
*MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE*

**UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

Département de Mathématiques

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en
mathématiques**

Option : Analyse et probabilités

Par

KHOUFACHE Samir

THÈME

Problèmes inverses en EDP

Soutenu le: 02/12/2012 devant le jury composé de :

Megdouda OURBIH	Université A-Mira de Béjaia	Professeure
Fatah BOUHMILA	Université A-Mira de Béjaia	M.C.A
Hocine BECHIR	Université A-Mira de Béjaia	Professeur
Abdelnasser DAHMANI	Université A-Mira de Béjaia	Professeur

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur Fateh BOUHMILA pour la qualité et la complémentarité de son encadrement et de son soutien permanent .

J'adresse toute ma gratitude à Mme Megdoua OURBIH d'avoir accepté d'être présidente de ce travail ainsi qu'à Mr Hocine BECHIR et Abdelnasser DAHMANI pour leur participation à mon jury de soutenance.

Je remercie vivement tout les enseignants du département de Mathématiques qui ont su nous former et nous initier à la recherche .A vous tous un grand merci.

Mes collaborations avec H.BENYAHIA , R.BENMEZIANE et A.DJEMAA ont été très enrichissantes et m'ont beaucoup appris. Je leur en suis très reconnaissant.

Je profite de cette occasion pour remercier tous mes collègues de l'université de Abderrahmane Mira de Béjaia et ceux du collège de Boukhlifa (Taguemount) avec qui mes rapports durant ces trois années ont été aussi agréable qu'enrichissants :Ameur, Anis, Reda ,Hamdi ,Slimanou ,Rachid ,El hadj ,Slimane. Merci à tous.

Enfin je voudrais remercier mes parents à qui je dois mon goût pour la science depuis mon plus jeune âge .Mais surtout, ma pensée la plus tendre va à ma petite famille qui s'est tenue à mes côté durant ce travail. Nouria et nos trois enfants ,à qui je dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction	1
1 EXEMPLES DE PROBLEMES MAL POSES :	6
2 QUELQUES OUTILS DE BASES D'ANALYSE :	17
2.1 Analyse Vectorielle:	17
2.1.1 Fonction Scalaire ou "Champ Scalaire" :	17
2.1.2 Fonction vectorielle ou champ vectoriel:	18
2.1.3 Opérateurs Différentiels:	18
2.1.4 Champs de gradients "laplacien":	19
2.2 Espaces L^p et Espaces de Hölder:	19
2.2.1 Espaces $L^p(\Omega)$:	19
2.2.2 Espaces $L^p(a, b; X)$:	20
2.2.3 Les Espaces de Hölder :	21
2.2.4 Ouverts réguliers:	21
2.3 Distributions:	22
2.3.1 Produit de convolution :	23
2.3.2 Transformée de Fourier :	24
2.4 Espaces de Sobolev :	25
2.4.1 Les espaces H^s :	25
2.4.2 Les espaces $W^{m,p}$:	27
2.4.3 Les espaces $H^k(a, b; X)$:	28

2.4.4	Espaces de type H_Δ :	29
2.4.5	Inégalités de Poincaré:	30
2.5	Généralités sur les Equations aux Dérivés Partielles (EDP):	31
2.6	L'analyse numérique des EDP :	33
2.6.1	Principales méthodes de discrétisation :	34
3	REGULARISATION DES PROBLEMES MAL POSES:	42
3.1	Méthode des moindres carrés:	43
3.1.1	Conditionnement des problèmes de moindres carrés:	47
3.2	La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD):	51
3.3	La méthode de Tikhonov:	54
3.4	La méthode de régularisation de Fourier:	56
3.4.1	Problème de la chaleur rétrograde homogène :	56
4	APPLICATION: TRAITEMENT D'IMAGE.	63
4.1	Notions élémentaires sur les images:	63
4.1.1	Formats d'images matricielles:	64
4.1.2	Les différents types d'images:	64
4.2	Matlab et les images :	65
4.2.1	Les fonctions élémentaires en traitement d'image sur Matlab:	65
4.3	Traitement d'images:	66
4.3.1	Théorème fondamental (équation d'Euler-Lagrange):	67
4.4	Application :	71
4.4.1	Codes utilisés sur Matlab:	72
5	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES :	75
5.1	Conclusions :	75
5.2	Perspectives :	76
5.2.1	En propagation d'ondes :	77

Résumé

En ingénierie mathématiques, un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. On retrouve les problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes, restauration des images floues, ingénierie pétrolière, acoustique sous-marine, ... etc, dont la modélisation mathématique est formulée par des EDP.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des problèmes inverses en EDP. Nous présentons quelques méthodes de résolutions que nous illustrons par une application relative à la restauration d'images. Nous terminons le travail en proposant quelques pistes de recherche concernant la mécanique comme application mathématique à nos perspectives de recherche.

Mots clés :

Problème direct, Problème inverse, Régularisation, Moindres carrés, DVS, Tikhonov, Fourier, EDP.

Abstract

An inverse problem is a general framework that is used to convert observed measurements into informations about a physical object or system or, in other words, determine the causes knowing the effects.

Inverse problems arise in many branches of science ; complex systems, imaging problems, petroleum engineering, underwater acoustics,...

In this report, we are mostly interested in inverse problems in partial differential equations. We present some methods of resolution that we illustrate with an application in the imaging problems. We finish the work by providing some search perspectives on the mechanical applications.

Keywords:

Direct problem, Inverse problem, Regularization, Least squares, SVD, Tikhonov, Fourier, PDE.

Introduction:

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (où inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (où mesures) du phénomène. C'est également le contraire d'un problème direct. Autrement un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

On retrouve les problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques : l'imagerie médicale, le radar, la mécanique quantique, le traitement d'image (restauration d'images floues), le traitement de signal, l'ingénierie pétrolière, l'acoustique sous-marine.....etc.

Dans ce mémoire, nous s'intéresserons aux problèmes inverses en les équations aux dérivées partielles.

Le premier problème inverse date de 1932 et d'un fameux article de Hadamard (Mathématicien Français 1865/1963). Il s'agissait de reconstruire la solution du problème de Cauchy à partir de la condition initiale. Dès 1923, Hadamard a introduit dans son livre "Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations" la notion du problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe;
- elle est unique;
- elle dépend continûment des données.

Si l'une au moins des conditions précédentes n'est pas vérifiée, le problème est dit mal posé.

On peut formuler le problème comme suit :

$$A : X \rightarrow Y, \quad \text{où } X \text{ et } Y \text{ sont des espaces normés.}$$

$$\text{L'équation: } Ax = u \tag{0.1}$$

est dite bien posé si et seulement si :

- la solution x existe pour tout u de Y (surjectivité de A);
- elle est unique (injectivité de A);
- A^{-1} est continue.

Sinon le problème (0.1) est dit mal posé.

Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse . Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (se restreindre à $\text{Im}(A)$).

La non-unicité de la solution est un problème plus sérieux . Si un problème a plusieurs solutions , il faut un moyen de choisir entre elles . Pour cela il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

L'absence de continuité de A^{-1} est sans doute la plus problématique , de petites perturbations sur les données u peuvent engendrer de forts écarts sur la solution x .

On distingue deux types de problèmes inverses : linéaires et non linéaires. Les problèmes linéaires se ramènent en général à la résolution d'équations intégrales de première espèce. Par contre ,les problèmes non linéaires sont plus difficiles à résoudre et on les trouve souvent dans la pratiques.

Expliquons sur un exemple ce qu'est un problème inverse [1] :

Considérons une barre de fer rectangulaire que nous faisons chauffer à l'une de ces extrémités. La diffusion de la chaleur à l'intérieur de la barre est modélisée par un

problème aux limites pour une équation de la chaleur. Les questions à posés sont :
 Pouvons- nous déterminer le coefficient de diffusion en mesurant la température de la
 barre à l'autre extrémité? Combien de mesures sont-elles nécessaires pour s'assurer que
 nous déterminons le coefficient de diffusion de manière unique? Dans la pratique , nous
 souhaitons calculer ce coefficient. Nous commençons par remplacer le modèle continue
 par un modèle discret .Donc il vâ y avoir un problème de stabilité c'est- à -dire : comment
 pouvons nous contrôler les perturbations sur le coefficient de diffusion par les erreurs que
 faisons sur les mesures?

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 où \mathbb{R}^3 qui représente la barre de fer. Cet exemple peut-être
 modéliser par le problème aux limites suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{dans } \Omega \times \{0\}, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \partial_\nu u = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \end{array} \right. \quad (0.2)$$

Où f représente la source de chaleur sur la partie Γ_1 du bord de Ω , Γ_2 est le reste du
 bord et $a(x)$ est le coefficient de diffusion, supposé constant en fonction du temps.

Pouvons-nous alors déterminer le coefficient $a(x)$ à partir des mesures $u = g$, $M \times$
 $(0, T)$, M étant une partie de Γ_2 ?

Pour ce problème, nous examinons d'abord l'unicité (c'est à dire l'injectivité de l'application
 qui à a associe g). Nous nous intéressons ensuite à la stabilité. Plus précisément, nous
 souhaitons établir une estimation de la forme $d_1(a_1, a_2) \leq w(d_2(g_1, g_2))$, pour $d_1(a_1, a_2)$
 voisin de zéro, ou w est une fonction croissante , définie sur $]0, +\infty[$ et telle que $w(s) \rightarrow 0$
 quand s converge vers 0. Par d_1 et d_2 , nous désignons des distances définies respectivement
 sur l'ensemble des coefficients et l'ensemble des mesures.

Notons que , dû à l'effet régularisant des équations elliptiques et paraboliques , le
 module de continuité w , ici et dans la quasi-totalité des autres cas , est un logarithme où
 une puissance de celui ci. Il existe des exemples où il a été démontré que c'est optimal.

D'où la notion de problème mal-posé au sens de Hadamard. Pour cette raison, si nous souhaitons calculer a à partir de g , en minimisant par exemple une fonctionnelle de la forme

$$J(a) = \|u - g\|_{L^2(M \times (0,T))}^2$$

, nous devons utiliser une méthode de régularisation, par exemple de type Tikhonov (voir plus loin).

Concernant les mesures, il ya plusieurs possibilités. Nous pouvons par exemple remplacer ce qui précède par :

$$u(., t_i) = g_i, \text{ sur } M, \text{ avec } t_i, 1 \leq i \leq N, \text{ des points de } (0, T).$$

Nous pouvons aussi faire varier f . Nous nous donnons un ensemble J fini ou infini. Pour chaque $f_j, j \in J$, nous avons une mesure g_j . Dans ce cas le problème inverse consiste en la détermination de a à partir de l'application : $\Lambda : f_j \rightarrow g_j$.

Ce problème est un problème inverse dans lequel nous essayons de déterminer un coefficient. Il existe aussi d'autres types de problèmes inverses, par exemple les problèmes inverses géométriques (comme les problèmes de détection de corrosions, les problèmes de détection de fissures ou de cavités.....).

Il existe aussi une autre classe de problèmes inverses qu'on appelle problèmes spectraux inverses, le plus fameux d'entre eux concerne le problème de savoir si nous pouvons deviner la forme d'un tambour seulement en entendant les fréquences des vibrations qu'il peut produire.

Après cette introduction, nous consacrerons le premier chapitre aux exemples de problèmes mal posés, nous y aborderons : un problème historique, un problème stochastique et dix autres problèmes déterministes. Le deuxième chapitre sera consacré aux outils Mathématiques que nous utiliserons d'une manière directe où indirecte, on parlera principalement de l'analyse fonctionnelle et des équations aux dérivées partielles.

Le troisième chapitre sera réservé aux différentes méthodes de résolution des problèmes mal posés (Problème de MC, SVD, méthode de Tikhonov et la méthode de Fourier).

Enfin, le dernier chapitre sera réservé à une application d'un cas réel de problème inverse : traitement d'images (rétablir une image bruitée). Nous terminons ce mémoire avec une conclusion et quelques perspectives.

EXEMPLES DE PROBLEMES MAL POSES :

Ce chapitre est une sensibilisation aux conséquences des problèmes mal posés. Il y sera abordé un exemple historique, un exemple de problème bayésien et dix autres exemples de type déterministes.

Exemple 1 : "Problème de Didon et ville de Carthage"

A périmètre donné L , quelle est la plus grande surface S quand peut former avec ce périmètre L ?

Elissa a choisi une forme circulaire, ce qui correspond à la solution optimale du problème inverse (vers 814 av.JC).

Exemple 2 :

Les sondages sont des problèmes mal posés par nature. Pour connaître l'avis d'une population il est rare d'interroger l'ensemble de la population, sauf dans des cas où l'erreur est interdite (les présidentielles, référendum.....). Seul un échantillon est prélevé pour représenter l'ensemble de la population . Il n'est pas rare en France de représenter 60 millions d'habitants avec 1000 personnes. Le fait d'extrapoler l'avis de quelques personnes

est un problème inverse. Et il est par nature mal posé. Si l'échantillon ne contient que des doctorants, la représentation sera faussée. La connaissance à priori de la population (statut social, âge.....) est indispensable. Nous sommes ici dans une approche type bayésienne où les statistiques sont essentielles. Dans ce cas , il peut être plus judicieux de prendre un nombre de personnes bien choisi que de prendre aléatoirement un plus grand nombre. Il s'agit donc d'un compromis entre quantité et qualité de l'information.

Exemple 3 :

Le nombre de racines réelles du polynôme $p(x) = -x^2+x-m$ varie de façon discontinue quand m varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, deux racines réelles si $m \leq \frac{1}{4}$, et il n'y en a aucune si $m > \frac{1}{4}$.

Exemple 4 :

Soit à résoudre le système:

$$Ax = y, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On trouve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, prenons maintenant un second membre y_* très légèrement différent de y ,

$$\text{soit } y_* = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \text{ on vérifie alors que la solution de } Ax = y_* \text{ est } x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}.$$

On voit que de très petites perturbations sur y , ont conduit à de grandes variations sur x .

Dans cet exemple $\text{cond}(A) = 2984.0942$, (c'est le conditionnement de la matrice A est défini par $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, on choisi par exemple $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4). Ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesures ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement y . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de x .

Exemple 5 : [2]

L'équation:

$$\int_a^b K(x, t) z(t) dt = u(x) \quad \forall x \in (c, d), \quad (1.1)$$

s'appelle l'équation de Fredholm de première espèce, où K est le Noyau de l'opérateur A ,

A : Opérateur de Fredholm de première espèce. Elle constitue un problème mal posé. Une expression dans laquelle $z(t)$ est une fonction inconnue de l'espace F des fonctions continues sur (a, b) et $u(x)$ une fonction connue de l'espace U . Mentionnons au passage que l'équation de convolution est un cas particulier de cette équation fonctionnelle, $K(x, t)$ devenant $K(x, -t)$.

Ajoutons une hypothèse supplémentaire sur le noyau $K(x, t)$ qui est connu: c'est une fonction continue en x qui possède une dérivée partielle $\partial K(x, t)/\partial x$ également continue.

Montrons que le problème est mal-posé, supposons que pour un second membre $u_1(x)$, nous connaissions une solution exacte $z_1(t)$; on peut alors écrire: $\int_a^b K(x, t) z_1(t) dt = u_1(x)$. Maintenant supposons que l'on connaisse un second membre approché peu différent de $u_1(x)$ dans la métrique L^2 , et l'on se propose de rechercher une solution voisine de $z_1(t)$.

Considérons la fonction:

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t), \quad (1.2)$$

elle est solution de l'équation :

$$\int_a^b K(x, t) z_2(t) dt = u_2(x) \Leftrightarrow \int_a^b K(x, t) z_1(t) dt + \Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt = u_2(x)$$

$$\Leftrightarrow u_1(x) + \Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(wt) dt = u_2(x)$$

Dans une métrique quadratique μ_u que nous écrivons (U est l'espace des fonctions carrés sommables L^2) :

$$\begin{aligned} \mu_u(u_1, u_2) &= \left\{ \int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_c^d \left[\Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(wt) dt \right]^2 dx \right\} \\ &= |\Gamma| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, t) \sin(wt) dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

cette dernière expression peut être rendue aussi petite que l'on veut pourvu que w soit suffisamment très grand.

Calculons maintenant $\mu_u(z_1, z_2)$:

$\mu_u(z_1, z_2) = \left\{ \int_a^b [z_1(t) - z_2(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$, de (1.2) : $z_1(t) - z_2(t) = -\Gamma \sin(wt)$, on trouve:

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\int_a^b \sin^2(wt) dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

par une intégration par partie, nous obtenons :

$$\int_a^b \sin^2(wt) dt = \left[-\frac{1}{w} \sin(wt) \cos(wt) \right]_a^b + \int_a^b \cos^2(wt) dt, \text{ or } \cos^2(wt) = 1 - \sin^2(wt)$$

$$\text{d'où } \int_a^b \sin^2(wt) dt = \left[\frac{-1}{2w} \sin(2wt) + \frac{t}{2} \right]_a^b = \left[\frac{-1}{4w} \sin(2wt) + \frac{t}{2} \right]_a^b$$

$$= \frac{-1}{4w} \sin(2wb) + \frac{b}{2} + \frac{1}{4w} \sin(2wa) - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{4w} [\sin(2wb) - \sin(2wa)]$$

$$= \frac{b-a}{2} - \frac{1}{4w} [2 \cos w(b+a) \sin w(b-a)] = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{4w} [2 \cos w(b+a) \sin w(b-a)]$$

$$= \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2w} [\cos w(b+a) \sin w(b-a)] .$$

On trouve finalement :

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2w} [\cos w(b+a) \sin w(b-a)] \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Cette dernière expression montre que Γ et w peuvent être choisis de telle façon que la distance $\mu_u(z_1, z_2)$ puisse être arbitrairement grande.

Exemple 6 :

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution de ce problème est : $u(x) = 1 - e^x$.

Si la condition initiale est maintenant donnée par : $u(0) = \varepsilon$, la solution deviendra alors : $u_\varepsilon(x) = 1 - (1 - \varepsilon) e^x$. De sorte que la différence s'écrit : $u_\varepsilon(x) - u(x) = \varepsilon e^x$

Si x varie dans l'intervalle $[0, 30]$, on a $u_\varepsilon(30) - u(30) = \varepsilon e^{30} \simeq 10^{13} \varepsilon$.

Si la précision des calculs est de 10^{-10} , le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

Exemple 7 : [2]

Le calcul des séries de Fourier à coefficients approchés dans l_2 ;

Considérons une série de Fourier convergente que nous écrivons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) , \quad (1.4)$$

et supposons que chaque coefficient a_n soit entaché d'une erreur $\frac{\epsilon}{n}$ (à l'exception de a_0); nous écrivons : $c_n = a_n + \frac{\epsilon}{n}$ et $c_0 = a_0$. La fonction f est donc remplacée par la fonction g définie par:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx).$$

Dans la métrique de l_2 , les coefficients diffèrent de :

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon\pi/\sqrt{6}.$$

Par conséquent, ε_1 est aussi petit que l'on veut (par un choix approprié de la quantité de ϵ). D'autre part, si la distance entre les fonctions f et g est donnée par la norme de la convergence uniforme, nous avons :

$$\sup_x |f(x) - g(x)| = \sup \left| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \frac{\cos(nx)}{n} \right| = |\epsilon| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

cette dernière quantité est aussi grande que l'on veut (puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente).

Exemple 8 :

Changeons le signe dans l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \Delta u(x,t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = v(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.5)$$

L'équation différentielle est appelée,équation rétrograde de la chaleur.

Si $d = 1$ et $v(x) = n^{-1} \sin(nx)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, alors la solution est donnée par: $u(x,t) = n^{-1} e^{n^2 t} \sin(nx)$, vérifiée en la substituant dans l'équation.

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty} &= n^{-1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ \|u(x,t)\|_{\infty} &= n^{-1} e^{n^2 t} \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ce problème est mal posé.

En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé. Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal posé.

Exemple 9 :

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme problème direct. Et la différentiation est le prototype du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad (1.6)$$

Il est clair que A est un opérateur linéaire de $L^2(0,1)$. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous-espace vectoriel

$$\text{Im}(A) = \{ f \in H^1(0,1), u(0) = 0 \}$$

où $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev.

En effet, l'équation $Af = g \Leftrightarrow f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$.

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0,1)$ (bien entendu, elle dans $H^1(0,1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0,1)$, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons une fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit $g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2x)$.

Alors :

$$f_n(x) = g'_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2x).$$

$$\|g - g_n\|_2^2 = \int_0^1 |g_n(x) - g(x)|^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \sin^2(n^2x) dx = \frac{1}{2n^4} (n^2 + \sin n^2 \cos n^2),$$

(puisque $\int \sin^2(x) dx = \frac{\sin(x) \cos(x) + x}{2} + cste$),

$$\text{on trouve } \|g - g_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2} n^2} \sqrt{n^2 + \sin n^2 \cos n^2}$$

$$\text{d'où : } \|g - g_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2} n} \sqrt{1 + \frac{\sin(2n^2)}{2n^2}}$$

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^1 n^2 \cos^2(n^2x) dx = \frac{n^2 - \sin n^2 \cos n^2}{2}$$

$$\text{donc } \|f - f_n\|_2 = \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{\sin 2n^2}{4}}, \text{ d'où } \|f - f_n\|_2 = \frac{n}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin 2n^2}{2n^2}}$$

Ainsi, la différence entre f et f_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g et g_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal posés. Une petite perturbation sur les données (ici g) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici f).

Exemple 10 :

On considère le problème elliptique en dimension 1:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & \text{pour } x \in]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans cet exemple prenons $a(x) = x^2 + 1$, et la solution $u(x) = \frac{1-x^2}{2}$, ce qui donne $f(x) = 3x^2 + 1$.

Le problème direct consiste à calculer u , étant donnés a et f . Pour le problème inverse nous considérons que f est connue, et nous chercherons à retrouver le coefficient a à partir d'une mesure de u . Pour cet exemple, volontairement simplifié, nous supposons que l'on mesure u en tout point de l'intervalle $] -1, 1[$, ce qui est bien évidemment irréaliste.

En intégrant l'équation (1.7), et en divisant par u' , nous obtenons l'expression suivante pour a (en supposant que $u' \neq 0$, ce qui est faux sur notre exemple) :

$$a(x) = \frac{c}{u'(x)} - \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{-c}{x} + x^2 + 1 \text{ pour } x \neq 0, \text{ où } c \text{ est la}$$

constante d'intégration.

Nous voyons que, même dans ce cas particulier, a n'est pas déterminée par les données, c'est à dire u . Il est clair que la bonne solution correspond à $c = 0$, puisque c'est la seule valeur pour laquelle a est borné. Pour pouvoir discriminer parmi les différentes solutions possibles, nous avons du faire appel à une information supplémentaire (on parle généralement d'information a priori).

Il ya dans ce problème deux sources d'instabilité: tout d'abord l'équation fait intervenir u' , et nous venons de voir que le passage de u à u' est source d'instabilité. Il s'agit là d'un phénomène commun aux problèmes linéaires et non-linéaires. Par contre, la division par u' montre une instabilité spécifique des problèmes non linéaires. Si u' s'annule, la division est impossible. Si u' est simplement petit, la division sera cause d'instabilité.

Exemple 11 :

Soit le problème suivant :

$$Au = f \tag{1.8}$$

$A \in \mathcal{L}(H, F)$, H et F deux espaces de Hilbert .

Si A est compact et $R(A)$ non fermé alors le problème est mal posé.

$R(A)$ est non fermé implique A^{-1} est non borné, donc la troisième condition n'est pas satisfaite. Le problème reste mal posé.

Exemple 12 :

Considérons le problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace dans le cas bidimensionnel (l'exemple cité par Hadamard)trouver la solution de l'équation :

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad (1.9)$$

à partir des données initiales ,c'est à dire la solution vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.10)$$

f et φ étant des fonctions connues.

Si l'on pose $f_1(x) = 0$ et $\varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax$, le problème de Cauchy a pour solution la fonction:

$$u_1(x) = \frac{1}{a^2} \sin(ax)sh(ay), \quad a > 0.$$

Si l'on prend $f_2(x) = \varphi_2(x) = 0$, le problème de cauchy à pour solution la fonction $u_2(x, y) = 0$.

Calculons les écarts des données initiales et des solutions dans la métrique de la convergence uniforme:

$$\|f_1, f_2\|_\infty = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0$$

$$\|\varphi_1, \varphi_2\|_\infty = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{a} .$$

Cette dernière quantité peut être rendu aussi petite que l'on peut lorsque a est assez grand.

Or, l'écart des solutions :

$$\|u_1, u_2\|_\infty = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin(ax)sh(ay) \right| = \frac{1}{a^2} sh(ay), \quad (1.11)$$

pour tout $y > 0$ fixé, peut être arbitrairement grand quand a prend des valeurs suffisamment élevées.

Ce problème n'est pas stable, donc , il est mal posé.

Considérons maintenant, le problème de Cauchy qui consiste à trouver la solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty , \quad (1.12)$$

vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad \text{telle que } n \in \mathbb{N} . \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Il est clair que la solution de ce problème est la fonction:

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} sh(nt) \sin(nx) \quad (1.14)$$

Puisque $\left| \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n}$

La quantité $u_t(x, 0)$ sera partout aussi petite que l'on veut en module pour n suffisamment grand. Or la formule (1.14) montre que la solution $u(x, t)$ prendra des valeurs aussi grande que l'on veut pour $t > 0$ arbitrairement petit si n est assez grand.

Supposons qu'on a une solution $u_0(x, t)$ satisfaisant aux conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

La solution qui vérifiera les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) + \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

sera la fonction :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} sh(nt) \sin(nx). \quad (1.17)$$

On voit qu'une petite perturbation des conditions initiales entraîne une perturbation aussi grande que l'on veut de la solution du problème de Cauchy.

QUELQUES OUTILS DE BASES D'ANALYSE :

Avant d'aborder les problèmes inverses, nous aurons besoin de quelques outils mathématiques que nous traiterons en abrégé.

2.1 Analyse Vectorielle:

2.1.1 Fonction Scalaire ou "Champ Scalaire" :

Un champ scalaire est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , où $n = 2$ ou 3 .

Définition 2.1.1 (*gradient*)

Soit f un champ scalaire défini dans \mathbb{R}^3 . On appelle gradient de f et on note $\text{grad}(f)$ ou ∇f (nabla de f), le vecteur :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Exemples de champ scalaire:

- l'altitude;
- la température;
- la pression.

Définition 2.1.2 (*dérivée directionnelle*)

Soit V un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . On appelle dérivée directionnelle de f au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dans la direction de V le produit scalaire $\nabla f(M_0) \cdot V$

On utilise souvent la notion de dérivée normale sur le bord d'un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Notons n le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du domaine Ω en chaque point de son bord $\partial\Omega$. On obtient $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$

2.1.2 Fonction vectorielle ou champ vectoriel:**Définition 2.1.3** (*champs vectoriel*)

Un champ vectoriel est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , $p > 1$ généralement n et p sont égaux à 2 ou 3.

Exemples de champs vectoriels:

- la force de gravitation;
- le champ électrique;
- la vitesse d'un fluide.

2.1.3 Opérateurs Différentiels:**Définition 2.1.4** (*divergence*)

Soit V une fonction vectorielle de trois variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^3 et à valeurs X, Y, Z . On appelle divergence du vecteur V et note $\text{div}(V)$ ou $\nabla \cdot V$, le scalaire :

$$\text{div}(V) = \nabla \cdot V = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (2.2)$$

On écrit formellement $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (\nabla \cdot V)$

Définition 2.1.5 (*rotationnel*)

On appelle rotationnel d'un champ vectoriel V , le vecteur :

$$rot V = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

On écrit formellement :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = (\nabla \wedge V)$$

2.1.4 Champs de gradients "laplacien":

Si V est un champ de gradients c'est à dire si $V = \text{grad}(f)$ (on dit qu'il dérive d'un potentiel f), la divergence de V est:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Cet opérateur s'appelle le Laplacien et se note Δf .

2.2 Espaces L^p et Espaces de Hölder:

2.2.1 Espaces $L^p(\Omega)$:

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous rappelons que $L^1(\Omega)$ est l'espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

Pour $f \in L^1(\Omega)$, nous notons $\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$.

Nous rappelons aussi que $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ est l'espace :

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \}$, et que:

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et il existe } C > 0 \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$.

Avec les notations : $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, si $1 \leq p < \infty$,

et $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{ C ; |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$, il est bien connu que $L^p(\Omega)$

est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Pour $1 < p < \infty$, nous notons p' l'exposant conjugué de p , c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et pour $p = 1$, nous posons $p' = \infty$.

Théorème 2.2.1 (inégalité de Hölder)[1]

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ alors

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \quad (2.5)$$

2.2.2 Espaces $L^p(a, b; X)$:

Soient X un espace de Banach et $-\infty < a < b < +\infty$. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow X$ est dite simple s'il existe E_1, \dots, E_m des ensembles mesurables de $[a, b]$ et $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que:

$$f(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) x_i.$$

Nous dirons que $f : [a, b] \rightarrow X$ est mesurable s'il existe une suite de fonctions simples (f_k) , $f_k : [a, b] \rightarrow X$, telle que $f_k \rightarrow f$ p.p. sur $[a, b]$.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow X$ mesurable est dite intégrable (au sens de Bochner) s'il existe une suite de fonctions simples (f_k) , $f_k : [a, b] \rightarrow X$ telle que $\lim_k \int_a^b \|f - f_k\|_X = 0$

Dans ce cas, $\int f(t) dt$ est défini par : $\int_a^b f(t) dt = \lim_k \int_a^b f_k(t) dt$,

où $\int f_k(t) dt$ est défini de manière naturelle.

Théorème 2.2.2 [1]

$f : [a, b] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $\|f\|_X \in L^1(a, b)$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, nous posons:

$$L^p(a, b; X) = \{ f : [a, b] \rightarrow X \text{ intégrable telle que } \|f\|_X \in L^p(a, b) \}.$$

Muni de la norme $\|f\|_{L^p(a, b; X)} = \left(\int \|f\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}$ si $p < \infty$.

et $\|f\|_{L^p(a, b; X)} = \inf\{C; \|f(t)\|_X \leq C \text{ p.p. sur } [a, b]\}$ si $p = \infty$,

$L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach.

2.2.3 Les Espaces de Hölder :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Pour $0 < \alpha < 1$, nous dirons que $f \in C^0(\bar{\Omega})$ est Hölderienne d'exposant α si :

$$[f]_\alpha = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\} < \infty.$$

Nous notons :

$$C^\alpha(\bar{\Omega}) = \{f \in C^0(\bar{\Omega}); [f]_\alpha < \infty\}, \text{ muni de la norme: } \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + [f]_\alpha.$$

Plus généralement, $\forall k \geq 0$ entier, nous définissons l'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ par:

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}); \partial^\beta f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| = k\}.$$

Cet espace, muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq k} \|\partial^\beta f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| = k} [\partial^\beta f]_\alpha,$$

est un espace de Banach.

Si $T > 0$ est un réel donné et $Q = \Omega \times (0, T)$, $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q})$ désignera l'espace des fonctions $f \in C^0(\bar{Q})$ telles que :

$$[f]_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = \sup \left\{ \frac{|f(x, t) - f(y, s)|}{[|x - y|^2 + |t - s|]^\frac{\alpha}{2}}; (x, t), (y, s) \in Q, (x, t) \neq (y, s) \right\} < \infty,$$

et pour $k \geq 0$ entier nous posons:

$$C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) = \{f \in C^{2k,k}(\bar{Q}); \partial^\beta \partial_t^\gamma f \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}), (\beta, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}, |\beta| + 2\gamma = 2k\}.$$

$C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q})$ est un espace de Banach lorsque nous le munissons de la norme :

$$\|f\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q})} = \sum_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}, |\beta| + 2\gamma \leq 2k} \|\partial^\beta \partial_t^\gamma f\|_{C^0(\bar{Q})} + \sum_{(\beta, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}, |\beta| + 2\gamma = 2k} [\partial_x^\beta \partial_t^\gamma f]_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}.$$

2.2.4 Ouverts réguliers:

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ .

Ω est de classe C^∞ si Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul coté de Γ . C'est-à-dire $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞ , de bord Γ . Nous introduisons les notations :

$$Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |y'| < 1, -1 < y_n < 1\},$$

$$Q_+ = \{y = (y', y_n) \in Q; y_n > 0\},$$

$$Q_0 = \{y = (y', y_n) \in Q; y_n = 0\}.$$

D'après ce qui précède, si Ω est de classe C^∞ alors il existe O_1, \dots, O_k une famille finie d'ouverts bornés de \mathbb{R}^n recouvrant Γ telle que, pour chaque j , il existe φ_j un C^∞ -difféomorphisme de O_j sur Q vérifiant: $\varphi_j(O_j \cap \Omega) = Q_+$ et $\varphi_j(O_j \cap \Gamma) = Q_0$. De plus, si $O_i \cap O_j \neq \emptyset$, il existe un homéomorphisme $H_{ij} : \varphi_i(O_i \cap O_j) \rightarrow \varphi_j(O_i \cap O_j)$, de classe C^∞ et à jacobien positif, tel que $\varphi_j = H_{ij} \circ \varphi_i$ sur $O_i \cap O_j$.

Si nous remplaçons φ_j un C^∞ -difféomorphisme de O_j sur Q par φ_j est une bijection de O_j sur Q telle que φ_j et φ_j^{-1} sont lipschitziennes, pour tout j , alors Ω sera dit un ouvert lipschitzien.

En modifiant la régularité des fonctions φ_j , nous devinons aisément comment définir d'autres types de régularité de l'ouvert $\Omega : C^k, C^{k,\alpha}, k$ entier et $0 < \alpha < 1$, etc.

2.3 Distributions:

Définition 2.3.1

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, le support de φ noté $\text{supp}(\varphi)$ est défini comme suit: $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}$.

Notation:

C^∞ : C'est l'ensemble des fonctions Indéfiniment Dérivables.

Pour $K \subset \Omega$ compact, nous posons: $D_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(\varphi) \subset K\}$.

$D_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet quand il est muni de la topologie définie par la famille de semi-normes: $p_{K,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Soit $D(\Omega) = \cup D_K(\Omega)$, la réunion étant sur la collection de tous les compacts K de Ω . Nous notons que $D(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ qui sont à support compact.

Théorème 2.3.1 [3]

$D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Nous considérons maintenant $D'(\Omega)$, le dual topologique de $D(\Omega)$, le dual topologique de $D(\Omega)$. C'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.

Voici un critère simple qui permet de vérifier si une forme linéaire sur $D(\Omega)$ est continue.

Proposition 2.3.1 [3]

Une forme linéaire u sur $D(\Omega)$ est dans $D'(\Omega)$ si et seulement si, pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe une constante positive C et un entier positif k tels que: $|u(\varphi)| \leq C$

$\sup_{|\alpha| \leq k, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\varphi \in D_K(\Omega)$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ désigne un multi-indice, de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Si $u \in D'(\Omega)$, nous définissons $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$, $\varphi \in D(\Omega)$.

Vu la proposition précédente, il est clair que $\partial^\alpha u \in D'(\Omega)$.

Le plus souvent $C^\infty(\Omega)$ est noté $\varepsilon(\Omega)$; Nous rappelons que $\varepsilon(\Omega)$ est un espace de Fréchet quand nous le munissons de la topologie définie par la famille de semi-normes: $\|\varphi\|_{m,K} = \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, où m parcourt \mathbb{N} et K parcourt une famille dénombrable de compact croissants dont la réunion est égale à Ω .

Nous pouvons montrer que $\varepsilon'(\Omega)$, le dual topologique de $\varepsilon(\Omega)$, s'identifie au sous-espace de distributions de $\varepsilon'(\mathbb{R}^n)$ qui sont à support compact dans Ω .

Pour plus de détail sur la théorie des Distributions, il est conseillé de consulter : [3].

2.3.1 Produit de convolution :

Pour $k \geq 0$ entier, l'espace des fonctions de $C^k(\mathbb{R}^n)$ à support compact est noté $C_c^k(\mathbb{R}^n)$.

Le produit de convolution d'une fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ est donné par :

$$(f * g)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)} f(x-y)g(y)dy. \quad (2.6)$$

Un résultat classique concernant l'effet régularisant du produit de convolution est:

Théorème 2.3.2 [3]

Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$.

Si de plus $g \in C^l(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^{\alpha+\beta}(f * g) = \partial^\alpha f * \partial^\beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$ et $|\beta| \leq l$.

Théorème 2.3.3 [3]

Soient $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe un unique élément de $D'(\mathbb{R}^n)$, noté $u * v$ tel que:

$$(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

2.3.2 Transformée de Fourier :

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est donnée par:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Soit $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini. C'est-à-dire:

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Dans la suite, nous utiliserons l'opérateur de dérivation $D_j = -i\partial_j$.

L'espace $S(\mathbb{R}^n)$ est bien adapté pour la transformée de Fourier. En effet, nous avons le :

Théorème 2.3.4 [3]

L'opérateur $\varphi \rightarrow \mathcal{F}\varphi$ est un isomorphisme de $S(\mathbb{R}^n)$ sur $S(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie:

$$\mathcal{F}(D_j\varphi) = \xi_j\mathcal{F}\varphi \text{ et } \mathcal{F}(x_j\varphi) = -D_j\mathcal{F}\varphi$$

et nous avons la formule d'inversion: $\mathcal{F}^2\varphi = (2\pi)^n \tilde{\varphi}$, où $\tilde{\varphi}(\cdot) = \varphi(-\cdot)$.

Proposition 2.3.2 [3]

Soient $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Alors:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\mathcal{F}\psi,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\bar{\psi} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi\overline{\mathcal{F}\psi},$$

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}\varphi\mathcal{F}\psi,$$

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi.$$

Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, nous définissons $\mathcal{F}u$ comme étant l'unique élément de $S'(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie:
 $\mathcal{F}u(\varphi) = u(\mathcal{F}\varphi)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Nous définissons $\tilde{u} \in S'(\mathbb{R}^n)$ comme l'unique élément de $S'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\tilde{u}(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.3.5 [3]

$f \in S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}f \in S(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un isomorphisme sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, nous avons la formule de Parseval:

$$\int_{(\mathbb{R}^n)} f\bar{g} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\overline{\mathcal{F}g}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 2.3.6 [3]

a/ Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ alors $u * v \in S'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u\mathcal{F}v$.

b/ Si $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}u$.

2.4 Espaces de Sobolev :

2.4.1 Les espaces H^s :

Nous rappelons que $S'(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $S(\mathbb{R}^n)$.

Soit $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) ; (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

avec $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$.

Cet espace est muni d'une norme défini par $\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$,

cette norme est déduite du produit scalaire sur H^s ,

qui est défini par : $\langle u, v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}u(\xi) \overline{\mathcal{F}v(\xi)} d\xi$. Donc H^s est un espace

préhilbertien.

$\forall s \in \mathbb{R}$, H^s est un espace de Hilbert.

Démonstration:

Il suffit de montrer que H^s est complet.

Soit $(u_j)_j$ une suite de Cauchy de $H^s \Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq \eta(\epsilon) : \|u_p - u_q\|_s \leq \epsilon$.

$$\|u_p - u_q\|_s \leq \epsilon \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u_p(\xi) - \mathcal{F}u_q(\xi)|^2 d\xi \leq \epsilon^2$$

$\Rightarrow \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_j(\xi) \right)_j$ est de Cauchy dans L^2 , et comme L^2 est complet alors il existe $\mathcal{F}u_0 \in L^2$ telle que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_j(\xi) \rightarrow \mathcal{F}u_0$ dans L^2 ,

c'est-à-dire:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall p \geq \eta(\epsilon), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u_p(\xi) - \mathcal{F}u_0(\xi)|^2 d\xi \leq \epsilon^2$$

$(1 + |\xi|^2)^{-s} \mathcal{F}u_0(\xi) \in S'$, soit $v \in S'$ telle que $\mathcal{F}v(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s} \mathcal{F}u_0(\xi)$, alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall p \geq \eta(\epsilon), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u_j(\xi) - \mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi \leq \epsilon^2,$$

d'où u_j converge vers v dans H^s .

Théorème 2.4.1 [1]

i/ $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $H^t(\mathbb{R}^n)$ si $s \geq t$.

ii/ $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, pour tout s .

iii/ $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ étant identifié avec son dual, nous avons, pour tout $s > 0$, $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ coïncide algébriquement et topologiquement avec $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

2.4.2 Les espaces $W^{m,p}$:

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n de frontière Γ . Partant du fait que $L^1_{Loc}(\Omega)$ s'injecte dans $D'(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$,

nous définissons $W^{m,p}(\Omega)$ par: $W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega); \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \}$.

Remarque:

Si $m = 0$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Si $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert.

$W^{m,p}(\Omega)$ qui est muni de sa norme naturelle:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}, \text{ est un espace de Banach.}$$

Théorème 2.4.2 [1]

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et si $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors :

i/ $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ pour $p < n$, et dans $C^0(\bar{\Omega})$ pour $p > n$.

ii/ Il existe une constante $c = c(n, p)$ telle que, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} &\leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}, \text{ si } p < n \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq c |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}, \text{ si } p > n. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.3 [1]

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$.

i/ Si $m < p < n \Rightarrow W^{m,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{np}{n-mp}$, et l'injection de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q < p^*$.

ii/ Si $0 \leq k < m - \frac{n}{p} < q + 1$, k entier, alors $W^{m,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = m - \frac{n}{p} - k$, et l'injection de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ est compacte pour tout $\beta < \alpha$.

Nous rappelons aussi le théorème de trace:

Théorème 2.4.4 [1]

Nous supposons que Ω est borné et de classe C^k , $k \geq 1$. Alors l'application :

$$D(\bar{\Omega}) \rightarrow (D(\Gamma))^k$$

$$u \rightarrow (u, \partial_\nu u, \dots, \partial_\nu^{k-1} u)$$

se prolonge en une application encore notée $H^k(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

$$u \rightarrow (u, \partial_\nu u, \dots, \partial_\nu^{k-1} u)$$

linéaire continue. Cette application est surjective et il existe un relèvement linéaire continu:

$$R : g = (g_0, \dots, g_{k-1}) \in \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow Rg \in H^k(\Omega)$$

tel que: $\partial_\nu^j Rg = g_j$, $0 \leq j \leq k-1$.

Théorème 2.4.5 [1]

Soit Ω un ouvert quelconque . Si $u \in H^1(\Omega)$ alors $u^+ = \sup(u, 0)$, $u^- = \sup(-u, 0)$, $|u| = u^+ + u^- \in H^1(\Omega)$, et $\nabla u^+ = \chi_{[u>0]} \nabla u$, $\nabla u^- = \chi_{[u<0]} \nabla u$.

2.4.3 Les espaces $H^k(a, b; X)$:

Soit X un espace de Banach et $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Nous appelons distribution vectorielle sur (a, b) , toute application linéaire continue sur $D(a, b)$ dans X . C'est-à-dire:

$$D'(a, b; X) = L(D(a, b), X).$$

Soient $u \in D'(a, b; X)$ et $k \geq 0$ entier .L'application $\varphi \rightarrow (-1)^k u(\varphi^{(k)})$, $\varphi \in D(a, b)$, définie alors une distribution que nous notons $u^{(k)}$.

Pour $k \geq 1$ entier nous définissons $H^k(a, b; X)$ comme suit:

$$H^k(a, b; X) = \{u \in L^2(a, b; X) ; u^j \in L^2(a, b; X), j = 1, \dots, k\}.$$

$H^k(a, b; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{H^k(a,b;X)} = \left(\sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L^2(a,b;X)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Quelques formules d'intégration par parties:

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 , de frontière Γ . Une première formule classique d'intégration par parties est :

$$\int_{\Omega} \partial_i uv = - \int_{\Omega} u \partial_i v + \int_{\Gamma} uv v_i, \quad u, v \in H^1(\Omega). \quad (2.8)$$

De cette formule se déduisent aisément les suivantes :

$$\int_{\Omega} \Delta uv = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \partial_\nu uv, \quad u \in H^2(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega), \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta uv - u \Delta v) = \int_{\Gamma} (\partial_\nu uv - u \partial_\nu v), \quad u, v \in H^2(\Omega). \quad (2.10)$$

et, si $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$,

$$\int_Q (\Delta - \partial_t) uv - \int_Q u (\Delta + \partial_t) v = \int_{\Sigma} (\partial_\nu uv - u \partial_\nu v) - \int_{\Omega} [u(\cdot, T)v(\cdot, T) - u(\cdot, 0)v(\cdot, 0)] \quad (2.11)$$

pour $u, v \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$.

2.4.4 Espaces de type H_{Δ} :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ . Nous définissons l'espace $H_{\Delta}(\Omega)$ comme suit :

$H_{\Delta}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Muni de la norme

$$\|u\|_{H_{\Delta}(\Omega)} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$H_{\Delta}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'intérêt de cet espace réside dans le Théorème suivant:

Théorème 2.4.6 [1]

Nous supposons que Ω est de classe C^1 .

(1) (théorème de trace), l'application $\partial_\nu : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma) : u \rightarrow \partial_\nu u|_\Gamma$ se prolonge en une application continue, encore notée ∂_ν , de $H_\Delta(\Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$.

(2) (Formule d'intégration par parties) pour tout $u \in H_\Delta(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \Delta u v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \langle \partial_\nu u, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

2.4.5 Inégalités de Poincaré:

Soient $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $d = b - a$. Nous posons $\pi_d(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n; a \langle x, \xi \rangle \leq b\}$ et nous dirons que $\pi_d(\xi)$ est une bande d'épaisseur d dans la direction ξ .

Proposition 2.4.1 (inégalité de Poincaré)[4]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel qu'il existe une bande $\pi_d(\xi)$ avec $\Omega \subset \pi_d(\xi)$. Alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{d^2}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.12)$$

Dans le cas d'un domaine borné, nous avons l'inégalité de Poincaré suivante:

Proposition 2.4.2 [4]

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $\lambda_1(\Omega)$ la première valeur propre du Laplacien-Dirichlet.

Alors:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.13)$$

2.5 Généralités sur les Equations aux Dérivés Partielles (EDP):

Une EDP est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées:

$$F(x, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}) = 0, \text{ où } m \text{ est le}$$

degrés de l'équation.

Le problème est posé sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d (x \in \Omega)$, et les indices i_k varient entre 1 et d . On note $\partial\Omega$ la frontière de $\Omega : \partial\Omega = \bar{\Omega} / \Omega$.

On dit que u est solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si, après substitution de u et de ses dérivées partielles, F s'annule pour tout $x \in \Omega$.

L'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si F est linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles.

Une équation aux dérivées partielles d'ordre n est dite quasilinéaire si F est linéaire en toutes les dérivées partielles d'ordre le plus élevé, c'est-à-dire d'ordre n .

PROPRIETES:

1- Si u_1 et u_2 sont deux solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire homogène, alors pour α_1 et α_2 des réels quelconques, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est aussi solution ;

2- Si u_h est solution de l'équation linéaire homogène et u_p est solution de l'équation linéaire non homogène, alors $u_h + u_p$ est solution de l'équation complète.

La solution générale d'une équation aux dérivées partielles est celle qui permet de trouver toutes les solutions de l'équation en donnant des valeurs particulières aux fonctions arbitraires.

Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

1/ Conditions initiales: Si u est fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ on donne :

$u(x, t_0) = \phi_0(x)$ où $\frac{\partial^p u(x, t_0)}{\partial x^p} = \phi_p(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy.

2/ Conditions au bord: Si u est fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ on a trois types de contraintes:

- Conditions de Dirichlet où u est fixé sur le bord de Ω : $u|_{\partial\Omega} = g$;
 - Condition de Neumann où la dérivée normale de u est fixé : $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g$;
 - Conditions de Robin où Mixtes : $c(x)u + \bar{c}(x)\frac{du}{dn} = g$ sur $\partial\Omega$;
- si $g = 0$ on a des conditions homogènes au bord .

3/ Conditions à l'infini: Si Ω n'est pas borné on a des conditions de la forme $u(x) \sim \phi(x)$ quand $|x| \rightarrow \infty$ où $\|u\|_2 < \infty$.

4/ Conditions sur les interfaces: Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$,et si l'on a déterminé u sur Ω_1 et Ω_2 ,alors pour pouvoir définir u sur Ω on a des conditions sur u ,resp. $\frac{du}{dn}$,sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, scalaire, d'ordre deux est :

$$au + c.\nabla u + \text{div}(A\nabla u) = f. \quad (2.14)$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les coefficients de l'EDP. Dans le cas où u est scalaire ($d = 1$) et les coefficients sont constants ,on obtient:

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \xi u = f \quad (2.15)$$

, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$ sont des scalaires.

On dit que l'équation (2.15) est :

- Elliptique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$;
- Parabolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$;

- Hyperbolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Il est plus important d'avoir en tête des exemples d'EDP appartenant à chacune de ces classes, plutôt que d'essayer à chaque fois de formaliser dans le détail cette classification.

Quelques exemples:

a/ Equation Elliptique:

l'équation de Laplace (où Poisson) posée sur Ω : $-\Delta u = f$.

b/ Equation Parabolique:

l'équation de la chaleur posée sur $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$: $\partial_t u - \Delta u = f$.

c/ Equation Hyperbolique:

l'équation des ondes posée sur $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$: $\partial_{t,t} u - \Delta u = f$.

2.6 L'analyse numérique des EDP :

Pour aborder le calcul numérique des solutions d'un problème réel, on passe par les étapes suivantes :

1- Description qualitative des phénomènes physiques. Généralement cette étape est effectuée par des spécialistes des phénomènes que l'on veut étudier

(ingénieurs, biologistes, chimistes,.....);

2- Modélisation. Il s'agit, à partir de la description précédente, d'écrire un modèle Mathématique. On supposera ici que le modèle amène à un système d'EDP;

3- Analyse mathématiques. Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle, il est important d'en étudier les propriétés mathématiques, dans la mesure du possible;

4- Discrétisation et résolution numérique. Un problème posé sur un domaine continu (espace-temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour ce ramener à un problème en dimension finie, on discrétise l'espace et / où le temps;

5- Analyse numérique. Une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si la solution de ce problème est proche, et en quel sens, du problème continue.

De même, si on doit mettre en oeuvre une méthode itérative pour le traitement des non-linéarités, il faut étudier la convergence de la méthode itérative proposée;

6- Mise en oeuvre, programmation et analyse des résultats.

2.6.1 Principales méthodes de discrétisation :

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation ,parmis les plus connus, nous citons :

- Méthodes de différences finies et volumes finis;
- Méthodes variationnelles, méthodes d'éléments finis;
- Méthodes spectrales.

Dans ce présent travail ,on s'intéressera aux méthodes des différences finies.

Présentation de la méthode de différence finis :

La méthode de différences finies permet de calculer une approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles en des points qui sont distribués sur une grille. L'objectif est alors de construire des approximations des dérivées des fonctions intervenant dans l'EDP à l'aide de valeurs discrètes de celle-ci, par le biais de formules de Taylor.

Utilisons d'abord cette méthode pour un exemple simple d'un problème elliptique en dimension 1 :

On considère le problème unidimensionnel :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in]0 ; 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

où $f \in C(]0, 1[)$.

Les conditions aux limites considérées ici sont dites de type Dirichlet Homogène. Cette équation modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace.

1ère étape: choix de la discrétisation, maillage.

Soit $(x_k)_{k=0,\dots,N+1}$ une subdivision de $[0, 1]$, avec $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} = 1$ pour $i = 0, \dots, N$, on note $h_i = x_{i+1} - x_i$ et on définit le pas du maillage par $h = \max_{i=0,\dots,N} h_i$. Pour simplifier les choses, on prend un pas constant $h_i = h \forall i$. La première étape de discrétisation consiste à remplacer le problème (2.16) par:

$$\begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i), \forall i = 1, \dots, N. \\ u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

2ème étape: construction d'un schéma numérique.

Maintenant, effectuons un développement de Taylor en x_i :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i),$$

$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i)$, avec $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, en additionnant, on obtient :

$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \theta(h^2)$, d'où $-u''(x_i)$ peut être approché par le quotient différentiel suivant : $\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$, et on obtient le problème discret suivant : trouver $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

avec les notations : $f_i = f(x_i)$, $u_i = u(x_i)$.

Dans notre cas le schéma sera dit centré car il fait intervenir $i - 1$ et $i + 1$, d'où une symétrie par rapport à l'indice i .

3ème étape : passage au problème matriciel.

On va écrire (2.18) sous forme d'un système matriciel. On pose $U_h = (u_1, \dots, u_N)^t$ et on prend en compte les conditions aux limites $u_0 = u_{N+1} = 0$, le problème (2.17) est équivalent au système suivant:

$$A_h U_h = F_h \quad (2.19)$$

$$\text{avec } U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix} \quad \text{et } A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}, F_h \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } F_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Le système $A_h U_h = F_h$ admet une unique solution, en effet ,

La matrice A_h est évidemment symétrique ($A_h^t = A_h$), montrons qu'elle est définie positive :

$$\text{Soit } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix}, \text{ on posons } v_0 = v_{N+1} = 0, \text{ calculons } v^t A_h v = \langle A_h v, v \rangle,$$

$$v^t A_h v = \frac{1}{h^2} (v_1, \dots, v_N) A_h \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_i (2v_i - v_{i-1} - v_{i+1})$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^{i=N} 2v_i^2 + \sum_{i=1}^{i=N} -v_i v_{i-1} + \sum_{i=1}^{i=N} -v_i v_{i+1} \right],$$

on change d'indice pour le dernier terme, on trouve

$$v^t A_h v = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^{i=N} 2v_i^2 + \sum_{i=1}^{i=N} -v_i v_{i-1} + \sum_{j=2}^{j=N+1} -v_{j-1} v_j \right],$$

or:

$$v_0 = v_{N+1} = 0, v^t A_h v = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} 2v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} -2v_i v_{i-1} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} 2v_i^2 - 2v_i v_{i-1}$$

$$\left(\text{remarquons que } \sum_{i=1}^{i=N} v_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=N} v_{i-1}^2 \right) + v_N^2 \right)$$

D'où

$$v^t A_h v = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_i^2 + v_{i-1}^2 - 2v_i v_{i-1}) + v_N^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2,$$

on a bien $v^t A_h v \geq 0, \forall v = (v_1, \dots, v_N)^t \in \mathbb{R}^N$.

Il reste à vérifier que si $v^t A_h v = 0$ alors $v = 0$, en effet :

$$v^t A_h v = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - v_{i-1})^2 + h^2 v_N^2 = 0 \Rightarrow v_i - v_{i-1} = 0 \forall i \text{ et}$$

$$v_N = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_N = v_{N+1} = v_0 = 0.$$

Puisque $v^t A_h v \geq 0, \forall v$ et $v^t A_h v = 0 \Rightarrow v = 0$, alors A_h est définie positive.

Donc A_h est inversible, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution du système $A_h U_h = F_h$.

Maintenant, il reste à voir si on a la convergence de U_h vers u et en quel sens ?

Définition 2.6.1 (*erreur de consistance*)

On appelle erreur de consistance (R) d'un schéma numérique la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte u dans le schéma numérique. En particulier, pour le schéma (2.18), on a $R = A_h U - F_h$. Ainsi l'erreur de consistance r_i au point x_i (i -ème coordonnée de R) est donnée par :

$$r_i = \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} - f(x_i). \quad (2.20)$$

L'erreur de consistance r_i est donc l'erreur qu'on commet en remplaçant l'opérateur $-u''(x_i)$ par le quotient différentiel $\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2}$.

Définition 2.6.2 (*ordre d'un schéma*)

On dit qu'un schéma numérique à N points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, indépendante de la solution exacte, telle que l'erreur de consistance satisfasse: $\max_{i=1, \dots, N} |r_i| \leq c h^p$, où h est le pas de maillage défini déjà ($h = \max_{i=0, \dots, N} h_i$).

On dit qu'un schéma de discrétisation est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i=1, \dots, N} |r_i| = 0 \tag{2.21}$$

Si la solution exacte u de (2.16) vérifie $u \in C^4([0; 1])$ alors le schéma (2.18) est consistant d'ordre 2. Précisément, on a :

$$|r_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0; 1]} |u^{(4)}(x)|, \forall i = 1, \dots, N.$$

Démonstration:

Par développement de Taylor, on a :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i), \text{ où } \xi_i \in [0, 1] \text{ et}$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i), \text{ où } \eta_i \in [0, 1].$$

En additionnant, on obtient :

$$\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)) = u''(x_i) + \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)),$$

$$\text{ce qui entraîne que } \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)) - u''(x_i) = \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)),$$

or comme u est la solution exacte de (2.16) on a $-u''(x_i) = f(x_i)$

$$\text{donc } r_i = \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)) \text{ d'où } |r_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0; 1]} |u^{(4)}(x)|, \forall i = 1, \dots, N.$$

Le schéma numérique (2.18) est stable pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par $\|U\|_\infty = \max \{|U_i| \mid i = 1, \dots, N\}$. En particulier, A_h satisfait : $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

Définition 2.6.3 (*erreur de discrétisation*)

Pour un schéma numérique $A_h U_h = F_h$ du problème (2.16), On appelle erreur de discrétisation (où de convergence) le vecteur $e \in \mathbb{R}^N$ dont les coefficients sont : $e_i = u(x_i) - u_i$, $\forall i = 1, \dots, N$, où u est la solution exacte de (2.16). De plus, on dit que le schéma numérique converge en norme $\| \cdot \|$ si l'erreur de discrétisation tend vers 0 en norme $\| \cdot \|$ lorsque le pas h tend vers 0.

Soit u la solution exacte de (2.16).

On suppose $u \in C^4([0; 1])$, soit U_h la solution du schéma numérique (2.18)

alors l'erreur de discrétisation satisfait $\|e\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty$.

Le schéma est donc convergent en norme $\|\cdot\|_\infty$ et est d'ordre 2.

Démonstration:

On pose $U = (u(x_1), \dots, u(x_N))^t$. Alors, $\|e\|_\infty = \|U - U_h\|_\infty$, de la définition de l'erreur de consistance R , on a $R = A_h U - F_h = A_h(U - U_h)$ car $A_h U_h = F_h$, d'où $U - U_h = A_h^{-1} R$ et d'après le lemme et la proposition ci-dessus: on obtient

$$\|e\|_\infty = \|A_h^{-1} R\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \cdot \|R\|_\infty = \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty.$$

Remarque:

L'ordre de convergence du schéma est important pour comparer différents schémas. Le pas h étant petit (donc inférieur à 1), la quantité h^p est d'autant plus petite que p est grand. Ainsi l'ordre de convergence d'un schéma détermine sa vitesse de convergence.

Cas de dimension supérieure à 1 :

Le principe est le même que celui de la dimension 1, la seule différence réside dans l'écriture. On traitera le cas de la dimension 2, le cas de dimensions supérieures se traitent de manière analogue.

On cherche à résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega =]0, 1]^2, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.22)$$

où $u = u(x, y)$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ et $\partial\Omega$ est le bord de Ω .

On commence par définir un maillage de Ω . On pose $x_i = ih$ et $y_j = jh$ où $0 \leq i, j \leq N + 1$ et $N \in \mathbb{N}$.

On détermine $u_{i,j}$ qui approche $u(x_i, y_j)$. Par le développement de Taylor, on a:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \theta(h^3), \\ \partial_y^2 u(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2} + \theta(h^3). \end{aligned}$$

Un schéma numérique possible est alors de considérer l'approximation suivante de $\Delta u(x_i, y_j)$:

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}.$$

Le problème discrétisé est : trouver $u_{i,j}$ tels que :

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f(x_i, y_j) & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N. \end{cases} \quad (2.23)$$

Ensuite, on écrit (2.23) sous forme matricielle, on pose

$U_h = (u_{11}, \dots, u_{1N}, u_{21}, \dots, u_{2N}, \dots, u_{NN})^t$. Alors le problème discrétisé s'écrit: $A_h U_h = F_h$,

où $A_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ et $F_h \in \mathbb{R}^{N^2}$ sont donnés par :

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C & B & C & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C \\ 0 & \dots & \dots & \dots & C & B \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$F_h = (f(x_1, y_2), \dots, f(x_1, y_N), f(x_2, y_1), \dots, f(x_N, y_N))^t$$

$$\text{avec } B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ et } C = I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Tout les résultats de consistance, stabilité et convergence du cas de la dimension 1 s'adaptent sans modifications majeur.

Remarque:

Quand la fonction u de l'edp dépend du temps, exemple l'équation de chaleur quand

peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = 0 \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \text{où } x \in [0, 1], \quad t > 0 \text{ et } \mu \text{ une constante.}$$

Pour discrétiser le domaine $[0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, on introduit un pas d'espace $h = \Delta x = \frac{1}{N} > 0$ et un pas

$k = \Delta t = \frac{1}{M} > 0$ avec N et M deux entiers positifs. On obtient un maillage régulier, en définissant les noeuds $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ où $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq M$.

Longtemps, on a pensé que l'étude des problèmes mal posés n'avait pas d'intérêt et que tout problème mathématique "vrai" devait vérifier les trois conditions d'Hadamard (c'est-à-dire l'existence d'une solution, son unicité et la stabilité de celle-ci vis-à-vis de petites perturbations des données du problème). En fait, J. Hadamard a proposé de classer les problèmes selon qu'ils soient bien posés ou mal posés. Il a suggéré que les problèmes mal posés soient reformulés si possible en problèmes bien posés et que seuls ces derniers pouvaient être traités mathématiquement. Malheureusement dans la pratique cette reformulation n'est pas toujours possible. Il faut donc trouver une méthode qui dépende d'hypothèses réalistes stabilisant la solution du problème. Une telle méthode est dite de régularisation.

Pour régulariser un problème mal posé, on distingue deux types de méthodes:

Méthodes directes:

Il existe plusieurs méthodes, comme :

- méthode des Moindres Carrés;
- méthode de la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD);

- méthode de Tikhonov (proposée en 1976 avec Arsenin).

Méthodes itératives:

Comme :

- méthode de Landweber (1951) , voir [5];

- méthode du gradient conjugué, voir [5].

Les méthodes itératives sont utilisées pour les problèmes de grande taille, car souvent après la discrétisation on obtient des matrices creuses. Ces méthodes consistent à chercher des suites de solutions approchées qui convergent vers la solution voulue. Mais dans la pratique, on se retrouve dans des situations où il faut aussi régulariser le processus itératif quand la suite construite ne converge pas vers la solution du problème.

3.1 Méthode des moindres carrés:

Considérons une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, nous cherchons un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ solution du système :

$$Ax = b \quad (3.1)$$

Il est connu que dans le cas $m > n$, ce système n'a en général pas de solution et même si la solution existe, elle ne sera pas unique. Mais dans la pratique, on doit privilégier une solution et on doit choisir x de façon à ce que Ax soit le plus proche possible de b .

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser le résidu $\|Ax - b\|_2$, telle que $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés. On appelle problème de moindres carrés le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.2)$$

On notera \tilde{x} la solution de ce problème .

Explicitons la fonction à minimiser ,

$$\begin{aligned} \text{On pose:} \quad E(x) &= \|Ax - b\|_2^2 \\ E(x) &= (Ax - b)^t (Ax - b) = x^t A^t Ax - b^t Ax - x^t A^t b + \|b\|_2^2 \end{aligned}$$

Le problème de moindres carrés peut donc se reformuler en :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) = x^t G x - 2h^t x$$

,où $G = A^t A$ est symétrique et $h = A^t b$ est un vecteur donné.

On appelle fonction quadratique une fonction $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,de la forme :

$J(x) = x^t G x - 2h^t x$,où G est une matrice $n \times n$ symétrique et h est un vecteur donné de \mathbb{R}^n .

Rappelons que si $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continûment dérivable,admet un minimum $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, alors $J'(\tilde{x}) = 0$.

De même soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable, alors :

$$J(\tilde{x}) \leq J(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \nabla J(\tilde{x}) = 0, \quad \nabla \text{ opérateur gradient.}$$

Calculons le gradient de J :

$$\text{On a } J(x) = x^t G x - 2h^t x, \quad \nabla J(x) = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right)$$

$$\text{Développons la fonction } J : J(x) = \sum_{i=1}^n x_i (Gx)_i - 2 \sum_{i=1}^n h_i x_i,$$

$$\implies \frac{\partial J}{\partial x_k} = (Gx)_k + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_k} (Gx)_i - 2h_k \quad ,$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial x_k} (Gx)_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sum_{j=1}^n g_{ij} x_j) = g_{ik} = g_{ki}.$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial J}{\partial x_k} = (Gx)_k + \sum_{i=1}^n x_i g_{ki} - 2h_k = (Gx)_k + (Gx)_k - 2h_k = 2(Gx)_k - 2h_k \quad ,$$

d'où le résultat: $\nabla J(x) = 2(Gx - h)$.

et la solution \tilde{x} du problème de moindres carrés vérifie donc nécessairement $G \tilde{x} = h$,
d'où :

$$A^t A \tilde{x} = A^t b \tag{3.3}$$

L'équation (3.3) est dite équation normale.

a/ Quand $m = n$ et A est inversible, donc il existe un unique minimisateur $x = A^{-1}b$. Dans ce cas, un PMC est équivalent à la résolution d'un système linéaire.

b/ Quand A n'est pas inversible où $m \neq n$ (c'est-à-dire lorsque on est en présence d'un système surdéterminé ou d'un système sous déterminé) alors la méthode des moindres carrés permet de généraliser la résolution du système.

c/ Toute solution d'un système (3.1) est solution du PMC. La réciproque est fautive.

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur donnés, si l'on suppose que la matrice A est de rang n , le problème de moindres carrés $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$, admet une solution unique \tilde{x} donnée par : $A^t A \tilde{x} = A^t b$.

Démonstration:

On remarque tout d'abord que si A est de rang n , alors $G = A^t A$ est définie positive.

En effet: $x^t G x = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, d'autre part puisque le rang de A est n , alors la dimension du noyau de A est nulle donc $x^t G x = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

La matrice G étant définie positive, elle est inversible, donc il existe une unique solution \tilde{x} vérifiant $A^t A \tilde{x} = A^t b \Leftrightarrow G \tilde{x} = h$.

Montrons maintenant que $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \tilde{x} \Rightarrow J(x) > J(\tilde{x})$ (c'est-à-dire est-ce-que \tilde{x} réalise le minimum de J ?)

Posons $y = x - \tilde{x}$, on a donc $y \neq 0$.

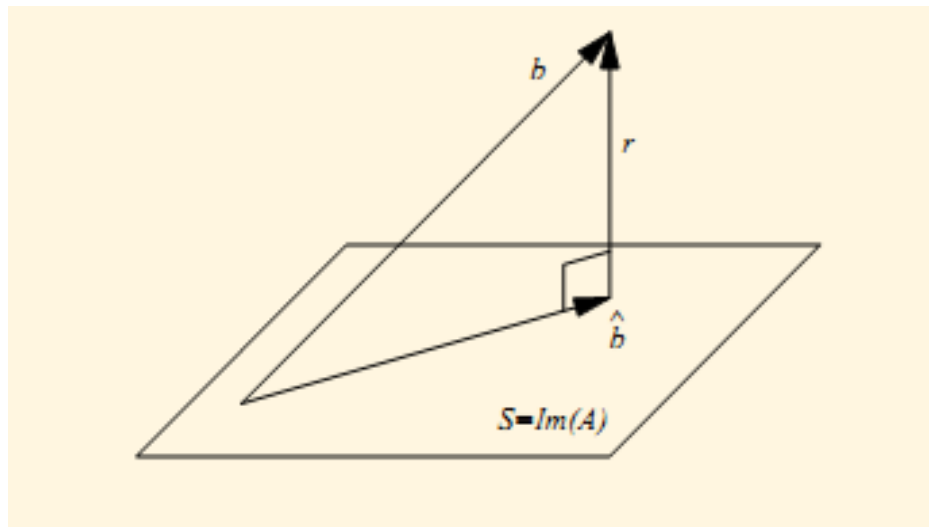
$$J(\tilde{x} + y) = (\tilde{x} + y)^t G (\tilde{x} + y) - 2h^t (\tilde{x} + y) = \tilde{x}^t G \tilde{x} + y^t G y + 2 \tilde{x}^t G y - 2h^t y - 2h^t \tilde{x},$$

$$= \tilde{x}^t G \tilde{x} + y^t G y + 2(G\tilde{x} - h)^t y - 2h^t \tilde{x} = y^t G y + \tilde{x}^t G \tilde{x} - 2h^t \tilde{x},$$

et puisque $G\tilde{x} = h$, d'où: $J(\tilde{x} + y) = J(\tilde{x}) + y^t G y$.

Puisque G est une matrice définie positive, et que $y \neq 0$, on a $y^t G y > 0$, et donc $J(\tilde{x} + y) > J(\tilde{x})$, $\forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$, ce qui montre que \tilde{x} réalise le minimum de J .

Soit $\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m / \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$. Alors le problème de moindres carrés $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ signifie que l'on cherche dans l'image de A l'élément le plus proche de b . Il se formule donc comme un problème de projection orthogonale de b sur le sous-espace

Figure 3.1.1 : Fig 3.1 - Projection de b sur $\text{Im}(A)$ -

vectorel $\text{Im}(A)$. Si on appelle \tilde{x} la solution de ce problème, on s'attend donc à ce que le résidu $r = b - A\tilde{x}$ soit orthogonal à $\text{Im}(A)$. Voir la figure ci-dessous :

Proposition 3.1.1 [2]

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ une solution du problème aux moindres carrés. Donc : $\forall y \in \mathbb{R}^n, \|Ax - b\|_2^2 \leq \|Ay - b\|_2^2$.

Exemple:(Régression Linéaire)

Soit $(\Delta) : y(t) = \alpha + \beta t$ une droite, nous cherchons à faire passer cette droite par un ensemble de points expérimentaux $(t_i, y_i)_{i=1, \dots, m}$.

L'écriture matricielle nous donne:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ecrivons l'équation normale: } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m t_i y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le dernier système à pour solution : $\alpha = \bar{y} - \beta \bar{t}$, $\beta = \frac{\sum_{i=1}^m t_i y_i - m \bar{y} \bar{t}}{\sum_{i=1}^m t_i^2 - m \bar{t}^2}$ où

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m} \text{ et } \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{m}.$$

Notons que la droite obtenue passe par les moyennes $\left(\bar{t}, \bar{y} \right)$.

3.1.1 Conditionnement des problèmes de moindres carrés:

Le conditionnement d'une matrice rectangulaire A est :

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \tag{3.6}$$

Dans la pratique, les coefficients du vecteur b où ceux de la matrice A sont bruités par des erreurs dues aux mesures expérimentales en général. Alors la sensibilité du problème des moindres carrés liée aux variations de b et de la matrice A est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.1.1 [6]

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang n , et soit $x \in \mathbb{R}^n$ la solution du problème $Ax = b$.

Notons $r = Ax - b$ le résidu. Enfin, soit \tilde{x} la solution du problème des moindres carrés:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| (A + \delta A) \tilde{x} - (b + \delta b) \right\|_2.$$

Alors on a la majoration :

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} \lesssim \text{cond}(A) \left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \right) + \text{cond}(A)^2 \tan \theta \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} \quad (3.7)$$

Où $\sin \theta = \frac{\|r\|_2}{\|b\|_2}$ et où le symbole \lesssim indique que cette majoration est vraie à des termes d'ordre $\max\left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}, \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}\right)$ près.

Résolution numérique:

La résolution du problème aux moindres carrés se ramène à la résolution d'un système linéaire pour la matrice $A^t A$ (dite matrice des équations normales) : $A^t A x = A^t b$ et si la matrice A est de rang maximal alors $A^t A$ est définie positive. Cette matrice est carré ($n \times n$), donc le système $A^t A x = A^t b$ peut être résolu par la factorisation de Cholesky. Rappelons cette méthode :

Proposition 3.1.2 [6]

Soit C une matrice symétrique et définie positive. Il existe une unique matrice R triangulaire supérieure, à l'élément diagonaux strictement positifs, telle que :

$$C = R^t R \quad (3.8)$$

Après la démonstration, il suffit de résoudre les deux systèmes linéaires suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} R^t y = A^t b \\ R x = y \end{array} \right.$$

Notons que cette méthode n'est pas très recommandée à cause du problème de stabilité, par contre la DVS et la factorisation QR sont les plus utilisées.

La factorisation QR : Cette méthode est souvent utilisée pour la résolution des problèmes des moindres carrés .Le principe de cette méthode est de factoriser la matrice A en un produit de deux matrices Q et R , telles que Q est une matrice orthogonale ($Q^t Q = I$), et R est triangulaire supérieure .Donc le but de cette méthode est de remplacer le problème des moindres carrés original en un autre problème de moindres carrés plus facile à résoudre.

Avant d'annoncer le théorème de factorisation QR , il est important de rappeler les matrices de Householder.

La transformation de Householder : Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , les transformations orthogonales (c'est à dire les applications linéaires représentées par des matrices orthogonales) conservent la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. En effet si H est orthogonale on a $H^t = H^{-1}$ et donc $\|Hx\|_2^2 = (Hx)^t Hx = x^t H^t Hx = x^t x = \|x\|_2^2$.

On appelle transformation de Householder, une transformation dont la matrice est de la forme : $H = I - 2yy^t$, où $y \in \mathbb{R}^n$ et $\|y\|_2 = 1$.

La matrice de Householder est symétrique et orthogonale.

Démonstration:

1/ H est symétrique, en effet : $H^t = (I - 2yy^t)^t = I - 2yy^t = H$.

2/ H est orthogonale, en effet : $HH^t = HH = (I - 2yy^t)(I - 2yy^t) = I - 2yy^t - 2yy^t + 4yy^t = I$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x\|_2 = 1$ et $x \neq e = (1 \ 0 \dots 0)^t$. Alors il existe une transformation de Householder H telle que $Hx = e$.

Démonstration:

Posons $y = \alpha(x - e)$ avec $\alpha = (\|x - e\|_2)^{-1}$, alors la matrice $H = I - 2yy^t$ répond à la question . En effet :

$Hx = [I - 2\alpha(x - e)\alpha(x - e)^t] x = x - 2\alpha^2(x - e)(x - e)^t x$, comme $(x - e)^t x$ est un scalaire, on peut donc commuter,

$$Hx = x - 2\alpha^2((x - e)^t x)(x - e).$$

$$\text{De plus } \alpha^{-2} = \|x - e\|_2^2 = (x - e)^t(x - e) = x^t x - e^t x - x e + e^t e$$

$$= \|x\|_2^2 - 2e^t x + 1 = 2(1 - e^t x),$$

et $(x - e)^t x = 1 - e^t x$, d'où $2\alpha^2 ((x - e)^t x) = 1$.

On trouve $Hx = e$

Théorème 3.1.2 (*factorisation de Householder*)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$ alors il existe une matrice orthogonale $Q \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure inversible telles que :

$$A = Q \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Démonstration:

On va chercher à obtenir la matrice R comme le résultat de n transformations orthogonales successives $U^{(k)}$, soit : $\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(n-1)} \dots U^{(1)}A$.

Les matrices $U^{(k)}$ étant construites à l'aide de transformations de Householder.

Si la première colonne de A s'écrit $(\alpha_1 \ 0 \ \dots \ 0)^t$, il n'y a rien à faire et on pose donc $U^{(1)} = I$. Si-non on sais qu'il existe une transformation de Householder $H^{(1)}$ qui transforme A_1 en $(\alpha_1 \ 0 \ \dots \ 0)^t$, avec $\alpha_1 = \|A_1\|_2$. En posant $U^{(1)} = H^{(1)}$ on a donc :

$$A^{(2)} = U^{(1)}A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & . & . & . & \times \\ 0 & \times & . & . & . & \times \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & \times & . & . & . & \times \end{pmatrix}$$

Soit $v^{(2)} \in \mathbb{R}^{m-1}$ le vecteur dont les éléments sont $\left[a_{i2}^{(2)} \right]_{i=2, \dots, m}$, il s'agit de la partie de la deuxième colonne de $A^{(2)}$ qui commence à l'élément diagonal. On sait qu'il existe une transformation de Householder $H^{(2)}$ qui transforme $v^{(2)}$ en $(\alpha_2 \ 0 \ \dots \ 0)^t \in \mathbb{R}^{m-1}$, avec $\alpha_2 = \|v^{(2)}\|_2$. On définit alors $U^{(2)}$ comme: $U^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$A^{(3)} = U^{(2)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \alpha_2 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que, par définition de $U^{(2)}$, la première colonne de $A^{(2)}$ n'a pas été modifiée.

On peut maintenant généraliser ce procédé:

Supposons que l'on a obtenu $A^{(k)}$ dont les $k-1$ premières colonnes forment une matrice trapézoïdale supérieure (les éléments en dessous de la diagonale sont nuls). Si on note $v^{(k)} \in \mathbb{R}^{m-k+1}$ le vecteur dont les éléments sont $\left[a_{ik}^{(k)} \right]_{i=k, \dots, m}$, alors il existe aussi une transformation de Householder $H^{(k)}$ qui transforme $v^{(k)}$ en $(\alpha_k \ 0 \ \dots \ 0)^t \in \mathbb{R}^{m-k+1}$ avec $\alpha_k = \|v^{(k)}\|_2$. On définit alors $U^{(k)}$ comme : $U^{(k)} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H^{(k)} \end{pmatrix}$, et on obtient $A^{(k+1)} = U^{(k)}A^{(k)}$. On continue ce procédé jusqu'à obtenir une matrice $A^{(n+1)}$,

$A^{(n+1)} = U^{(n)}A^{(n)} = U^{(n)}U^{(n-1)} \dots U^{(1)}A$, par construction, on obtient alors la structure désirée: $\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} = UA$, avec $U = U^{(n)}U^{(n-1)} \dots U^{(1)}$.

On obtient la factorisation QR en remarquant que le produit de matrices orthogonales reste une matrice orthogonale et en posant $Q = U^t$.

Une fois la factorisation QR est obtenue, il est facile de résoudre le problème de moindres carrés.

3.2 La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD):

La décomposition en valeurs singulières (Singular Value Décomposition en anglais) est devenue depuis quelques décennies un outil fondamental pour étudier les problèmes linéaires. Cette technique a été initiée par BELTRAMI il y a plus d'un siècle, mais elle devint sta-

ble numériquement seulement en 1965 grâce à G.GOLUB [8]. Cette décomposition est un changement de base permettant une diagonalisation. Nous verrons en particulier que cette technique donne une solution simple pour les problèmes de moindres carrés.

Rappelons que les concepts de valeurs propres et vecteurs propres n'ont de sens que pour les matrices carrés ,pour les matrices quelconques (c'est-à-dire matrice sous déterminé où matrice surdéterminé) ces notions se généralisent en celles de valeurs singulières et de vecteurs singuliers.

Définition 3.2.1 (*valeur singulière*)

On appelle valeur singulière d'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$,les racines carrés des valeurs propres de $A^t A$, on les notes $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ telle que λ_i est la valeure propre de $A^t A$.

Définition 3.2.2 (*vecteur singulier*)

a/ On dit que $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur singulier à gauche ,s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ unitaire telle que $Av = \sigma u$.

b/ On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur singulier à droite , s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ unitaire telle que $A^t u = \sigma v$.

Théorème 3.2.1 [γ]

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r . Il existe deux matrices orthogonales: $U \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ($U^t U = U U^t = I_m$) et $V \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ($V^t V = V V^t = I_n$) telle que :

$$A = U \Sigma V^t \tag{3.10}$$

où :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (\Sigma_1) \in M_{r \times r}(\mathbb{R}) & (0) \in M_{r \times (n-r)}(\mathbb{R}) \\ (0) \in M_{(m-r) \times r}(\mathbb{R}) & (0) \in M_{(m-r) \times (n-r)}(\mathbb{R}) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \tag{3.11}$$

est une matrice dite " pseudo-diagonale " , avec $\Sigma_1 = \text{diag} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Si l'on note $(U) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $(V) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V , les vecteurs u_j et v_j sont respectivement, les vecteurs singuliers droits et gauches associés à la valeur singulière σ_j .

Théorème 3.2.2 [7]

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Notons $A = U \Sigma V^t$ sa décomposition en valeurs singulières.

i/ Les valeurs propres de la matrice $A^t A$ sont les nombres σ_j^2 , $j = 1, \dots, n$, et ses vecteurs propres sont les vecteurs singuliers à gauche de A , v_j , $j = 1, \dots, n$;

ii/ Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix}$ sont les nombres $\pm \sigma_j^2$, $j = 1, \dots, n$ et ses vecteurs propres sont $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_j \\ \pm u_j \end{pmatrix}$

Proposition 3.2.1 [7]

Soit $A = U \Sigma V^t$, alors on a :

- 1/ Le rang de A est égal aux nombres de valeurs singulières non-nulles ;
- 2/ $\text{Ker}(A) = \text{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$, $\text{Im}(A) = \text{vect}(u_1, \dots, u_r)$;
- 3/ $\text{Ker}(A^t) = \text{vect}(v_1, \dots, v_r)$, $\text{Im}(A^t) = \text{vect}(u_{r+1}, \dots, u_m)$;
- 4/ $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Commentaire:

Le système $AX = Y$ telle que $A = U \Sigma V^t$ admet alors l'inversion, nous obtenons ainsi le vecteur des entrées par :

$$X = V \Sigma^{-1} U^t Y. \tag{3.12}$$

Le système est alors équivalent à $\Sigma X' = Y'$ telle que $X' = V^t X$ et $Y' = U^t Y$.

Dans la plus part des cas, le système admet une infinité de solution (le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et le nombre de valeurs singulières est inférieur à n), on parle alors des quasi-solutions. Donc le problème devient un problème de minimisation .

3.3 La méthode de Tikhonov:

La méthode de régularisation de Tikhonov est une des méthodes les plus employées pour la résolutions des problèmes mal posés. Par exemple, elle est utilisée avec succès pour inverser les matrices mal conditionnées.

Considérons un problème inverse $Kx = y$ où $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact injectif, et X, Y sont des espaces de Hilbert. On supposera de plus que $y \in K(x)$, c'est-à-dire le problème inverse possède une solution unique. Le problème est mal posé à cause de la non continuité de l'opérateur inverse.

Soit $\mu > 0$,

Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\mu : Y \rightarrow X$ est une stratégie de régularisation si : $\forall x \in X$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} R_\mu Kx = x$, c'est-à-dire que l'opérateur $R_\mu K$ converge simplement vers l'identité.

Théorème 3.3.1 [5]

Soit R_μ une stratégie de régularisation pour l'opérateur compact $K : X \rightarrow Y$, où $\dim X = \infty$. Alors :

1/ Les opérateurs R_μ ne sont pas uniformément bornés ; il \exists une suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|R_{\mu_j}\|_{L(Y,X)} = \infty$.

2/ Il n'ya pas de convergence de $(R_\mu K)$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

La donnée $y \in Y$ n'est pas connue avec exactitude, il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y^δ la donnée perturbé où $\delta > 0$ est le niveau de bruit, c'est-à-dire $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$.

Notons $x^{\mu,\delta} := R_\mu y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kx = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée.

En utilisant l'inégalité triangulaire : $\|x^{\mu,\delta} - x\|_X \leq \|R_\mu y^\delta - R_\mu y\| + \|R_\mu y - x\|$
 $\leq \|R_\mu\| \|y^\delta - y\| + \|R_\mu Kx - x\|$

d'où :

$$\|x^{\mu,\delta} - x\|_X \leq \delta \|R_\mu\|_{L(Y,X)} + \|R_\mu Kx - x\|_X \quad (3.13)$$

Le premier terme de droite de (3.13) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Nous avons vu que $\|R_\mu\| \rightarrow \infty$ quand $\mu \rightarrow 0$, donc il est important de ne pas choisir μ très petit sinon l'erreur peut être très grande. Par contre le deuxième terme de droite va tendre vers 0 quand $\mu \rightarrow 0$ (par définition de R_μ).

Nous allons faire tendre le niveau de bruit $\delta \rightarrow 0$ et nous allons choisir une stratégie de régularisation de façon à ce que notre solution soit proche de la solution réelle .

Une stratégie de régularisation $\delta \mapsto \mu(\delta)$ est admissible si:

$$\forall x \in X, \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0 \text{ et } \limsup_{\delta \rightarrow 0, y^\delta \in Y} \{ \|R_{\mu(\delta)} y^\delta - x\|_X, \text{ tel que } \|Kx - y^\delta\|_Y \leq \delta \} = 0 \quad (3.14)$$

Maintenant , nous allons présenter la méthode de Tikhonov :

Le principe de cette méthode pour résoudre le problème inverse mal posé $Kx = y$ est de choisir comme solution l'élément $x_\mu \in X$ qui minimise la quantité :

$$\|Kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2 . \quad (3.15)$$

L'existence et l'unicité du minimum est assuré par la coercivité et la stricte convexité de $x \mapsto \|x\|_X^2$..

Le paramètre μ est appelé le paramètre de régularisation ,il doit être choisi très petit pour que x_μ qui réalise le minimum ait une faible erreur avec la donnée y et il doit être également choisi assez grand pour que la stricte convexité de $\|x\|_X$ corrige l'instabilité du problème posé. La fonctionnelle $x \mapsto \|x\|_X^2$.est appelée fonctionnelle régularisante.

Théorème 3.3.2 [5]

Soit $\mu > 0$ et $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné , X et Y sont deux espaces de Hilbert. Alors la fonctionnelle de Tikhonov ($J_\mu(x) = \|Kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2$.) admet un unique minimum $x_\mu \in X$ et x_μ est l'unique solution de l'équation normale :

$$\mu x_\mu + K^* K x_\mu = K^* y \quad (3.16)$$

Grace à l'équation (3.16), nous pouvons définir l'opérateur de régularisation de Tikhonov par :

$$R_\mu = (\mu I + K^* K)^{-1} K^* : Y \rightarrow X \quad (3.17)$$

Il reste à démontrer que cet opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelles conditions le choix de μ en fonction du niveau de bruit δ est admissible. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 3.3.3 [5]

Soit $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact et $\mu > 0$. L'opérateur $\mu I + K^* K$ est inversible et l'opérateur R_μ défini par (3.17) est une stratégie de régularisation avec $\|R_\mu\|_{L(Y,X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\mu}}$. Tout choix de $\mu(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) avec $\delta^2/\mu(\delta) \rightarrow 0$ est admissible.

3.4 La méthode de régularisation de Fourier:

3.4.1 Problème de la chaleur rétrograde homogène :

On présente cette méthode à travers un problème mal posé qui est le problème de la chaleur rétrograde homogène.

En général la solution de ce problème existe avec des conditions restrictives sur l'état final. On trouve la solution exacte et on recherche la solution approchée par la méthode de régularisation de Fourier et on donne une estimation de l'erreur et sous certaines conditions on obtient une estimation de type Hölder.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 \leq t < T \\ u(x, T) = \varphi_T(x) \quad , \quad -\infty < x < +\infty . \end{cases} \quad (3.18)$$

Cherchons la solution u de ce problème par la transformation de Fourier:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x, T) = \varphi_T(x) \end{cases} \quad , \quad \text{peut s'écrire} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ u(x, T) = \varphi_T(x) \end{cases} \quad ,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)_{(\xi)} = \mathcal{F}(0)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(x, T))_{(\xi)} = \mathcal{F}(\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases} \quad ,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)_{(\xi)} - \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F} (u(x, T))_{(\xi)} = \mathcal{F} (\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases}, \quad (3.19)$$

On a : $\mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x, t) dx$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\xi x} u(x, t)) dx,$$

d'où :

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)_{(\xi)} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} \quad (3.20)$$

On choisit $\text{supp}(u) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists R > 0$ telle que $\text{supp}(u) \subset [-R, R]$,

$$\text{donc } \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$$

En intégrant par partie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$, on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[[e^{-i\xi x} u(x, t)]_{-R}^R + i\xi \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x, t) dx \right]$$

et puisque $u(R, t) = u(-R, t) = 0$, on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)_{(\xi)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x, t) dx \\ &= i\xi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-i\xi x} u(x, t) dx \right) = i\xi \mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)_{(\xi)} = -\xi^2 \mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} \quad (3.21)$$

On remplace (3.20) et (3.21) dans (3.19), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} + \xi^2 \mathcal{F} (u(x, t))_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F} (u(x, T))_{(\xi)} = \mathcal{F} (\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

de l'équation : $\partial_t \hat{u}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0$, on a $\frac{\partial_t \hat{u}(\xi, t)}{\hat{u}(\xi, t)} = -\xi^2$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial_t \hat{u}(\xi, t)}{\hat{u}(\xi, t)} dt = \int -\xi^2 dt \Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} c(\xi),$$

$$\text{donc } \begin{cases} \hat{u}(\xi, T) = e^{-\xi^2 T} c(\xi) \\ \hat{u}(\xi, T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \Rightarrow c(\xi) = e^{\xi^2 T} \hat{\varphi}_T(\xi), \text{ d'où } \hat{u}(\xi, t) = e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi),$$

où $\hat{u}(\xi, t)$ est la transformation de Fourier de $u(x, t)$ et $\hat{u}(\xi, 0) = c(\xi) = e^{\xi^2 T} \hat{\varphi}_T(\xi)$,

sachant que $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi, t) d\xi$, d'où :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) d\xi \text{ est la solution du problème (3.18)} \quad (3.22)$$

Régularisation de Fourier et estimation de l'erreur :

Pour $t = T$, on prend $\varphi_T(x)$ la solution exacte et $\varphi_T^\delta(x)$ la solution approchée de $\varphi_T(x)$, donc il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$\|\varphi_T - \varphi_T^\delta\| \leq 0 \quad (3.23)$$

On note $\varphi_0(x) = u(x, 0)$ et E une constante telle que :

$$\|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq E, \quad \forall s \geq 0. \text{ On a } \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

où $u(x, t)$ est la solution exacte donnée par (3.22). Soit

$$u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) \chi_{\max} d\xi \quad (3.24)$$

La solution approchée de la solution exacte u , tel que δ_{\max} est une constante positive et χ_{\max} est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\delta_{\max}, \delta_{\max}]$ qui est compacte et tel que $u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)$ existe et est unique et stable.

On a :

$$\|u(x, t) - u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\| \leq E^{(1-\frac{t}{T})} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{(T-t)s}{2T}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} \right] \quad (3.25)$$

où

$$\xi_{\max} = \left(\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Démonstration :

$$\text{On a : } \|u(x, t) - u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}(x, t) - \hat{u}_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\| e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \chi_{\max} + e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \chi_{\max} - e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) \chi_{\max} \right\|$$

$$\leq \left\| e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \chi_{\max} \right\| + \left\| e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \chi_{\max} - e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) \chi_{\max} \right\|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \left(\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \text{puisque } \hat{\varphi}_T(\xi) = e^{-\xi^2 T} \hat{u}(\xi, 0) = e^{-\xi^2 T} \hat{\varphi}_0(\xi) \\
 &\quad (\text{car } \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}_0(\xi)) \text{ et } \hat{\varphi}_T(\xi) \chi_{\xi_{\max}} = \begin{cases} \hat{\varphi}_T(\xi), & |\xi| \leq \xi_{\max} \\ 0, & |\xi| > \xi_{\max} \end{cases}, \\
 &\left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \left(\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} e^{-\xi^2 T} \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot \frac{(1 + \xi^2)^s}{(1 + \xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \left(\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{-\xi^2 t} \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot \frac{(1 + \xi^2)^s}{(1 + \xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\xi^2(T-t)} \left(\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left(\sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{(e^{-\xi^2 t})^2}{(1 + \xi^2)^s} \right) \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left(\sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \right) \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{(e^{-\xi^2 t})^2}{(1 + \xi^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $\|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|\varphi_0\|_{H^s} \leq E$, $\forall s \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\text{donc } \sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \left(\int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \|\varphi_0\|_{H^s} + \sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left\| \hat{\varphi}_T - \hat{\varphi}_T^\delta \right\|, \\ &\leq \sup_{|\xi| > \xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \cdot E + \sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \cdot \delta \\ &\leq \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s} \cdot E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)} \cdot \delta. \end{aligned}$$

On remplace la dernière inégalité par ξ_{\max} donné par $\xi_{\max} = \left(\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$,

on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s} \cdot E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)} \cdot \delta &= \frac{e^{\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{ts}{2T}} \right)}}{\left(\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}} \right) \right)^{\frac{s}{2}}} \cdot E + e^{\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}} \right)(T-t)} \cdot \delta \\ &= \left(\frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{ts}{2T}} \cdot E \left(\frac{1}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\ln \left(\frac{E}{\delta} \right) \right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}} \cdot \delta \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{\frac{ts}{2T}} \cdot E \left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}.$$

On remarquons que

$$\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{\frac{ts}{2T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{ts}{2T}} = 1, \quad \frac{-s(T-t)}{2T} = \frac{st}{2T} - \frac{sT}{2T} \text{ et } \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{T-t}{T}} \delta = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\frac{t}{T}} \delta = \delta^{\frac{t}{T}}, \text{ donc :}$$

$$\frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s} \cdot E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)} \cdot \delta = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}} E \left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

$$\begin{aligned} &= E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}} \left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}} \\ &= E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}} \left[\left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + 1 \right] \end{aligned}$$

D'où (3.25) est démontré .

Le choix ξ_{\max} :

Pour trouver une estimation de stabilité de type Hölder ,on choisit ξ_{\max} donné en (3.26),

c'est-à-dire

$$\xi_{\max} = \left(\ln \left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \text{ où } \ln \frac{E}{\delta} > 1, \forall s > 0.$$

Démonstration:

D'après le lemme 1, on a $\|u(x, t) - u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s} \cdot E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)} \cdot \delta$

d'où :

$$\|u(x, t) - u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{\xi_{\max}^2 T} \delta \quad (\text{puisque } e^{-t\xi_{\max}^2} < 1) \quad (3.27)$$

et par Hölder on a :

$$\|u(x, t) - u_{\delta, \xi_{\max}}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} + E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \quad (3.28)$$

de (3.27) et (3.28) on trouve que : $\frac{E}{\xi_{\max}^s} \leq E(\frac{\delta}{E})^{\frac{t}{T}}$ et $e^{\xi_{\max}^2 T} \delta \leq E(\frac{\delta}{E})^{\frac{t}{T}}$

On pose $M = e^{\xi_{\max}^2 T} \delta \Rightarrow T \xi_{\max}^2 = \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$

$$\text{d'où } \xi_{\max} = \left(\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

avec un calcul simple, on montre que d'une part $e^{\xi_{\max}^2 T} \delta \geq E(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2}}$ et d'autre part que $e^{\xi_{\max}^2 T} \delta \leq E(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2}}$ donc:

$M = e^{\xi_{\max}^2 T} \delta = E(\ln \frac{E}{\delta})^{-\frac{s}{2}}$, on remplace cette dernière valeur de M dans (3.30), on trouve $\xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$
où $\ln \frac{E}{\delta} > 1$, $\forall s > 0$.

Il y a plusieurs solutions qui approchent la solution exacte mais pour trouver une meilleure solution, il faut choisir ξ_{\max} qui donne l'estimation de type Hölder pour laquelle on a la stabilité.

Avant d'aborder le traitement d'image ,il est important de rappeler quelques notions de base (en abrégé) sur l'image. Ensuite, nous résumons les fonctions essentielles du traitement d'image sur Matlab. ([9], [10], [11], [13])

4.1 Notions élémentaires sur les images:

On distingue deux grandes catégories d'images : les images matricielles et les images vectorielles. Dans notre travail, nous nous intéressons aux images matricielles.

- Une image matricielle est représenté par une où plusieurs matrices. Elle est composée d'unités élémentaires dites : les pixels ,où chaque pixel est caractérisé par sa position et sa valeur.

- Une image est définie par : le nombre de pixels qui la composent en largeur et en hauteur, et des valeurs de chaque pixel.

- Chaque pixel peut prendre un nombre défini de valeurs, ces valeurs dépendent du type d'image représentée.

4.1.1 Formats d'images matricielles:

On cite les plus connus:

- Le format BMP (BitMaP) est développé par Microsoft et IBM.
- Le format JPEG ou JPG (Joint Photographic Experts Group) est un format ouvert d'image compressé pour des images de type photographie (16 millions de couleurs).
- Le format GIF (Graphics Interchange Format) est un format ouvert d'image compressé pour des images de type dessin définie en 256 couleurs.
- Le format PNG (Portable Network Graphics) est un format ouvert d'image compressé. Il effectue une compression sans perte sur les contours.
- TIFF est le format classique des imprimeurs.
- GIF est un format pour les images qui n'ont pas de nuances, par exemple des graphiques ou des dessins avec des lignes de couleurs franches. Il n'est pas utiliser pour des photos en couleurs.

4.1.2 Les différents types d'images:

Les images binaires:

Une image binaire ne contient que deux couleurs possibles : le noir et le blanc.

Une matrice représentant une image binaire ne comporte que deux valeurs possibles : 0 (noir) et 1 (blanc).

Les images en niveaux de gris:

En général, les images en niveaux de gris contiennent 256 teintes de gris. On les appelle: images d'intensités.

Par convention : 0 = *noir* (intensité lumineuse nulle), 255 = *blanc* (intensité maximale).

Les images couleur RVB:

Le système le plus utilisé pour la représentation des couleurs est l'espace RVB (Rouge, Vert, Bleu) ,il est basé sur le fonctionnement du système visuel humain. Pour caractériser une couleur dans le système RVB ,il faut trois nombres : dosage de rouge, dosage de vert, dosage de bleu. En principe, on considère qu'il existe 256 dosages possibles pour chaque couleur de base (soit $256*256*256$ couleurs possibles).

Pour cela, le codage d'une matrice couleur est une matrice à 3 dimension.

Les images couleur indexées:

Les images couleur indexées ont des couleurs décrites dans un tableau à part appelé palette. Une palette est utilisée pour réduire la place occupée en mémoire.

4.2 Matlab et les images :

Une image Matlab est une matrice bidimensionnelle de valeurs entières où réelles. Les principales fonctions de traitement d'images sous Matlab se trouvent dans la boîte à outils (toolbox) image processing (traitement d'images). Matlab est capable de lire et de décoder les fichiers images JPEG, TIFF, BMP, PNG,...etc. Avant de traiter une image dans Matlab ,il faut la lire et décoder son format afin de la transformer en une matrice de valeurs.

4.2.1 Les fonctions élémentaires en traitement d'image sur Matlab:

imread :

Elle permet de lire une image et de placer son contenu dans une variable de type matrice.

Exemple: `I=imread('cameraman.tif');`

imfinfo :

Cette fonction affiche les informations relatives à un fichier image.

imshow :

L'affichage de l'image est réalisé par la fonction `imshow`. Exemple: `figure; imshow(I);`

imwrite et print :

Les fonctions `imwrite` et `print` permettent la sauvegarde ,respectivement , des images et des figures sous différents formats(`tif`, `jpg`, `bmp`, `png`, `gif`).

Il est possible de changer de format en utilisant les fonctions suivantes :

ind2gray : indexé→intensité.

ind2rgb : indexé→rgb.

rgb2ind : rgb→indexé.

rgb2gray : rgb→intensité.

im2bw : intensité,indexé,rgb→binaire.

imhist :

Cette fonction permet le calcul et l'affichage de l'histogramme d'une image.

imnoise :

Elle est faite pour bruite une image, exemple : `imnoise(cameraman,'salt pepper',0.05);` ce type de bruit (salt pepper) "poivre et sel" peut apparaitre lors des transmissions d'images.

4.3 Traitement d'images:

Il arrive souvent lors de l'acquisition d'une image, que l'image obtenue soit différente de l'image espérée. Notre problème consistera donc à récupérer une image proche de l'image

originale à partir d'une image de mauvaise qualité. Il est évident que cette situation de débruitage d'image est un problème inverse.

Notations :

- Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 telle que $\partial\Omega$ soit une courbe fermé de classe C^1 par morceaux.
- α est un réel strictement positif.
- $(f_r, b, f, f_0) \in BV(\Omega)_2^4$, c'est à dire f_r, b, f et f_0 sont des applications de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 bornées et à variations bornées dans Ω .

De plus, $\nabla(f)$ aura une limite sur $\partial\Omega$ qui vaudra 0. On pourra donc éventuellement prolonger par continuité $\nabla(f)$ sur la frontière.

- H désignera une application de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Soit f_0 l'image observée et f_r l'image réelle non dégradée. Afin de chercher l'image réelle f_r à partir de f_0 , nous allons chercher à minimiser l'expression suivante :

$$\psi(f) = \iint_{\Omega} ((f(x, y) - f_0(x, y))^2 dx dy + \alpha \iint_{\Omega} H(\|\nabla(f)(x, y)\|^2) dx dy \quad (4.1)$$

On peut noter (4.1) comme suit :

$$\psi(f) = \|f - f_0\|_2 + \alpha \iint_{\Omega} H(\|\nabla(f)\|^2). \quad (4.2)$$

La solution qui minimise l'expression (4.2) s'appelle la solution régularisée.

Dans l'expression (4.2), le premier terme sert à rapprocher la solution de l'image observée et le deuxième terme est un terme de régularisation qui est différent selon la valeur donnée à H .

4.3.1 Théorème fondamental (équation d'Euler-Lagrange):

Pour reconstituer l'image, nous allons utiliser un théorème permettant d'éliminer l'intégrale double.

Si $\forall (x, y) \in \partial\Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Alors, f minimise l'équation (4.1) si et seulement si f vérifie l'équation :

$$\alpha \operatorname{div}(H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) - 2 \cdot (f - f_0) = 0. \quad (4.3)$$

Démonstration :

Si f minimise l'équation (4.1), alors pour tout $g \in BV(\Omega)_2$, les applications ψ_g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par $\psi_g(\lambda) = \psi(f + \lambda g)$ vérifient : $\psi'_g(0) = 0$.

Ainsi, comme toutes les fonctions f , f_0 , et g sont dans $BV(\Omega)$, on peut permuter l'intégrale et la dérivée et écrire :

$$\begin{aligned} \psi'_g(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \iint_{\Omega} (f + \lambda g - f_0)^2 + \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \iint_{\Omega} H(\|\nabla(f + \lambda g)\|^2) \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial (f + \lambda g - f_0)^2}{\partial \lambda} + \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial H(\|\nabla(f + \lambda g)\|^2)}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Posons $\psi_1(\lambda) = \iint_{\Omega} (f + \lambda g - f_0)^2$ et $\psi_2(\lambda) = \iint_{\Omega} H(\|\nabla(f + \lambda g)\|^2)$, on a donc :
 $\psi_g = \psi_1 + \alpha \psi_2$.

Calculons $\psi'_1(0)$ et $\psi'_2(0)$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \psi'_1(\lambda) = \iint_{\Omega} \frac{\partial (f + \lambda g - f_0)^2}{\partial \lambda} = \iint_{\Omega} 2g(f + \lambda g - f_0), \text{ d'où :}$$

$$\psi'_1(0) = \iint_{\Omega} 2g(f - f_0) \quad (4.4)$$

On a aussi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\psi'_2(\lambda) = \iint_{\Omega} \frac{\partial H(\|\nabla(f + \lambda g)\|^2)}{\partial \lambda}(\lambda) = \iint_{\Omega} \frac{\partial \|\nabla(f + \lambda g)\|^2}{\partial \lambda}(\lambda) \cdot H'(\|\nabla(f + \lambda g)\|^2)$.

Or $\|\nabla(f + \lambda g)\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2$, d'où $\frac{\partial \|\nabla(f + \lambda g)\|^2}{\partial \lambda}(\lambda) = 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) + 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)$

Ainsi, on trouve $\psi'_2(0) = \iint_{\Omega} \left(2 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot H'(\|\nabla(f)\|^2)$,

d'où : $\psi'_2(0) = \iint_{\Omega} 2 \langle \nabla(g), \nabla(f) \rangle \cdot H'(\|\nabla(f)\|^2)$.

Nous allons réaliser une intégration par partie en utilisant les deux égalités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} H'(\|\nabla(f)\|^2) \right) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} H'(\|\nabla(f)\|^2) + g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} H'(\|\nabla(f)\|^2) + g \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (H'(\|\nabla(f)\|^2))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} H'(\|\nabla(f)\|^2) \right) = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} H'(\|\nabla(f)\|^2) + g \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} H'(\|\nabla(f)\|^2) + g \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (H'(\|\nabla(f)\|^2))$$

et en utilisant la décomposition de la divergence :

$$\operatorname{div} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) = \frac{\partial}{\partial x} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial y})$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial x} (g \frac{\partial f}{\partial x} H'(\|\nabla(f)\|^2)) + \frac{\partial}{\partial y} (g \frac{\partial f}{\partial y} H'(\|\nabla(f)\|^2))$$

$$= \langle \nabla(f), \nabla(g) \rangle \cdot H'(\|\nabla(f)\|^2) + g \cdot \operatorname{div} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f))$$

$$\text{d'où : } \psi'_2(0) = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (g \frac{\partial f}{\partial x} H'(\|\nabla(f)\|^2)) + \frac{\partial}{\partial y} (g \frac{\partial f}{\partial y} H'(\|\nabla(f)\|^2)) - g \cdot \operatorname{div} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f))$$

On utilisant le théorème de green-riemann , comme :

- Ω est un ouvert,
- $\partial\Omega$ est une courbe fermée de classe C^1 ,
- g , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\|\nabla(f)\|^2$ sont C^1 ,
- H est C^2 .

$$\text{Alors : } \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (g \frac{\partial f}{\partial x} H'(\|\nabla(f)\|^2)) + \frac{\partial}{\partial y} (g \frac{\partial f}{\partial y} H'(\|\nabla(f)\|^2)) dx dy$$

$$= \int_{\partial\Omega} -g(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) H'(\|\nabla(f)(x, y)\|^2) dx + g(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) H'(\|\nabla(f)(x, y)\|^2) dy = 0.$$

Ce dernier terme est nul à causes des conditions des dérivées partielles de f sur les bords.

D'où :

$$\psi'_2(0) = \iint_{\Omega} -g \cdot \operatorname{div} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) \quad (4.5)$$

$$\text{Puisque } \psi'_g(0) = 0 \Leftrightarrow \iint_{\Omega} 2g(f - f_0) - \alpha \cdot g \cdot \operatorname{div} (H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) = 0$$

Comme cette propriété est vraie pour tout g bornée et à variation bornée, on en déduit :

$$\alpha \operatorname{div}(H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) - 2(f - f_0) = 0.$$

Résolution de l'équation :

Nous allons proposer une méthode permettant de résoudre l'équation (4.3) :

$$2(f - f_0) - \alpha \operatorname{div}(H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) = 0.$$

La méthode classique de résolution de cette équation et de poser l'équation au dérivées partielles suivantes pour une application u définie de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega, \forall t > 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \psi(u) = \alpha \operatorname{div}(H'(\|\nabla(u)\|^2) \cdot \nabla(u)) - 2(u - f_0) \\ \forall (x, y) \in \Omega, u(x, y, 0) = f_0(x, y) \end{aligned}$$

Le but étant de chercher un état stationnaire à cette équation.

Résolution dans un espace discret :

Discrétisation selon t : Nous allons chercher une approximation de la solution. Nous discrétisons le domaine de t par un pas Δt et à approximer $u(x, y, i \cdot \Delta t), \forall i$.

On détermine $u(x, y, (i + 1) \cdot \Delta t)$ en fonction de $u(x, y, i \cdot \Delta t)$ en utilisant la relation :

$$u(x, y, (i + 1) \cdot \Delta t) = u(x, y, i \cdot \Delta t) + \Delta t \cdot \psi(u). \quad (4.6)$$

De (4.6), on peut reconnaître une suite récurrente définie comme suit :

$$(v)_n \text{ est une suite de } \mathbb{N} \text{ dans } BV(\Omega), F \text{ une fonction telle que } F : BV(\Omega) \rightarrow BV(\Omega) \\ g \mapsto F(g) = g + \Delta t \psi(g)$$

$$\text{L'équation de récurrence est donc : } \begin{cases} v_{n+1} = F(v_n) \\ v_0 = f_0 \end{cases}$$

Ainsi, si $(v)_n$ converge alors F admet un point fixe qui sera solution de l'équation.

Discrétisation selon (x, y) : En pratique, on ne connaîtra f que sur certains points (à cause de la numérisation de l'image).

Définissons une approximation de $\psi(u)$.

Si $\nabla(f) \neq 0$, on peut écrire $\psi(u)$ sous la forme de

$$\psi(u) = \alpha \left(c_n \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + c_{n_\perp} \frac{\partial^2 u}{\partial n_\perp^2} \right) - 2(u - f_0) = 0. \quad (4.7)$$

Telle que : $n = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ et n_\perp son vecteur orthogonal, $c_n = \frac{1}{2} \phi''(\|\nabla u\|)$ et $c_{n_\perp} = \frac{1}{2} \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$ [14].

Nous cherchons à approcher les fonctions $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial n_\perp^2}$. Pour cela, nous discrétisons $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ selon un pas h et à appliquer la relation entre ces dérivées partielles.

$$D_x(u)(x, y) = \frac{1}{2h} (u(x + h, y) - u(x - h, y)), \text{ la précision est en } \mathcal{O}(h^2),$$

$$D_y(u)(x, y) = \frac{1}{2h} (u(x, y + h) - u(x, y - h)), \text{ la précision est en } \mathcal{O}(h^2),$$

$$D_{xx}(u)(x, y) = \frac{1}{h^2} (u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)), \text{ la précision est en } \mathcal{O}(h^2),$$

$D_{yy}(u)(x, y) = \frac{1}{h^2} (u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h))$, la précision est en $\mathcal{O}(h^2)$,
 $D_{xy}(u)(x, y) = \frac{1}{4h^2} (u(x + h, y + h) - u(x + h, y - h) - u(x - h, y + h) + u(x - h, y - h))$, la précision est en $\mathcal{O}(h^2)$.

Ainsi, on peut écrire $\psi(u)$:

$$\psi(u)(x, y, t) = c_n(x, y).D_{nn}(u)(x, y, t) + c_{n_\perp}(x, y).D_{n_\perp n_\perp}(u)(x, y, t) \quad (4.8)$$

où :

$$D_{nn}(u) = \frac{1}{\|\nabla(u)\|^2} (D_x(u)^2.D_{xx}(u) + 2D_x(u)D_y(u)D_{xy}(u) + D_y(u)^2D_{yy}(u))$$

$$D_{n_\perp n_\perp}(u) = \frac{1}{\|\nabla(u)\|^2} (D_x(u)^2.D_{xx}(u) - 2D_x(u)D_y(u)D_{xy}(u) + D_y(u)^2D_{yy}(u))$$

Et $\|\nabla(u)\| = \sqrt{D_x(u)^2 + D_y(u)^2}$.

Récapitulons:

On choisit une fonction ϕ , puis on pose :

$$\psi(u)(x, y, t) = c_n(x, y).D_{nn}(u)(x, y, t) + c_{n_\perp}(x, y).D_{n_\perp n_\perp}(u)(x, y, t) \text{ telle que } c_n = \frac{1}{2}\phi''(\|\nabla f\|)$$

et $c_{n_\perp} = \frac{1}{2} \frac{\phi'(\|\nabla f\|)}{\|\nabla f\|}$

On calcule de manière itérative suivante : $v_{n+1} = v_n + \Delta_t \psi(v_n)$, $v_0 = f_0$ où f_0 est l'image originale.

4.4 Application :

Tikhonov propose de choisir $\forall x \in \mathbb{R} : H(x) = x$. (c'est-à-dire $\phi(x) = x^2 = H(x^2)$).

H est une fonction C^1 , On peut donc appliquer le théorème fondamental.

Minimiser $\|f - f_0\|_2 + \alpha \iint_{\Omega} H(\|\nabla(f)\|^2) = \|f - f_0\|_2 + \alpha \iint_{\Omega} \|\nabla(f)\|^2$ revient à résoudre : $\alpha \operatorname{div}(H'(\|\nabla(f)\|^2) \cdot \nabla(f)) - 2(f - f_0) = 0$

La dernière équation est équivalente à $\alpha \operatorname{div}(\nabla(f)) - 2(f - f_0) = 0$, et puisque $\operatorname{div}(\nabla(f)) = \Delta(f)$, alors, il revient à résoudre :

$$\alpha \Delta(f) - 2(f - f_0) = 0. \quad (4.9)$$

Algorithme 4.4.1 [14]

```

Tikhonov(Image im, Réel pos dt, Réel pos alpha, Entier pos iteration)→Image
sortie = im
tempo = im
Pour n = 0 à iteration
  Pour y = 0 à imageLongueur (im)-1
    Pour x = 0 à imageLargeur (im)-1
      dxx = Dxx(sortie, x, y)
      dyy = Dyy(sortie, x, y)
      imageEcrire(tempo, x, y, dt * (alpha * (dxx + dyy)
/* on retire le terme - 2 (ImageLire(sortie, x, y) - ImageLire(im , x, y))*/
      + ImageLire(sortie, x, y))
sortie = tempo
retourner sortie

```

Nous avons programmé sur Matlab cet Algorithme , avec : $n = 100$, $dt = 0.01$ et $\alpha = alpha = 5$, nous avons les résultats suivants :

4.4.1 Codes utilisés sur Matlab:

Bruiter une image:

```

A=imread('cameraman.tif'); % image en niveaux de gris
B=imnoise(A,'salt pepper',0.05);
imshow(B);
figure(1)
subplot(1,2,1)
subimage(A)
title ('image originale')
subplot(1,2,2)
subimage(B)

```

```
title('image bruitée')
```

Débruitage de l'image par Tikhonov:

```
Im0=imread('cameraman.tif','tif');
Im=double(Im0);
[L,l]=size(Im);
sortie=Im;
tempo=Im;
alpha=5;
dt=0.01;
n=100;
for t=1:n
for i=2:L-1
for j=2:l-1
dxx=(sortie(i+1,j)-2*sortie(i,j)+sortie(i-1,j))/2;
dyy=(sortie(i,j+1)-2*sortie(i,j)+sortie(i,j-1))/2;
tempo(i,j)=dt*(alpha*(dxx+dyy) -2*(sortie(i,j)-Im(i,j)))+sortie(i,j);
tempo(1,j)=tempo(2,j);
tempo(L,j)=tempo(L-1,j);
end
tempo(i,1)=tempo(i,2);
tempo(i,l)=tempo(i,l-1);
end
sortie=tempo;
end
I=uint8(sortie);
figure;
```

```
subplot(1,2,1);  
imshow(Im0)  
title('Image bruitée');  
%figure;  
subplot(1,2,2);  
imshow(I)  
title('Image débruitée par Tikhonov');
```

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES :

5.1 Conclusions :

Les problèmes inverses ont un domaine d'investigation très large ,ils constituent une branche de recherche Mathématique dont l'importance ne cesse de croître. On les trouvent aussi bien dans le domaine de la mécanique, de la thermique, de la météorologie, qu'en statistiques ,en traitements d'imagesetc, d'où la naissance de plusieurs méthodes de résolutions à ces problèmes, Mais il faut noter que la question de stabilité suscite un intérêt particulier chez les Mathématiciens.

Un problème inverse (parfois appelé problème d'identifiabilité)est en général une situation où on est dans l'ignorance du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales....), la plupart de ces problèmes sont modélisés (étape difficile, se concerter avec un spécialiste du domaine étudié) en des systèmes d'équations aux dérivées partielles, d'où l'intérêt d'approfondir les notions d'EDP (existence,régularité,....ect) chose que nous avons épargné dans ce mémoire. En fait, notre travail est indexé sur les méthode de régularisation et une application de rétablissement d'une image bruitée.

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques exemples pour expliquer le caractère mal posé des problèmes inverses et quelques méthodes de résolutions à savoir: (la méth-

ode des moindres carrés ,la SVD, la méthode de Tikhonov et la méthode de fourier) .En pratique, La méthode de Tikhonov semble la plus utilisée ,mais beaucoup d'autres méthodes sont créées et chacune d'elles répond à un problème bien précis .

Pourquoi le traitement d'images ?

Ces dernières années, le traitement d'image a révolutionné le monde du numérique en général et celui des Mathématiques en particulier. En effet, les besoins de la medecine en tomographie, en imagerie(Rx).....et les besoins des nations en matière d'imagerie (lors des transmissions d'images satellitaires par exemple) ont orienté les chercheurs vers ce domaine qui reste d'actualité.

Dans notre application nous avons tenté de récupérer une image proche de l'image originale à partir d'une image de mauvaise qualité (bruitée). Plusieurs méthodes ont vu le jour, notamment celles utilisant les équations aux dérivées partielles.

Nous avons commencé par une simple équation (4.2) et la solution qui minimise (4.2) est la solution régularisé. Ensuite, il a fallu éliminé la double intégrale avec l'équation d'Euler-Lagrange (4.3).

Pour résoudre (4.3), on a considéré une équation aux dérivées partielles , puis on a discrétisé selon t et selon (x, y) .

Enfin, en a mis en exécution cette méthode de Tikhonov sur Matlab, après avoir résumé les différentes fonctions et commandes du logiciel et après avoir écrit le code de la méthode.

On peut remarquer que la méthode a tendance à rendre flou l'image malgré la disparition du bruit.

Durant nos multiples lectures sur se sujet, on a constaté que d'autres méthodes (comme : la méthode de la variation totale, la méthodes des hypersurfaces, la méthode de Perona-Malik.....)donneraient des résultatats meilleurs.

5.2 Perspectives :

Plusieurs problèmes inverses en mécanique, en biomécanique, en thermique, en tomographie, en électromagnétismes.....ect sont pas encor résolus. Mais, on peut remarquer que

la quasi totalité de ses problèmes inverses consistaient à : l'identification de paramètres , reconstructions de géométries (où formes)ect.

Citons un exemple :

5.2.1 En propagation d'ondes :

Les objets peuvent être modélisés de plusieurs manières : soit on les considère comme imperméables aux ondes, soit on les considère comme perméables et on les modélise par un indice de réfraction.

Un problème inverse naturel est alors de retrouver l'indice de réfraction d'un milieu perméable aux ondes à partir de mesures. En présence d'obstacle non perméable, un problème inverse naturel est de retrouver la forme de l'obstacle.

Bibliographie

- [1] M. CHOULLI. Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. Springer 2009.
- [2] A.N.Tikhonov and V.Y.Arsenin. Solutions of Ill-Posed Problems. VW , New York 1977.
- [3] L.Schwartz. Théorie des distributions. Hermann 1966.
- [4] M.Willem. Analyse fonctionnelle élémentaires. Cassini, Paris 2003.
- [5] A.Kirsch. An Introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer 1996.
- [6] M.Kern. Approximation et évolution ,méthodes numériques. Mines ParisTech 2010.
- [7] M.Kern. Problèmes Inverses ,aspects numériques. ESI Léonard de vinci 2003.
- [8] G.Golub et W.Kahan "Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a matrix
" Journal of the society for industrial and applied mathematics : Serie B, Numerical Analysis 1965.
- [9] G.Hégon. Synthèse d'image: Algorithmes élémentaires. Dunod 1985.
- [10] M.Bertero, P.Boccacci. Introduction to inverse problems in imaging. springer 1998.
- [11] G.Blanchet, M.Charbit. Digital signal and image processing using Matlab. ISTE 2006.

- [12] V.Isakov. Inverse problems for partial Differential equations. Springer 2006.
- [13] R.Deriche, O.Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. N°2697, INRIA 1995.
- [14] F.Humbert. Techniques de débruitage d'images. 2008.