5) : Plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) d'une TNI ($Z_1 < Z_3$).

Exemple 4.

Soit le système dynamique généré par $F : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$F : \begin{cases} x' = y(1 - 2x) \\ y' = y - x(1 + 2x) \end{cases}$$

F est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_1 < Z_3$.

En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x + 4x^2 = \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{2}(1 + x - 4x^2)\} \end{aligned}$$

Par application de F , on obtient la représentation paramétrique de LC

$$LC = F(LC_{-1}) = (0.5(1 - 2t)(1 + 2t - 8t^2), 0.5(1 - 12t^2)) = L \cup L'$$

Le point cusp est :

$$L \cap L' = \{C\} = \{(0.5, 0.5)\}$$

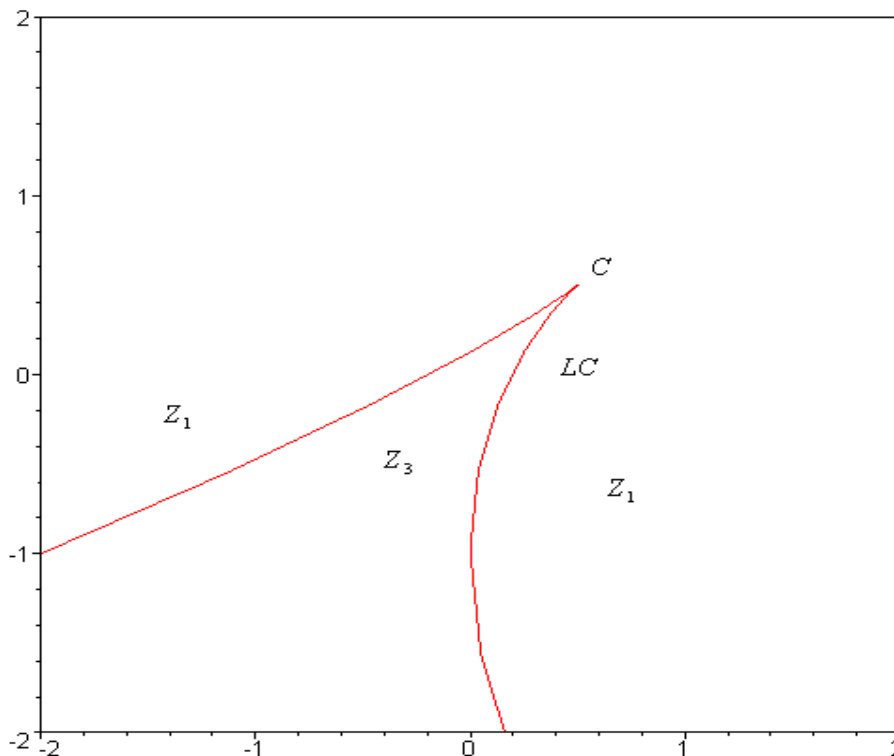


Figure (2.3.6) : Les Lignes critiques de F

▷ **Plan de phase de type** $(Z_1 < Z_3 >)$

LC possède deux points cuspidaux C et C' formant une courbe fermée en forme de "lèvre".

$$LC = L \cup L' \quad \text{et} \quad L \cap L' = \{C, C'\}$$

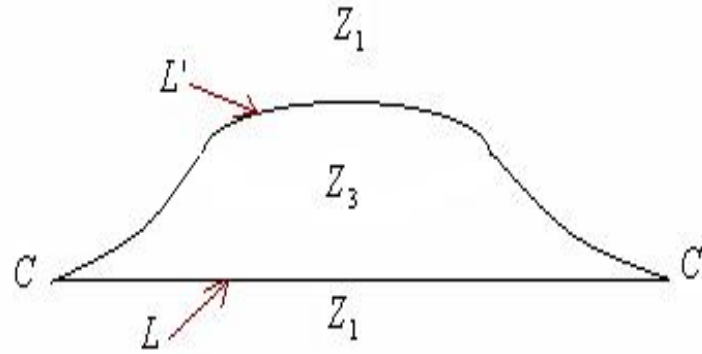


Figure (2.3.4) : Plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) d'une TNI $(Z_1 < Z_3 >)$.

Exemple 5.

Soit le système dynamique généré par $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = 1 - \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + x \end{cases}$$

T est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_1 < Z_3 >$.
En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 1 = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \pm\sqrt{|1 - x^2|}\} \end{aligned}$$

Par application de T , on obtient la représentation paramétrique de LC

$$LC = T(LC_{-1}) = \left(\pm\sqrt{|1 - t^2|}, -\frac{1}{3}t^3 + (1 + t)(1 - t(1 - t)) \right) = L \cup L'$$

Les points cusps sont :

$$L \cap L' = \{C, C'\} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

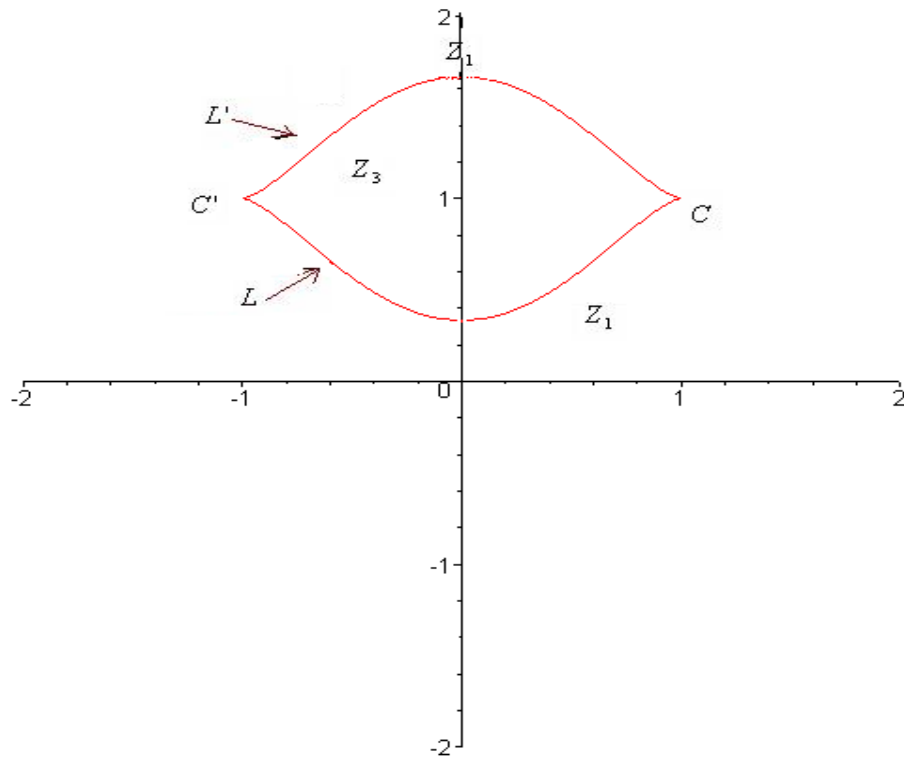


Figure (2.3.7) : Les Lignes critiques de T

▷ **Plan de phase de type** ($Z_0 - Z_2 \ll Z_4$)

LC possède deux points cuspidaux créant deux "caps" dans la région Z_4 qui pénètre dans la région Z_2 en forme de "queue d'aronde".

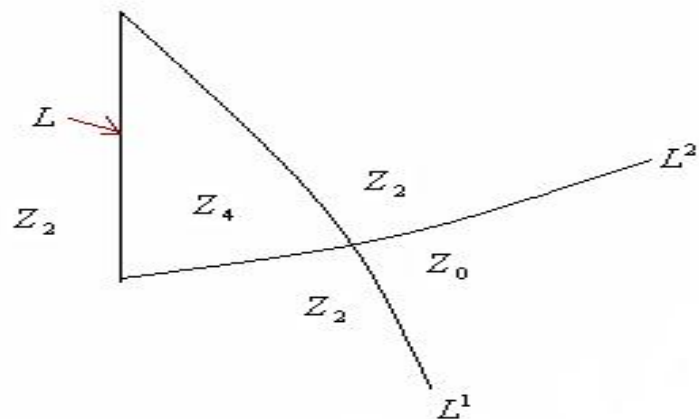


Figure (2.3.5) : Plan de phase (x_{n+1}, y_{n+1}) d'une TNI ($Z_0 - Z_2 \ll Z_4$).

Exemple 6.

Soit le système dynamique généré par $G : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$G : \begin{cases} x' = y(1 - 2x) \\ y' = y + 2x^3 \end{cases}$$

G est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_0 - Z_2 \ll Z_4$.
En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y + 3x^2 - 6x^3 = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3x^2(2x - 1)\} \end{aligned}$$

Par application de G , on obtient la représentation paramétrique de LC

$$LC = G(LC_{-1}) = (3t^2(1 - 2t)(-1 + 2t), 3t^2(2t - 1) + 2t^3)$$

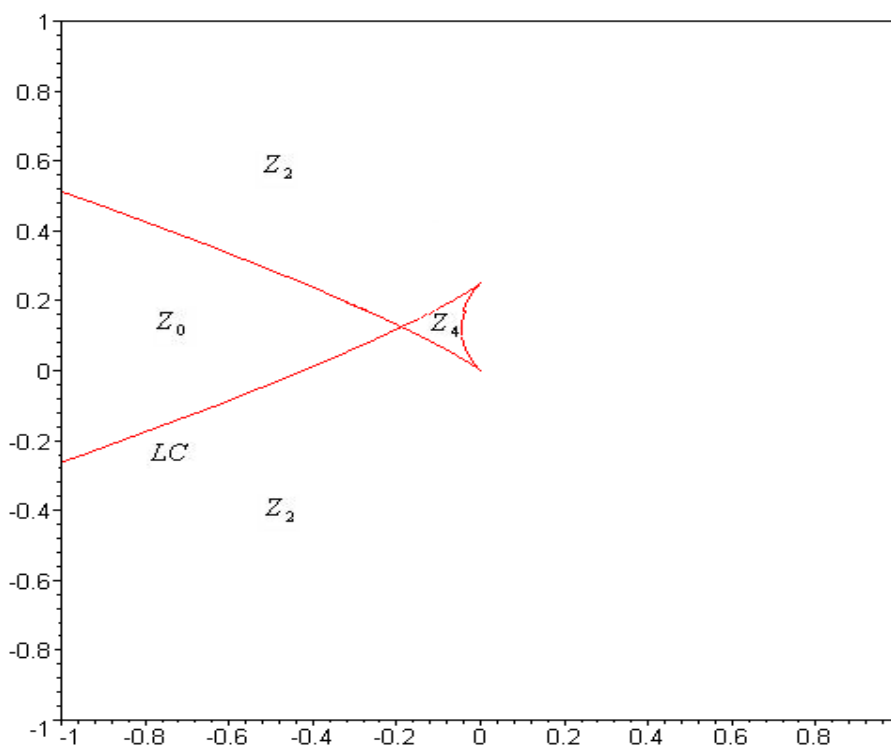


Figure (2.3.8) : Les Lignes critiques de G

Avec ce symbolisme, il est possible de définir des TNI de complexité supérieure de type :

$$(Z_0 - Z_2 < Z_4 >), (Z_1 - Z_3 < Z_5 - Z_3 > Z_1) \text{ etc. (réf. [C01]).}$$

2.4 Conclusion.

Nous avons au cours de ce chapitre présenté la notion de feuilletage du plan de phase. Le feuilletage permet d'analyser les phénomènes spécifiques aux transformations non inversibles (*TNI*) concernant les ensembles invariants et leurs bifurcations.

L'objet du chapitre suivant consiste à l'étude des bifurcations concernant les courbes invariantes fermées et les variétés instables issues d'un point col. Nous allons montrer que ces bifurcations reposent essentiellement sur leurs interaction avec les lignes critiques.

3

Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée d'un Endomorphisme Bidimensionnel de Type $(Z_0 - Z_2)$

Dans ce chapitre, on introduit la notion de bifurcation d'une courbe invariante fermée. Cette bifurcation est importante car elle est responsable de la transformation de cette courbe en un attracteur chaotique. ([ABD05], [M97]).

3.1 Bifurcation d'une Courbe Invariante Fermée

Soit Γ une courbe invariante fermée née de la déstabilisation d'un point fixe Q de type foyer via une bifurcation de Hopf-Neimark. La courbe est telle que $\Gamma \subset R_2$ avant la bifurcation étudiée, c'est-à-dire que $\Gamma \cap LC_{-1} = \emptyset$.

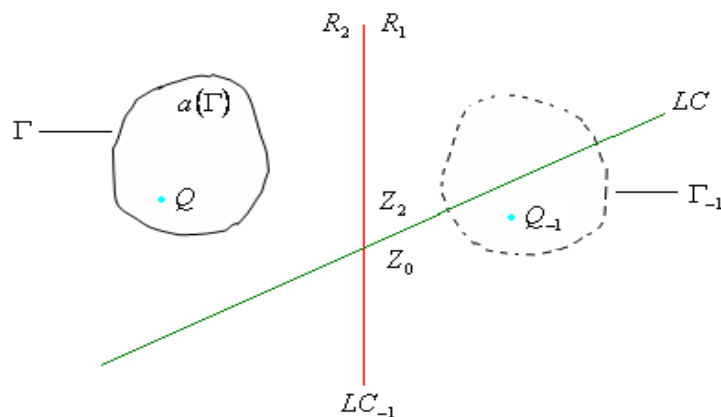


Figure (3.1.a)

Avec cette hypothèse, Γ satisfait les propriétés suivantes :

Propriété 3.1.1. ([M97])

1. L'aire intérieure délimitée par Γ notée $a(\Gamma)$ avec $Q \in a(\Gamma)$ est invariante par itération directe ($T(a(\Gamma)) = a(\Gamma)$)
2. Γ et son antécédent de rang un $T_1^{-1}(\Gamma) = \Gamma_{-1}$ distinct d'elle-même ne se coupent pas, c'est-à-dire que $\Gamma \cap \Gamma_{-1} = \emptyset$ avec $T^{-1}(\Gamma) = \Gamma \cap \Gamma_{-1}$.
3. Il existe un voisinage $V \subset a(\Gamma)$ de T donné uniquement par T_2^{-1} . C'est la même détermination qui définit la restriction T_Γ de T à Γ . Ceci caractérise l'invariance de $a(\Gamma)$ et de Γ par itération inverse.
4. Il existe un voisinage $U(\Gamma)$ de Γ pour lequel T est à l'inverse unique définie par $T_2^{-1} : U \rightarrow U$. Ceci caractérise l'invariance locale par itération inverse.

3.1.1 Bifurcation $\langle \lambda = \tilde{\lambda} \rangle$ intersection avec LC_{-1}

Cette bifurcation apparaît lorsque Γ entre en contact avec LC_{-1} en un point $u_0 = v_0$ telle que :

$$\Gamma \cap LC_{-1} = \{u_0\} = \{v_0\}$$

L'image $u_1 = v_1$ de $u_0 = v_0$ par T est un point de contact entre Γ et LC_{-1} .

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \tilde{\lambda} + \epsilon$ on a :

$$\Gamma \cap LC_{-1} = \{u_0, v_0\} \text{ et } \Gamma \cap R_1 \neq \emptyset$$

Cette intersection est responsable du changement de la forme de Γ car les itérés de rang n

du couple $\{u_0, v_0\}$ notés $\{u_n, v_n\}$ sont des points de contact non transversaux (tangentiels dans le cas différentiable) entre Γ et LC_m , ce qui signifierait dans le cas contraire qu'un point de Z_0 possède un antécédent.

Cette bifurcation crée des oscillations de Γ le long des LC_m .

Ceci s'explique également par le fait que Γ passe d'un feuillet à un autre lorsqu'elle entre en contact avec LC .

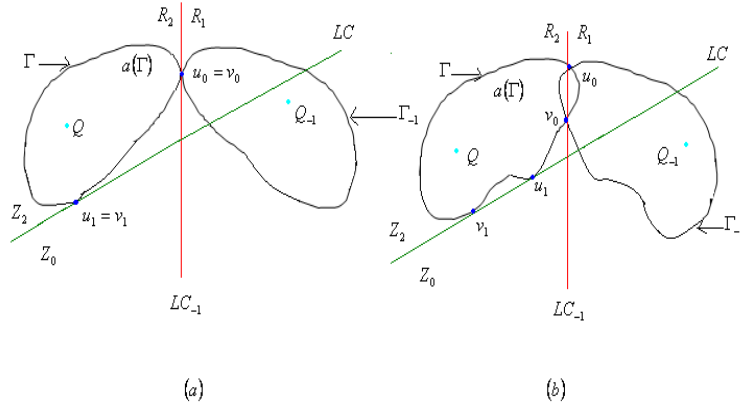


Figure (3.1.b)

Lorsque $\Gamma \cap R_1 \neq \emptyset$ et $\Gamma \cap LC_{-1} \neq \emptyset$, les propriétés deviennent :

Propriété 3.1.2. ([M97])

1. L'aire $a(\Gamma)$ n'est plus invariante par T , (ie, $T(a(\Gamma)) \neq a(\Gamma)$).
2. Γ et Γ^{-1} s'intersectent au moins en deux points u_0 et v_0 sur LC_{-1} . La partie $\Gamma \in R_1$ crée une oscillation de Γ le long de LC par itération directe de T .
3. L'inverse de la restriction T_Γ de T à Γ est définie à présent par les deux déterminations inverses T_1^{-1} et T_2^{-1} suivant la partie de Γ que l'on considère. Ceci caractérise la non invariance de Γ par itération inverse.
4. Soit U_Γ un voisinage de Γ . T n'est plus à inverse unique de $U \rightarrow U$ mais définie par les deux détermination T_1^{-1} et T_2^{-1} . Ceci caractérise la non invariance locale de Γ par itération inverse.

3.2 Interaction d'un Arc de Courbe avec les Lignes Critiques

Considérons un arc de courbe α_0 intersectant LC_{-1} en un point A_0 en passant de la région R_1 à la région R_2 , le sens étant relatif à une paramétrisation de α_0 (fig 3.2.1). (Réf [MS05], [M97])

Propriétés 3.2. ([M97])

1. La tangente à cet arc en A_0 fait un angle Φ par rapport à LC_{-1} .
2. L'image de α_0 par T noté α_1 est alors tangent à LC en $A_1 = T(A_0)$, ceci étant dû au pliage du plan de phase le long de LC .
3. La transformation T étant non inversible et de type $(Z_0 - Z_2)$, α_1 possède deux antécédents de rang un : l'arc α_0 lui-même et un second arc noté α'_0 traversant LC_{-1} en A_0 de telle sorte que $A_0 = \alpha_0 \cap \alpha'_0 \in LC_{-1}$ et dont la tangente en A_0 fait un angle $\Phi' \neq \Phi$ avec LC_{-1} on suppose que les arcs α_0 et α'_0 ne se coupent qu'en A_0 .

En considérant α_1 comme constitué de deux branches α_1^1 et α_1^2 situées de part et d'autre du point A_1 de tangence à LC , on a les relations suivantes :

$$\alpha_0 \subset R_1 = T_1^{-1}(\alpha_1^1) \text{ et } \alpha_0 \subset R_2 = T_2^{-1}(\alpha_1^2) \tag{2.4}$$

$$\alpha'_0 \subset R_2 = T_2^{-1}(\alpha_1^1) \text{ et } \alpha'_0 \subset R_1 = T_1^{-1}(\alpha_1^2) \tag{2.5}$$

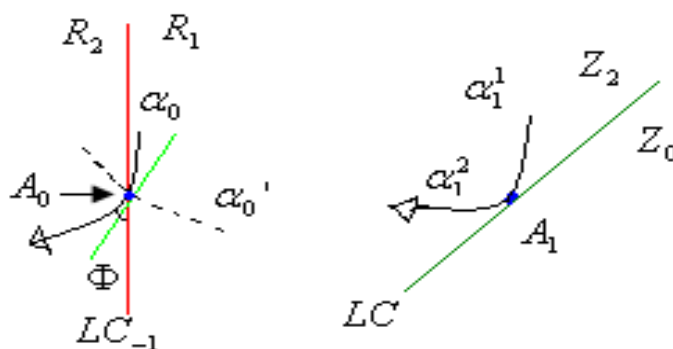


Figure (3.2.1) : Interaction d'un arc α_0 et son image α_1 avec LC_{-1} et LC .

Proposition 3.2 ([M97])

La transformation notée T_l issue de la linéarisation de T en tout point de LC_{-1} , en particulier en A_0 , possède toujours une valeur propre égale à zéro.

Preuve.

En effet, le déterminant $\det(T_l - sI)$ s'écrit :

$$\det(T_l - sI) = s^2 - s \operatorname{tr}(T_l) + \Delta \tag{2.6}$$

où I est la matrice identité, tr représente la trace et Δ est le déterminant de T_l .
 Or, par définition, le déterminant Δ est nul sur LC_{-1} . (lieu des points de deux antécédents de rang un confondus pour le cas différentiable). Par conséquent, (2.6) devient :

$$\det(T_l - sI) = s^2 - s \operatorname{tr}(T_l) = s(s - \operatorname{tr}(T_l)) \tag{2.7}$$

le déterminant s'annule toujours pour la valeur propre $s = 0$. On note v_0 le vecteur propre associé. Faisons subir à α_0 une rotation en faisant croître la valeur de l'angle Φ . Il existe une valeur particulière de Φ pour laquelle, la tangente en A_0 de α_0 fait un angle Φ_0 par rapport à LC_{-1} , angle du vecteur propre v_0 et ceci pour le paramètre $\lambda = \tilde{\lambda}$.

$$\Phi = \Phi_0 \tag{2.8}$$

La tangente devient alors colinéaire au vecteur propre v_0 .

Pour cette situation, les valeurs des dérivées premières, par rapport aux variables x et y de la transformation bidimensionnelle, de la paramétrisation de l'arc α_1 s'annulent, donnant des condition nécessaires d'un point cuspidal en A_1 (fig 3.2.2.a).

On montre que le second antécédent de α_1 noté α'_0 est également colinéaire à v_0 . Cette situation est une bifurcation pouvant donner naissance à des points d'auto-intersections.

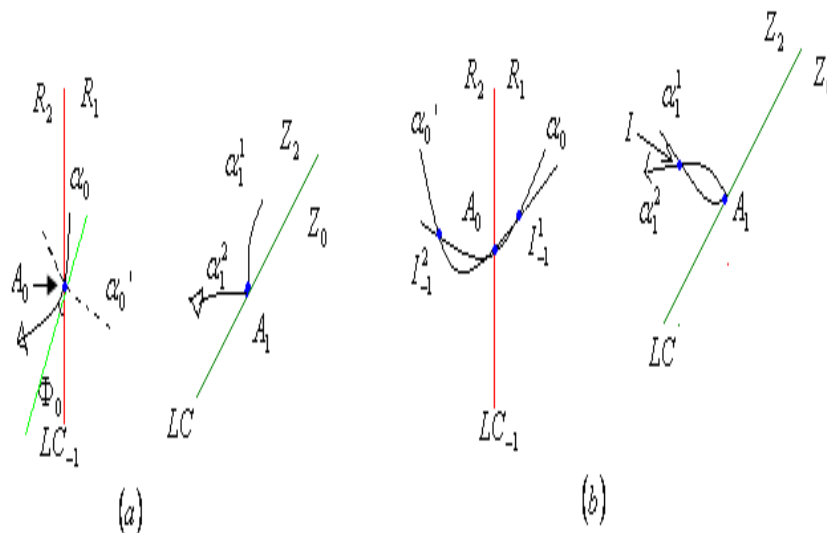


Figure (3.2.2) : (a) Bifurcation créant un point cuspidal sur LC en A_1 pour α_1
 (b) Situation après la bifurcation.
 Apparition d'une auto-intersection pour α_1 créant une boucle.

En effet, pour $\Phi > \Phi_0$, le changement de situation représenté sur la figure (3.2.2.b) intervient. Les arcs α_0 et α'_0 sont tels qu'ils possèdent à présent des points d'intersections autres que A_0 en dehors de LC_{-1} notés I_{-1}^1 et I_{-1}^2 , antécédents de rang un du point I vérifiant $T_1^{-1}(I) = I_{-1}^1$ et $T_2^{-1}(I) = I_{-1}^2$ on a :

$$T(\alpha_0 \subset R_2) = \alpha_1^1 \text{ avec } A_1 = T(A_0) \in \alpha_1^1 \text{ et } I = T(I_{-1}^1) = T(I_{-1}^2) \in \alpha_1^1 \quad (2.9)$$

$$T(\alpha'_0 \subset R_2) = \alpha_1^2 \text{ avec } A_1 = T(A_0) \in \alpha_1^2 \text{ et } I = T(I_{-1}^1) = T(I_{-1}^2) \in \alpha_1^2 \quad (2.10)$$

Les relations (2.9) et (2.10) nous permettent d'écrire :

$$\alpha_1^1 \cap \alpha_1^2 = \{I, A_1\} \quad (2.11)$$

avec $\alpha_1 = \alpha_1^1 \cup \alpha_1^2$. L'arc α_1 possède une auto-intersection. Un raisonnement similaire pour la région R_1 aurait conduit au même résultat.

3.3 Caractérisation de la Variété Instable $W^u(p)$

En supposant qu'il existe un point a_0 , tel que $a_0 = LC \cap LC_{-1}$, on a alors $a_1 = LC_1 \cap LC$. Sur la courbe LC_1 , on distingue deux branches telles que $LC_1 = L_1^1 \cup L_1^2$ et $A_1 = L_1^1 \cap L_1^2$. On considère le cas où T possède deux points fixes; un point col p et un point Q de type noeud ou foyer. Le col p est situé dans la région R_1 alors que Q est dans R_2 . Le point noté Q_{-1} est l'antécédent de rang 1 de Q autre que lui-même et $Q_{-1} \in R_1$. Le point noté p_{-1} est l'antécédent de rang 1 de p autre que lui-même et $p_{-1} \in R_2$.

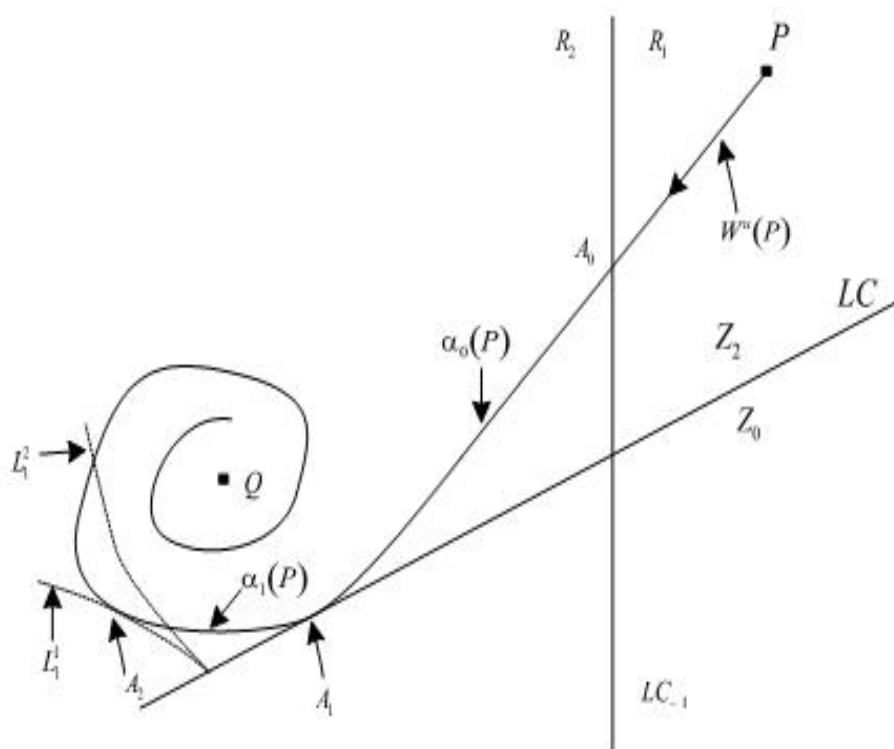
3.3.1 Variété instable de p

Soit $W^u(p)$ la variété instable issue de p et soit $\alpha(p) = (p, A_1) \subset W^u(p)$ l'arc limité par les deux points $A_1 \in LC$ et p . On note également le point $A_0 = \alpha(p) \cap LC_{-1}$. Les images de A_0 étant données par $A_n = T^n(A_0)$, $n \geq 1$ et donc $\alpha(p) = (p, A_0) \cup (A_0, A_1)$. L'arc $\alpha_0(p)$ est la partie de $W^u(p)$ limité par les points A_0 et A_1 . Les images de $\alpha_0(p)$ sont telles que

$$\alpha_1(p) = T(\alpha_0) = (A_1, A_2), \alpha_n(p) = T^n(\alpha_0) \text{ avec } A_2 \in L_1^1 \subset LC_1.$$

La variété instable est donc caractérisée par :([M97])

$$W^u(p) = \alpha(p) \cup_{n \geq 1} \alpha_n(p) \quad (3.1)$$



Figure(3.3.1) :

Branche instable $W^u(p)$ intersectant LC_{-1} en un point A_0 dont l'itéré de rang un est tangent en A_1 à LC . L'itéré de rang deux est un point A_2 tangent à la branche L_1^1 de $LC_1 = L_1^1 \cup L_1^2$

3.4 Bifurcations de la Variété Instable $W^u(p)$

On suppose que T dépend d'un paramètre λ et que les bifurcations interviennent pour des valeurs particulières de λ lorsque celui-ci croît. Avant la première bifurcation, la situation considérée est donnée sur la figure (3.3.1) et $W^u(p)$ vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 1. ([M97])

Soit $(W^u(p))^{-1}$ (resp. p^{-1}) l'antécédent de rang un de $W^u(p)$ (resp. p) autre que lui-même. Puisque T possède deux déterminations inverses, on a l'égalité :

$$T^{-1}(W^u(p)) = W^u(p) \cup (W^u(p))^{-1}.$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées, à savoir

$$\alpha_n(p) \cap LC_{-1} = \emptyset, n > 0,$$

c'est-à-dire $\alpha_n(p) \subset R_2$ et $W^u(p) \cap (W^u(p))^{-1} = A_0 \in LC_{-1}$, A_0 étant l'unique point d'intersection, on a alors les propriétés :

i) La restriction de la transformation inverse de T à $W^u(p)$ est définie par T_1^{-1} sur $\alpha_n(p)$, $n > 0$ et par T_2^{-1} sur $\alpha(p) = (p, A_1)$. $W^u(p)$ est donc invariante par itération inverse pour chacune des déterminations T_1^{-1} et T_2^{-1} sur, respectivement, $\alpha_n(p)$, $n > 0$ et $\alpha(p)$.

ii) Il existe un voisinage $U(\alpha_n(p))$ de $\alpha_n(p)$, $n > 0$, pour lequel T est à inverse unique définie par $T_2^{-1} : U(\alpha_n(p)) \rightarrow U(\alpha_n(p))$.

3.4.1 Bifurcation $\langle \lambda = \lambda^* \rangle$ créant des oscillations de $W^u(p)$

Elle est caractérisée par le fait que sur $\alpha_n(p)$, $n > 0$, $W^u(p)$ a un contact avec LC_{-1} pour $\lambda = \lambda^*$, puis intersecte LC_{-1} . A la bifurcation,

$$\alpha_n(p) \cap LC_{-1} = \{r_0 \equiv s_0\}, n > 0 \quad (3.1)$$

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \lambda^* + \epsilon$, on a :

$$\alpha_n(p) \cap LC_{-1} = \{r_0, s_0\}, n > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n(p) \cap R_1 \neq \emptyset \quad (3.2)$$

Les images de rang k du couple $\{r_0, s_0\}$ par T notées $\{r_k, s_k\}$, $k > 0$ appartenant à $\alpha_n(p)$, $n > 0$ sont des points de contacts avec les lignes LC_{k-1} en posant $LC_0 \equiv LC$.

En effet, $\alpha_n(p)$ ne peut pas traverser LC_m , ce qui signifierait dans le cas contraire qu'un point de Z_0 possède un antécédent. Cette bifurcation crée donc des oscillations de $\alpha_n(p)$ le long des LC_m . La propriété 1 devient :

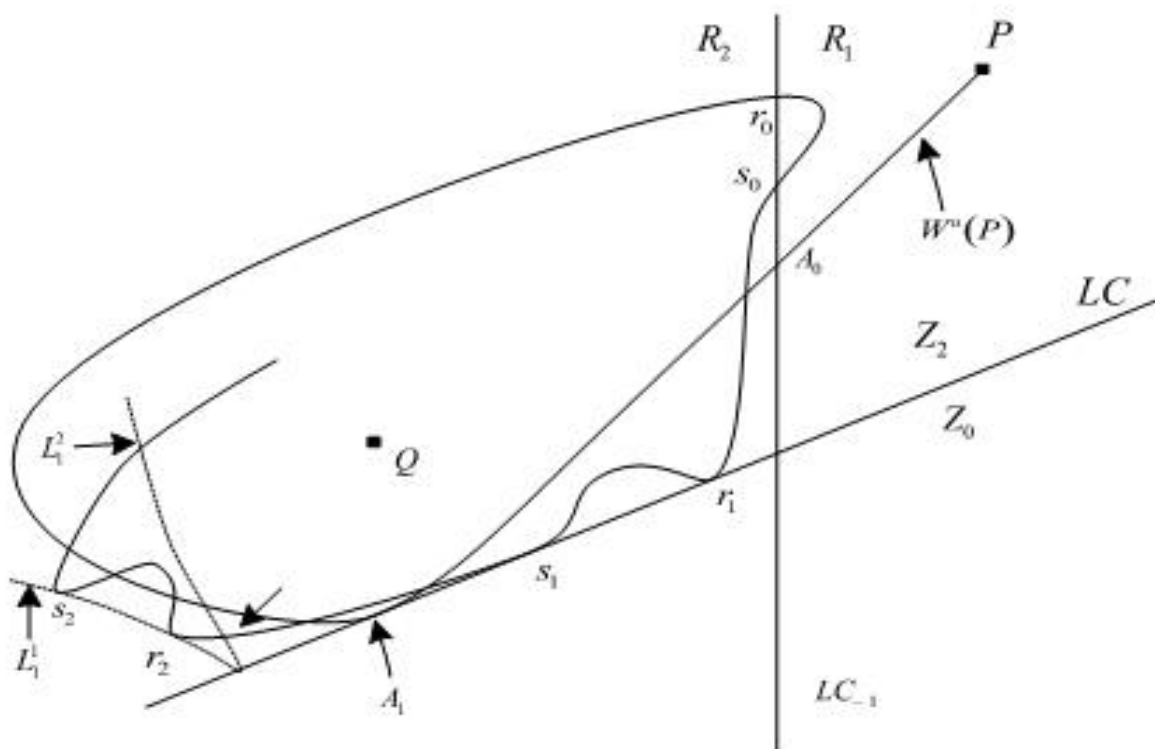
Propriété 2. ([M97])

Si la relation (3.2) est vérifiée, on a alors :

i) La restriction de la transformation inverse de T à $\alpha_n(p)$, $n > 0$ est définie par T_1^{-1} et par T_2^{-1} . $W^u(p)$ n'est donc plus invariante par itération inverse.

ii) Pour tout voisinage $U(\alpha_n(p))$ de $\alpha_n(p)$, $n > 0$, T n'est pas définie par un inverse unique définie par $T_1^{-1} : U(\alpha_n(p)) \rightarrow U(\alpha_n(p))$.

iii) $(W^u(p))^{-1}$ et $W^u(p)$ s'intersectent en des points autres que A_0 , hors de LC_{-1} .



Figure(3.4.1) : Intersection de $W^u(p)$ avec LC_{-1} créant des oscillations le long de LC et ses itérés.

3.5 Intersection d'une courbe invariante fermée Γ avec une branche instable $W^u(p)$ d'un col p

On considère la branche instable $W^u(p)$ du point fixe p de type col et la courbe invariante fermée Γ . Ces deux ensembles invariants sont tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n(p) \subset \Gamma.$$

Pour une transformation inversible, ces deux ensembles ne peuvent pas s'intersecter, autrement dit

$$W^u(p) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Pour une transformation non inversible, cette propriété est vraie tant qu'il n'apparaît pas une bifurcation dont la valeur de paramètre est repérée par $\lambda = \bar{\lambda}$. Pour cette valeur particulière du paramètre,

$$W^u(p) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

et il existe un entier m tel que :

$$\alpha_m(p) \cap \Gamma \neq \emptyset$$

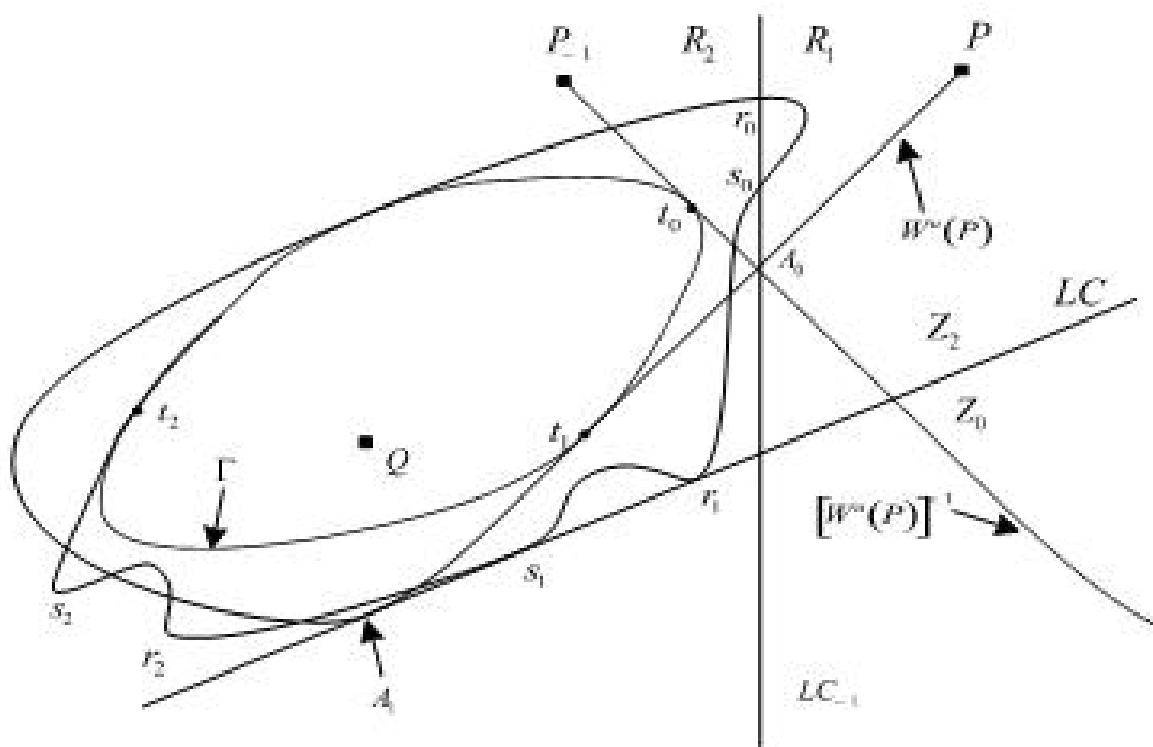
et donc par application de la transformation directe T :

$$\alpha_n(p) \cap \Gamma \neq \emptyset \quad \text{pour tout } n \geq m.$$

A la bifurcation, les points de contact t_i entre $W^u(p)$ et Γ sont tels que :

$$t_i = [\Gamma_{-1} \cap W^u(p)] \cup [\Gamma \cap (W^u(p))^{-1}] \neq \emptyset.$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$, les points t_i se dédoublent et deviennent des points d'intersections. Il existe alors une infinité de points d'intersections entre $W^u(p)$ et Γ par itération directe T .



Figure(3.5) : Bifurcation créant une intersection entre $W^u(p)$ et Γ en deux points nés à partir de la tangence en t_0

3.5.1 Exemple et résultats numériques.

Soit le système dynamique généré par $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$T : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, & \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z} \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \beta(0, 3y - 2y^2 - 4y^3) \end{cases}$$

T est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$.
En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - \beta(0, 3 - 4y - 12y^2) \cos \alpha = 0\} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $1 - \beta(0, 3 - 4y - 12y^2) \cos \alpha = 0$ en y sont :

$$y_{1,2} = \frac{-2\beta \cos \alpha \pm \sqrt{4\beta^2 \cos^2 \alpha - 12\beta \cos \alpha(1 - 0, 3.\beta \cos \alpha)}}{12\beta \cos \alpha}$$

LC_{-1} est constituée de deux branches L_{-1}^1 et L_{-1}^2 avec $LC_{-1} = L_{-1}^1 \cup L_{-1}^2$ ou :

$$L_{-1}^{1,2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{-2\beta \cos \alpha \pm \sqrt{4\beta^2 \cos^2 \alpha - 12\beta \cos \alpha(1 - 0, 3.\beta \cos \alpha)}}{12\beta \cos \alpha} \right\}$$

Par conséquent, les lignes critiques $LC = T(LC_{-1})$ est constituée de deux branches distinctes limitant une région ouverte Z_3 pour laquelle tout point possède trois antécédents de rang un et deux régions Z_1 possédant un seul antécédent de rang un.

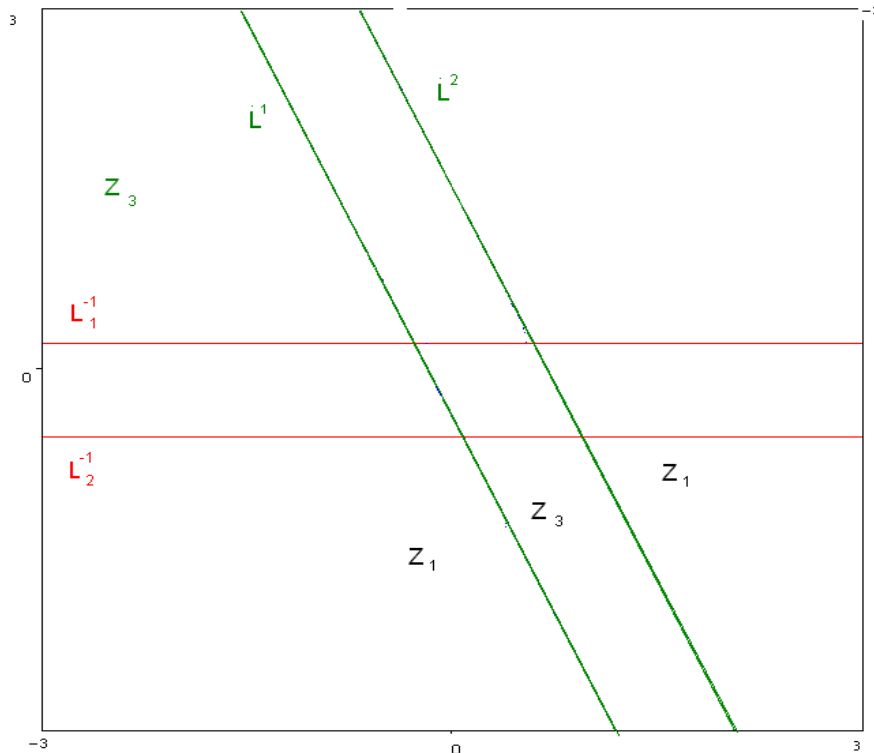


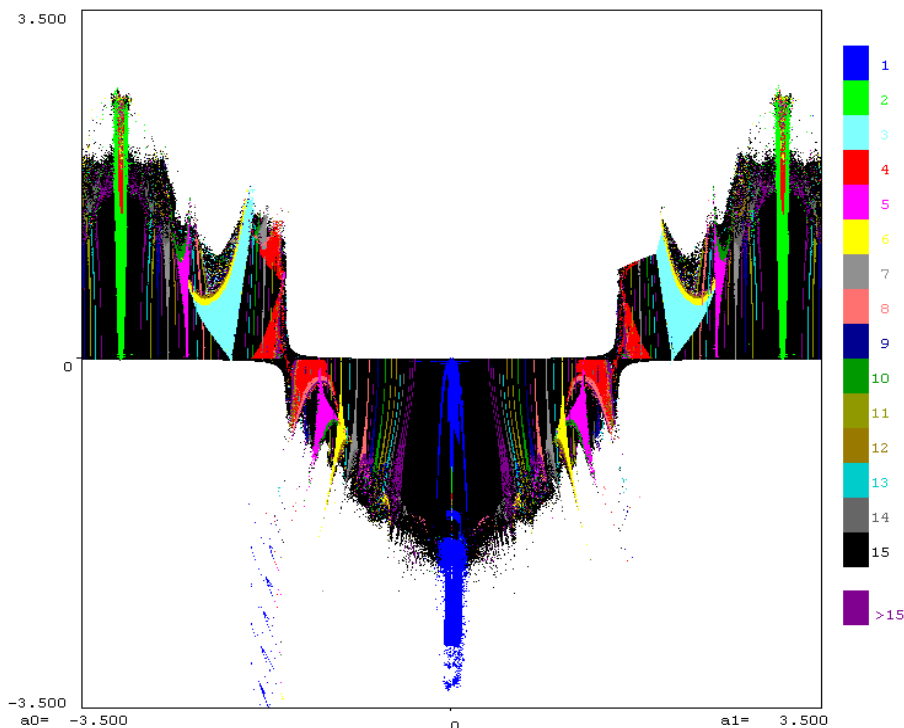
Figure (3.5.1.0.0) : Les Lignes critiques de T pour $\alpha = \beta = 2$

Le point $O(0,0)$ est un point fixe de T située dans la région Z_3 , de type foyer si :

$$0,09.\beta^2 - 4 \sin^2 \alpha < 0$$

Il devient instable lorsque $\beta \cos \alpha < 0$ en donnant naissance via une bifurcation de Hopf-Neimark à une courbe invariante fermée Γ dans la région Z_3 .

La figure (3.5.1.0) représente dans le plan de paramétrique (α, β) l'existence de cycles attractifs d'ordre 1 à 14. Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres (α, β) pour lesquels il n'existe pas de cycle d'ordre ≤ 14 . Ces zones noires peuvent correspondre à l'existence d'attracteurs chaotiques, et les zones blanches correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase.



Figure(3.5.1.0) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles.

Nous fixons $\alpha = 3,03$, et varions β d'une manière croissante de 0.5 vers 1.9770, on aura les situations suivantes :

1. Pour $\beta < \beta_0 = 0.52$, on a une courbe invariante fermée (Γ) née a partir de la déstabilisation du point fixe $(0,0)$ de type foyer sous la bifurcation de Hopf-Neimark, (voir la figure (3.5.1.1)).
2. Pour $\beta = \beta_0 = 0.52$, la courbe invariante fermée (Γ) entre en contact avec la ligne critique LC_{-1} , d'où β_0 est une valeur de bifurcation et $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0\}$. (voir Fig. (3.5.1.2)).
3. Pour $\beta_0 < \beta < 1.5$, la courbe (Γ) coupe LC_{-1} en deux points A_0 et B_0 (pour $\beta = 0.9$), puis en trois points A_0, B_0 et C_0 (pour $\beta = 1$),... Cette bifurcation crée des oscillations de (Γ) le long des LC_n . En effet, par exemple pour $\beta = 0.9$, les itérés

successifs du couple (A_0, B_0) de rang n par T sont des points de contact tangentiels entre (Γ) et LC_n , ces points d'intersections changent l'allure de (Γ) , (voir les figures ((3.5.1.3), (3.5.1.4) (3.5.1.5))).

4. Pour $\beta_0 < \beta < \beta_1 = 1.5$, ces intersections sont aussi responsables de la construction des boucles. (voir les figures (3.5.1.7), (3.5.1.8)).
5. Pour $\beta_1 = 1.5 \leq \beta \leq 1.9770$, l'accroissement du nombre d'auto-intersections, l'apparition des boucles est la convergence des variétés instables des points fixes cols vers la complexité de (Γ) sont responsables de la construction d'un attracteur chaotique. (voir les Figures. (3.5.1.9), (3.5.1.10), (3.5.1.11) et (3.5.1.12)).
6. Pour $\beta = 0.9$, le point $p(-0.033, 0.593)$ est un point fixe col de T situé dans la frontière du bassin d'attraction de (Γ) . Pour cette valeur du paramètre, on a :

$$W^u(p) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

et il existe un entier m tel que : $\alpha_m(p) \cap \Gamma \neq \emptyset$ (voir la figure (3.5.1.6)).

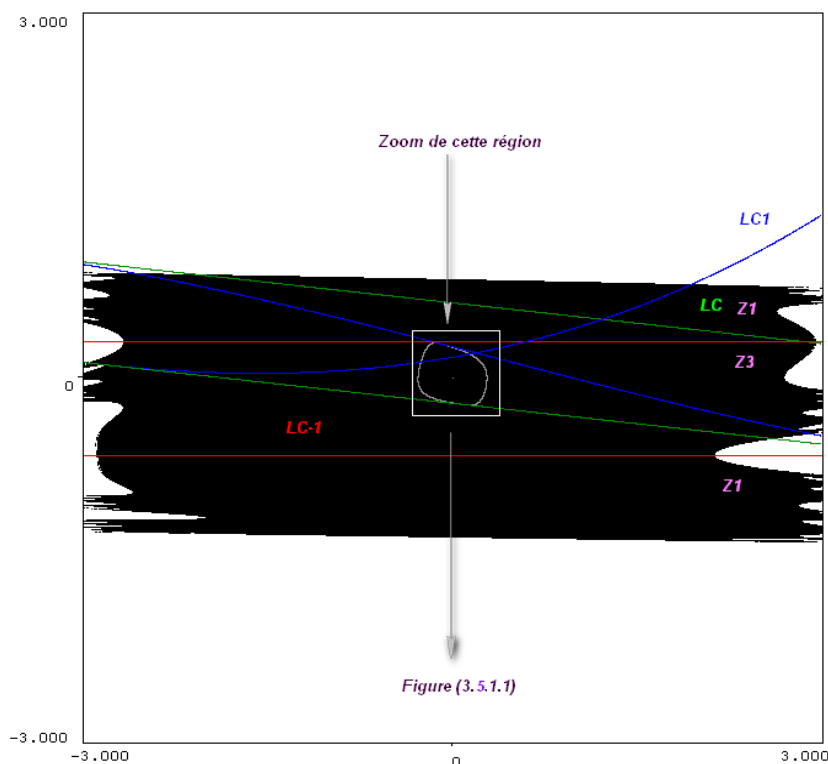
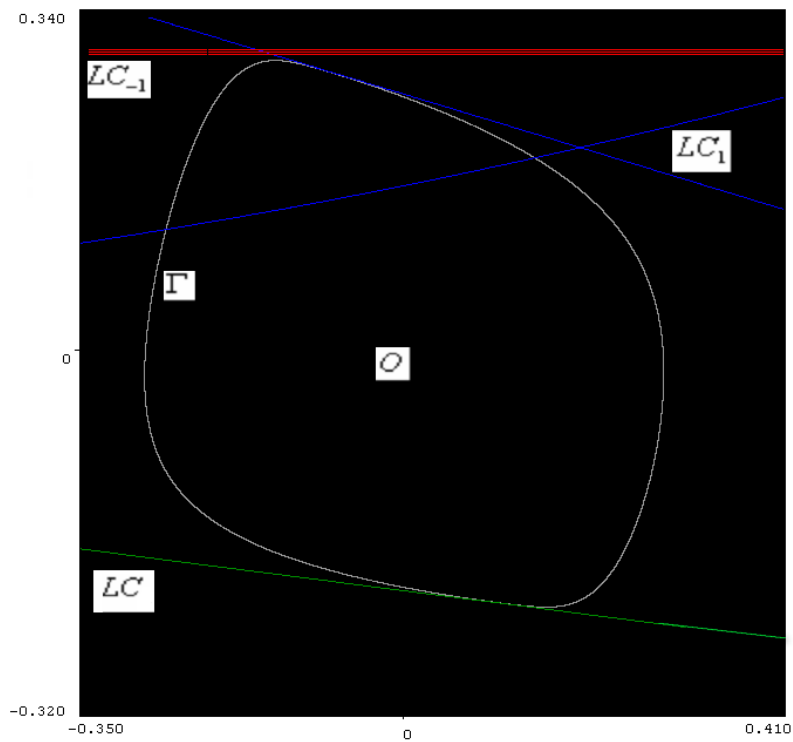
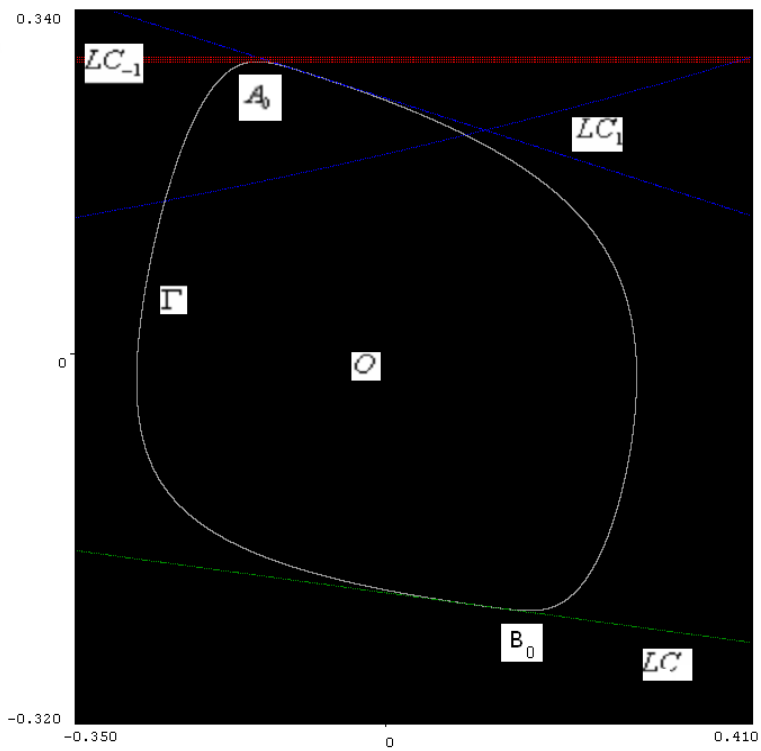


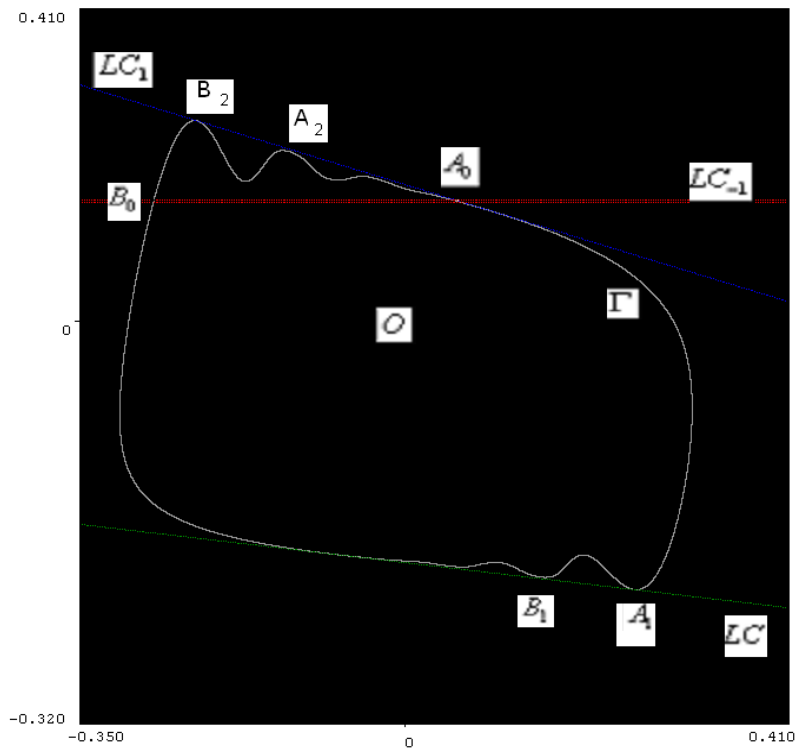
Figure (3.5.1.1)₀ : Espace des phases pour $\beta = 0.5$



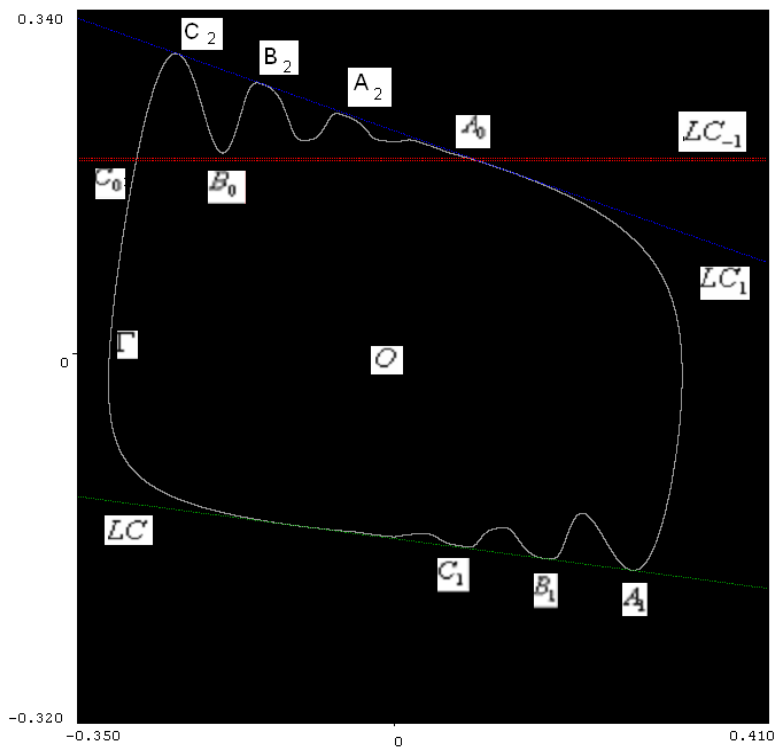
Figure(3.5.1.1) : $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \emptyset$ pour $\beta = 0.5$



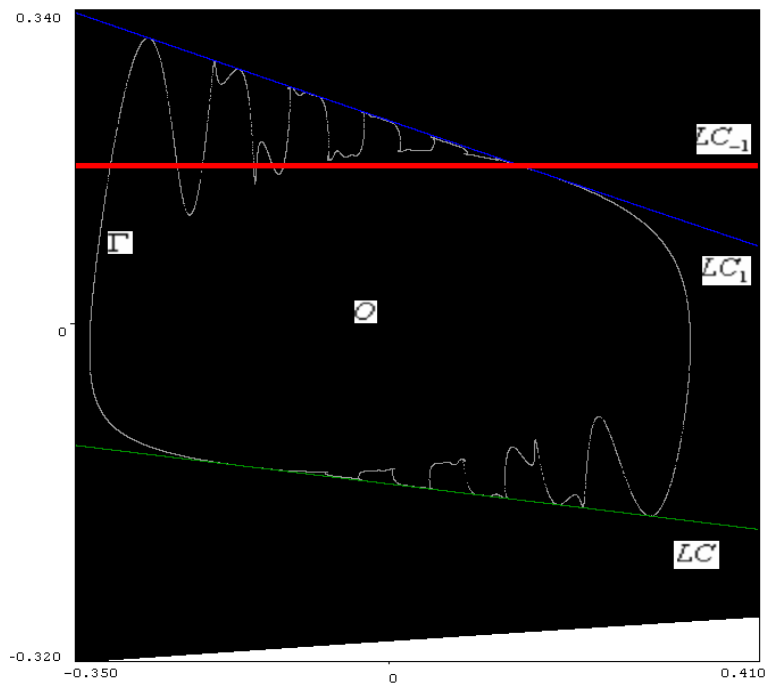
Figure(3.5.1.2) : $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0\}$ pour $\beta = 0.52$



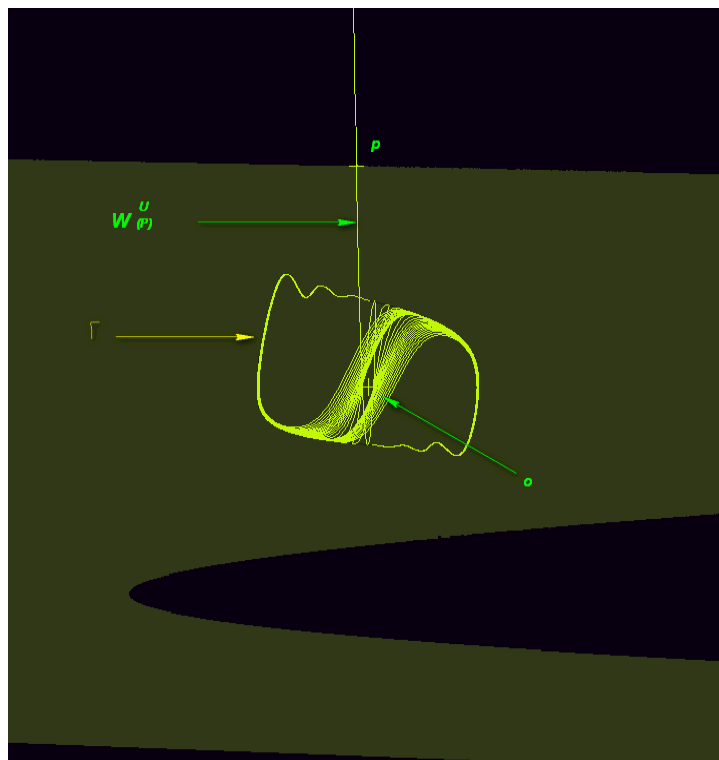
Figure(3.5.1.3) : $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0, B_0\}$ pour $\beta = 0.9$



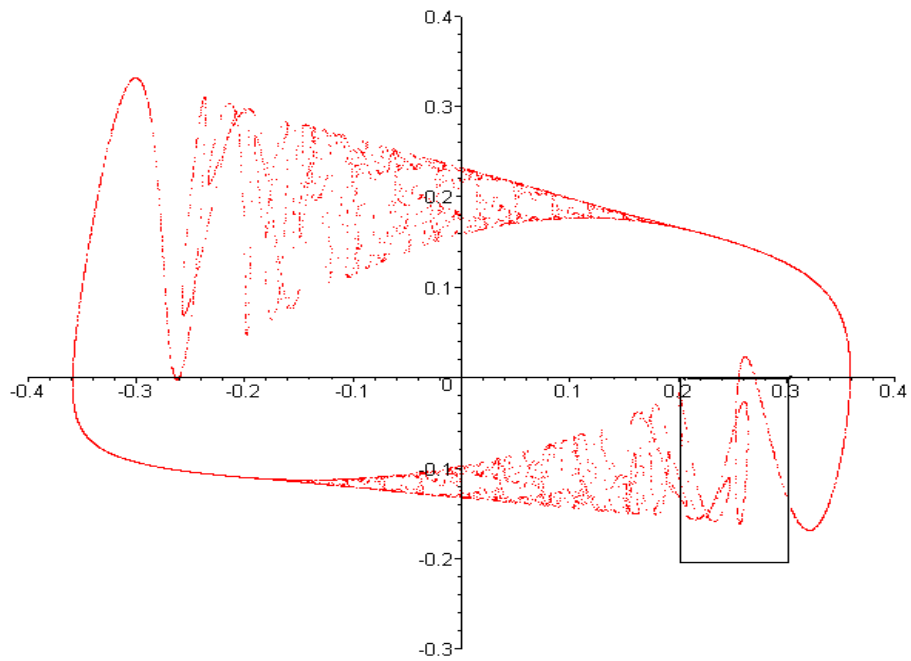
Figure(3.5.1.4) : $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0, B_0, C_0\}$ pour $\beta = 1$



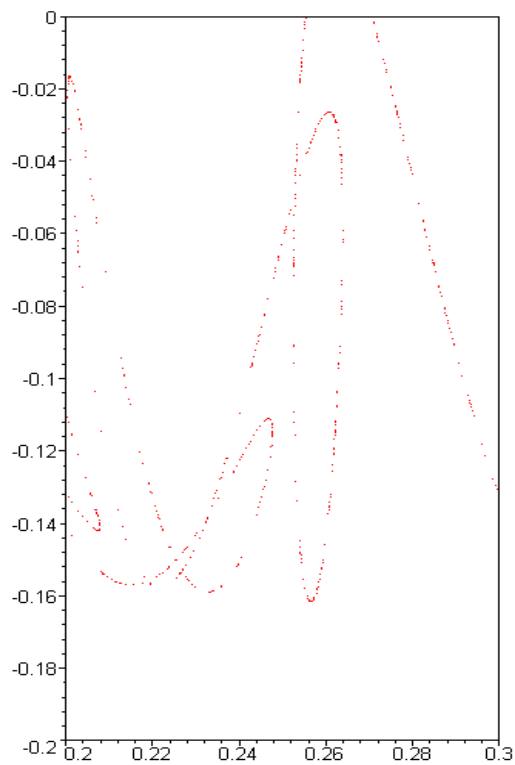
Figure(3.5.1.5) : $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0, B_0, C_0, \dots\}$ pour $\beta = 1.2$



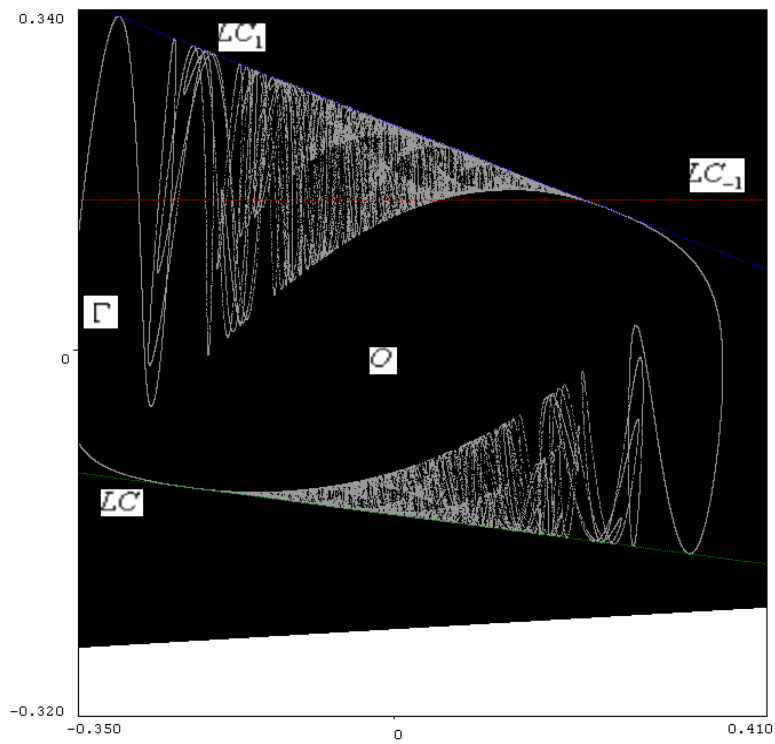
Figure(3.5.1.6) : $(\Gamma) \cap W^u(p) \neq \emptyset$ pour $\beta = 0.9$



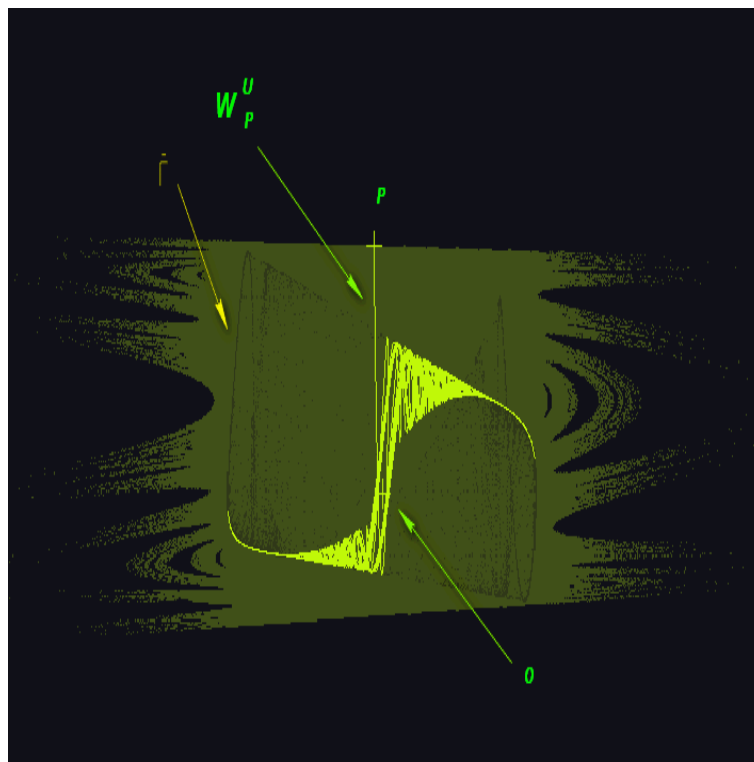
Figure(3.5.1.7) : Apparition des boucles pour $\beta = 1.45$



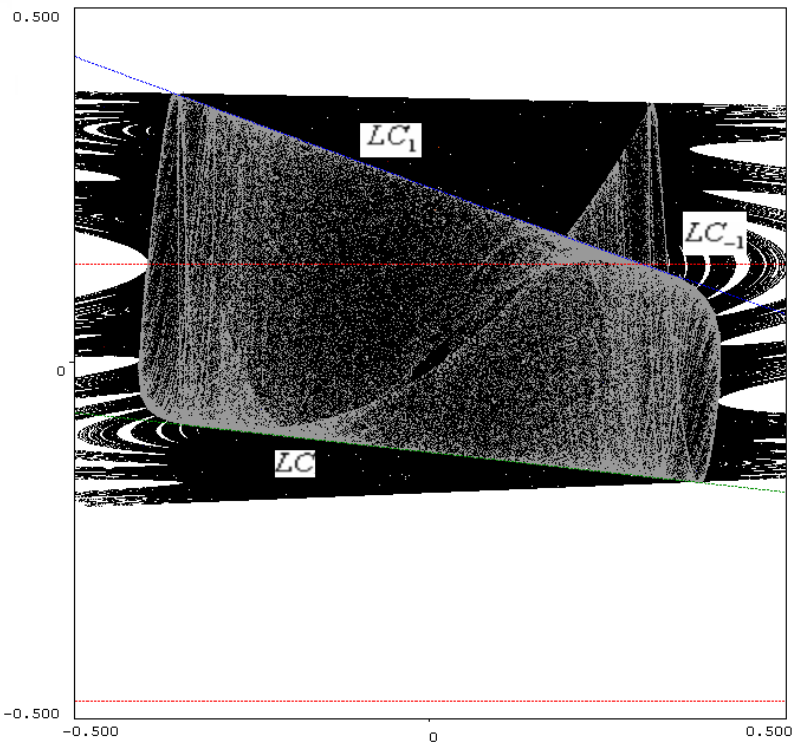
Figure(3.5.1.8) : Zoom de la région encadrée dans la figure(3.5.1.7)



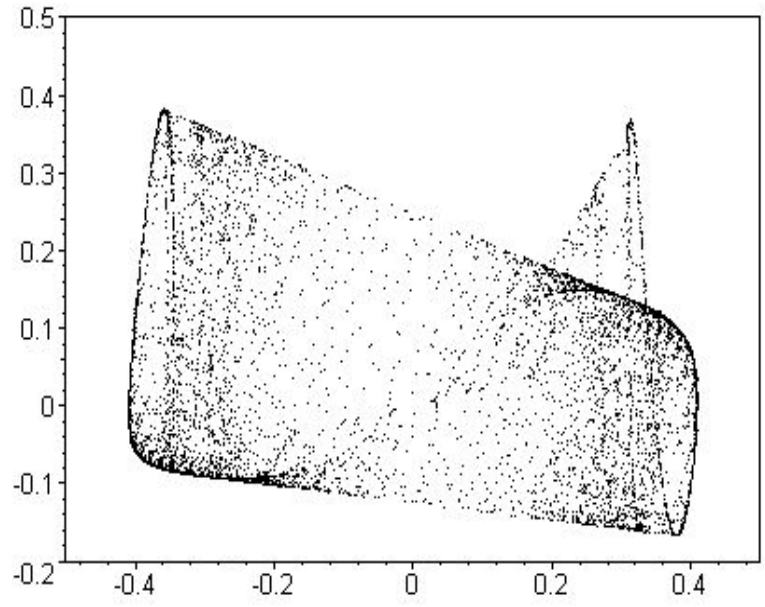
Figure(3.5.1.9) : Accroissement des boucles pour $\beta = 1.5$



Figure(3.5.1.10) : $W^u(p)$ converge vers (Γ) pour $\beta = 1.5$



Figure(3.5.1.11) : Attracteur Chaotique pour $\beta = 1.9770$



Figure(3.5.1.12) : Attracteur Chaotique pour $\beta = 1.9770$

3.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'apparition des comportements chaotiques sont dues à l'interactions d'une courbe invariante fermée avec les lignes critiques. On a expliqué la formation d'auto-intersection intervenant pour une variété instable d'un col et l'apparition d'oscillations et de boucles pour une courbe invariante fermée. Ces dernières se transforment en attracteur chaotique.

L'objet du chapitre suivant consiste à l'étude des bifurcations concernant les bassins d'attraction et les zones chaotiques.

4

Bifurcations de Bassins d'Attraction des Endomorphismes Bidimensionnels de Type $(Z_0 - Z_2)$

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les principales notions de bifurcations de bassin d'Attraction d'un attracteur. Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection d'un bassin d'attraction D d'un attracteur A avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible ([MFP94], [F06], [MGL04], [MFGKC94], [AGM04]). On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D_0 sa frontière.

4.1 Bifurcations de Bassins d'Attraction

Avant d'aborder les concepts des bifurcations de bassins d'Attraction des endomorphismes, nous introduirons au préalable certaines notions indispensables à la compréhension de ces derniers concepts.

4.1.1 Définitions et Propriétés Générales

Proposition 4.1.1. ([MFP94])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ alors :

1. D est connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$.

2. D est non connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est non connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Définition 4.1.1. ([MFP94])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. On appelle **cap** noté Δ_0^i , ($i \in I \subset \mathbb{N}$, I fini ou infini), le sous-ensemble de D_0 qui ne contient pas A .

Les antécédents de premier rang des caps Δ_0^i sont des composantes connexes disjointes (**îlots**) de D noté $D_1^{(i)}$, tel que :

$$D_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset.$$

Le bassin d'attraction total D est :

$$D = D_0 \cup_{i \in I} (\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})),$$

où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de D_0 .

Proposition 4.1.2. ([MFP94])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe, alors :

1. $T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est simplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) = D_0^* \cap LC$
2. $T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est multiplément connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) \supset D_0^* \cap LC$
 D_0^* est la frontière du domaine simplement connexe et appelé **bassin immédiat apparent** obtenu en retirant les trous de D_0 .

Définition 4.1.2. ([MFP94])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe. On appelle une **baie** noté $H_0^{(i)}$, ($i \in I \subset \mathbb{N}$, I fini ou infini), l'ensemble qui ne contient pas de points non errants appartenant à ∂D ou à $\mathcal{C}(D)$.

Les antécédents de premier rang des baies $H_0^{(i)}$ sont des ensembles fermés simplement connexes disjointes (lacs) de D noté $H_1^{(i)} = T^{-1}(H_0^{(i)})$, tel que :

$$H_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset.$$

Le bassin d'attraction total D est :

$$D = D_0^* \cup_{i \in I} (\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)})),$$

où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de $H_0^{(i)}$. La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type $(Z_0 - Z_2)$; c'est une conséquence des deux propositions précédentes. ([MFP94], [DK06], [MBL06], [M89]).

Proposition 4.1.3. ([MFP94])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ dépendant continûment d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_0 , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcation suivantes :

1. Bassin connexe \rightleftharpoons bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).
2. Bassin connexe \rightleftharpoons bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).
3. Augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
4. Augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
5. Transition frontière externe faiblement fractale \rightleftharpoons frontière externe fortement fractale.
6. Transition lacs \rightleftharpoons baies.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de natures différentes, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC . (réf[M07]).

4.1.2 Bassin connexe \leftrightarrow Bassin non connexe

Cette bifurcation apparaît lorsque ∂D_0 a un contact avec LC au point $a = c$. Cette situation génère une séquence de points $T^{-n}(a) = T^{-n}(c)$ constituant le germe d'une séquence de N "îlots" naissant à partir de $a = c$ et de ses antécédents. Dans le cas de la figure 4.1.2, $N = 1$ car $D_1 = T^{-1}(D_0)$ appartient à la région Z_0 qui ne possède pas d'antécédents, c'est donc une séquence finie.

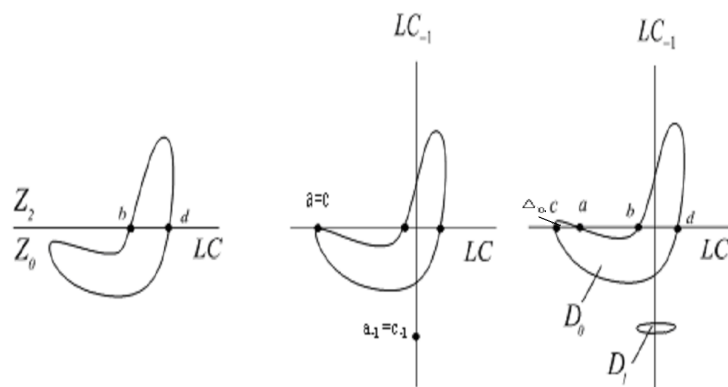


Figure (4.1.2)

4.1.3 Bassin non connexe \leftrightarrow Bassin connexe

C'est la bifurcation inverse de la précédente. Elle intervient lorsque ∂D_0 entre en contact tangent avec LC de telle sorte que $a = b$, induisant un contact entre $D_1 = T^{-1}(D_0)$ et D_0 en $a_{-1} = b_{-1}$.

4.1.4 Bassin simplement connexe \leftrightarrow Bassin multiplement connexe

Cette bifurcation est illustrée sur la figure.4.1.4. Pour $\lambda = \lambda_3$, $\partial D_0 \cap LC = a = b$. Pour $\lambda > \lambda_3$, il se crée une "baie" H_0 qui donne naissance à un "lac" $H_1 = T^{-1}(H_0)$, antécédent de rang 1 de H_0 après application de la transformation inverse de T . La séquence arborescente $T^{-1}(a = b)$, constitue le germe de la séquence $H_{n+1} = T^{-n}(H_1)$, la présence de "lacs" rend le bassin D multiplement connexe. Le passage d'un bassin multiplement connexe à un bassin connexe se fait au travers de la bifurcation inverse, c'est-à-dire lorsque la "baie" H_0 se réduit au point $a = b$ pour $\lambda = \lambda_4$.

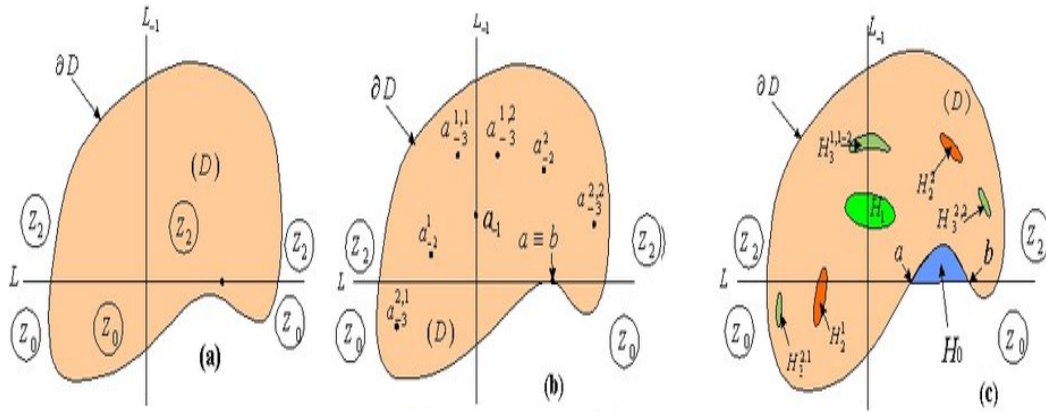


Figure (4.1.4)

4.1.5 Modification du nombre d'îlots de D ou apparition d'une nouvelle arborescence

Considérons seulement l'antécédent de rang i de D_0 noté D_i . Avant la bifurcation, $D_i \subset Z_0$ et $D_i \cap LC = \emptyset$. A la bifurcation $D_i \cap LC = \alpha$ constituant le germe de l'arborescence $T^{-n}(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$ avec $T^{-n}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$ à partir de laquelle naît une arborescence d'îlots, $D_{i+n} = T^{-n}(D_i)$.

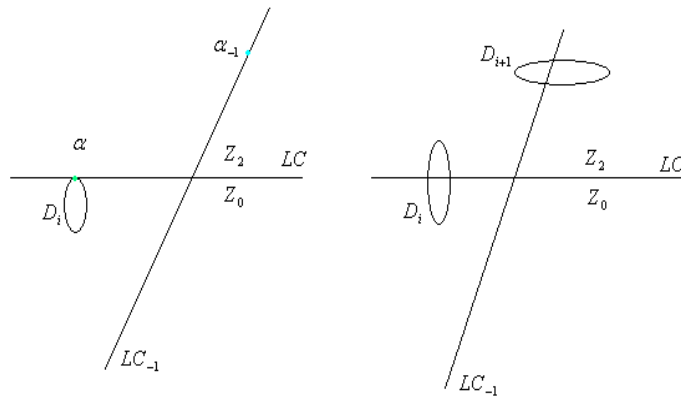


Figure (4.1.5.a) : Modification du nombre d'îlots lorsque

$$D_i \cap Z_2 \neq \emptyset.$$

L'apparition d'une nouvelle arborescence est représentée sur (Fig 4.1.5.b).

La valeur de cette bifurcation correspond à un nouveau contact tangentiel entre la courbe critique et l'îlot D_i au point β ($D_i \subset Z_2$). On a $T^{-1}(\beta) = \beta_{-1} \in LC_{-1}$ et $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \beta_{-1}$. A partir de cette valeur, D_{i+1} se divise en deux îlots situés de part et d'autre de LC_{-1}

dans les région respectives R_1 et R_2 de telle sorte que $D_{i+1} = D_{i+1}^1 \cup D_{i+1}^2$ avec $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$.

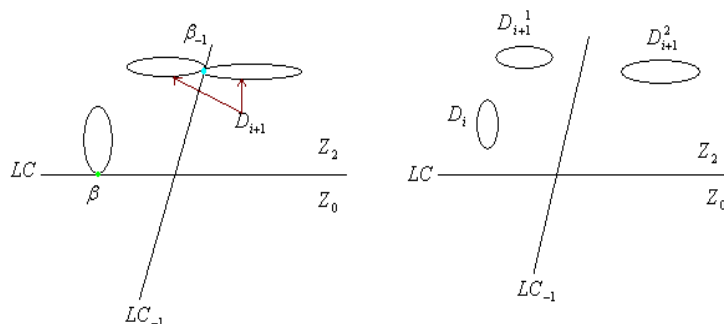


Figure (4.1.5.b) : Apparition d'une nouvelle séquence d'îlots lorsque

$D_i \subset Z_2$, provoquant la formation d'arborescences nées de D_{i+1}^1 et D_{i+1}^2 de part et d'autre de LC_{-1} .

4.1.6 Exemple et résultats numériques.

Soit le système dynamique généré par $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$T : \begin{cases} x' = ax + y \\ y' = b + x^2, \quad -1 < a < 0 \end{cases}$$

T est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_0 - Z_2$. En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \end{aligned}$$

LC_{-1} sépare l'espace des phases en deux régions ouvertes R_1 et R_2 définie par :

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\}, \quad R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$$

Les lignes critiques sont définies par :

$$LC = T(LC_{-1}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = b\}$$

La récurrence définie par $T_{1,2}^{-1}$ qui s'écrit :

$$T_{1,2}^{-1} : \begin{cases} x_t = \pm \sqrt{y_{t+1} - b} \\ y_t = x_{t+1} \mp \sqrt{y_{t+1} - b} \end{cases}$$

possède donc deux déterminations. Pour des points initiaux $(x_0, y_0) / y_0 > b$, il existe deux antécédents M_{-1}^1, M_{-1}^2 , donnés par $T_{1,2}^{-1}$.

Pour $y_0 < b$, les points (x_0, y_0) n'ont pas d'antécédents.

Par suite, l'espace des phases est séparé en deux régions ouvertes Z_0, Z_2 définie par :

$$Z_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < b\} \text{ et } Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > b\}$$

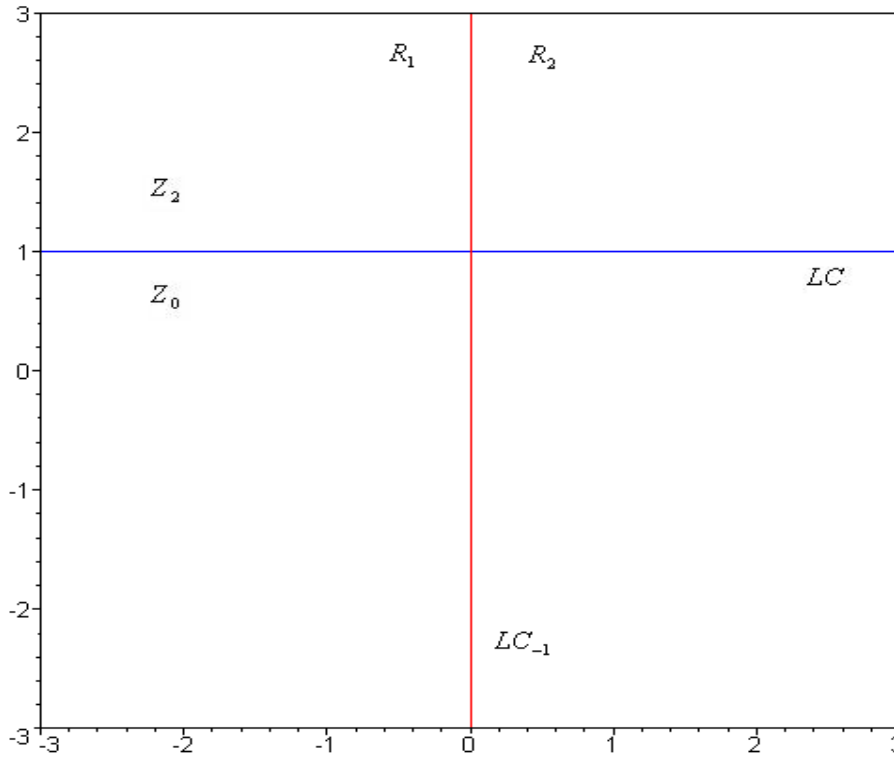


Figure (4.1.6.1) : Les Lignes critiques pour $b = 1$

1. Si $(a, b) \in \Lambda = \{(a, b) / b < \frac{(a-1)^2}{4}, -1 < a < 0\}$, alors T admet deux points fixe O et P tel que :

$$O = \left(0.5 \left(1 - a - \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right), \left(0.5(1-a) \left(1 - a - \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right) \right) \right)$$

$$P = \left(0.5 \left(1 - a + \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right), \left(0.5(1-a) \left(1 - a + \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right) \right) \right)$$

et la matrice jacobienne s'écrit :

$$J = DT(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On pose $\alpha = a^2 + 4 \left(1 - a - \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right)$, si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \alpha > 0\}$ alors :

i. Si $|a + \sqrt{\alpha}| < 2 < |a - \sqrt{\alpha}|$, alors O est un col.

ii. Si $|a + \sqrt{\alpha}| < |a - \sqrt{\alpha}| < 2$, alors O est un noeud attractif.

iii. Si $2 < |a + \sqrt{\alpha}| < |a - \sqrt{\alpha}|$, alors O est un noeud répulsif.

(b) Si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \alpha = 0\}$ alors O est un noeud attractif.

(c) Si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \alpha < 0\}$ alors O est un foyer, il est attractif si :

$$a^2 + 2 \left(1 - a - \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right) < 2.$$

Si non, il est répulsif.

2. Si $(a, b) \in \Sigma = \{(a, b) / b = \frac{(a-1)^2}{4}, -1 < a < 0\}$, alors T admet un point fixe $P^* (x = 0.5(1 - a), y = (0.5(1 - a)^2))$ est comme $-1 < a < 0$, alors P^* est un col.

(a) On pose $\beta = a^2 + 4 \left(1 - a + \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right)$, si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \beta > 0\}$ alors :

i. Si $|a + \sqrt{\beta}| < 2 < |a - \sqrt{\beta}|$, alors P est un col.

ii. Si $|a + \sqrt{\beta}| < |a - \sqrt{\beta}| < 2$, alors P est un noeud attractif.

iii. Si $2 < |a + \sqrt{\beta}| < |a - \sqrt{\beta}|$, alors P est un noeud répulsif.

(b) Si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \beta = 0\}$ alors P est un noeud attractif.

(c) Si $(a, b) \in \{(a, b) \in \Lambda / \beta < 0\}$ alors P est un foyer, il est attractif si :

$$a^2 + 2 \left(1 - a + \frac{\sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \right) < 2.$$

Si non, il est répulsif.

3. Si $(a, b) \in \Lambda = \{(a, b) / b > \frac{(a-1)^2}{4}, -1 < a < 0\}$, alors T n'admet aucun point fixe.

La figure (4.1.6.2) représente dans le plan de paramétrique (a, b) l'existence de cycles attractifs d'ordre 1 à 14. Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres (a, b) pour lesquels il n'existe pas de cycle d'ordre ≤ 14 . Ces zones noires peuvent correspondre à l'existence d'attracteurs chaotiques, et les zones blanches correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase.

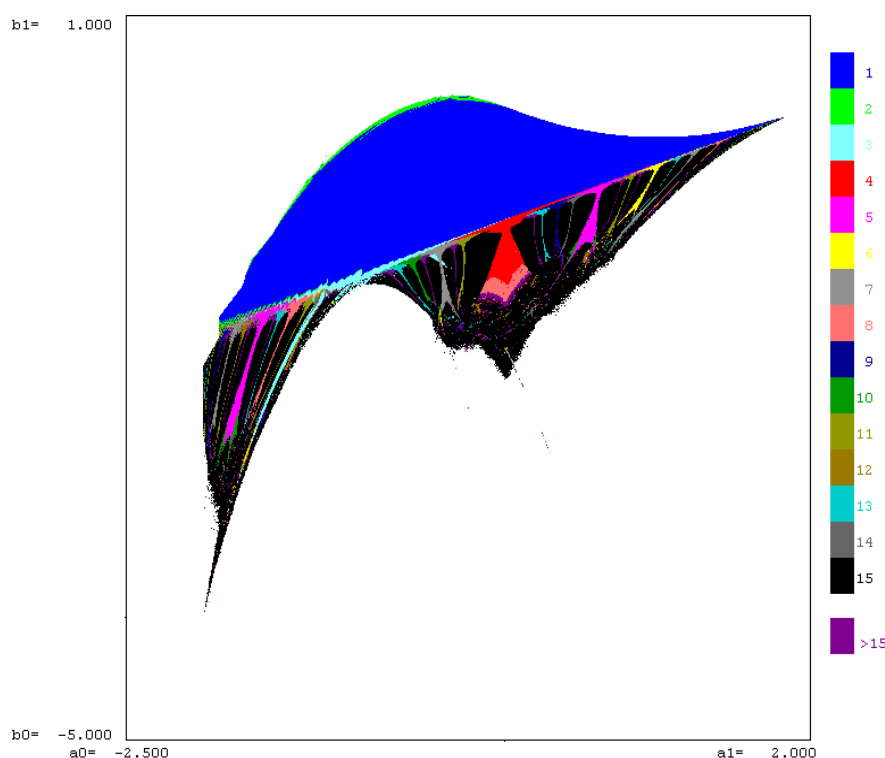


Figure (4.1.6.2) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles.

Nous fixons $a = -0.42$ et faisons varier le paramètre b de la valeur -1.09 à la valeur -1.64 . On a les situation suivante :

1. Pour $b = -1.09$, l'application T admet : (Voir la figure (4.1.6.3))

- (a) Deux points fixe $O = (-0.559, -0.777)$ et $P = (1.97, 2.809)$. Les valeurs propres de T ou point O sont $\lambda_{1,2} = -0.21 \pm i1.03$ avec $\rho_{1,2} = |\lambda_{1,2}| = 1.0512 > 1$. Par suit, le point O est un foyer instable. Les valeurs propres de T Ou point P sont $\lambda_1 = -1.7873$ et $\lambda_2 = 2.2073$. D'où, le point P est un noeud instable.
- (b) Deux attracteur : une courbe invariante fermée Γ et un attracteur chaotique cyclique d'ordre trois $d = (d_1) \cup (d_2) \cup (d_3)$.
- (c) Un cycle noeud instable d'ordre deux $C_1 = \{q_1, q_2\}$, où $q_1, q_2 \in \partial(\Gamma)$ avec $q_1 = (-0.91, 1.104)$ et $q_2 = (1.48, -0.272)$.
- (d) Un cycle noeud instable d'ordre quatre $C_2 = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$.
- (e) Un cycle col d'ordre trois $C_3 = \{q_7, q_8, q_9\}$, où $q_i \in \partial(d_i)$, $i = 7, 8, 9$, avec $q_7 = (-0.31, 0.409)$, $q_8 = (0.52, -0.995)$ et $q_9 = (-1.229, -0.804)$.
- (f) Un cycle foyer d'ordre trois instable $C_4 = \{q'_1, q'_2, q'_3\}$, où $q'_i \in Int(d_i)$, $i = 1, 2, 3$, avec $q'_1 = (0.159, 0.886)$, $q'_2 = (0.81, -1.05)$ et $q'_3 = (-1.409, -0.422)$.

- (g) Le point P a deux antécédents de premier rang, lui même et P_{-1} est deux antécédents de rang deux, P_{-2}^1 et P_{-2}^2 où $P_{-1} = (-1.967, 1.131), P_{-2}^1 = (-1.49, -2.563), P_{-2}^2 = (-1.489, -1.349)$. Où $P_i^j \in \partial(\Gamma)$, $i = -1, -2$ et $j = 1, 2$.
- (h) Les variétés instables $W^u(C_i), i = 1, 2$ des cycles noeuds convergent vers la courbe invariante fermée Γ .
- (i) Les variétés instables de cycle col d'ordre trois convergent vers l'attracteur chaotique cyclique d'ordre trois d . Avec $W^u(q_i) \rightarrow (d_i), i = 7, 8, 9$.
- (j) Pour $b = -1.1183$, on a une bifurcation de contact entre la frontière du bassin d'attraction immédiat de l'attracteur chaotique cyclique d'ordre trois $d = (d_1) \cup (d_2) \cup (d_3)$ et la frontière de l'aire chaotique. Cette bifurcation conduit à la destruction (disparition) de l'attracteur chaotique ainsi que la courbe invariante fermée Γ , donnant naissance à un cycle stable d'ordre sept. Voir la figure (4.1.6.4).

Intéressons-nous aux changements dans ta structure géométrique du bassin d'attraction D du cycle d'ordre sept $C = \{a_i / i = 1 \dots 7\}$

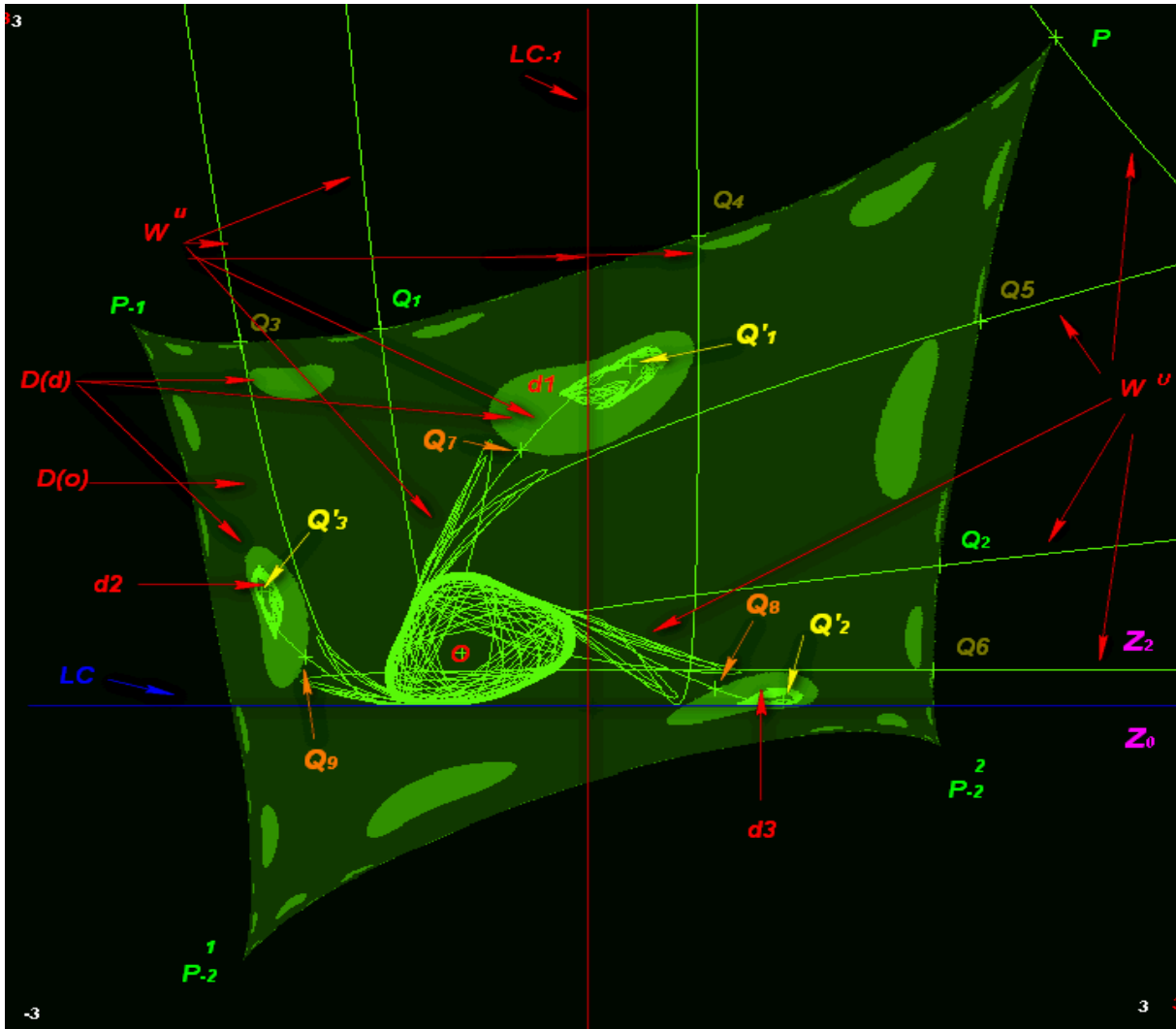
1. Pour $-1.1183 < b < -1.29$, le bassin D est simplement connexe et sa frontière est limité par les variétés stables du cycle col. Voir la figure (4.1.6.5).
2. Pour $b = -1.29$, la frontière du bassin d'attraction du cycle C entre en contact avec la ligne critique LC en un point S . Autrement dit :

$$LC \cap \partial(D(C)) \neq \emptyset$$

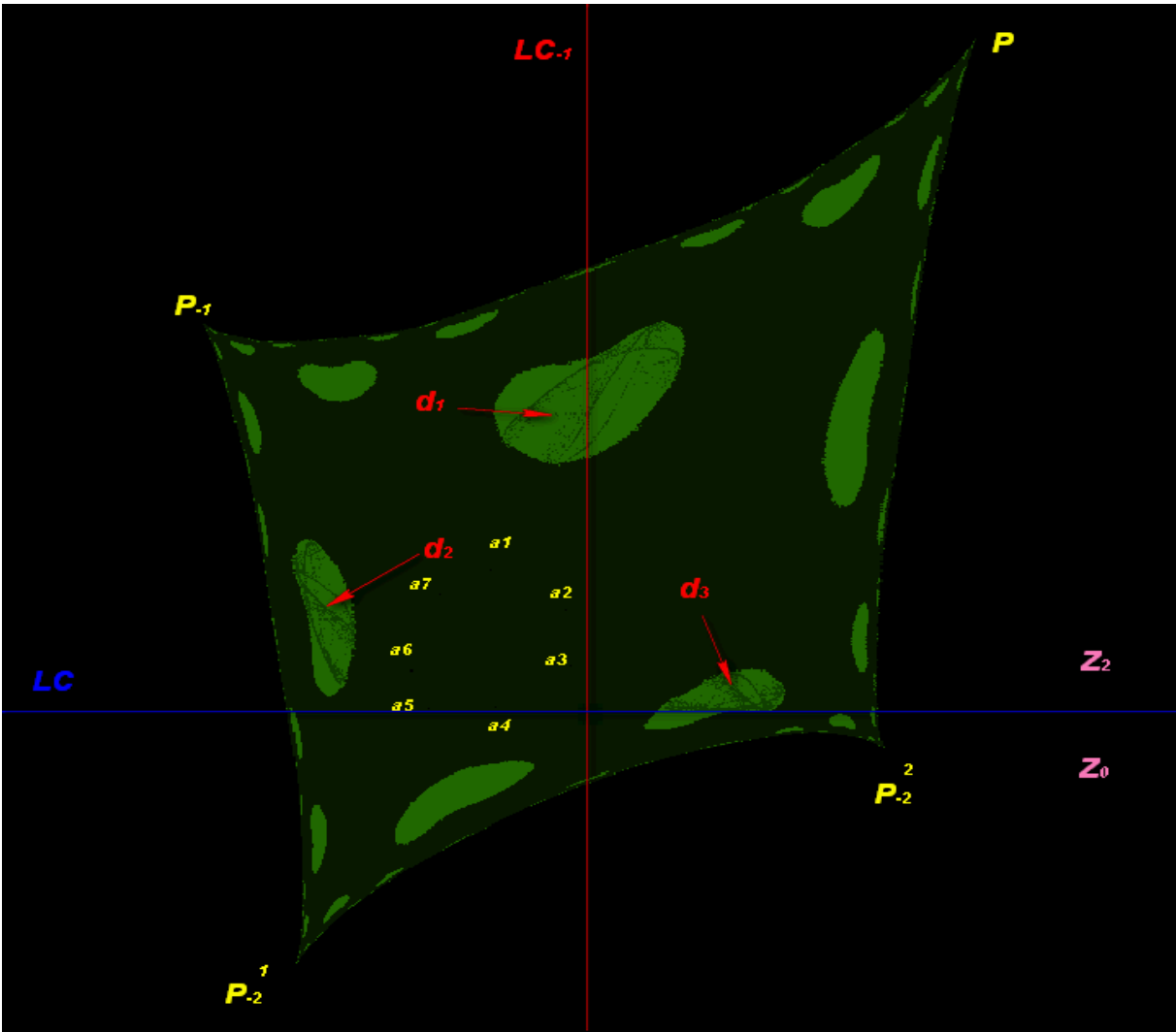
voir la figure (4.1.6.6).

3. Pour $-1.29 < b < -1.35$, le bassin D est multiplement connexe (voir les figures (4.1.6.7), (4.1.6.8).), c'est à dire connexe avec des trous ou lacs $H_j^{i_1, i_2, \dots, i_k}, i_k = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, \dots$, puisque $D \cap LC$ n'est plus connexe. Les $H_j^{i_1, i_2, \dots}$ sont les préimages de la bas H_0 par les déterminations inverses $T^{-i}, i = 1, 2, 3$ de l'endomorphisme T . La bas H_0 est numériquement visible à partir de la valeur $b = -1.295$, c'est à-dire qu'on a une valeurs de bifurcation simplement connexe \rightarrow multiplement connexe entre les valeurs $b = -1.295$ et $b = -1.3499$.
4. Pour $b = -1.35, P_{-2}^2 \in LC$ donc la frontière du bassin d'attraction du cycle C entre en contact avec la ligne critique LC en un point P_{-2}^2 . Autrement dit, la bas H_0 tend à disparaître et $D \cap LC$ à redevenir connexe. Voir la figure (4.1.6.9).
5. Pour $-1.35 < b < -1.64, D \cap LC$ est redevenu connexe, par suite D est connexe. C'est à-dire qu'on a une valeurs de bifurcation multiplement connexe \rightarrow simplement

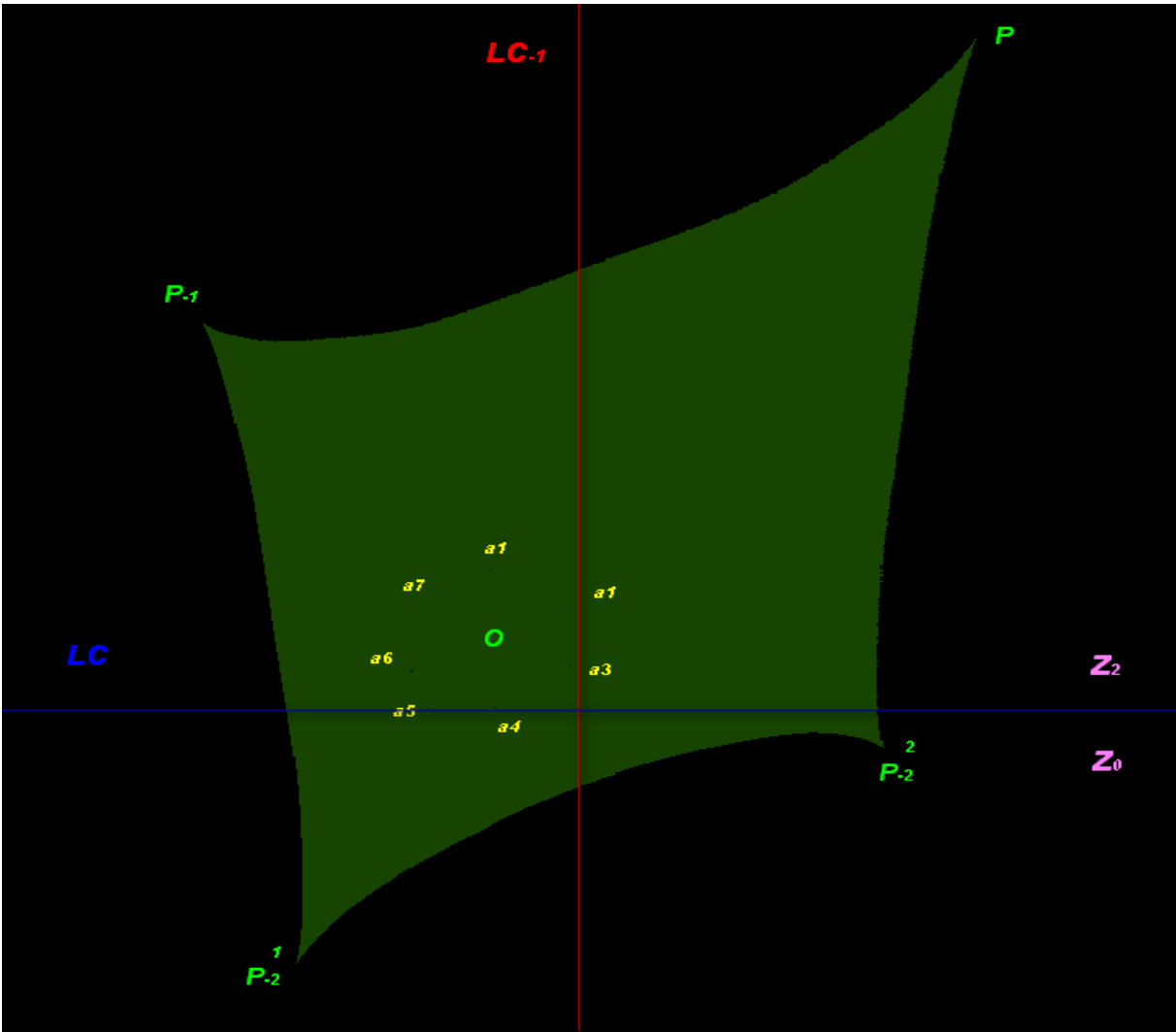
connexe entre les valeurs $b = -1.351$ et $b = -1.64$. Cette bifurcation est responsable de l'apparition d'un attracteur chaotique avec une frontière fractale du bassin. Voir les figures (4.1.6.10), (4.1.6.11), (4.1.6.12).



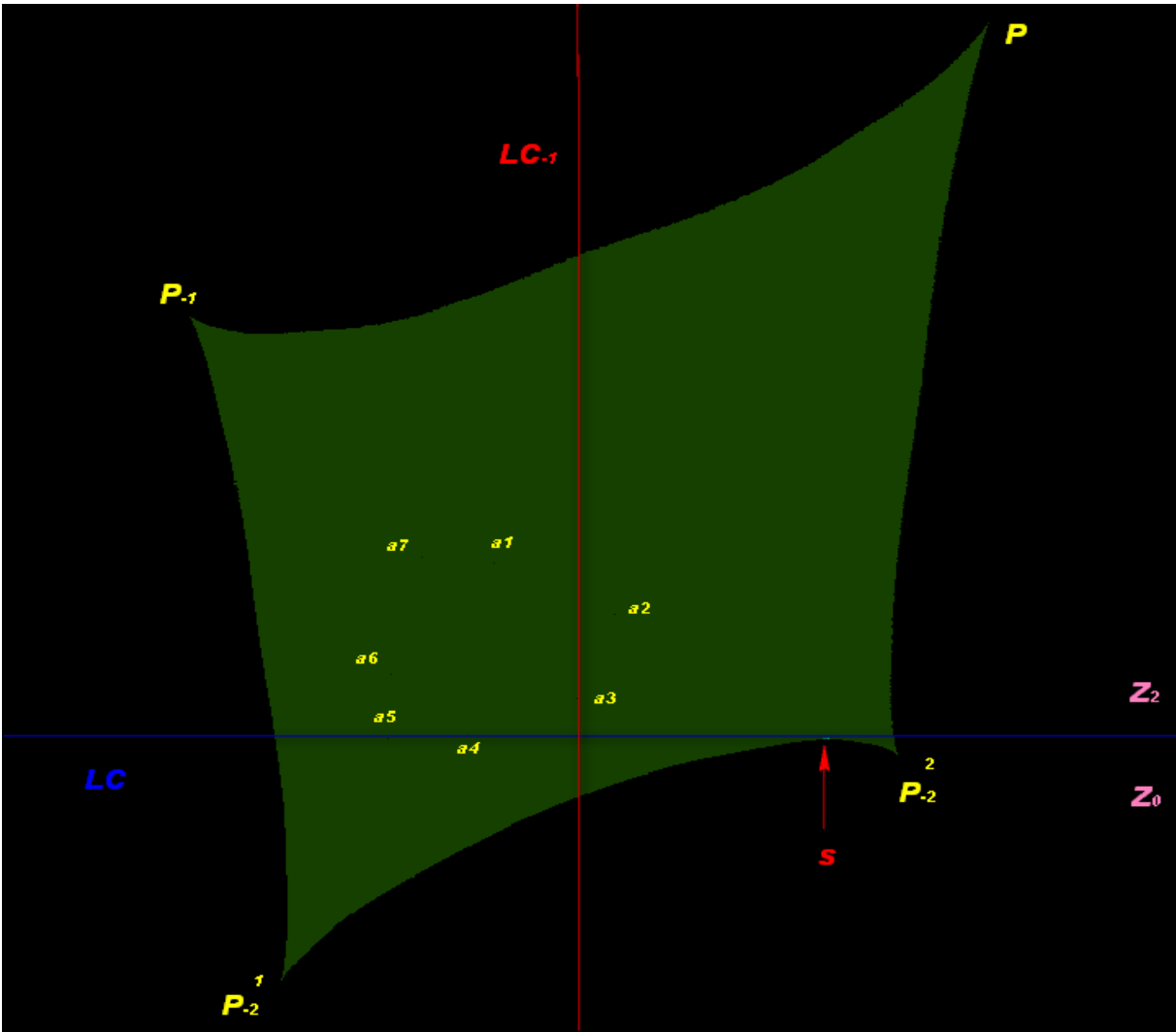
Figure(4.1.6.3) : Attracteur Chaotique pour $b = -1.09$



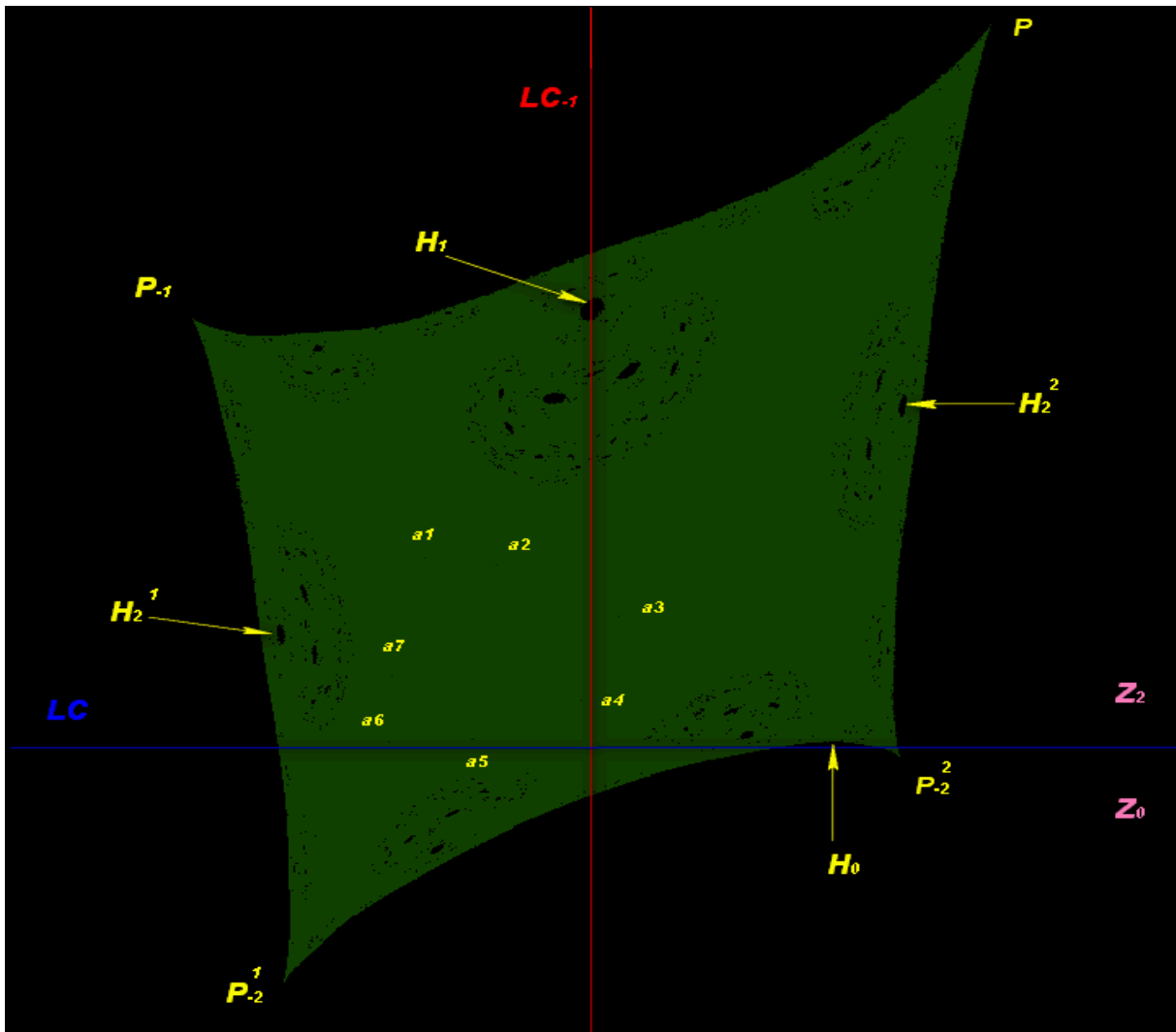
Figure(4.1.6.4) : Bifurcation de contact pour $b = -1.1183$



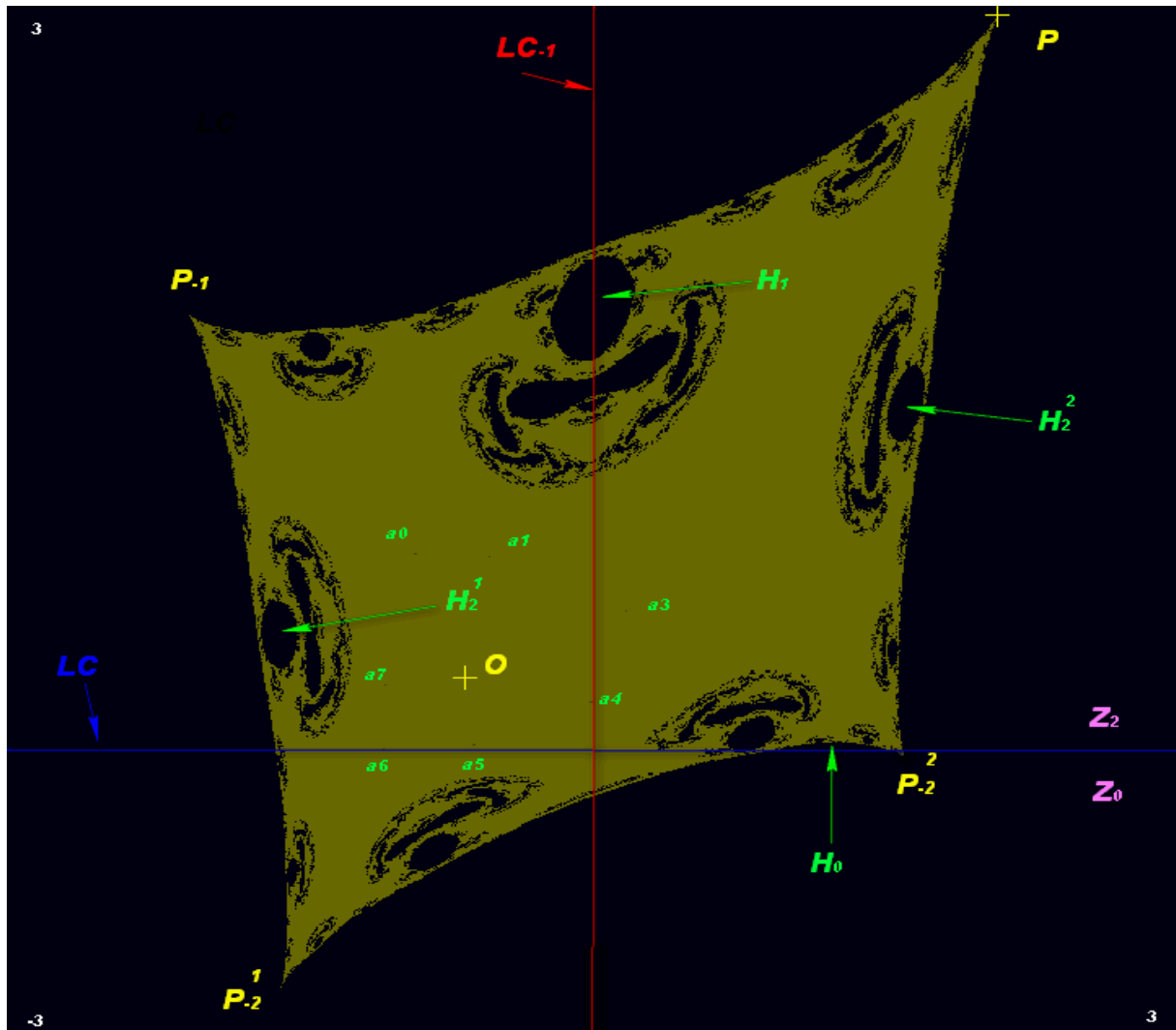
Figure(4.1.6.5) : Destruction de l'attracteur pour $b = -1.1184$



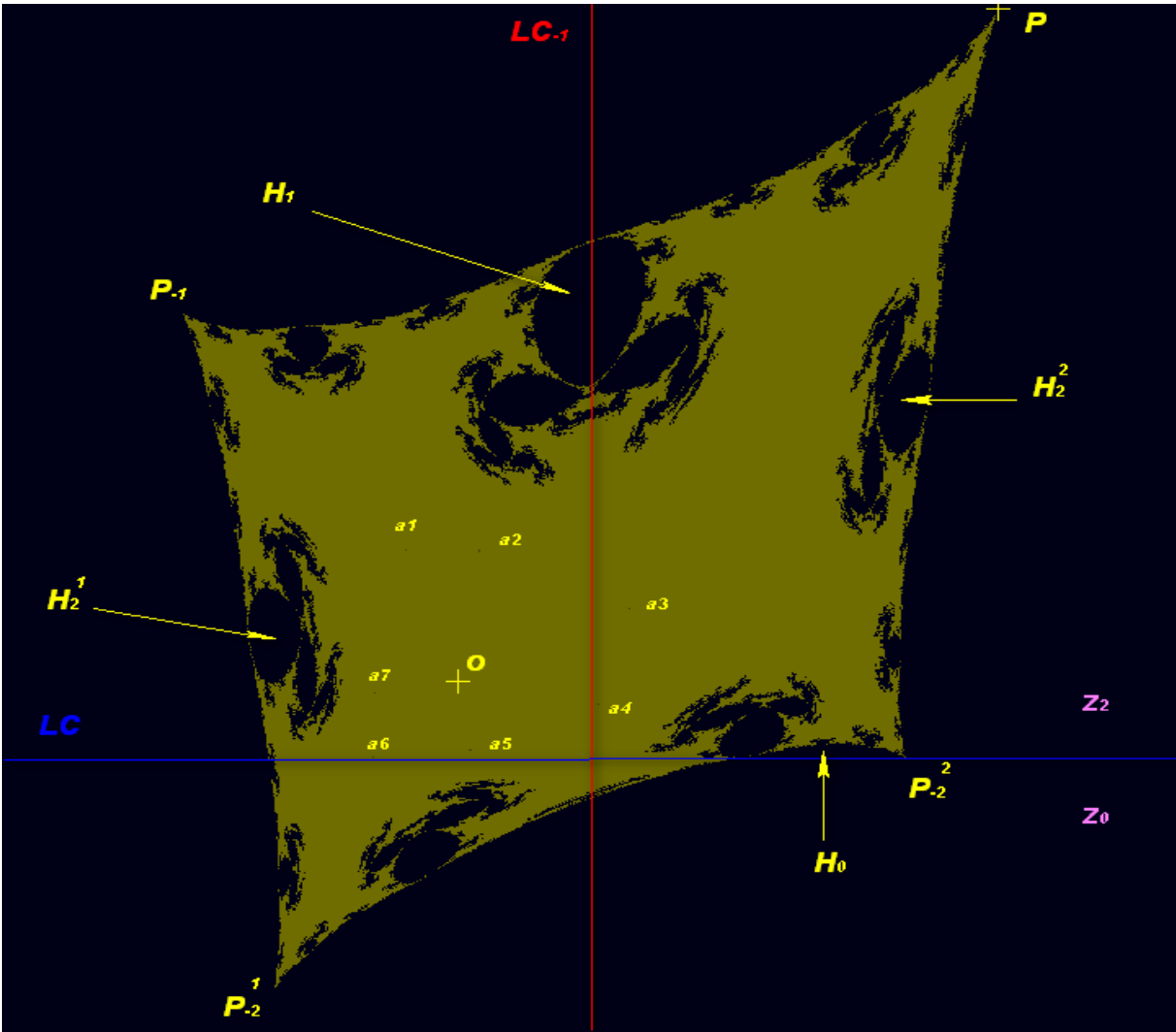
Figure(4.1.6.6) :bassin connexe-bassin multiplement connexe pour $b = -1.29$



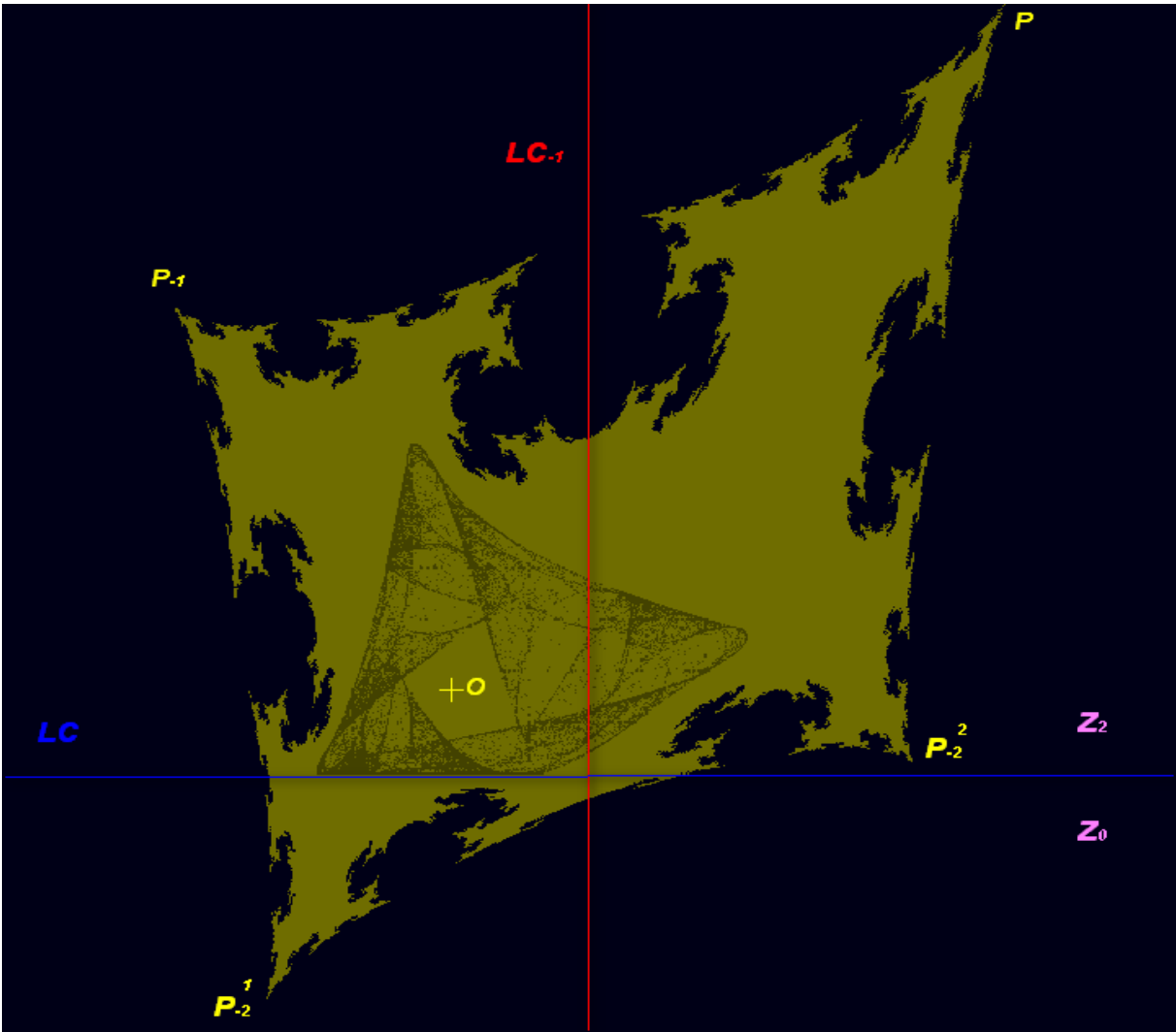
Figure(4.1.6.7) : Création d'une baie H_0 pour $b = -1.295$



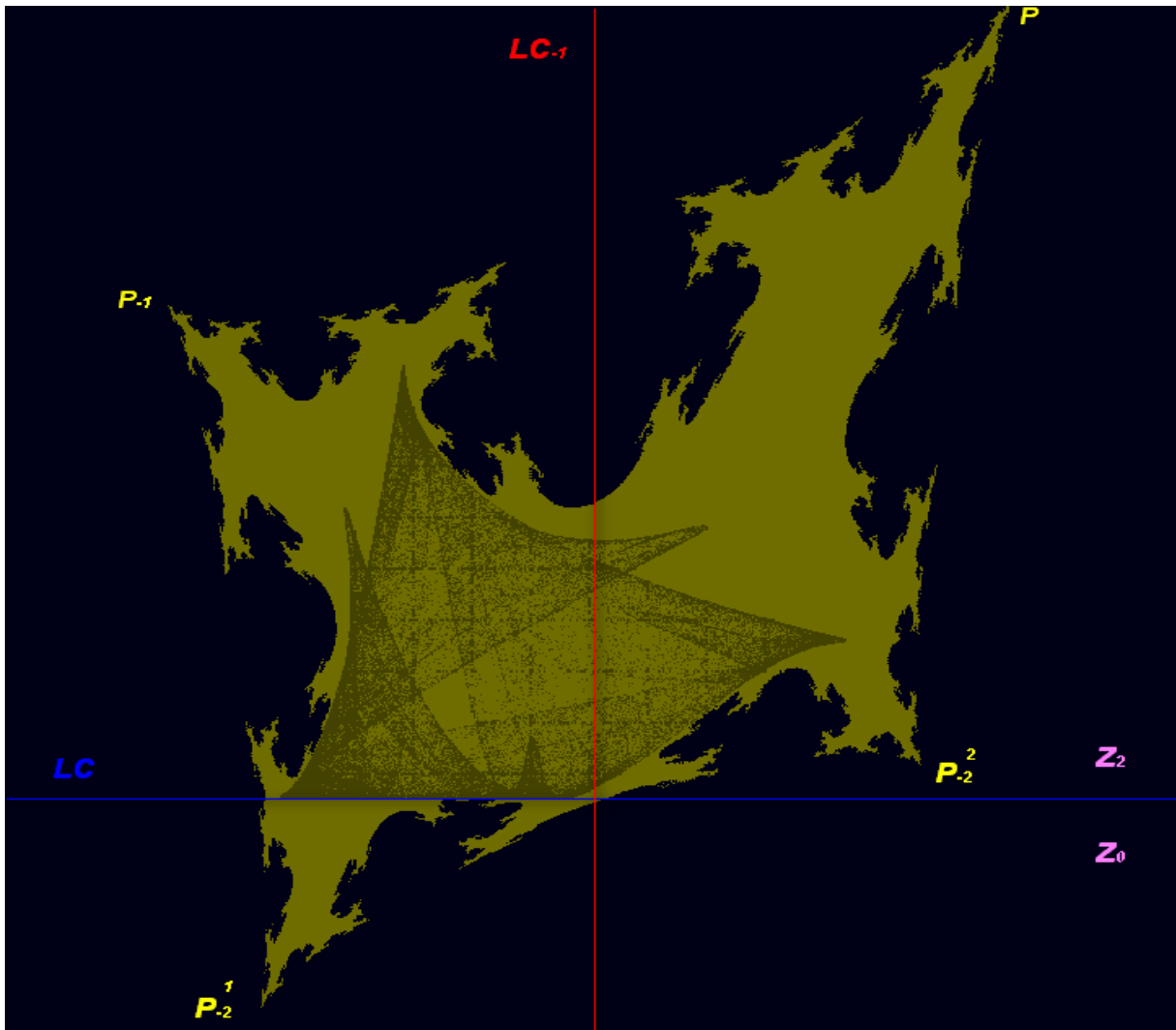
Figure(4.1.6.8) : Bassin multiplement connexe pour $b = -1.30$



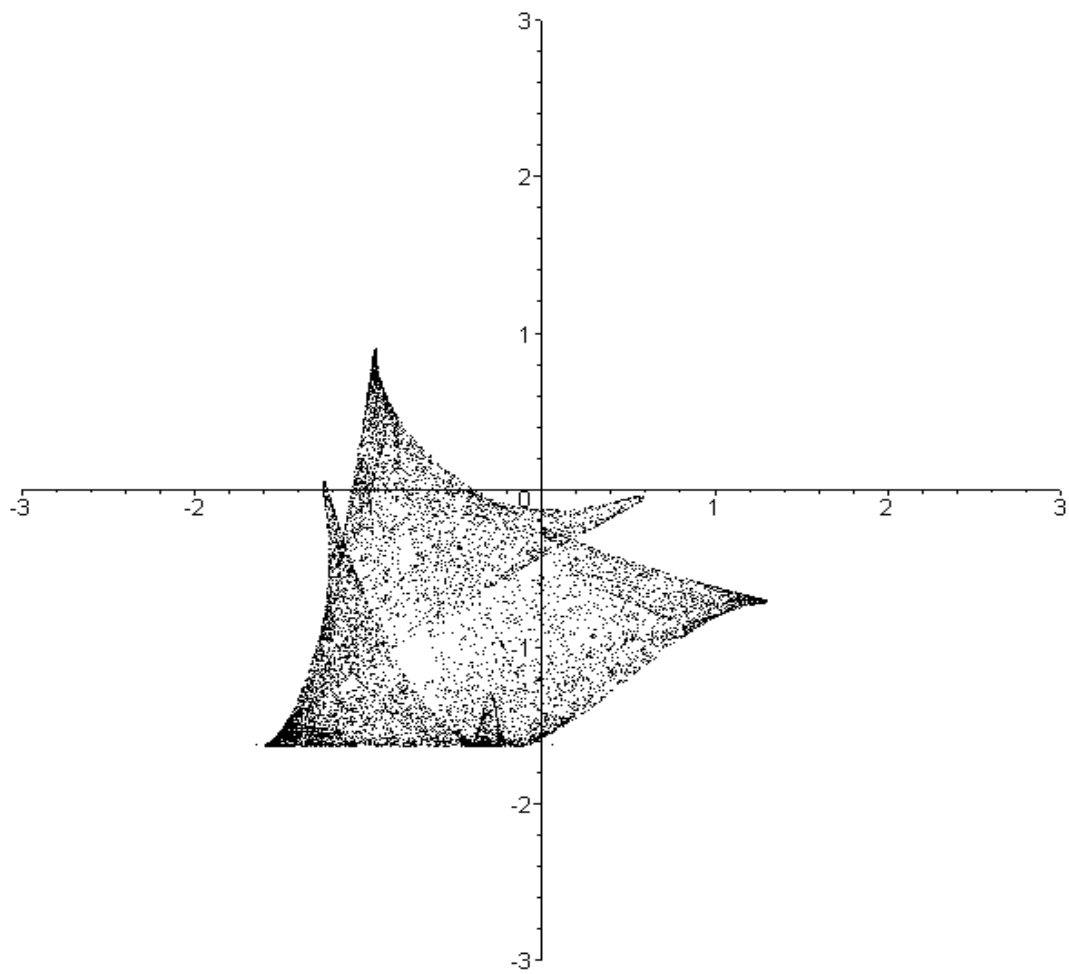
Figure(4.1.6.9) :Bassin multiplement connexe-bassin connexe pour $b = -1.35$



Figure(4.1.6.10) :Fractalisation de bassin d'attraction pour $b = -1.5$



Figure(4.1.6.11) :L'attracteur converge vers la frontière de sont bassin pour $b = -1.6$



Figure(4.1.6.12) : Attracteur Chaotique pour $b = -1.63$

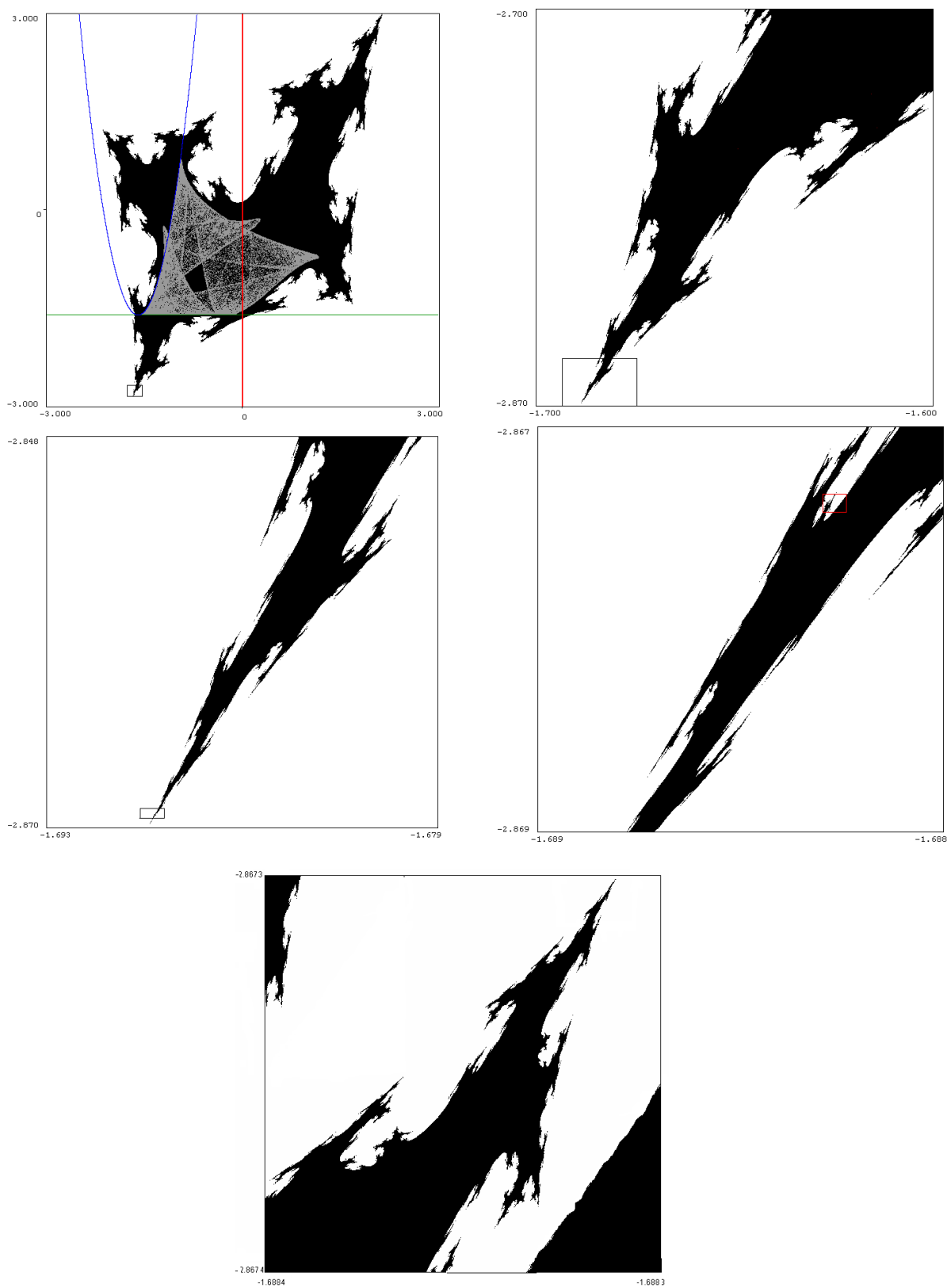


FIG. 4.1 – *Agrandissement et mise en évidence de l'autosimilarité*

4.2 Aire Absorbante et Aire Chaotique

Les solutions chaotiques d'une transformation ponctuelle du second ordre sont situées dans des domaines fermés du plan de phase, appelés zones chaotiques. Tous les ensembles limites attractifs d'un endomorphisme tels que point fixe, cycle, courbe invariante fermée ou solution chaotique sont localisés à l'intérieur de domaines du plan de phase appelés zones absorbantes.

Les aires absorbantes sont introduites pour expliquer les bifurcations globales d'attracteurs et leurs bassins d'attraction. ([GB00], [C03]).

Définition 4.2.1. *Aire Absorbante* ([RBC98], [GB00])

On appelle aire absorbante E , un sous-ensemble fermé borné du plan tel que :

- i) $T(E) \subseteq E$
- ii) Sa frontière ∂E est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques $LC, LC_1, LC_2, \dots, LC_k$, où $LC_i = T^i(LC)$, $i \geq 1$ sont les images de rang i de LC .
- iii) Il existe un voisinage U de E tel que $T(U) \subset U$, et tout point $x \in (U \setminus E)$ a une image de rang fini à l'intérieur de E .

Définition 4.2.2. *Attracteur Faible*

Soit X un sous ensemble compact de \mathbb{R}^n , et soit μ la mesure de Lebesgue dans X . Un sous-ensemble fermé A de X est dit attracteur faible si :

$$\mu(B(A)) > 0$$

où $B(A)$ est le bassin d'attraction de l'ensemble A .

Définition 4.2.3. *Attracteur de Milnor*

On dit que A est un attracteur de Milnor (ou au sens de Milnor) si A est un attracteur faible et pour tout sous-ensemble fermé A' strictement inclus dans A on a :

$$\mu(B(A) \setminus B(A')) > 0$$

Définition 4.2.4. *Attracteur minimal de Milnor*

On dit que A est un attracteur minimal de Milnor si A est un attracteur de Milnor et pour tout sous-ensemble fermé A' strictement inclus dans A on a :

$$\mu(B(A')) = 0$$

Lemme. ([AT00])

Si E est une région absorbante, alors E est un attracteur faible.

Remarque.([RBC98], [GB00])

- 1) *Une aire absorbante peut contenir un ou plusieurs attracteurs.*
- 2) *Une aire absorbante E est invariante ($T(E) = E$), s'il existe un entier m tel que :*

$$\partial E \subset \bigcup_{k=1}^m T^k(\gamma) \tag{1.16}$$

où ∂E est la frontière de E et $\gamma = E \cap LC_{-1}$.

- 3) *S'il n'existe pas d'entier m tel que la frontière ∂E soit incluse dans $\cup_{k=1}^m T^k(\gamma)$, l'aire absorbante E n'est pas invariante.*
- 4) *L'intersection $\cap_{n>0} T^n(E)$ est une aire absorbante invariante.*

Seules les aires absorbantes invariantes sont utiles, lorsqu'on considère des contacts entre les frontières d'aires absorbantes et les frontières de leurs bassins d'attraction. Les aires absorbantes non invariantes sont, dans cette situation, généralement sans conséquence sur les ensembles invariants (exemple : les attracteurs) qu'elles contiennent strictement.

Définition 4.2.5. Aire Absorbante Invariante Minimale

Une aire absorbante invariante minimale est la plus petite aire absorbante qui inclut un attracteur de Milnor.

Définition 4.2.6. Aire Chaotique

Une aire invariante A , est appelée aire chaotique, si elle est absorbante minimale d'une certaine aire absorbante E (c'est à dire $A = \cap_{k \geq 0} T^k(E)$) et si une dynamique chaotique a lieu dans A tout entier.

4.2.1 Détermination des Zones Absorbantes et Chaotiques

La méthode de détermination d'une zone absorbante consiste à effectuer des itérations successives par T d'un domaine fermé Λ , $\Lambda \subset D$, limité par des arcs de lignes critiques et de leurs antécédents ([C83], [C89], [C03], [BC87]).

Proposition 4.2.1.1. ([C83])

S'il existe N plus petit entier tel que $T^{N+1}(\Lambda) \subseteq T^N(\Lambda)$ et si les itérés d'un certain rang du domaine complémentaire de $T^N(\Lambda)$ dans D pénètrent dans $T^N(\Lambda)$, alors $T^N(\Lambda)$ est une zone absorbante.

Proposition 4.2.1.2. ([BC87])

Soit T un endomorphisme de type $Z_0 - Z_2$ et $a_0 = LC_{-1} \cap LC$. La frontière ∂E d'une aire absorbante E qui est formée d'arcs de lignes critiques est obtenue par itérations successives jusqu'à un certain rang d'un arc de LC , généralement l'arc $\widehat{a_0 a_1}$, avec $a_1 = T(a_0)$. Le rang d'itération est déterminé par le plus petit entier tel que $T(E) \subset E$.

4.2.2 Bifurcation des Zones Absorbantes et Chaotiques

Soit E une aire absorbante et ∂E sa frontière.

Définition 4.2.2.1. ([BC87])

On dit que $\beta = \beta^$ est une valeur de bifurcation de contact d'une aire absorbante E , si en $\beta = \beta^*$ un contact a lieu entre la frontière de E et la frontière de son bassin d'attraction.*

Autrement dit :

$$\partial E \cap \partial D \neq \emptyset$$

Proposition 4.2.2.2. ([GM80])

Lorsqu'une bifurcation de contact d'une aire chaotique A a lieu, pour une valeur du paramètre $\beta = \beta^$, la traversée de cette valeur conduit :*

- i) Soit à la destruction de A donnant lieu à un répulseur étrange.*
- ii) Soit à une modification qualitative des propriétés de A .*

4.2.3 Exemple et résultats numériques.

Soit le système dynamique généré par $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ définie par :

$$T : \begin{cases} x' = \alpha x(1 - x - y) \\ y' = \beta xy, \quad x > 0, \quad y > 0 \end{cases}$$

T est continue, différentiable et non inversible (Endomorphisme) de type $Z_0 - Z_2$.
 En effet, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (DT(x, y)) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, \alpha\beta x(1 - y) - 2\alpha\beta x^2 - \alpha\beta xy = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, x = \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Par application de T , on obtient la représentation paramétrique de LC

$$LC = T(LC_{-1}) = \left(\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} - t \right), \frac{\beta t}{2} \right)$$

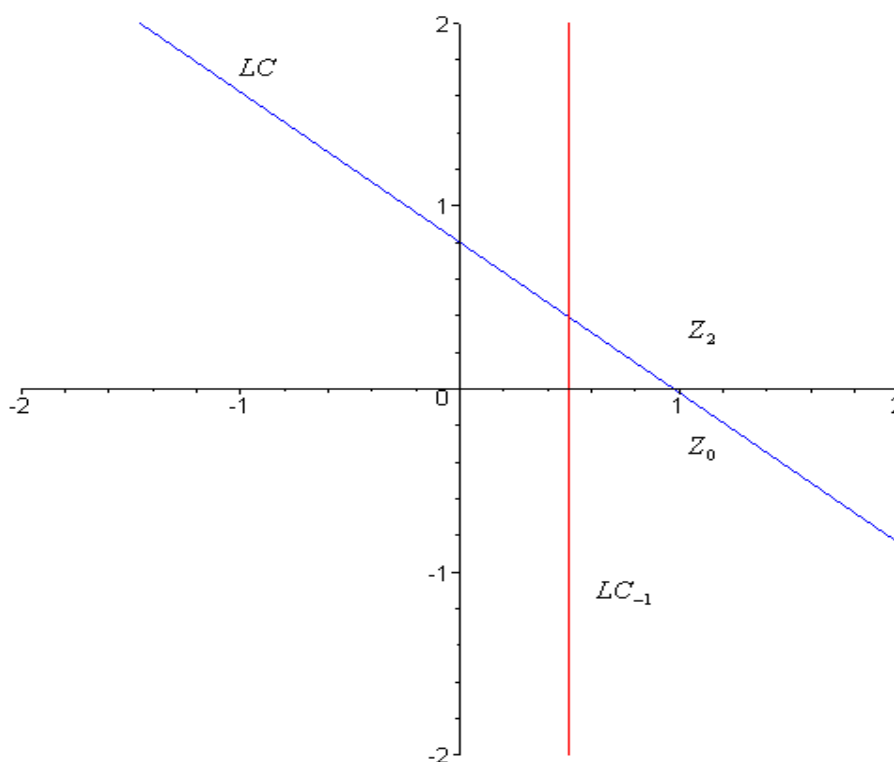


Figure (4.2.3.1) : Les Lignes critiques de T pour $\alpha = 3.9$, $\beta = 3.2$

La figure (4.2.3.2) représente dans le plan paramétrique (α, β) l'existence de cycles attractifs d'ordre 1 à 14. Les zones noires peuvent correspondre à l'existence d'attracteurs chaotiques, et les zones blanches correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase.

Nous fixons $\alpha = 3.9$.

i) Pour $3.2 < \beta < 4$, la solution du système est chaotique (voir la figure (4.2.3.3)), évolue de façon erratique dans une aire chaotique A dont le domaine d'attraction D est :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, y < 1 - x\}$$

ii) Pour $\beta = 3.6$, la frontière ∂A de la zone chaotique A , est obtenue par cinq itérations de l'arc $\widehat{a_0 a_1}$ de LC , avec $a_1 = T(a_0)$. Voir la figure (4.2.3.4).

iii) Pour $\beta = 3.998$, on a une bifurcation de contact entre la frontière du bassin d'attraction de l'attracteur chaotique d et la frontière de l'aire chaotique au point S (voir les figures (4.2), (4.3)). Cette bifurcation conduit à la destruction (disparition) de l'attracteur chaotique, donnant naissance à un répulseur étrange pour $\beta = 4.01$. Voir la figure (4.2.3.5).

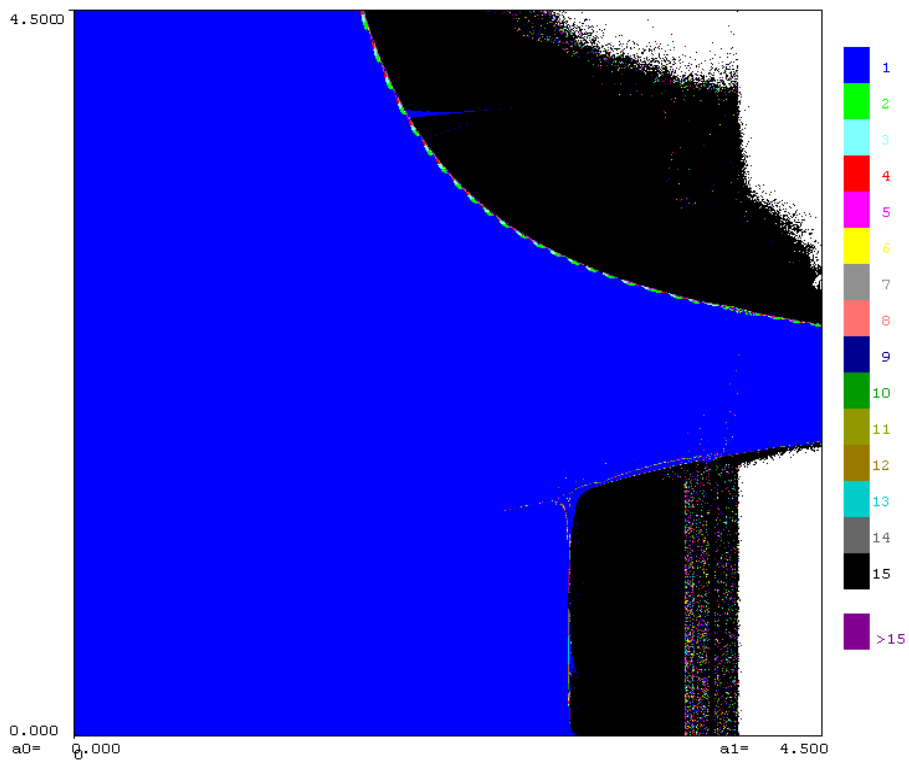


Figure (4.2.3.2) : Domaines de stabilité et d'existence des cycles.

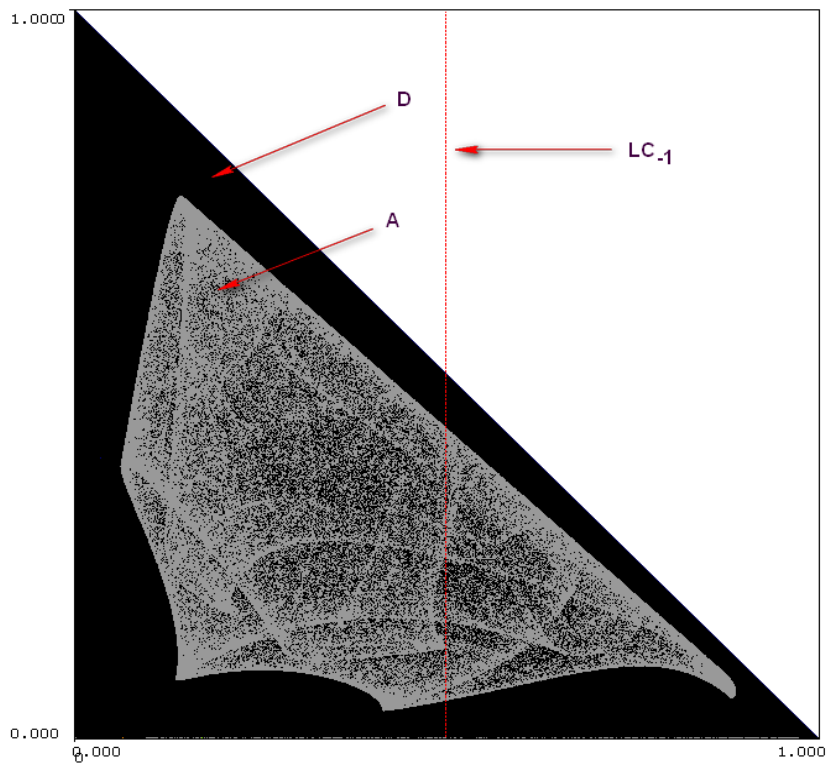


Figure (4.2.3.3) : Attracteur chaotique pour $\beta = 3.5$.

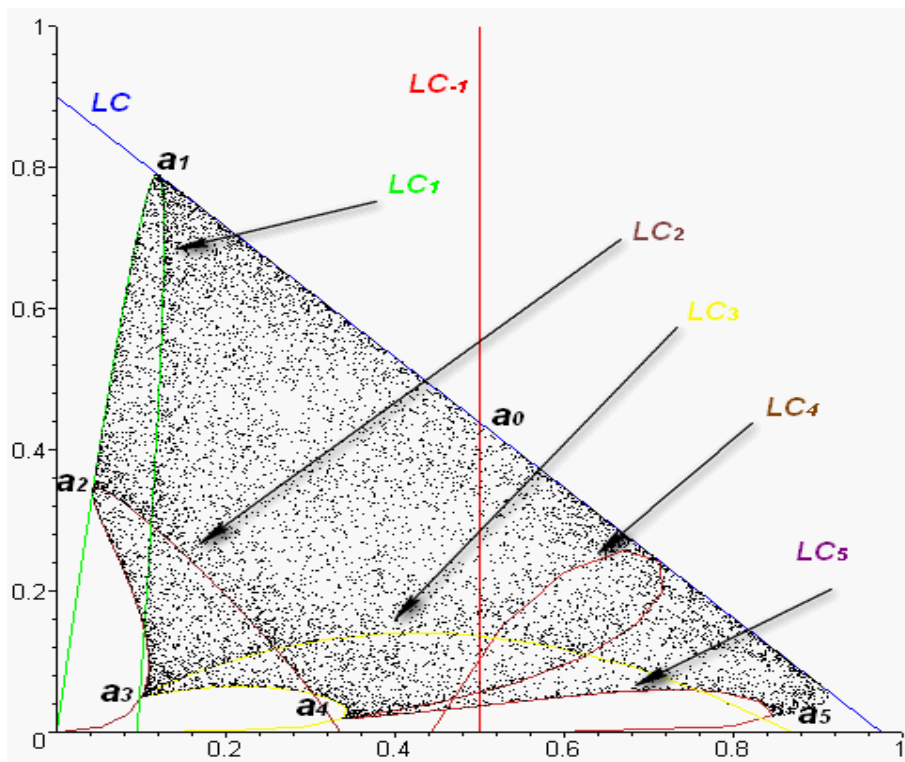


Figure (4.2.3.4) : Attracteur chaotique limité par les lignes critiques pour $\beta = 3.6$.

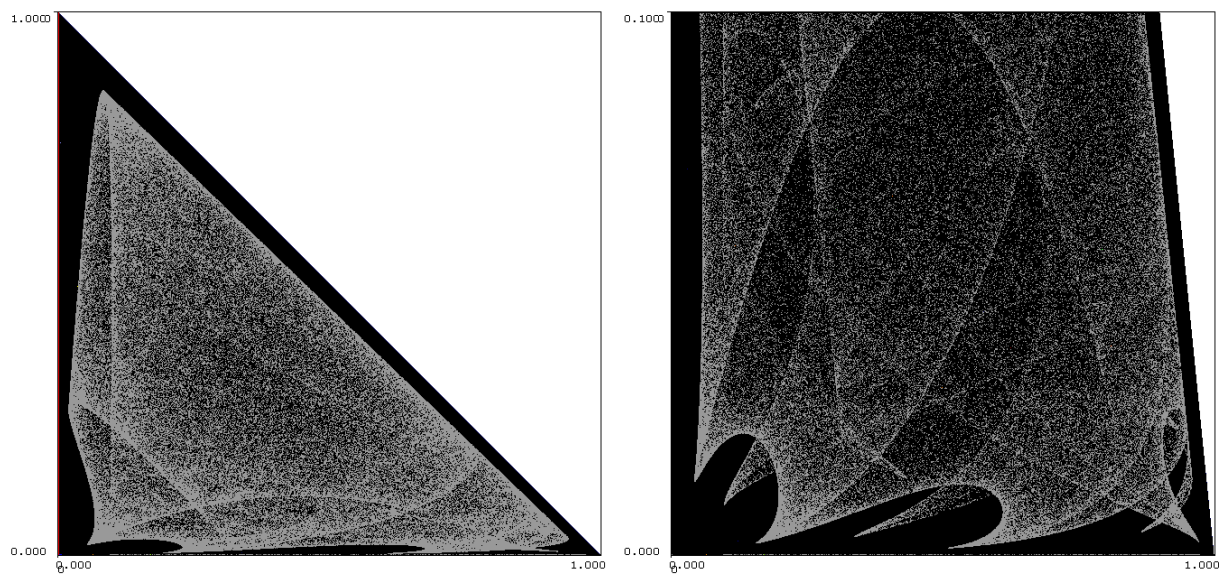


FIG. 4.2 – Convergence de l'attracteur vers la frontière de sont bassin pour $\beta = 3.85$

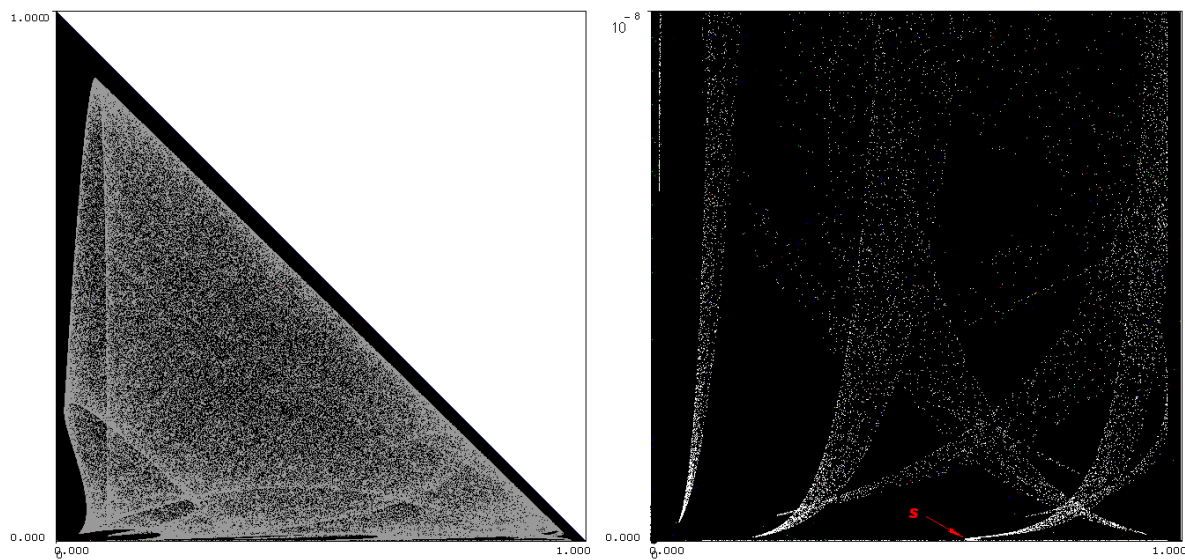


FIG. 4.3 – Bifurcation du contact pour $\beta = 3.998$

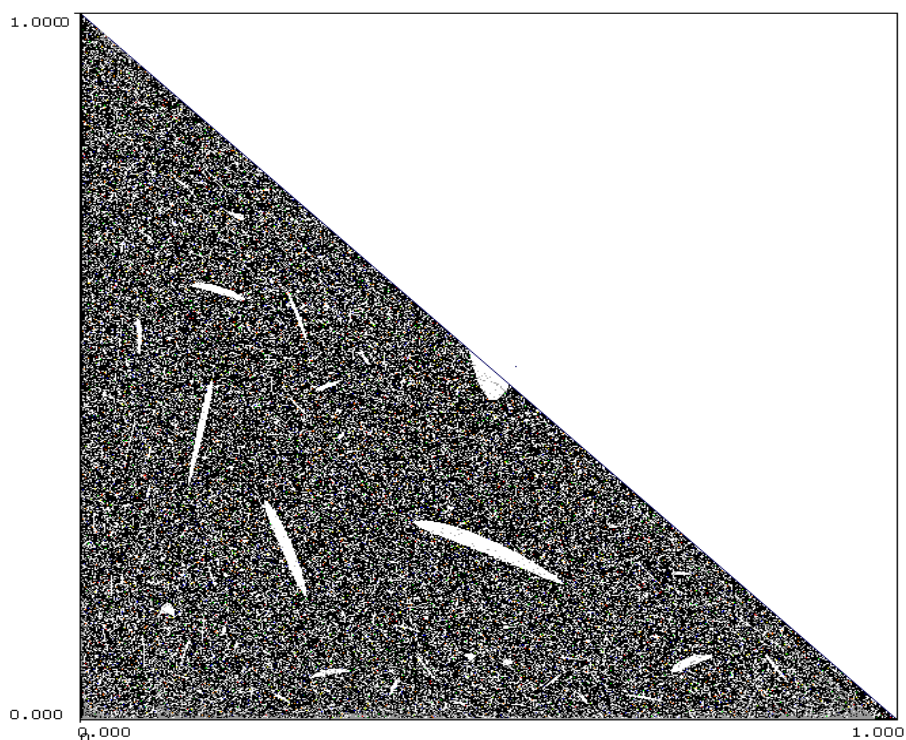


Figure (4.2.3.5) : Répulseur étrange pour $\beta = 4.01$.

4.3 Conclusion.

Nous avons montré dans ce chapitre que la fractalisation des bassins d'attraction résulte d'un contact entre une des lignes critiques et la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur. En effet, cette bifurcation est caractérisée par l'existence d'une baie H_0 par les déterminations inverses de l'endomorphisme qui induit une bifurcation du bassin de type (simplement connexe \rightleftharpoons multiplément connexe). Nous avons aussi montré que la destruction d'un attracteur chaotique (qui occupe une aire chaotique) est due à un contact entre la frontière de cette aire et la frontière de son bassin d'attraction.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, on s'est intéressé à la notion des systèmes dynamiques discrets, modélisé par des Endomorphismes bidimensionnels. Dans le premier chapitre, les concepts de base, indispensables à l'étude des systèmes dynamiques discrets ont été introduits. Nous avons vu que les singularités sont utilisées pour cerner la structure des solutions, les exposants de Lyapunov nous renseignent sur les propriétés de stabilité locale d'un attracteur, la notion de variété stable permet de déterminer la frontière de bassin d'attraction et la variété instable détermine l'aire absorbante mixte. On a aussi défini quelques bifurcations courantes : bifurcation noeud-col, bifurcation doublement de période et bifurcation Neimark-Hopf. L'étude de la succession des bifurcations permet de comprendre les mécanismes qui conduisent à l'apparition du chaos. C'est lors d'une étude météorologique que la théorie du chaos a été mise à jour. Les systèmes chaotiques ont un comportement infiniment complexe, et ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe : l'attracteur étrange.

Dans Le deuxième chapitre, la notion de Ligne Critique, qui joue un rôle central dans la théorie des systèmes dynamiques discrets, a été introduite. Elles interviennent dans la détermination des aires absorbantes et chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et leurs bassins d'attraction. Une courbe critique peut être constituée d'une ou de plusieurs branches. Ces branches séparent le plan en régions ouvertes, où tous les points d'une même région, ont le même nombre d'antécédents de premier rang.

Le troisième chapitre a été consacré pour introduire et étudier la notion de bifurcation d'une courbe invariante fermée ; cette bifurcation est importante car elle est responsable de la transformation de cette courbe en un attracteur chaotique. On a montré que les bifurcations des ensembles invariants sont dues à leurs intersections avec les lignes critique. Plus précisément, on a expliqué la formation d'auto-intersection intervenant pour une variété instable d'un col et l'apparition d'oscillation pour une courbe invariante fermée. Des algorithmes, des programmes (en maple) et des logiciels graphiques performants ont été réalisés afin de mener à bien ce travail.

Dans le dernier chapitre, l'étude des bifurcations de contact entre la frontière du bassin

d'attraction d'un attracteur avec les lignes critiques et les aires chaotiques ont été étudiées, elles interviennent dans la fractalisation des bassins d'attraction est la destruction de l'attracteur chaotique. Ces bifurcations ont été analysées pour les endomorphismes de type $Z_0 - Z_2$, qui est le cas basique pour d'autres types d'endomorphismes plus compliqués.

En guise de perspective, il serait intéressant de considérer des Endomorphismes autres que $Z_0 - Z_2$ et voir ce qui se passe en dimension trois. Il y a lieu aussi de mettre en oeuvre cette théorie dans le domaine des sciences appliquées tel que la transmission et le traitement des signaux, le cryptage d'information, etc...

Bibliographie

- [GM80] Gumowski, I. & Mira, C.[1980] ” *Dynamique Chaotique* ” (Ed. Cépadues, Toulouse).
- [GH83] J.Guckenheimer & P.Holmes.[1983] ” *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* ”. Springer Verlag, Berlin.
- [D89] R.L.Devaney.[1989] ” *Introduction to chaotic dynamical systems* ”. Addison-Wesley, second edition.
- [MGBC96] Mira C., L. Gardini, A. Barugola and J.C. Cathala [1996]. ” *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*”. World Scientific, Singapore, Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 20.
- [AT00] Ashwin, Peter. Terry, John R. [2000]” *On riddling and Weak attractors*” Physica D 142, 87 – 100.
- [M97] Millerioux, G. [1997].” *Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos*”. Thèse, Toulouse.
- [G91] Gardini L.,[1991] ” *On The Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines* ” Nonlinear Analysis TM,A. 18(4), p.361-399.
- [FOY83] Farmer, J & Ott, E and Yorke, J .[1983] ” *The Dimension of Chaotic Attractors* ” (North - Holland) Physica 7D 153-180.
- [C83] Cathala, J.C.[1983] ” *Absorptive Area and Chaotic Area in Two-Dimensional Endomorphisms* ” (Nonlinear Analysis), 7, n 2 147-160.
- [XU06] Jie, Xu [2006] ” *Etude de dynamiques chaotiques generées par des fonctions sinusoidales en vue d’application à la securité des transmissions*”, INSA de Toulouse.
- [MBL06] Mira, C. & Gian-Italo Bischi And Laura Gardini. [2006] “ *Basin Fractalization Generated By a Two-dimensional Family of $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ Maps*” International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 16, No. 3 647 – 669.
- [DK06] Djellit, I and Kara, A [2006] ” *One-Dimensional AND Two-Dimensional Dynamics of Cubic Maps*” Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society Volume 2006, Article ID 15840, Pages 1–13.
- [MFP94] Mira, C. & Fournier-Prunaret, D. [1994] “*Basin bifurcations of two di-*

- mensional noninvertible maps : fractalization of basins*” International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 4, No. 2 343 – 381.
- [MN93] Mira, C. & Narayaninsamy T, [1993] “*On two Behavious of Two-Dimensional Endomorphisms : Role of the Critical Curves*”, Vol. 3, No. 1 187 – 194.
- [F06] Ferchichi, M, R. [2006].” *Etude des Comportements Complexes de Systèmes Modélisés Par Des Endomorphismes Bidimensionnels*”. Thèse, Annaba.
- [MRO69] Mira, C. & Roubellat, J.C [1969] “*Cas où le domaine de Stabilité d’un Ensemble Limite Attractif d’une Récurrence du Deuxième Ordre n’est pas simplement Connexe*” Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A268, p. 1657 – 1660.
- [C89] Cathala, J.C.[1989] ” *On some properties of Absorptive Area in Two-Dimensional Endomorphisms* ” ECIT Batschuns, Sept. 89, Proceedings (World Scientific).
- [GB00] Gian-Italo Bischi And Laura Gardini. [2000] ” *Global Properties of Symmetric Competition Models with Riddling and Blowout Phenomena*” Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 5, pp.149-160
- [DC06] Djellit, I and Chouit, S [2006] ” *On critical curves in noninvertible maps*” Far East J. Appl. Math, Vol. 24, No. 1 (2006) 101-117
- [C03] Cathala, J.C.[2003] ” *About a New Class of Invariant Areas Generated By Two-Dimensional Endomorphisms*” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 4 (2003) 905-933
- [B84] Barugola, A.[1984] ” *Quelques propriétés des lignes critiques d’une récurrence du second ordre à inverse non unique. Détermination d’une zone absorbante.* ” R.A.LR.O., Analyse Numérique, Fr.(1984),18,n.2, pp. 137-151.
- [M89] C. Mira. [1989] ” *Chaotic Dynamics*” World Scientific Singapore, 1989.
- [M07] C. Mira. [2007] ” *Noninvertible maps*” Scholarpedia, 2(9) :2328
- [ABD05] Agliari Anna & Gian-Italo Bischi and Dieci Roberto [2005] ” *GLOBAL Bifurcations of Closed Invariant Curves In Tow-Dimensional Maps :A Computer Assisted Study*” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No. 4 (2005) 1285–1328.
- [AGM04] Anna Agliari, Laura Gardini and Christian Mira [2004] ” *Transition from a smooth basin boundary to a fractal one in a class of two-dimensional endomorphisms*” ITERATION THEORY (ECIT ‘02) J. Sousa Ramos, D. Gronau, C. Mira, L. Reich, A. Sharkovsky (Eds.) Grazer Math. Ber., ISSN 10167692 Bericht Nr. 346 (2004), 1-18.
- [MFGKC94] Mira C., Fournier-Prunaret D. , Gardini L., Kawakami H. and Cathala J.C., [1994] ” *Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps. Fractalization of basins*” International Journal of Bifurcation and Chaos, 4(2), 343 - 381.

- [BC87] Barugola A and Cathala J.C., [1987] ” *Sur les zones absorbantes et les zones chaotiques d’un endomorphisme bidimensionnel. Application à l’étude d’un système à données échantillonnées*” ANN. Télécommun, 42, No. 5-6, 1987.
- [RBC98] Ralph Abraham, Gian-Italo Bischi and Laura Gardini [1998] ” *Stairways to Chaos : some exemple for an experimental (visual, qualitative, geomitric). Introduction to one-dimensional and two-dimensional discrete dynamical systems* ” Urbino, Santa Cruz, November 1998.
- [MGL04] Christian Mira, Gian-Italo Bischi and Laura Gardini [2004] ” *About a route to fractalization of basins generated by noninvertible plane maps*” ITERATION THEORY (ECIT ‘02) J. Sousa Ramos, D. Gronau, C. Mira, L. Reich, A.N. Sharkovsky (Eds.) Grazer Math. Ber., ISSN 10167692 Bericht Nr. 346 (2004), 299-312
- [R90] S.N. Rasbaand [1990] ” *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systemes*” J. Wiley, New York.
- [J79] J.M. Greene [1979] J. Math. Phys. 20, 1183 (1979).
- [ABG02]₁ Anna Agliari, Gian Italo Bischi and Laura Gardini [2002] ” *1 Some Methods for the Global Analysis of Closed Invariant Curves in Two-Dimensional Maps*” Chapter 1 in Oligopoly and Complex Dynamics : Tools Models, T. Puu and I. Sushko (eds.), Springer Verlag.
- [ABG02]₂ Anna Agliari, Gian Italo Bischi and Laura Gardini [2002] ” *Some methods for the Global Analysis of Dynamic Games represented by Noninvertible Maps*” Chapter 3 in Oligopoly and Complex Dynamics : Tools Models, T. Puu and I. Sushko (eds.), Springer Verlag.
- [MS05] Christian Mira And Andre Shilnikov [2005] ” *Slow-Fast Dynamics Generated By Noninvertible Plane Maps*” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No. 11 (2005) 1509–3534.
- [C01] Cathala J. C. [2001] ” *On critical curves in two-dimensional endomorphisms*” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 11, No. 03 (2001) 821–839.