

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA-BÉJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire

Présenté par :

Mme Baya TAKHEDMIT

Pour l'obtention du diplôme de

Magister

Filière : Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

**Approximations Stochastiques dans les Systèmes
de Files d'Attente**

Soutenu publiquement le : **30 Janvier 2014**

Devant le jury composé de :

Président	M ^r Smail ADJABI	Professeur	Univ. de Béjaïa
Rapporteur	M ^r Karim ABBAS	MCCA	Univ. de Béjaïa
Examineur	M ^r Djamil AÏSSANI	Professeur	Univ. de Béjaïa
Examineur	M ^r Djamel HAMADOUCHE	Professeur	Univ. de Tizi Ouzou
Examineur	M ^r Mohamed BOUALEM	MCCA	Univ. de Béjaïa
Invitée	M ^{me} Naïma HAMADOUCHE	MCCB	Univ. de Béjaïa

Béjaïa, 2014

DEDICACES

A mon cher époux.

A mes très chers parents.

A toute ma famille.

A ma belle famille.

A mes amis(es).

A

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur Monsieur **Karim ABBAS** pour m'avoir encadré tout au long de ce mémoire, pour ses conseils si pertinents et si précieux et pour nos discussions très bénéfiques. Je le remercie de m'avoir orientée vers ce sujet, il a pris le temps nécessaire pour m'éveiller à la recherche en montrant constamment une très grande rigueur et précision durant le travail. Il a toujours été disponible, toujours de bonne humeur, il n'a cessé de me soutenir et de m'encourager dans tous les moments où je peux douter, de mon travail. Il m'a poussé en avant malgré ses nombreuses activités. Un très grand merci à lui et toute ma reconnaissance.*

*Je présente aussi mes remerciements à Monsieur **Smaïl ADJABI** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Mes remerciements vont ensuite aux Messieurs : **Djamil AÏSSANI**, **Djamel HAMADOUCHE** et **Mohamed BOUALEM** ainsi que Madame **Naïma HAMADOUCHE** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements, premièrement à Monsieur **Sofiane OUAZI**, ainsi que Madame **Bahia BARACHE**. Deuxièmement à tous les enseignants de la faculté des Sciences Exactes, qui sont toujours disponibles pour toutes les demandes du savoir.*

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont soutenue et encouragée tout au long de ce travail.

Sans oublier tous les membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements particulièrement, mon cher mari.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Troncature dans les chaînes de Markov	5
1.1 Quelques rappels sur les systèmes de files d'attente	8
1.1.1 Processus stochastiques	8
1.1.2 Processus markoviens	9
1.1.3 Propriétés fondamentales	10
1.1.4 Classification des états d'une chaîne de Markov	11
1.1.5 Comportement asymptotique	13
1.2 Principe de la troncature des chaînes de Markov	13
1.2.1 Technique de la chaîne de Markov censurée (CMC)	14
1.2.2 Technique de l'augmentation linéaire	16
1.2.3 Technique de renormalisation	21
1.3 Convergence de la distribution stationnaire π_n vers la distribution π	23
2 Bornes de perturbation dans les chaînes de Markov	26
2.1 Position du problème et concept général de stabilité	28
2.1.1 Stabilité des modèles stochastiques	29
2.1.2 Différentes méthodes de stabilité des modèles stochastiques	30
2.2 Méthode de stabilité forte	32
2.2.1 Préliminaires et notations	32
2.2.2 Récurrence au sens de Harris	33
2.2.3 Ergodicité uniforme	34
2.2.4 Stabilité forte	35

2.2.5	v -Stabilité forte d'une chaîne de Markov	36
2.2.6	Inégalités de stabilité forte	37
3	Développement en séries de Taylor	40
3.1	Rappels d'analyse	42
3.1.1	Fonctions continues	42
3.1.2	Notion de différentiabilité	43
3.1.3	Accroissements finis	46
3.1.4	Formules de Taylor	47
3.1.5	Analyse de l'erreur	48
3.2	Développements en séries de Taylor des caractéristiques d'une chaîne de Markov	50
4	Application aux modèles M/G/1/N-(V,E) et M/G/1/∞-(V,E)	53
4.1	Description du modèle	53
4.1.1	Le modèle d'attente M/G/1/N-(V,E)	54
4.1.2	Le modèle d'attente M/G/1/∞-(V,E)	56
4.2	Analyse de la file d'attente M/G/1/∞-(V,E) par CMC	57
4.3	Analyse de perturbation de la file d'attente M/G/1/∞-(V,E)	61
4.4	Analyse de sensibilité de la file d'attente M/G/1/N-(V,E)	69
	Conclusion	1
	Bibliographie	2

Introduction Générale

Ces dernières années, de nombreuses approches d'approximation ont été développées pour l'analyse des modèles stochastiques (Chaînes de Markov, Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques, ...).

Les problèmes posés par les utilisateurs et les concepteurs des systèmes complexes sont d'ordre divers. Pour résoudre ces problèmes, on fait souvent recours à des méthodes d'approximation qui consistent à assimiler le système complexe à un système plus simple, analytiquement exploitable, qui lui est proche dans un certain sens. Si l'approximation est possible, il est également important d'avoir une idée de l'erreur commise sur les caractéristiques du système. Cette problématique est particulièrement importante dans l'analyse de certains types de systèmes complexes où la précision sur les caractéristiques du système peut avoir des incidences majeures. De plus, on s'est vite aperçu que l'incertain était un élément incontournable dans toutes les applications pratiques, d'où la place importante qu'y occupent aujourd'hui les processus stochastiques [92].

Actuellement, une réelle prise de conscience de la nécessité de cohabiter au mieux avec de l'incertain et de se servir pour y parvenir de tous les outils à disposition et en particulier des mathématiques. Parmi les processus stochastiques les plus importants, on trouve "*les chaînes de Markov*". Ces processus sont à la base des modèles de recherche opérationnelle, en particulier dans la gestion des stocks et la modélisation de systèmes de production [23]. Les chaînes de Markov constituent en outre le point de départ de la "*théorie des files d'attente*". Conçue au début du siècle passé pour modéliser les phénomènes de congestion dans les réseaux téléphoniques, cette théorie connaît un nouvel essor avec ses applications en informatique, en télécommunications et surtout dans le contexte de l'internet [32]. Par conséquent, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outil puissant pour l'analyse et l'optimisation

de performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques et les réseaux de communication. L'analyse stochastique (méthodes exactes [26, 70], méthodes d'approximation [110]), donnent une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de files d'attente.

Peu de systèmes et réseaux de files d'attente ont une solution simple ou des résultats analytiques exploitables. Des solutions ont pu être obtenues pour certains cas particuliers de systèmes et réseaux de files d'attente. Cependant, même dans ces cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est pour cela qu'on s'intéresse d'une manière générale soit :

- (P1) Aux problèmes de troncature ;
- (P2) Aux problèmes de stabilité ou d'obtention des bornes de perturbation ;
- (P3) Aux approximations numériques.

En pratique, les méthodes numériques sont applicables dans le cas de réseaux le quel avec un nombre fini d'états. Ce nombre fini peut être obtenu par troncature dans le cas où il ne le serait pas initialement. La non influence devra être validée en augmentant les limites de troncature et en recalculant les probabilités stationnaires du modèle, les valeurs ne doivent pas en être impactées (dans une certaine mesure).

La méthode de troncature des chaînes de Markov est une approche d'approximation basée sur le principe de tronquer l'espace des états infini d'une chaîne de Markov. Dans ce sens, la troncature de l'espace des états est souvent exigée dans les calculs qui concernent les chaînes de Markov infinies.

L'étude d'approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov infinie par des chaîne de Markov finies a été initiée par Seneta [94] en 1968. Depuis les travaux de cet auteur à ce jour, plusieurs résultats ont été obtenus. Les issues générales liées à cette problématique sont discutées dans [27].

L'une des catégories de modèles de files d'attente la plus adéquate à la modélisation fidèle des situations d'attente réelles est celle des modèles d'attente avec vacances du serveur.

Comme tous les modèles stochastiques, les systèmes de files d'attente avec vacances des serveurs peuvent être décrits par une chaîne de Markov [39, 76].

Depuis les travaux des Takagi [106], plusieurs auteurs ont investi l'étude des modèles de files d'attente avec vacances et service exhaustif [76]. Les issues générales liées aux systèmes de files d'attente avec vacances et service exhaustif sont discutées dans [76]. En raison de la structure complexe des vacances du serveur, il est difficile d'obtenir des résultats analytiques exploitables. Des solutions ont également pu être obtenues pour certains cas particuliers de systèmes de files d'attente avec vacances. Cependant, même dans ces cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est le cas de la transformée de Laplace-Stieltjes ou de la fonction génératrice de la distribution stationnaire de la taille du système qui ne sont pas disponibles sous formes explicites [76]. C'est pour cela que, lors de la modélisation d'un système réel, on est souvent amené à remplacer les éléments stochastiques réels mais compliqués gouvernant le système, par d'autres éléments plus simples. Ces derniers sont supposés être, dans un certain sens, proches des éléments réels. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel, d'où l'apparition du problème de "stabilité".

"Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques."

Dans la littérature, il existe plusieurs résultats sur les bornes de perturbation des chaînes de Markov. Les principaux résultats sont résumés par Heidegott et Hordijk [55]. Une partie de ces résultats concerne l'analyse de la sensibilité de la distribution stationnaire des chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini (voir Heidegott et al. [53]), et les bornes de perturbations sont obtenues en utilisant les méthodes d'analyse matricielle; voir le papier de Cho et Mayer [33]. Un autre groupe englobant des bornes de perturbation pour les distributions stationnaires des chaînes de Markov à temps fini avec un espace d'états général; voir Rachev [88] et Aïssani et Kartashov [65]. Dans ces travaux, les bornes de perturbation pour des chaînes de Markov générales sont exprimées en fonction des coefficients d'ergodicité du noyau de transi-

tion itéré, qui sont difficile à calculer pour des espaces d'états infinis. Ces résultats sont obtenus en utilisant des opérateurs théoriques et des méthodes probabilistes. Quelques méthodes parmi celles-ci nous permet d'obtenir des estimations quantitatives en plus de l'affirmation qualitative de la continuité.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

- ⊃ Le premier chapitre comprend quelques rappels sur les systèmes de files d'attente et une synthèse des principaux résultats analytiques sur les techniques de troncature dans les chaînes de Markov à espace d'états infini.
- ⊃ Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord, les principaux résultats obtenus dans le cadre des méthodes de stabilité des modèles stochastiques, nous exposons ensuite, les critères de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov [64, 80], ainsi que les principaux résultats obtenus dans ce cadre.
- ⊃ Le troisième chapitre est consacré à la présentation de quelques définitions est généralités sur les formules de développement en séries de Taylor. Une attention particulière sera portée aux différentes versions des restes de ces développements.
- ⊃ Le quatrième chapitre représente la partie pratique du mémoire, où nous appliquons la méthode de toncature censurée au système d'attente $M/G/1$ avec vacances du serveur et, nous présentons les résultats obtenus lors d'application de la méthode de stabilité forte. Ce chapitre se termine par l'approximation de la distribution stationnaire du système $M/G/1/N$ avec vacances du serveur par la méthode du développement en séries de Taylor [6, 52].
- ⊃ Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives et les directions de recherche induites par les résultats obtenus.

Chapitre 1

Troncature dans les chaînes de Markov

Introduction

La théorie des chaînes de Markov s'est avérée être un outil puissant pour une variété de modèles pratiques ont été ainsi analysé comme dans la communication, la fabrication et la fiabilité. En particulier, le comportement d'état d'équilibre est fréquemment d'intérêt principal. Les expressions analytiques à cet effet sont disponibles seulement dans un nombre limité d'applications, de sorte que des procédures informatiques telles que l'approximation successive doivent être employées. Dans la pratique, cependant, on rencontre souvent des espaces d'états grands ou infinis tels que dans une file d'attente infinie à un serveur ou un système d'entretien avec une vie illimitée à priori. La troncature de l'espace d'états devient alors nécessaire.

Bien que la technique de la troncature de l'espace d'états soit un dispositif commun dans la pratique, l'appui théorique en termes d'ordres d'exactitude ou taux de convergence semble à peine disponible. Les chaînes de Markov sont connues pour être de puissants outils de modélisation.

Cependant, la modélisation des situations réelles, nous conduit à utiliser des espaces d'états très grands (problème d'espace de stockage, problème du temps de calcul). Ce qui nous mène à réduire l'espace d'états. Cette procédure s'appelle "troncature".

La troncature de l'espace d'états est fréquemment exigée pour des calculs pratiques de chaînes de Markov à espace d'états grands ou infinis. Dans le présent chapitre, nous allons présenter quelques travaux sur le problème de troncature des chaînes de Markov.

Le principe de la méthode de troncature consiste à approcher la distribution stationnaire

d'une chaîne de Markov à espace d'états infini, si elle existe, par celle d'une chaîne de Markov à espace d'états fini. Cela se fait par troncature d'espace d'états de la chaîne originale tout en utilisant plusieurs techniques comme l'augmentation linéaire, la renormalisation et la méthode de chaîne de Markov censurée (CMC), etc [63, 99, 116].

L'application de cette approche est devenue importante et, dans certains cas indispensable, où en général des modifications sur l'espace d'états du système peuvent être suggérées pour obtenir des bornes d'erreurs simples ou des approximations faciles à calculer [101].

Approcher une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable à l'aide d'une chaîne de Markov à espace d'états fini est un sujet difficile et souvent intéressant, qui a attiré l'attention de nombreux chercheurs [94, 96, 111].

Pour le calcul de la distribution stationnaire, quand elle existe, d'une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable, la matrice de probabilités de transition de la chaîne de Markov doit être dans un premier temps réduite à une matrice de taille finie. Ensuite, nous calculons la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov à états finis comme une approximation de celle d'une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable. Nous nous attendons à ce que le niveau de troncature (ou la taille) augmente à l'infini, la solution pour la chaîne de Markov finie converge vers celle de chaîne de Markov à espace d'état dénombrable.

Bien que de nombreux problèmes d'application justifiant cette convergence pourrait être établie par des significations physiques du "fini" et des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable, il n'est pas toujours facile de justifier formellement cette affirmation [56, 111].

Notes bibliographiques

Le principe de la troncature a été introduit en 1913 par Riesz [90]. Dans son contexte initial, il consiste en "résolution d'un système constitué d'une infinité d'équations linéaires avec un nombre infini d'inconnus, le système est alors limité aux n premières équations, et le reste étant négligées".

L'étude d'approximer les probabilités stationnaires d'une chaîne de Markov infinie par des chaînes de Markov finies a été initiée par Seneta [94] en 1968. De nombreux résultats mis à jour ont été obtenus par lui et ses collaborateurs. La plupart de leurs résultats sont présentés dans

un papier de Gibson et Seneta [99]. D'autres références peuvent y être trouvées dans un autre papier [100] publié la même année par les mêmes auteurs.

D'autres chercheurs ont utilisé des approches différentes à celle de Seneta ; voir [48, 56, 111]. Par exemple, Heyman [56] fournit un traitement probabiliste du problème. Plus tard, Grassmann et Heyman [48] justifiaient la convergence pour les chaînes de Markov infinies. En ce qui concerne d'autres questions plus générales sur l'approximation d'une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable, ont été introduite dans le livre de Freedman [43].

Des conditions qui garantissent la convergence sont données par Van Dijk [37], le même auteur a appliqué la troncature pour le réseau de Jackson [36] et, aux chaînes de Markov à temps continu [38]. Zhao et liu [75] se sont intéressés à déterminer quelle méthode d'augmentation fournit la meilleure approximation lorsque la convergence a été établie. Une analyse numérique montre souvent que la méthode d'augmentation de la dernière colonne fournit la meilleure approximation. Gibson et Seneta [99] semblent croire à une telle conclusion après la comparaison de cinq méthodes différentes d'augmentation pour la chaîne de Markov. Basé sur les résultats d'analyse disponible, on ignore quelle méthode d'augmentation est la meilleure au sens de minimisation de la somme absolue d'erreurs.

D'autre part, Zhao et liu [75] ont :

(a) montré analytiquement que pour n'importe quel niveau de troncature donné la chaîne de Markov censurée donne la meilleure approximation au sens de comparaison des erreurs absolues commises ;

(b) montré, sur exemple, que la méthode d'augmentation de la dernière colonne n'est pas toujours la meilleure méthode de troncature.

Ainsi, plusieurs auteurs ont utilisé cette méthode ; voir [42, 73, 75, 113, 114].

En 2012, Adel et al. [7] ont utilisé la méthode de stabilité forte afin d'estimer l'erreur commise lors de la troncature d'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant un réseau de files d'attente constitué de deux files en tandem avec blocage et dépendance.

Les problèmes de convergence de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov tronquée vers la distribution de la chaîne originale (à espace d'états infini) ont été déjà abordé

dans les années 1960 par Seneta [94]. Une étude détaillée de ces résultats de convergence aussi bien qu'une revue globale de littérature relative peut être trouvée dans l'article de Seneta [96]. Dans cette dernière référence, le même auteur a obtenu quelques estimations des erreurs induites par la troncature d'espace d'états infini, sans donner une précision sur la robustesse des bornes obtenues. Dans le même axe de recherche, Schweitzer [93], Meyer [79] et Van Dijk [36] ont obtenu plusieurs bornes de perturbation, tout en considérant des démarches différentes de la troncature des chaînes de Markov infinies.

Des bornes explicites d'erreur sont obtenues par Van Dijk [37] pour les systèmes bidimensionnelle (Overflow model, Tandem queue). Ces bornes garantissent un taux de convergence pendant que la limite de troncature tend à l'infini et permettent de déterminer une limite de troncature de priori pour n'importe quelle exactitude désirée.

1.1 Quelques rappels sur les systèmes de files d'attente

À la différence du calcul des probabilités, qu'on peut considérer comme étant le traitement mathématique de la notion intuitive du "hasard", les processus stochastiques fournissent des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires dont la dépendance du temps (ou d'un autre paramètre) joue un rôle prépondérant.

Dans cette section, nous introduisons quelques concepts fondamentaux de la théorie des processus aléatoires et de la théorie des files d'attente.

1.1.1 Processus stochastiques

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économiques et financiers.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

Définition 1.1.1. [19] On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t; t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) , $t \in T$ représente une date.

Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

Définition 1.1.2. [92] On appelle espace des états (des phases) l'ensemble E où les variables X_n prennent leurs valeurs. L'ensemble E peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

1. Suite stochastique à espace d'états discret ;
2. Suite stochastique à espace d'état continu ;
3. Processus continu à espace d'état discret ;
4. Processus continu à espace d'état continu.

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

Définition 1.1.3. [92] Un processus stochastique $\{\xi_t; t \geq 0\}$ est strictement stationnaire, si $\forall (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R} : F(\xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_n}) = F(\xi_{t_0+\tau}, \dots, \xi_{t_n+\tau})$, où F est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_t .

Définition 1.1.4. [92] Un processus stochastique $\{\xi_t; t \geq 0\}$ est à accroissement stationnaire (homogène), si

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R} : X_{t_2+h} - X_{t_1+h}$ et $X_{t_2} - X_{t_1}$ sont des variables aléatoires de même loi.

1.1.2 Processus markoviens

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évolution future.

L'analyse des chaînes de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

Chaîne de Markov à temps discret

Définition 1.1.5. [19] On appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d : Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i), \quad (1.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états i_0, \dots, i_{n-1} , i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens.

On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par p_{ij} :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j / X_{n-1} = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

La matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

1.1.3 Propriétés fondamentales

a. Probabilité de transition

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i), \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

en utilisant l'algèbre des événements, on a :

$$P^{(n)} = P^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

De façon plus générale, la relation matricielle

$$P^n P^m = P^{n+m},$$

s'écrit maintenant

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \quad (i, j \in E, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1). \quad (1.5)$$

Ce système d'équations est connu sous le nom d'équations de **Chapman-Kolmogorov**.

b. Loi de probabilité de X_n

Nous introduisons les probabilités d'états :

$$\pi_k(n) = \mathbb{P}(X_n = k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.6)$$

La distribution de X_n peut alors être écrite sous forme de vecteur-ligne :

$$\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots), \quad (1.7)$$

dont la somme des termes vaut 1.

Pour calculer $\pi(n)$, on doit connaître la distribution initiale $\pi(0)$ et la matrice de transition P ; ces probabilités d'états définissent le régime transitoire d'un phénomène aléatoire :

$$\pi(n) = \pi(0)P^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Lorsque la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi, \quad (1.9)$$

on définit le régime permanent du processus, indépendant de la distribution initiale.

1.1.4 Classification des états d'une chaîne de Markov

On peut classer les états d'une chaîne de Markov en utilisant son graphe associé.

Définition 1.1.6. [92] Soient i, j deux états de E , on dit que j est accessible à partir de i , s'il existe un chemin de i vers j dans le graphe de transition.

Définition 1.1.7. [92] Si j est accessible à partir de i et i est accessible à partir de j , alors i et j sont dits communiquants.

La relation \mathcal{R} : "i et j communiquent" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de \mathcal{R} sont les composantes fortement connexes du graphe de transition.

Définition 1.1.8. [19] Un ensemble d'états C est fermé si,

$$\forall i \in C \text{ et } \forall j \text{ alors } p_{ij} = 0.$$

Propriété 1.1.1. [19]

$$\forall n > 0, \forall i \in C : \sum_{j \in C} p_{ij}^n = 1, \quad (1.10)$$

c-à-d : au bout de n transitions on est toujours dans C .

Périodicité

Définition 1.1.9. [?] Un état i est dit périodique de période $d(i)$, si

$$d(i) = \text{pgcd}(\{n \geq 1 : p_{ii}^n > 0\}) > 1. \quad (1.11)$$

Si

$$d(i) = 1, \quad (1.12)$$

alors i est dit "apériodique".

On représente le graphe correspondant, et grâce à celui-ci on détermine la nature des états de la chaîne comme suite :

- (i) les sommets dans le graphe qui possèdent des successeurs sont appelés classes transitoires ;
- (ii) les sommets qui ne possèdent pas des successeurs sont appelés classes récurrentes ;
- (iii) parmi les classes récurrentes celle qui ne contiennent qu'un état sont appelées classes absorbantes.

Chaîne de Markov irréductible

Définition 1.1.10. [19] Une chaîne de Markov est dite irréductible, si elle ne contient aucun ensemble fermé (autre que celui de tous ces états).

Propriété 1.1.2. [19] Dans une chaîne de Markov irréductible tous les états communiquent et sont de même nature.

1.1.5 Comportement asymptotique

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi. \quad (1.13)$$

Théorème 1.1.1. [92] *Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors*

$$\pi(n) \rightarrow \pi,$$

quelle que soit la distribution initiale $\pi(0)$, et

$$P^n = P^*,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. La distribution π est un vecteur de probabilité strictement positif, et P^* une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π . En plus

$$\pi P^* = \pi.$$

1.2 Principe de la troncature des chaînes de Markov

Soit $P = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ une matrice stochastique infinie, irréductible et récurrente positive, elle admet donc une distribution stationnaire unique $\pi = (\pi_j)_{j \geq 0}$. Le calcul de cette distribution étant en général difficile sinon impossible, il est souhaitable de disposer d'approximations simples et convergeant rapidement vers cette distribution.

Pour cela, une solution consiste à approcher P par une matrice stochastique finie P_n .

Considérons le coin nord-ouest d'ordre n de la matrice P :

$$T_n = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}.$$

P étant irréductible, il existe au moins une ligne i pour laquelle :

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} < 1.$$

Si bien que la matrice tronquée T_n n'est pas stochastique.

À partir de la matrice T_n , on construit une matrice stochastique $P_n = (p_n(i, j))_{0 \leq i, j \leq n-1}$ vérifiant $P_n \geq T_n$, c'est-à-dire $p_n(i, j) \geq p_{ij}$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$; cela peut se faire en utilisant plusieurs techniques de troncature.

Principales techniques de la troncature

La matrice stochastique P_n qui représente la chaîne de Markov tronquée peut être obtenue avec l'application de plusieurs techniques de troncature. Parmi ces techniques on distingue :

1.2.1 Technique de la chaîne de Markov censurée (CMC)

La théorie des CMC permet de donner un cadre théorique à l'analyse des espaces d'états issus de la génération partielle d'une chaîne de Markov ergodique ou absorbante. C'est typiquement ce qui se passe implicitement dans une simulation ou explicitement quand on génère les états en tronquant la chaîne lorsqu'elle est trop grande.

Les chaînes de Markov censurées ont d'abord été considérées en 1958 par Lévy [72]. Depuis lors, les chaînes de Markov censurées ont été jugées très utiles dans différents aspects de l'étude des chaînes de Markov. Cette technique a été aussi utilisée dans [73]. En 1966, Williams [110] l'a également présenté comme une nouvelle technique d'obtention des approximations. Récemment, Grassmann et Heyman [48] ont utilisé cette technique pour faire face à l'élimination de bloc pour les matrices de probabilités de transition des chaînes Markov infinies. D'autres résultats ont été présentés dans [43].

Zhao et Liu [75] ont montré que CMC est la meilleure méthode pour l'approximation d'une chaîne de Markov à espace d'états infini dans la mesure où la somme des erreurs des probabilités stationnaires est le minimum pour un niveau de troncature donné.

En général, il n'existe aucun moyen facile de calculer la matrice de probabilités de transition de la chaîne de Markov censurée de la chaîne de Markov originale [43].

Définition 1.2.1. [42] *Considérons une chaîne de Markov à temps discret $\{X_t; t = 1, 2, \dots\}$ et à espace d'états S . Considérons une partition de $E = S \cup S^c$ et $S \cap S^c = \emptyset$. Supposons que les visites successives de S par X_t se produisent aux instants $0 < t_1 < t_2 < \dots$.*

La chaîne

$$\{X_{t_u}^S, u = 1, 2, \dots\}$$

est appelée chaîne de Markov censurée.

La technique de CMC

Soit la chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ à temps discret (CMTD) défini dans l'espace états dénombrable $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Soit $S = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ un sous-ensemble de S et S^c est son complémentaire dans S . Pour simplifier la présentation, nous supposons ici que l'espace d'états est fini et notons $|S| = N$. Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, on considère la partition de l'espace d'états pour définir la matrice P par bloc.

Théorème 1.2.1. [114] Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ partitionnée en deux sous-ensembles S et S^c :

$$P = \begin{pmatrix} T & U \\ V & Q \end{pmatrix}.$$

Donc, le processus censuré est une chaîne de Markov, dont la matrice de probabilités de transition est donnée par :

$$P_S = T + U\hat{Q}V, \quad (1.14)$$

où $\hat{Q} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$.

Remarques. [73] Sur la base de la discussion ci-dessus sur les chaînes de Markov censurées, une interprétation probabiliste pour chaque composante de la matrice P_S est donnée comme suit :

1. $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij})$ est le nombre prévu de visites à l'état $j \in S^c$ avant d'entrer dans S , étant donné que la chaîne de Markov commence dans l'état $i \in S^c$;
2. $U\hat{Q} = (u\hat{q})_{i,j}$ est le nombre prévu de visites à l'état $j \in S^c$ avant de retourner à S , étant donné que la chaîne de Markov commence dans l'état $i \in S$;
3. $\hat{Q}V = (\hat{q}v)_{i,j}$ est la probabilité que lors de l'entrée en E du premier état visité $j \in S$, étant donné que la chaîne de Markov commence dans l'état $i \in S^c$;
4. $U\hat{Q}V = (u\hat{q}v)_{i,j}$ est la probabilité que son retour à S du premier état visité $j \in S$, étant donné que la chaîne de Markov commence dans l'état $j \in S$.

Lemme 1.2.1. [115] *Si une chaîne de Markov est irréductible, alors sa chaîne censurée l'est aussi.*

Si P est ergodique et ayant une probabilité stationnaire π_k , alors la probabilité stationnaire π_k^S de la chaîne de Markov censurée est définie par :

$$\pi_k^S = \frac{\pi_k}{\sum_{i \in E} \pi_k}, k \in S. \quad (1.15)$$

Théorème 1.2.2. [75]

Nous supposons que S^c ne contient pas les classes réductibles (de sorte que la matrice $I - Q$ est régulière où I est la matrice identité). Ensuite, la matrice de probabilités de transition de la chaîne censurée, souvent aussi appelée le complément stochastique de la matrice P , est donnée par :

$$P_{(S)} = T + U(I - Q)^{-1}V. \quad (1.16)$$

Le second terme du côté droit représente les probabilités des chemins qui renvoient à l'ensemble E par les états de S^c .

Dans plusieurs problèmes, la taille de la matrice de probabilités initiale P rend la construction des quatre blocs plus complexe en terme de temps et d'espace de stockage.

1.2.2 Technique de l'augmentation linéaire

Dans ce type de techniques, la masse de probabilité perdue lors de la troncature de P est redistribuée sur les colonnes de T_n , plus précisément :

Soit $A_n = (a_n(i, j))_{0 \leq i, j \leq n-1}$ une matrice stochastique quelconque, on pose :

$$p_n(i, j) = p_{ij} + a_n(i, j) \sum_{k > n-1} p_{ik}, \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq n-1. \quad (1.17)$$

En particulier, selon la structure de la matrice A_n , on obtient :

- ▷ Augmentation de la première colonne seulement si $a_n(i, 0) = 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$;
- ▷ augmentation de la dernière colonne seulement si $a_n(i, n-1) = 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$;
- ▷ augmentation uniforme des colonnes seulement si $a_n(i, j) = \frac{1}{n}$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$;

- ▷ on peut aussi prendre A_n une matrice dont toutes les lignes sont identiques [101];
- ▷ encore, plus simplement, on peut choisir A_n booléenne [37].

Exemple

On définit la matrice $P = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ qui représente le modèle original comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si on suppose que cette matrice stochastique à espace d'états infini, irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une distribution stationnaire unique $\pi = (\pi_j)_{j \geq 0}$.

On considère "le coin Nord-Ouest" d'ordre n de la matrice P donné par :

$$T_n = (p_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-1}.$$

$$T_n = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0,n-1} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,n-1} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ p_{n-1,0} & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

P étant irréductible. Supposons qu'il existe au moins une ligne i pour laquelle :

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} < 1,$$

alors la matrice tronquée T_n n'est pas une matrice stochastique. À partir de T_n , on construit une matrice stochastique $P_n = (p_n(i, j))_{0 \leq i,j \leq n-1}$ vérifiant $P_n \geq T_n$, c'est-à-dire que $p_n(i, j) \geq p_{ij}$ pour $0 \leq i, j \leq n - 1$.

Pour la technique de l'augmentation linéaire, la matrice P_n est calculée comme suit :

$$p_n(i, j) = p_{ij} + a(i, j) \sum_{k>n-1} p_{ik}, \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq n - 1, \tag{1.18}$$

où, $\sum_{k>n-1} p_{ik}$ représente la masse de probabilité perdue sur la ligne "i" lors de la troncature de P . Cette masse de probabilité est redistribuée sur les colonnes de T_n selon la définition d'une certaine matrice stochastique A_n , telle que :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$s_{(i,k)} = \sum_{k>n-1} p_{ik}, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (1.19)$$

Alors, la matrice P_n s'écrit comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} + a_{00}s_{(0,k)} & p_{02} + a_{02}s_{(0,k)} & \cdots & p_{0n-1} + a_{0n-1}s_{(0,k)} \\ p_{10} + a_{10}s_{(1,k)} & p_{11} + a_{11}s_{(1,k)} & \cdots & p_{1n-1} + a_{1n-1}s_{(1,k)} \\ p_{20} + a_{20}s_{(2,k)} & p_{22} + a_{22}s_{(2,k)} & \cdots & p_{2n-1} + a_{2n-1}s_{(2,k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} + a_{n-10}s_{(n-1,k)} & p_{n-11} + a_{n-11}s_{(n-1,k)} & \cdots & p_{n-1n-1} + a_{n-1n-1}s_{(n-1,k)} \end{pmatrix}.$$

• **Augmentation de la première colonne [63]**

Pour le cas de l'augmentation de la première colonne, on prend $a_0(i, 0) = 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$. Alors A_n s'écrit sous la forme suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

et la matrice P_n sera donnée comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} + \sum_{k>n-1} p_{0k} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n-1} \\ p_{10} + \sum_{k>n-1} p_{1k} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n-1} \\ p_{20} + \sum_{k>n-1} p_{2k} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} + \sum_{k>n-1} p_{n-1k} & p_{n-11} & p_{n-12} & \cdots & p_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

- **Augmentation de la dernière colonne [94]**

De même, pour le cas de l'augmentation de la dernière colonne, on suppose que

$a_{n-1}(i, n-1) = 1$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Alors, l'écriture induite de la matrice A_{n-1} sera donnée par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice P_n est donnée comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n-1} + \sum_{k>n-1} p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n-1} + \sum_{k>n-1} p_{1k} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n-1} + \sum_{k>n-1} p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} & p_{n-11} & p_{n-12} & \cdots & p_{n-1n-1} + \sum_{k>n-1} p_{n-1k} \end{pmatrix}.$$

- **Augmentation uniforme**

Dans ce cas, la matrice A_n est construite de façon à ce que toutes ses composantes

$a(i, j) = \frac{1}{n}$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$:

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

et la matrice P_n sera donnée comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{0k} & p_{01} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{0k} & \cdots & p_{0n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{0k} \\ p_{10} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{1k} & p_{11} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{1k} & \cdots & p_{1n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{1k} \\ p_{20} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{2k} & p_{21} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{2k} & \cdots & p_{2n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{n-1k} & p_{n-11} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{n-1k} & \cdots & p_{n-1n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k>n-1} p_{n-1k} \end{pmatrix}.$$

- On peut aussi considérer le cas où la matrice A est une matrice stochastique dont toutes ses lignes sont identiques, c'est un cas considéré par *Gibson et Seneta* [100].

Ainsi, la matrice A_n peut être définie comme suit :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{n-1n-1} \\ a_{00} & a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{n-1n-1} \\ a_{00} & a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{n-1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{00} & a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix},$$

avec $a_{00} + a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{n-1n-1} = 1$.

Tenant compte de la formule (1.18), on obtiendra l'écriture de la matrice P_n sous la forme suivante :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} + a_{00}s(0, k) & p_{01} + a_{11}s(0, k) & \cdots & p_{0n-1} + a_{n-1n-1}s(0, k) \\ p_{10} + a_{00}s(1, k) & p_{11} + a_{11}s(1, k) & \cdots & p_{1n-1} + a_{n-1n-1}s(1, k) \\ p_{20} + a_{00}s(2, k) & p_{21} + a_{11}s(2, k) & \cdots & p_{2n-1} + a_{n-1n-1}s(2, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} + a_{00}s(n-1, k) & p_{n-11} + a_{11}s(n-1, k) & \cdots & p_{n-1n-1} + a_{n-1n-1}s(n-1, k) \end{pmatrix},$$

où,

$$s(i, k) = \sum_{k>n-1} p_{ik}, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq n-1.$$

- Le dernier cas de l'augmentation linéaire, c'est le cas considéré par *Van Dijk* [37], où il a défini la matrice A comme étant une matrice booléenne.

Dans notre exemple, on prendra la matrice A comme une matrice identité :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Tenant compte toujours de la formule (1.18), on obtiendra la matrice P_n comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} + s(0, k) & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n-1} \\ p_{10} & p_{11} + s(1, k) & p_{12} & \cdots & p_{1n-1} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} + s(2, k) & \cdots & p_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-10} & p_{n-11} & p_{n-12} & \cdots & p_{n-1n-1} + s(n-1, k) \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Technique de renormalisation

Dans cette technique, on pose :

$$S(i, n) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{ij}, \quad \forall 0 \leq i \leq n-1,$$

où $S(i, n)$ représente la somme des probabilités sur chaque ligne i du coin Nord-Ouest d'ordre n de la matrice P .

Pour obtenir une matrice stochastique P_n d'ordre n , dans ce cas, on utilise la transformation suivante :

$$P_n(i, j) = \frac{p_{ij}}{S(i, n)}, \quad \forall 0 \leq i, j \leq n-1.$$

Dans ce cas, la matrice P_n sera donnée comme suit :

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{p_{00}}{S(0, n-1)} & \frac{p_{01}}{S(0, n-1)} & \frac{p_{02}}{S(0, n-1)} & \cdots & \frac{p_{0n-1}}{S(0, n-1)} \\ \frac{p_{10}}{S(1, n-1)} & \frac{p_{11}}{S(1, n-1)} & \frac{p_{12}}{S(1, n-1)} & \cdots & \frac{p_{1n-1}}{S(1, n-1)} \\ \frac{p_{20}}{S(2, n-1)} & \frac{p_{21}}{S(2, n-1)} & \frac{p_{22}}{S(2, n-1)} & \cdots & \frac{p_{2n-1}}{S(2, n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p_{n-10}}{S(n-1, n-1)} & \frac{p_{n-11}}{S(n-1, n-1)} & \frac{p_{n-12}}{S(n-1, n-1)} & \cdots & \frac{p_{n-1n-1}}{S(n-1, n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on prend n assez grand afin que $S(i, n) > 0$.

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(i, j) = p_{ij}.$$

Par conséquent si n est grand P_n et P sont voisines, ce qui amène aux questions suivantes :

(Q1) P_n admet-elle une distribution stationnaire π_n ?

(Q2) π_n converge-t-elle, en un sens à préciser, vers π ?

En ce qui concerne la question **(Q1)**, l'existence d'une distribution stationnaire π_n a été étudiée pour divers types de matrices P_n , en particulier par Seneta [94, 95, 100]. Nous contentons de noter si l'état 1 est récurrent positif pour la matrice P_n , il existe au moins une distribution stationnaire π_n . En effet, la chaîne réduite à la classe de l'état récurrent 1 admet une distribution stationnaire qu'on peut compléter par 0 sur les autres états.

D'autre part, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la question **(Q2)**, parmi les plus intéressants, on peut citer :

Wolf [101] qui s'est intéressé, en particulier, à l'approximation de la distribution stationnaire d'une matrice infinie P , irréductible, récurrente positive, par ailleurs quelconque, par les distributions stationnaires de matrices finies P_n . Il a examiné quatre types de matrices P_n , obtenues par :

- L'augmentation de la première colonne ;
- L'augmentation de la dernière colonne ;
- L'augmentation uniforme des colonnes ;
- La renormalisation,

et il a établi la convergence en variation totale de π_n vers π sous des conditions analogues au critère de Foster [101].

Seneta [94] a prouvé que π_n converge faiblement vers π si et seulement si la suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est uniformément tendue. Cet argument a été déjà pris par Gibson et Seneta [99, 100] pour établir la convergence faible de π_n vers π lorsque P est stochastiquement monotone et P_n étant construite par augmentation linéaire.

Heyman [56] a construit des chaînes X_n et X de matrices de transition respectives P_n et P et, il a introduit les temps de retour à l'état 1, puis le temps nécessaire pour que la chaîne X dépasse la barrière n . En s'appuyant sur les résultats de Heyman et Whitt [56], il a également établi une condition suffisante pour assurer la convergence faible de π_n vers π .

Kalachnikov et **Rachev** [63] ont aussi étudié le problème de l'approximation d'une chaîne de Markov infinie. L'essentiel de leurs travaux est orienté vers l'approximation uniforme de la chaîne originale par des chaînes finies construites par augmentation de la première colonne.

Tweedie [109] s'est intéressé, en particulier aux chaînes géométriquement ergodiques et les chaînes de Markov stochastiquement monotone, afin qu'il puisse étudier les deux questions ci-dessus. Les approximations de π peuvent être construites à partir de P_n , mais seulement dans des cas particuliers, pour lesquels la distribution π_n converge vers π . Il a montré ainsi que cette convergence s'établit toujours pour deux classes générales de chaînes de Markov : les chaînes géométriquement ergodiques, et celles dominées par les chaînes stochastiquement monotones. Pour ces deux classes il a obtenu des estimations de l'erreur d'approximation.

1.3 Convergence de la distribution stationnaire π_n vers la distribution π

Il y a peu de références abordant le problème de comparaison de diverses méthodes en terme de vitesse de convergence. Dans plusieurs cas d'étude, l'augmentation de la dernière colonne produit une erreur de troncature minimale [99] ou une vitesse de convergence plus rapide [48], tandis que l'augmentation de la première colonne induit des erreurs considérables. De ce fait, on constate que la technique de l'augmentation de la dernière colonne est souvent utilisée. Cependant, la convergence des probabilités ne peut pas toujours être garanti [99] et [111].

Dans ce sens, deux conditions garantissant une telle convergence incluent l'ergodicité exponentielle et la monotonie stochastique du processus, ont été introduite dans [50, 109]. En 1991, Haymen [56] a fourni quelques conditions suffisantes de convergence des distributions stationnaire des chaînes tronquées vers la distribution stationnaire de la chaîne originale, plus récemment, en 2003, Zhao et Li [116] ont considéré des approximations des chaînes de

Markov ergodiques et non-ergodiques tout en fournissant une preuve simple et directe pour la convergence des chaînes de Markov irréductibles et ce en employant la technique de la CMC.

Il est de grande importance d'étudier l'approximation de la distribution stationnaire π de la chaîne de Markov infinie par la distribution stationnaire π_n de la chaîne de Markov finie tronquée. Cela nous fournit une manière efficace de calculer π quand elle ne peut pas être obtenue explicitement. En outre, elle nous permet d'approcher π_n quand n est très grand, en utilisant l'expression explicite de π . Dans l'étude des approximations par troncature des chaînes de Markov infinies, deux questions importantes se posent naturellement :

(i) Quelles conditions assurent la relation

$$\|\pi_n - \pi\| = \sum_{i=0}^n |\pi_n(i) - \pi(i)| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \pi(i) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty? \quad (1.20)$$

(ii) De plus, si (1.20) est vérifié, quelle est la vitesse de convergence de cette dernière, c-à-d, quelle est la borne de l'erreur $\|\pi_n - \pi\|$?

Ces questions ont été abordées dans la littérature par quelques auteurs :

Pour la première question, elle a été abordée par Seneta [96], mais la convergence de π_n vers un vecteur de probabilité, n'est pas facile à vérifier pour tous les modèles. Cependant, la condition a été établie pour les chaînes stochastiquement monotones [100, 114], Gibson et Seneta [99] l'ont prouvé directement pour les chaînes de Markov quelconques.

Tweedie [109] a répondu à la deuxième question partiellement et ce pour toutes sortes d'augmentations.

En 2010, Liu [74] a suivi la même démarche que celle de Tweedie pour l'étude des deux questions, où il a obtenu de nouvelles caractérisations de la convergence de (1.20).

Finalement, de nombreux résultats liés à cette problématique peuvent être trouvés dans les ouvrages de Nummelin [82] et de Meyn et Tweedie [109].

Conclusion

Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique a été effectuée sur les techniques de troncature dans les chaînes de Markov à espace d'états infini, ainsi que sur les principaux résultats

relatifs à ces techniques. Ensuite, afin de bien assimiler le principe de celles-ci, nous avons considéré un exemple illustratif sur une chaîne de Markov à espace d'états infini, où nous avons appliqué les différentes techniques de troncature (l'augmentation linéaire et la renormalisation) sur cette chaîne dans le but d'obtenir une chaîne de Markov à espace d'états fini. Cela nous permettra (en chapitre 4) d'appliquer la technique de troncature CMC sur un cas de système de file d'attente de type "M/G/1/∞(V,E)", où nous utiliserons la méthode de stabilité forte afin d'estimer numériquement l'erreur due à la troncature de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant l'état de ce modèle.

Chapitre 2

Bornes de perturbation dans les chaînes de Markov

Introduction

Lors de l'étude des systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel (généralement complexe), par un système plus simple (pour lequel il existe des résultats analytiques exploitables), qui lui est "proche" dans un certain sens. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel. L'étude de la proximité supposée entre les quantités stochastiques du système réel et celles du système idéal donna naissance dans les années soixante au problème de stabilité.

Quoique plusieurs définitions existent pour expliquer la notion de stabilité, on peut retenir qu'il s'agit d'une dépendance continue des caractéristiques du système par rapport à ses paramètres.

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques bornes de perturbation des caractéristiques stationnaires pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, en se basant sur les travaux de Cho et Meyer [33]; ainsi que celles des chaînes de Markov à espace d'états général. En particulier, nous présenterons quelques nouvelles estimations des caractéristiques transitoires et stationnaires de la stabilité forte des chaînes de Markov générales qui ont été obtenues par Kartashov [67], Mouhoubi et Aïssani [80], Rabta et Aïssani [85] et Rabta [87].

Notes bibliographiques

La mise à jour des formules et des bornes de perturbation pour la chaîne de Markov peut être trouvée dans la littérature. Cependant, on suppose que les changements affectent la matrice de transition de la chaîne, c-à-d., les chaînes de Markov originales et celles perturbées ont le même espace d'état.

Les premiers résultats, sur la stabilité des modèles stochastique de files d'attente datent de 1965 et sont dus à Rossberg [91]. Plus tard, de nombreux travaux ont été élaborés en considérant diverses situations et diverses approches (voir [2, 8, 16, 20, 67, 88]).

Depuis le travail de Schweitzer [93], plusieurs auteurs se sont intéressés à l'obtention d'estimations de la déviation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov irréductible finie après perturbation de sa matrice de transition (voir par exemple [102, 107]). Les résultats obtenus sont différents et sont exprimés en fonction de diverses quantités. En 1968, Schweitzer [93] a utilisé la matrice fondamentale. Meyer [79], ainsi que d'autres auteurs ont utilisé le groupe inverse. Hunter [60] a utilisé les g -inverses tandis que le coefficient d'ergodicité a été utilisé par Seneta [97, 98]. Cho et Meyer [33] ont fait usage des temps moyens de premier passage. En l'an 2000, Balaji et Meyn ont essayé de relier l'ergodicité géométrique, exponentielle et uniforme à la stabilité absolue [15]. Cho et Meyer [33] considèrent et comparent huit bornes de perturbation des distributions stationnaires des chaînes de Markov. Plus récemment, Mouhoubi et Aïssani [80] ont synthétisé tous les résultats obtenus dans ce cadre et ils ont obtenu de nouvelles conditions de stabilité et de nouvelles bornes de perturbation pour les chaînes de Markov. De leur part, Rabta et Aïssani [85] ont fait un lien entre la méthode de stabilité forte et la méthode de stabilité absolue. La question qualitative a été traitée dans [85], où ils ont montré qu'une chaîne de Markov irréductible finie est fortement stable.

Plusieurs résultats existent dans la littérature sur les bornes de perturbation des chaînes de Markov. Les résultats généraux ont été synthétisé par Heidergott et Hordijk [52]. Une partie de ces résultats concerne la perturbation des chaînes de Markov finies et homogènes (voir Heidergott et al. [54]), et les bornes de perturbation ont été obtenues en utilisant les méthodes d'analyse matricielle ; voir la synthèse faite par Cho et Meyer [33]. Une autre partie inclut les bornes de perturbation pour les chaînes de Markov à temps fini et espace d'états général ; voir Rachev [88], Aïssani et Kartashov [67], Mouhoubi et Aïssani [80].

En 2013, Rabta [87] se concentre sur le problème de la comparaison de deux chaînes de Markov où leurs espaces d'états diffèrent en quelques états.

2.1 Position du problème et concept général de stabilité

Un modèle stochastique est un outil décrivant l'état d'un système stochastique, il peut être perçu comme une transformation ou une application :

$$\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (2.1)$$

où \mathcal{X} représente l'ensemble des paramètres du système ; entre autres : la distribution du flux des arrivées, la loi de la durée de service, la capacité de la file. L'ensemble \mathcal{Y} représente l'ensemble des caractéristiques du système ; ce sont : le nombre moyen de clients dans le système, la durée moyenne de séjour d'un client dans le système, le taux d'occupation du système, ...

Un système est stable si, une petite perturbation dans les paramètres (entrées) engendre une petite déviation des caractéristiques (sorties). Ainsi, la notion de stabilité, correspond intuitivement à la notion de continuité de l'application \mathcal{F} .

L'étude de stabilité dans les systèmes de files d'attente consiste en la délimitation du domaine dans lequel un modèle peut être utilisé comme une bonne idéalisation ou approximation d'un système. L'idée de ces techniques consiste en la démarche suivante :

1. Choix du modèle idéal (stable) ;
2. Perturbation du modèle idéal de telle manière à ce qu'il corresponde au système réel ;
3. Détermination du domaine dans lequel le modèle perturbé est stable.

Ainsi, lorsque le modèle idéal soumis à une perturbation est stable, ses caractéristiques sont comparables à celles du système réel. Si de plus la perturbation est petite, les caractéristiques du modèle sont proches de celles du système.

2.1.1 Stabilité des modèles stochastiques

Un modèle est dit stable en un point X si pour tout point X^* "assez proche" de X , on a aussi la proximité de $\mathcal{F}(X^*)$ et de $\mathcal{F}(X)$. Plus précisément, l'étude de la stabilité s'intéresse à la vérification de la relation

$$\mathcal{L} : X \rightarrow X^* \Rightarrow \bar{\mathcal{L}} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X^*), \quad (2.2)$$

où \mathcal{L} et $\bar{\mathcal{L}}$ sont les types de convergences associées aux topologies introduites. On voit bien que la notion de stabilité renvoie à la continuité de \mathcal{F} relativement aux variations du paramètres et elle dépend du type de convergence \mathcal{L} et $\bar{\mathcal{L}}$ définis sur les espaces \mathcal{X} et \mathcal{Y} .

Cette étude de stabilité est de type qualitative (Elle permet seulement de statuer sur la stabilité ou non du modèle), elle peut être complétée par une étude quantitative. Pour l'obtention d'estimation quantitative, il faut introduire des mesures de comparabilité telles que des métriques. D'une manière générale, plusieurs métriques peuvent être associée à un type de convergence.

Soient μ et ν les métriques associées aux types de convergence \mathcal{L} et $\bar{\mathcal{L}}$, la condition stabilité (2.2) peut être reformulée comme suit :

Un modèle est dit stable en un point X si pour toute perturbation de ce point X^* , on a :

$$\mu(X, X^*) \rightarrow 0 \Rightarrow \nu(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X^*)) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Lorsque la question de l'estimation qualitative a été résolu affirmativement, il est intéressant d'obtenir une estimation quantitative de cette stabilité. En fait, il faut estimer quantitativement la déviation des caractéristiques (outputs) du modèle. On dira qu'une estimation quantitative a été effectuée lorsqu'on aura borné supérieurement la déviation des caractéristiques, c-à-d établir une relation de ce type

$$\nu(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X^*)) \leq \phi(\mu(X, X^*)), \quad (2.4)$$

où ϕ est une fonction positif et croissante et s'annulant à l'origine.

C'est pourquoi, on divise les méthodes de stabilité stochastiques en deux catégories. Il y a celles qui fournissent une estimation qualitative à la stabilité (elles se limitent de statuer si le modèle

est stable ou non), nous les appellerons : méthodes qualitatives. Il y a celles qui obtiennent une estimation qualitative et une estimation quantitative de la stabilité, nous les appellerons : méthodes quantitatives.

2.1.2 Différentes méthodes de stabilité des modèles stochastiques

Plusieurs approches du problème de stabilité ont été considérées par plusieurs chercheurs. Ceci a conduit à la diversité des méthodes de stabilité. Parmi celles développées sur la stabilité des modèles stochastiques, on peut citer :

- **Méthode des fonctions tests [62]** : L'idée de cette méthode est inspirée de celle de Lyapunov élaborée initialement pour l'étude de la stabilité des équations différentielles. Elle consiste à construire une fonction test, permettant de comparer le comportement du modèle réel (perturbé) avec le système idéal (non perturbé). La difficulté majeure de cette méthode réside dans le choix de la fonction test.
- **Méthode métrique [117]** : Elle considère le problème de stabilité comme un problème de continuité entre les espaces métriques des suites dirigeantes du système étudié et l'espace de ses caractéristiques. Les résultats obtenus par cette méthode ont été synthétisés par Rachev [88].
- **Méthode de convergence faible [103]** : Elle est basée sur des outils de l'analyse fonctionnelle, en particulier, la théorie de la convergence faible et elle s'applique aux processus markoviens homogènes.
- **Méthode de renouvellement [24]** : Elle est basée sur la théorie de renouvellement, son avantage provient du fait qu'elle permet d'établir des résultats d'ergodicité et de stabilité avec des conditions minimales.
- **Méthode de stabilité absolue [79, 61]** : Elle consiste à l'utilisation de techniques d'algèbre linéaire et de calcul matriciel pour l'obtention des bornes sur la norme $(\|\cdot\|_1)$ du vecteur stationnaire d'une chaîne de Markov discrète, irréductible et finie. Ipsen et Meyer [61] et Meyer [79] ont montré que les éléments du vecteur stationnaire réagissent d'une manière "uniforme" à la perturbation de la matrice de transition.
- **Méthode de la stabilité forte [65, 67]** : Cette méthode, connue également sous le nom de "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", a été élaborée au début des

années 1980 par Aïssani et Kartashov [65]. Les auteurs ont notamment étudié la propriété de stabilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques. Les résultats fondamentaux de cette approche ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de Kartashov [67]. À la différence des autres approches, la méthode de stabilité forte suppose que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures estimations pour les distributions stationnaires perturbées. Une synthèse sur les estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité des chaînes de Markov quelconques a été présentée dans [80].

Cette méthode est applicable à tout les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov homogène.

Une autre méthode pour le calcul des bornes de perturbation pour les chaînes de Markov est l'approche de développement en série.

- **Méthode de développement en séries** [52] L'approche générale de développement en séries pour les chaînes de Markov a été introduite par Heidergott et Hordijk [52]. Le cas de développement en séries pour les chaînes de Markov à espace d'états fini et à temps discret a fait l'objet d'une discussion détaillée par Heidergott et al. [53], et le développement de l'application de cette approche pour les chaînes de Markov à temps continu est considéré dans [54]. La caractéristique essentielle de cette approche est qu'une borne pour la précision de l'approximation peut-être donnée. La contrainte principale d'applicabilité de cette approche est que celle-ci est applicable juste sur les systèmes finis, d'autre part elle dépend de la définition de la matrice de deviation (Koole [69]) qui est connue que pour quelques systèmes particuliers.

Dans ce qui suit nous présenterons les résultats fondamentaux relatifs à la méthode de la stabilité forte, qui fera l'objectif d'une application sur le système d'attente avec vacances dans le dernier chapitre du présent mémoire.

2.2 Méthode de stabilité forte

La méthode de stabilité forte, basée sur la théorie de perturbation des opérateurs linéaires, est applicable à tout les modèles de la Recherche Opérationnelle, pouvant être régis par des chaînes de Markov homogène.

2.2.1 Préliminaires et notations

On note par $\mathfrak{B}(\mathbb{N})$, l'espace Borélien des nombres naturels qui est muni de la topologie discrète, dont on peut considérer l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathfrak{B}(\mathbb{N}))$.

Soit $\mathfrak{M} = \{\mu(i)\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathfrak{B}(\mathbb{N})$ et $\eta = \{f(i)\}$ est l'espace des fonctions mesurables bornées définies sur \mathbb{N}^2 .

Dans notre cas, l'espace d'états S est donné comme suit :

$$S = \{(i, j), i, j \in \mathbb{N}\}.$$

L'outil principal utilisé dans notre analyse est la norme v (norme poids), notée $\|\cdot\|_v$, où v est un vecteur dont ses éléments $v(s) > 1$ pour tout s dans l'espace des états S , et pour tout $f \in \eta$. On a par définition [67] :

Soit μ une mesure de probabilité dans S , alors la norme v de μ est définie par :

$$\|\mu\|_v = \sum_{s \in S} v(s) |\mu_s|.$$

La norme v est élargie aux noyaux de transition dans S . Dans ce cas, soit A un noyau de transition, alors :

$$\|P\|_v = \sup_{s \in S} \frac{1}{v(s)} \sum_{s' \in S} v(s') |P(s, s')|.$$

Dans cette section, on présente quelques objets mathématiques et notions nécessaires à la compréhension des théorèmes fondamentaux de stabilité forte. Ainsi, on définit dans la catégorie des espaces topologiques, la sous catégorie particulière des espaces mesurables de la manière suivante :

Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, où \mathcal{E} est une σ -algèbre engendrée par une partie dénombrable de E .

La norme induite est :

$$\|f\|_v = \sup \{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} \quad (2.5)$$

$$= \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{v(x)}. \quad (2.6)$$

Elle met en évidence dans la classe des applications linéaires de \mathcal{M} dans \mathcal{M} , l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup \{\|\mu P\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} \quad (2.7)$$

$$= \sup_{x \in E} \frac{\int_E v(y) |P(x, dy)|}{v(x)}. \quad (2.8)$$

Ces normes induites vérifient alors les propriétés suivantes :

$\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall f \in \eta, \forall P \in \mathcal{B}$, on a

a. $\|\mu P\|_v \leq \|\mu\|_v \|P\|_v$.

b. $|\mu f| \leq \|\mu\|_v \|f\|_v$.

c. $\|f \circ \mu\|_v \leq \|f\|_v \|\mu\|_v$.

d. $\|P f\|_v \leq \|P\|_v \|f\|_v$.

e. $\|\mathbf{1}\|_v = \sup[v(x)^{-1}, x \in E] = \vartheta$, où $\mathbf{1}$ est la fonction égale à l'unité, $\mathbf{1} \in \eta$.

f. $\|P Q\|_v \leq \|P\|_v \|Q\|_v$.

g. $|\mu|(A) \leq \vartheta \|\mu\|_v$, où $A \in \mathcal{E}$.

2.2.2 Récurrence au sens de Harris

On introduit maintenant la notion de récurrence d'une chaîne récurrente au sens de Harris qui joue un rôle important dans les conditions imposées dans les théorèmes d'ergodicité et de stabilité.

Avant cela, introduisons la notion de mesure invariante par un opérateur de transition.

Définition 2.2.1. *Une chaîne de Markov définit sur espace (E, \mathcal{E}) et de noyau de transition P est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante μ^* σ -positive, telle que $\mu^*(A) > 0$, alors :*

$$Pr_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_A(X_n) = \infty \right] = 1,$$

pour tout $x \in E$, où \mathbb{I}_A est la fonction indicatrice sur A .

On dit alors que X est dit de Harris. En d'autres termes, cela signifie que la chaîne passe par chaque ensemble d'états non négligeable par rapport à la mesure π , un nombre infini de fois presque sûrement.

Propriété 2.2.1. • *Toute chaîne de Harris est récurrente irréductible.*

- *Toute chaîne de Harris est irréductible.*
- *Toute chaîne récurrente irréductible et discrète est de Harris.*

2.2.3 Ergodicité uniforme

Énonçons à présent les concepts d'ergodicité uniforme et les critères qui en découlent.

Définition 2.2.2. [65]

La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si elle admet une mesure invariante unique π et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|P^{(t)} - \Pi\| = 0.$$

Théorème 2.2.1. [65, 66] *La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si l'opérateur $I - P + \Pi$ est inversible et borné*

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty. \tag{2.9}$$

De plus, la relation (2.9) entraîne $\|\Pi\| < \infty$.

Remarques. *Il est important de noter que :*

1. *Les définitions d'ergodicité uniforme dépendent essentiellement des propriétés de l'opérateur $(I - P + \Pi)^{-1}$.*
2. *Une chaîne uniformément ergodique par rapport à une norme peut ne pas l'être par rapport à une autre norme, si ces normes ne sont pas équivalentes.*

3. L'inverse de $B = I - P + \Pi$ est défini dans le sous espace \mathcal{MB}

$$\mathcal{MB} = \{\mu P : \mu \in \mathcal{M}, P \in \mathcal{B}\},$$

de plus, $\|B^{-1}\| = \sup(\|\mu B^{-1}\| : \|\mu\| \leq 1, \mu \in \mathcal{MB})$.

Introduisons à présent la notion de stabilité forte.

2.2.4 Stabilité forte

Définition 2.2.3. [65] *La chaîne de Markov X est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si*

1. $\|P\| < \infty$.
2. *Chaque noyau de transition Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$, admet une mesure invariante unique $\nu = \nu(Q)$.*
3. *Il existe une constante $C = C(P)$, telle que*

$$\|\nu - \pi\| \leq C\|P - Q\|.$$

Théorème 2.2.2. [65] *La chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|$, si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.*

Théorème 2.2.3. [65] *La propriété d'ergodicité uniforme de chaîne X par rapport à une norme $\|\cdot\|$ se conserve pour de petites perturbations du noyau P . Chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage du noyau de transition P de la chaîne de Markov X , uniformément ergodique (fortement stable) par rapport à une norme donnée $\|\cdot\|$ (i.e. $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$), correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique (par rapport à la même norme $\|\cdot\|$).*

C'est-à-dire que la propriété d'ergodicité uniforme, par rapport à la norme donnée, se préserve pour de petites perturbations du noyau de transition par rapport à la même norme.

Énonçons à présent un résultat qui exprime qu'une petite déviation sur les noyaux de transition induit une déviation de même ordre sur les mesures stationnaires.

Théorème 2.2.4. [65, 66] *La stabilité forte de la chaîne X par rapport à la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à son ergodicité uniforme par rapport à cette même norme. Pour cela, quel que soit le noyau Q , de mesure invariante ν , on a :*

$$\begin{aligned}\|\nu - \pi\| &= O(\|Q - P\|) \\ \sup_t \|Q^t - P^t\| &= O(\|Q - P\|)\end{aligned}$$

quand $\|Q - P\| \rightarrow 0$.

Théorème 2.2.5. [65] *Soit X une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris de mesure de probabilité invariante π . Alors, X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

A. $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+$ et $h \in \eta^+$ tel que
 $\pi h > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$ et $\alpha h > 0$.

B_n . $P = T^n - h \circ \alpha$ pour un certain $n \geq 1$, où T est un noyau non négatif, $\|\alpha\| < \infty$ et
 $\|h\| < \infty$.

C_m . $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$ et $\rho < 1$.

De plus, la condition C_m découle de l'ergodicité uniforme et de l'apériodicité de la chaîne X pour tout n , α et h vérifiant les conditions A., B_n .

2.2.5 v -Stabilité forte d'une chaîne de Markov

Définition 2.2.4. [65] *Une chaîne de Markov X est dite fortement v -stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|_v$.*

Le choix de la norme appropriée, se réduit à la recherche d'une fonction test v . Des techniques de construction des fonctions pour une large classe de chaînes de Markov sont données dans [66].

Corollaire 2.2.1. [65] (**Critère de v -stabilité forte**) *Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris soit v -fortement stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.*

A. Il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in \eta^+$ telles que :

$$\pi h > 0, \quad \alpha \mathbf{1} = 1 \text{ et } \alpha h > 0.$$

B_1 . Le noyau $T = P - h \circ \alpha$ est non négatif.

C_1 . $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x) \quad \forall x \in E$.

Ce corollaire n'est qu'une condition suffisante du Théorème (2.2.5) avec $n = m = 1$.

D'où

Théorème 2.2.6. [67]

Soit X une chaîne de Markov de matrice de transition P et de mesure invariante π . Cette chaîne est dite v -fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$, si et seulement s'il existe une mesure invariante α et une fonction mesurable non négative h sur \mathbb{N} telle que $\pi h > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$ et $\alpha h > 0$, satisfaisant les conditions suivantes :

- a. $T = P - h\alpha$ est non négatif,
- b. $\exists \rho < 1 : Tv(k) \leq \rho v(k), \forall k \in \mathbb{N}$ ($\|T\|_v < 1$),
- c. $\|P\|_v < \infty$,

où $\mathbf{1}$ est un vecteur dont tous les éléments sont égaux à 1.

2.2.6 Inégalités de stabilité forte

Sous les conditions du Théorème 2.2.6, on peut obtenir les estimations quantitatives de la stabilité, telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X en termes des fonctions v , h et la mesure α .

Théorème 2.2.7. [64] Soit une chaîne X , de noyau de transition P et de mesure invariante π , fortement v -stable et vérifiant les conditions du Théorème 2.2.6. Si ν est la mesure invariante du noyau Q , alors, pour des normes $\|Q - P\|_v$ suffisamment petites, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \nu &= \pi [I - \Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1} \\ &= \pi + \sum_{r=1}^{\infty} \pi [\Delta R_0 (I - \Pi)]^r, \end{aligned}$$

où $\Delta = Q - P$ et $R_0 = (I - T)^{-1}$.

Par conséquent, dans les conditions du Théorème 2.2.6,

$$\nu = \pi + \pi \Delta R_0(I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2),$$

pour $\|\Delta\|_v \rightarrow 0$.

D'où, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2.8. [64, 67] *Soit X une chaîne de Markov v -fortement stable satisfait les conditions du théorème 2.2.6. Si ν est la mesure invariante du noyau Q , alors, pour*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{c}, \quad (2.10)$$

on a l'estimation

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \frac{c \|\pi\|_v}{(1 - \rho - c \|\Delta\|_v)} \|\Delta\|_v, \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} c &= m \|P\|_v^{m-1} (1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v); \\ \|\pi\|_v &\leq (\alpha\nu)(1 - \rho)^{-1}(\pi h) m \|P\|_v^{m-1}. \end{aligned}$$

Plus récemment, Mouhoubi et Aïssani [80] ont raffiné la borne présentée dans le théorème 2.3.8. Ces résultats sont donnés dans les théorèmes suivants :

Théorème 2.2.9. [80] *Soit X une chaîne de Markov v -fortement stable satisfait les conditions du théorème 2.2.6. Si ν est la mesure invariante du noyau Q , alors, pour*

$$\|\Delta\|_v < \frac{(1 - \rho)}{c}, \quad (2.12)$$

on a l'estimation

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \frac{\|\alpha\|_v}{(1 - \rho - \|\Delta\|_v)^2} \left(1 + \frac{\|\alpha\|_v \varrho}{1 - \rho}\right) \|\Delta\|_v, \quad (2.13)$$

où

$\Delta = Q - P$ et $\varrho = \|\mathbf{1}\|_v$ et α est la mesure définie dans le théorème 2.2.6.

Théorème 2.2.10. [67] *Soit X une chaîne de Markov ν -fortement stable satisfait les conditions du théorème 2.2.6. Si ν est la mesure invariante du noyau Q , alors, pour*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1-\rho}{1+\rho}, \quad (2.14)$$

on a l'estimation

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \frac{1+\rho}{1-\rho - (1+\rho)\|\Delta\|_v} \frac{\|\alpha\|_v \varrho}{1-\rho} \|\Delta\|_v. \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.1. *Dans l'application des bornes précédentes, on remarque que :*

$$2.15 < 2.11 < 2.13.$$

Ce qu'on va montrer numériquement dans le chapitre 4.

Conclusion

À la différence des autres méthodes, la stabilité forte permet, outre l'approximation du système perturbé, l'estimation des écarts asymptotiques entre les caractéristiques des deux systèmes, réel et idéal.

Dans ce chapitre, nous avons exposé le concept commun des méthodes de stabilité des processus stochastiques, ainsi que les principaux résultats obtenus dans ce cadre et les différentes bornes de perturbation existantes dans la littérature des chaînes de Markov.

En particulier, nous avons tardé sur la méthode de stabilité forte, qui sera le cas d'application dans le prochain chapitre sur les modèles d'attente $M/G/1$ et $M/G/1/N$ avec vacances.

Chapitre 3

Développement en séries de Taylor

Introduction

Les développements en séries de Taylor sont l'un des outils de base permettant d'évaluer numériquement certaines fonctions réelles à variables réelles.

Ces développements sont particulièrement utilisés d'une manière très efficace dans le cadre d'analyse des performances des systèmes de files d'attente (voir par exemple [5]). En effet, en calculant un nombre fini de dérivées d'ordre supérieur, les développements en séries de Taylor permettent d'évaluer les fonctions de performance d'un certain modèle comme étant une fonction du paramètre d'intérêt. Dans ce cas, une telle mesure de performance est représentée sous forme polynômial, ce qui facilite leur manipulation mathématique (optimisation, analyse de sensibilité, etc).

Dans cette optique, plusieurs chercheurs s'intéressent plus précisément à :

1. la convergence des séries de Taylor (finies) vers la fonction de performance exacte ;
2. l'obtention d'une borne pour le terme du reste de développement (c'est-à-dire, l'erreur commise lors d'approximation de la fonction de performance exacte par un polynôme de Taylor fini).

Dans ce cadre, ces dernières années, plusieurs résultats ont été obtenus par application de cette approche sur plusieurs types de systèmes et réseaux de files d'attente, tout en suivant des démarches différentes.

Ainsi, des séries de Taylor ont été efficacement calculées et des bornes explicites pour des erreurs

d'approximation ont été obtenues.

Notes bibliographiques

Les modèles de files d'attente sont un outil bien établi pour l'analyse des systèmes stochastiques. En règle générale, un modèle de file d'attente est une représentation simplifiée de la réalité. En outre, souvent il n'y a pas suffisamment de données statistiques afin de déterminer par exemple la distribution des temps de service ou celle de temps des inter-arrivées. Cependant, même dans le cas où le type de la distribution est connue, il existe toujours une incertitude statique sur les valeurs exactes des paramètres de la distribution en question. C'est dans ce sens que l'analyse de perturbation des systèmes de files d'attente (PAQS) a été développée. En effet, celle-ci étudie la dépendance fonctionnelle de la mesure de performance d'un système de files d'attente par rapport à un certain paramètre de système. Récemment, Abbas et al. [5, 6] ont appliqué la méthode PAQS, en utilisant l'approche des développements en séries de Taylor [52], pour l'analyse des performances stationnaires de la file d'attente $M/G/1/N$, où une nouvelle estimation du reste de développement a été établie.

Depuis les travaux du pionnier Schweitzer [93], plusieurs auteurs ont investi l'étude des modèles stochastiques et une multitude de résultats ont été obtenus par des différentes approches.

Ainsi, l'approche prédominante dans la littérature est celle des développements en séries de Taylor qui consiste à analyser les caractéristiques des réseaux stochastiques à arrivées poissoniennes. Les premiers résultats ont été effectués par Gong et Hu [46] et Zazanis [112]. Les extensions au cas des réseaux plus compliqués ont été étudiées par Ayhan et Baccelli [14].

Il existe de nombreux résultats sur les bornes de perturbation des chaînes de Markov. La plupart des résultats ont été synthétisés par Heidergott et Hordijk [52]. Un ensemble de ces résultats concerne la sensibilité de la distribution stationnaire des chaînes de Markov finies, homogènes ; voir Heidergott et al. [54], et les bornes qui sont dérivées par des méthodes de l'analyse matricielle ; voir par exemple l'article de Cho et Meyer [33]. Partiellement, Albin [10] a examiné la robustesse du système d'attente $M/M/1$, tout en considérant plusieurs perturbations spécifiques du processus d'arrivée. L'auteur a employé le développement en séries de Taylor pour prévoir exactement quelques caractéristiques stationnaires d'une certaine catégorie de files

d'attente avec les processus d'arrivée sont légèrement différents du processus de Poisson. Plus récemment, Heidergott et al. [55] ont étudié le modèle d'attente $GI/GI/1$ avec des perturbations dans le processus de service, et ce en utilisant l'analyse de perturbation des chaînes de Markov.

Une version du développement en séries de Taylor de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov à espace d'états fini a été établie par Cao [29], où les coefficients du polynôme de Taylor sont définis en fonction du groupe inverse relatif à la chaîne de Markov en question. En 2003, Heidergott et Hordijk [52] ont établi une autre inversion des développements en séries de Taylor des caractéristiques stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états plus général, où les coefficients du polynôme de Taylor sont définis cette fois-ci en termes de la matrice de déviation associée à la chaîne de Markov considérée. Cette dernière approche a été mise en œuvre numériquement pour la première fois par Abbas et al. [5, 6]. Plus récemment, Ouazine et Abbas [84] ont établi une nouvelle version des développements de Taylor pour les chaînes de Markov à espace d'états fini. Celle-ci est différente des deux premières. En effet, les coefficients du polynôme de Taylor sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale associée à la chaîne de Markov étudiée.

3.1 Rappels d'analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considère E un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|$.

3.1.1 Fonctions continues

Les fonctions continues $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 3.1.1. [35] Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble, $X_0 \in E$ un de ses points et

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction numérique définie sur E . Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E distincts de X_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = L;$$

2. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall X \in E, \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow |f(X) - L| < \epsilon.$

Lorsque les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on écrit :

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L.$$

La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $X_0 \in E$ si

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

Elle est continue sur E si elle est continue en chaque point de E .

Définition 3.1.1. [35] *La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue, si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon,$$

pour toute famille disjointe $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ de $[a, b]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta.$$

3.1.2 Notion de différentiabilité

Cette section est importante car elle généralise la notion de dérivation dans le cas multidimensionnel.

- **Calcul différentiel**

Le calcul différentiel cherche à approximer localement une fonction quelconque par une fonction linéaire appropriée.

- **Dérivation d'une fonction**

Définition 3.1.2. [45] *On dit que $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 de nombre dérivé l , si et seulement si l'un ou l'autre des quotients*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

où

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie respectivement quand $x \mapsto x_0$ et $h \mapsto 0$.

Dans ce cas, on notera $f'(x_0)$ cette limite et on a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- **Dérivées successives**

Soit f une fonction dérivable sur le domaine D . Si f' est dérivable sur D , on note sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$, on l'appelle dérivée seconde de f .

Pour n entier non nul, on définit par récurrence la dérivée $n^{\text{ème}}$, ou la dérivée d'ordre n de f par :

$$\begin{cases} f^{(0)} = f, \\ f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \end{cases}$$

lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur D .

- **Fonction de classe C^m**

La fonction f est dite de classe C^m sur l'intervalle I , si $f^{(m)}$ existe et continue sur I .

Si $m = \infty$, alors f est indéfiniment dérivable (f admet des dérivées de tous ordres).

- **Dérivées partielles**

Soit f définie sur une partie E de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

a. Dérivées partielles du premier ordre :

La dérivée (si elle existe) de la fonction $x_i \mapsto f(X_0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ au point x_i^0 est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} f(X_0) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + h_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h_i}; \quad (3.1)$$

on l'appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i au point X_0 .

Remarque 3.1.1. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe alors elle est définie sur une partie de E .

b. Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 :

Par définition, la dérivée partielle du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ est la dérivée partielle par rapport à x_i de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Définition 3.1.3. [45] Une fonction f , dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont définies et continues dans un ouvert E de \mathbb{R}^n , est dite de classe C^k dans E .

c. Dérivée selon un vecteur[35]

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée première en $X_0 \in \mathbb{R}^n$ suivant le vecteur

$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ si, et seulement si :

$$\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(X_0 + t\vec{v})$$

est dérivable en 0.

Propriété 3.1.1. [35] *Les dérivées d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivant les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, si elles existent, correspondent aux dérivées partielles de f respectivement par rapport à x et y . On a ainsi :*

$$D_i f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } D_j f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Remarque 3.1.2. *L'existence de dérivées partielles d'une fonction f en un point n'implique pas la continuité de f en ce point.*

Définition 3.1.4. [35] *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $X_0 \in E$ un de ses points et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur E . La fonction f est différentiable en X_0 s'il existe une fonction linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0) - L(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

autrement dit si, dans un voisinage de X_0 (un voisinage d'un point est un ensemble qui contient un ouvert qui contient le point), on a

$$f(X) = f(X_0) + L(X - X_0) + R(X)$$

avec

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{R(X)}{\|X - X_0\|} = 0. \quad (3.2)$$

La fonction linéaire L est unique. C'est la dérivée de f en X_0 , notée

$$L = f'(X_0) = Df(X_0)$$

et les nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) = D^j f(X_0)$$

sont ses dérivées partielles en X_0 . Le calcul des dérivées partielles obéit aux mêmes règles que celui des dérivées « ordinaires ».

3.1.3 Accroissements finis

Soient E un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|$ et f une fonction définie sur E .

(a) **(Théorème de Rolle)**

Théorème 3.1.2. [35] Soient K un compact (ensemble fermé et borné) de E d'intérieur non vide, f une fonction continue de K dans \mathbb{R} , différentiable sur l'intérieur $\text{int}(K)$ de K et constante sur la frontière $\text{fr}(K)$ de K , $\text{fr}(K) = K - \text{int}(K)$;

Il existe alors un élément $c \in K$ tel que

$$df(c) = 0.$$

Si $E = \mathbb{R}$, alors on a

Théorème 3.1.3. [35] Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

L'intérêt fondamental du théorème de Rolle est d'établir un lien entre les variations d'une fonction dérivable et l'étude du signe de la dérivée. Une autre conséquence importante est :

(b) **Théorèmes des accroissements finis.**

Théorème 3.1.4. [78] Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$, il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Une conséquence importante est :

Théorème 3.1.5. [78]

1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

2. En particulier, si f est continue sur l'intervalle fermé I d'extrémités a et b , dérivable sur l'intérieur I° de I , telle que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I^\circ$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Théorème 3.1.6. [78] (*Théorème des accroissements finis pour une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p*). Soit f une fonction différentiable d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Soient a et b appartenant à U tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U . Alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(c) \right\| \cdot |b_k - a_k|. \quad (3.3)$$

3.1.4 Formules de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

(a) Cas des fonctions d'une variable

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , x_0 un point intérieur à I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On fixe un entier naturel n .

Définition 3.1.5. [78] Soit n un entier. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie sur un intervalle ouvert I contenant un point x_0 , dérivable n fois au voisinage de x_0 . On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 de f , le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (3.4)$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n en x_0 de f , la fonction R_n qui à tout $x \in I$ associe :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (3.5)$$

Remarque 3.1.3. Taylor ne s'est pas vraiment préoccupé de la forme du reste, il faut attendre ses successeurs pour voir se développer une maîtrise du reste dans certaines conditions plus précises.

3.1.5 Analyse de l'erreur

L'erreur commise dans l'approximation d'une fonction f par le polynôme de Taylor P_n est donnée par :

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = R_n(x). \quad (3.6)$$

C'est le reste des termes de la série de Taylor de f (ceux qui n'apparaissent pas dans le polynôme de Taylor).

Si on désire évaluer l'erreur dans l'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor, il faudrait donc calculer le série

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Le théorème suivant nous évite le calcul de la série précédente.

Théorème 3.1.7. [78] (**La formule de Taylor-Lagrange**) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $(n + 1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$; alors il existe un point $\xi \in]a, b[$ tel que :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (3.7)$$

Remarques. 1. Pour $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis.

2. Le réel $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ est appelé reste de Lagrange.

3. Si l'on pose $h = x - x_0$ et $\xi = x_0 + \theta h$ (avec $\theta \in]0, 1[$) dans la formule de Taylor-Lagrange avec le reste de Lagrange, on obtient la formule dite formule de Mac-Laurin :

$$\exists \theta \in]0, 1[: f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^p ou dans un espace vectoriel normé E ; on a le résultat suivant :

Théorème 3.1.8. [78] (**Inégalité de Taylor-Lagrange**) *Si f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^p (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé E) définie sur un intervalle compact*

$[a, b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Supposons que $f^{(n+1)}$ majoré sur $]a, b[$ par une constante M . Alors :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (3.8)$$

Si le reste de Taylor R_n est négligeable devant x^n au voisinage de x_0 , donc la fonction admet un développement limité, dont la partie polynômial est son polynôme de Taylor d'ordre n . C'est le théorème de Taylor-Young.

Théorème 3.1.9. [78](Formule de Taylor-Young)

Si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée d'ordre n en x_0 , alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ est le reste de Young.

Formule de Taylor avec reste intégral

Parfois la formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir des résultats plus fins que la formule de Taylor-Lagrange. Cette formule nécessite une hypothèse supplémentaire de continuité de la dernière dérivée et elle est valable pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 3.1.10. [35] Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles (ou dans un espace de Banach) définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad (3.9)$$

En posant $\Delta = x - x_0$, la série de Taylor de f peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x_0 + \Delta) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (\Delta)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(\Delta))}{(n+1)!} (\Delta)^{n+1}; \quad (3.10)$$

où $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta]$.

(b) Cas des fonctions de plusieurs variables

Si f est une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n ; à valeurs réelles et suffisamment dérivable, en utilisant les formules de Taylor pour la fonction d'une variable réelle $\varphi \mapsto f(a + th)$; on

déduit des formules de Taylor pour f au voisinage de a : Pour simplifier, on s'intéresse aux fonctions de deux variables réelles.

Théorème 3.1.11. [45](**Taylor-Lagrange**) Soient p un entier naturel non nul, U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 ; f une fonction de classe C^p de U dans \mathbb{R} ; $A = (a, b)$ un point de U et $M = (x, y)$ un point de U tel que le segment $[AM]$ d'extrémités A et M soit contenu dans U : Il existe un réel θ dans $]0; 1[$ tel que :

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq p-1} \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) + \sum_{i+j=p} \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \frac{\partial^p f}{\partial x^i \partial y^j}(a + \theta u, b + \theta v).$$

Corollaire 3.1.1. [35](**Taylor-Young**) Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on désigne par \mathbf{B} une boule ouverte centré en $A = (x_0, y_0)$ et de rayon $r > 0$ contenue dans U :

Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

et pour tout (x, y) dans \mathbf{B} on ait :

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq p-1} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) + \|(x-x_0, y-y_0)\|^p \varepsilon(x, y).$$

3.2 Développements en séries de Taylor des caractéristiques d'une chaîne de Markov

Les indices de performance stationnaires des systèmes markoviens, tels que la longueur d'une file d'attente sont des fonctions analytiques des paramètres du système : le taux de service et le taux d'arrivées. Cette observation a lancé l'étude des propriétés analytiques des systèmes stochastiques. L'approche prédominante dans la littérature est d'étudier le développement en série de Taylor des caractéristiques des réseaux stochastiques à arrivées poissoniennes. Les premiers résultats sur ce sujet se trouvent dans [46, 112]. Cao [29] a étudié le développement en séries de Taylor de la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'états fini.

Préliminaires

Soient $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov ergodique de matrice de probabilités P et de distribution stationnaire π . Supposons que celle-ci dépend d'un certain paramètre θ .

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'obtention de la distribution stationnaire π_θ sous une forme facilement calculable. En particulier, sous une forme polynômial, en utilisant la formule de développement en séries de Taylor établie par Heidergott et Hordijk [52]. Ainsi, la distribution stationnaire π_θ est considérée comme fonction du paramètre de contrôle θ (on la note π_θ). Par conséquent, la forme développée de distribution stationnaire π au point $\theta + \Delta$ (avec $\Delta > 0$) est donnée par :

$$\pi_{\theta+\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{(n)}}{n!} \pi_\theta^{(n)}, \quad (3.11)$$

De point de vue pratique, nous considérons un nombre limité de termes de la série de Taylor (3.11). À cette effet, nous notons la partie régulière de cette série par :

$$H_\theta(k, \Delta) = \sum_{n=0}^k \frac{\Delta^{(n)}}{n!} \pi_\theta^{(n)}. \quad (3.12)$$

Le reste de cette série sera défini par :

$$r_\theta(k, \Delta) = \pi_{\theta+\Delta} - H_\theta(k, \Delta). \quad (3.13)$$

La dérivée d'ordre n de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. [52] *Soit $\theta \in \Theta$ et soit $\Theta_0 \subset \Theta$ un intervalle ouvert contenant θ . Supposons que les composantes de la matrice de probabilités de transition P_θ sont n fois dérivables par rapport au paramètre θ . Alors, la dérivée d'ordre n de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ est donnée par :*

$$\pi_\theta^{(n)} = \pi_\theta K_\theta(n), \quad (3.14)$$

où

$$K_\theta(n) = \sum_{1 \leq m, l_k \leq n, l_1 + \dots + l_m = n} \frac{n!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{k=1}^m (P_\theta^{(k)} D_\theta), \quad (3.15)$$

et D_θ est la matrice de déviation relative à la chaîne de Markov.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions et généralités sur les formules de développements en séries de Taylor, où nous avons tardé sur les différentes formules caractérisant le reste de ces développements. Une attention particulière a été portée au développement en séries de Taylor d'une distribution stationnaire relative à une chaîne de Markov ergodique, où la sensibilité de celle-ci est exprimée en terme de la matrice de déviation de la chaîne de Markov. Cette nouvelle approche sera l'objet d'une application dans le prochain chapitre sur un cas d'analyse de sensibilité des mesures de performances de la file d'attente $M/G/1/N$ avec vacances.

Chapitre 4

Application aux modèles

$M/G/1/N-(V,E)$ et $M/G/1/\infty-(V,E)$

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer trois méthodes d'approximation différentes (la méthode CMC, la méthode de stabilité forte et la méthode de développement en séries de Taylor) pour analyser les systèmes de files d'attente $M/G/1/\infty$ avec vacances et $M/G/1/N$ avec vacances.

La notion de vacances est introduite en général pour exploiter l'oisiveté (le temps inoccupé) du serveur pour un autre travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système. L'analyse de la modélisation par les systèmes d'attente avec vacances a été réalisée par un nombre considérable de chercheurs dans le passé et a été utilisée dans différents problèmes pratiques comme les systèmes de production, systèmes de communication et systèmes informatiques [39]. Pour un aperçu détaillé sur les systèmes avec vacances du serveur, on peut se référer aux [39, 71, 105].

4.1 Description du modèle

Plusieurs recherches ont été réalisées sur les systèmes de files d'attente avec vacances, mais sans restriction sur le nombre de clients dans le système. Cependant, il est très important de

considérer les systèmes d'attente avec vacances du serveur et à espace d'état fini. Ceci s'explique par leur intérêt à la fois théorique et pratique dans la modélisation des performances des systèmes informatiques, de productions [105]. Dans cette section, on s'intéressera à l'analyse des modèles de files d'attente de type $M/G/1$ avec vacances et $M/G/1/N$ avec vacances et service exhaustif; voir [39, 76].

4.1.1 Le modèle d'attente $M/G/1/N-(V,E)$

Considérons le modèle de files d'attente $M/G/1/N-(V,E)$ avec vacances du serveur et service exhaustif. Supposons qu'un client arrive au système d'attente avec une probabilité λdt durant un intervalle de temps arbitraire de longueur dt . Autrement dit, les clients arrivent au système suivant un flux de Poisson de moyenne $1/\lambda$. Le serveur commence la vacance à chaque moment où la file devient vide (service exhaustif). Si le serveur revient de la vacance et trouve la file non vide, alors la période de vacance se termine pour commencer une période d'activité, sinon il prend une autre vacance, et il continue sous cette politique jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client à servir dans la file avant de reprendre à nouveau une autre vacance. La période de vacance est l'intervalle de temps continu durant laquelle le serveur est en vacance. Notons par $S(x)$ et $s(x)$ la fonction de distribution et la fonction de densité de la durée de service respectivement. Soit $S^*(x)$ la transformée de Laplace-Steiltjes de $S(x)$. Nous supposons que la durée V de chaque vacance est indépendante et identiquement distribuée. Notons par $V^*(x)$ sa transformée de Laplace-Steiltjes. Les règles gouvernant les périodes de vacances sont décrites comme suit :

1. Les durées des vacances sont indépendantes du processus des arrivées ;
2. le mécanisme qui détermine l'instant de la fin d'une vacance, n'anticipe pas une nouvelle occurrence du processus des arrivées poissonniennes ;
3. chaque temps de service est indépendant de la séquence des périodes de vacances qui précède ce temps de service ;
4. si aucun client n'arrive durant la période de vacance, on dit qu'il y a une période d'activité pour le serveur de longueur zéro et le serveur prend une autre vacance.

Soit $X(t)$ le nombre de clients présents dans le système M/G/1/N-(V, E) à l'instant t , pour $t \geq 0$. Dans ce cas, notons que $\{X(t); t \geq 0\}$ (la longueur de la file M/G/1/N-(V, E)) n'est pas markovienne car la distribution du temps de service n'a pas la propriété d'absence de mémoire.

Considérons ce processus $\{X(t); t \geq 0\}$ aux instants de fin de service du $n^{\text{ème}}$ client. Pour cela, notons ces instants par t_n . Ainsi, le processus induit est à temps discret, noté $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, qui est une chaîne de Markov induite de matrice de probabilités de transition définie dans [76] :

$$\tilde{P}_{(N)} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} b_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} a_k \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-4} & 1 - \sum_{k=0}^{N-4} a_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 1 - a_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

où, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$a_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dS(t), \quad (4.2)$$

$$v_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dV(t) \quad (4.3)$$

et

$$b_j = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{v_i}{1 - v_0} a_{j-i+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Notons par $\tilde{\pi}(N)$ la distribution stationnaire associée à la chaîne de Markov $\tilde{X}(N) = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$. Celle-ci est la solution du système d'équations suivant :

$$\tilde{\pi}_j(N) = \tilde{\pi}_0(N)b_j + \sum_{k=1}^{j+1} \tilde{\pi}_k(N)a_{j+1-k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.5)$$

et

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\pi}_j = 1.$$

Notons par $P_{loss}(N)$ la probabilité de blocage (ou de perte). Celle-ci est donnée par [76] :

$$P_{loss}(N) = 1 - \frac{(1 - v_0)\lambda^{-1}}{\mathbb{E}[V]\pi_0(N) + \mathbb{E}[S](1 - v_0)}, \quad (4.6)$$

où $v_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dV(t)$.

4.1.2 Le modèle d'attente M/G/1/∞-(V,E)

Dans cette partie, nous considérons à nouveau un système de files d'attente de type M/G/1 avec vacances du serveur mais à capacité infinie, noté M/G/1/∞-(V,E).

L'état de ce système est décrit par la variable aléatoire X_n représentant le nombre de clients présents dans le système d'attente juste après le service du $n^{\text{ème}}$ client. Ainsi, la séquence des variables aléatoires $\tilde{X} = \{X_n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ constitue la chaîne de Markov induite du processus $\{X(t); t \geq 0\}$ (le nombre de clients présents dans le système à n'importe quel instant t). Sa matrice de probabilité de transition $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{i,j \geq 0}$ est définie dans [76] :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

où a_j et v_j est la probabilité que j clients arrivent dans la file d'attente durant le temps de service S et le temps de vacance V , respectivement. Supposons que $\mathbb{E}[S] < \infty$ et $\mathbb{E}[V] < \infty$, alors l'intensité du trafic de ce modèle est donnée par :

$$\rho = \lambda \mathbb{E}[S].$$

La fonction génératrice de la distribution stationnaire relative à la chaîne de Markov \tilde{X} décrivant ce modèle d'attente est donnée dans [76] :

$$\tilde{\pi}(z) = \tilde{\pi}_0 \frac{[V^*(\lambda - \lambda z) - 1]S^*(\lambda - \lambda z)}{(1 - v_0)[z - S^*(\lambda - \lambda z)]}. \quad (4.8)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que :

- ◇ le processus d'arrivée des clients dans la file est poissonnien de paramètre λ ;
- ◇ la loi de la durée de service des clients est Hyper-exponentielle d'ordre 2 (notée H_2) de paramètres μ_1 et μ_2 , donc sa fonction de densité est donnée par :

$$b(x) = \gamma \mu_1 e^{-\mu_1 x} + (1 - \gamma) \mu_2 e^{-\mu_2 x}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (4.9)$$

- ◇ la file à serveur unique ;
- ◇ la discipline de service de la file : FIFO ;
- ◇ le temps des vacances V suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$, donc sa fonction de densité est définie comme suit :

$$v(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}. \quad (4.10)$$

On remplace les relations (4.9) et (4.10) dans les relations (4.2) et (4.3) respectivement, on obtient :

$$a_j = \lambda^j \left(\frac{\gamma \mu_1}{(\lambda + \mu_1)^{j+1}} + \frac{(1 - \gamma) \mu_2}{(\lambda + \mu_2)^{j+1}} \right), \quad (4.11)$$

et

$$v_j = \frac{(\lambda \theta)^j}{(\lambda \theta + 1)^{j+1}}, \quad (4.12)$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

4.2 Analyse de la file d'attente M/G/1/∞-(V,E) par CMC

La modélisation et l'analyse d'un certain système stochastique par une chaîne de Markov s'avère quelquefois fastidieuse voire impossible lorsque la taille de l'espace d'états de cette chaîne dépasse quelques dizaines d'états. Dans ce cas, il est alors nécessaire de faire appel aux techniques dites de troncature des espaces d'états de la chaîne de Markov en question. Dans cette section, on introduira les résultats que nous avons obtenu par l'application de la méthode de la troncature de l'espace des états d'une chaîne de Markov décrivant l'état de la file d'attente de type M/G/1/∞-(V,E), et ce, en utilisant la méthode de la Chaîne de Markov Censurée (CMC).

En fait, une CMC n'observe qu'un sous ensemble de l'espace d'états de la chaîne originale. De plus, les CMCs sont très utiles quand on veut analyser une chaîne de Markov avec un espace d'états très large. De même, la prise en compte de la précision du calcul de certaines mesures concernant la chaîne de Markov originale est primordial surtout lorsqu'on considère juste l'information partielle disponible ou que l'on veuille exploiter.

Le principe de cette technique est de réduire la taille de l'espace d'états de la chaîne de Markov étudiée à une taille finie. Pour ce faire, on considère une décomposition particulière de la matrice des probabilités de transition sous forme de blocs (sous matrices) de différentes tailles. En manipulant algébriquement ces sous matrices afin de construire une matrice de probabilités de transition de taille finie. Celle-ci résume toute l'information de la matrice originale. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'application de cette approche au cas du modèle d'attente M/G/1/∞-(V,E). Pour ce faire, on introduit les matrices suivantes :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & \cdots \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

En fonction des quatre matrices introduites précédemment et l'aide de quelques transformations matricielles, on construit une nouvelle matrice stochastique de taille finie. Celle-ci est la matrice de probabilités de transition de la chaîne de Markov censurée, elle est définie comme suit :

$$P_{(S)} = T + U \left(\sum_{i=0}^{\infty} Q^i \right) V. \quad (4.13)$$

Étant la matrice de probabilités de transition \tilde{P} irréductible et aperiodique. Alors dans ce cas, on aura :

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q^i = (I - Q)^{-1}, \quad (4.14)$$

où I est la matrice identité.

Remplaçons cette somme infinie par la matrice inverse de $(I - Q)$ dans (4.13), nous obtenons :

$$P_{(S)} = T + U(I - Q)^{-1}V. \quad (4.15)$$

À ce niveau, nous illustrons l'applicabilité de cette approche sur le modèle de files d'attente M/ H_2 /1/∞-(V,E), i.e. nous supposons que la lois de temps de service des clients est Hyper-exponentielle d'ordre 2 de paramètres μ_1 et μ_2 . Ainsi, nous fixons les paramètres de ce modèle comme suit : $\lambda = 1$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 20$, $\theta = 0.0001$ et $\gamma = 0.5$.

Par la suite, nous nous intéresserons au calcul de l'erreur relative absolue commise sur le calcul des composantes de la distribution stationnaire de la file d'attente M/ H_2 /1/∞-(V,E) avec la CMC. Cette erreur est calculée de la manière suivante :

$$Err = \left\| \frac{\pi_{(S)} - \tilde{\pi}}{\tilde{\pi}} \right\|_{\infty},$$

où $\pi_{(S)}$ est la distribution stationnaire relative à la chaîne de Markov censurée ($\pi_{(S)} P_{(S)} = \pi_{(S)}$) et, $\tilde{\pi}$ est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov originale ($\tilde{\pi} \tilde{P} = \tilde{\pi}$) et M est le seuil de la troncature. Les résultats numériques obtenus pour ce cas d'application sont illustrés dans la figure (4.1).

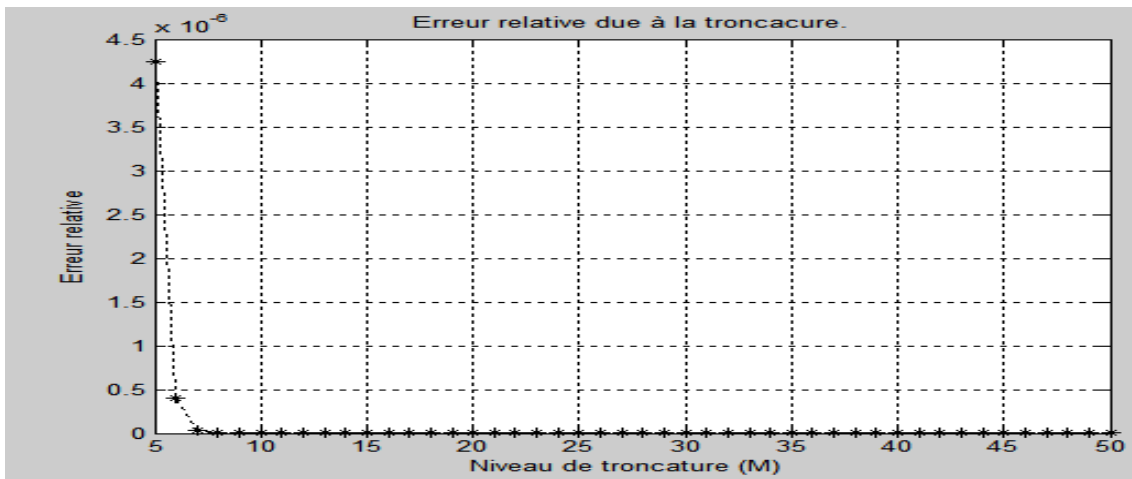


Figure 4.1: Courbe représentative de l'erreur relative due à la troncature de la taille de la file M/ H_2 /1/∞-(V,E) par la CMC

Pour d'autres paramètres ($\lambda = 0.01$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\theta = 100$ et $\gamma = 0.5$) du modèle M/H₂/1-(V,E), les résultats numériques obtenus pour ce cas d'application sont présentés dans la figure (4.2).

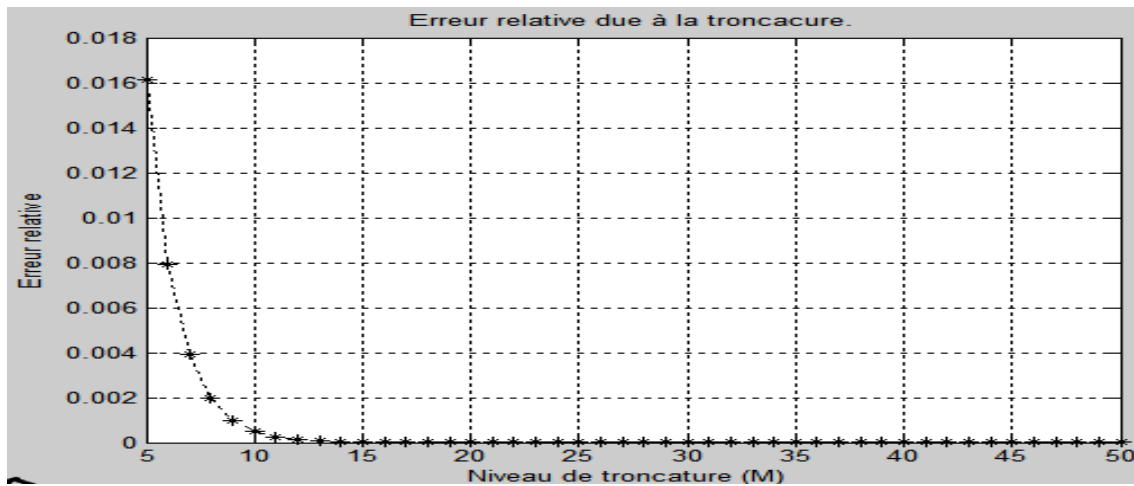


Figure 4.2: Courbe représentative de l'erreur relative due à la troncature de la taille de la file M/H₂/1/∞-(V,E) par la CMC

D'après les résultats obtenus par l'application de la technique CMC, on constate que la valeur de l'erreur relative commise sur le calcul de la distribution stationnaire relative au modèle d'attente $M/H_2/1/\infty-(V,E)$ décroît rapidement avec l'augmentation de la valeur du niveau de la troncature M . En particulier, ce constat est valable pour les valeurs de $M > 5$. Ainsi, la distribution stationnaire de la file d'attente $M/H_2/1/\infty-(V,E)$ obtenue par la CMC converge rapidement vers la distribution stationnaire du modèle original. En effet, pour des valeurs du niveau de troncature supérieures à 5, on obtient des valeurs de l'erreur relative significativement proches de zéro. Cela prouve que cette approche est très efficace pour les calculs de ce type de situations.

4.3 Analyse de perturbation de la file d'attente $M/G/1/\infty-(V,E)$

Dans cette section, on choisit une autre approche d'analyse dont le principe est différent de celui de l'approche qu'on a déjà utilisé dans la section précédente. Celle-ci est la méthode de stabilité forte, son principe repose sur l'obtention des bornes de perturbation des chaînes de Markov homogènes. La caractérisation essentielle de cette approche est le calcul exact de toutes les constantes qui interviennent dans la définition de la borne en question. De plus, celle-ci est applicable pour des chaînes de Markov à espace d'états infini. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'estimation de l'erreur commise lors d'approximation de la distribution stationnaire relative à la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle d'attente $M/G/1/\infty-(V,E)$ par celle correspondante du modèle d'attente $M/G/1$ classique. La perturbation alors considérée dans cette analyse est celle du taux des vacances du serveur. En d'autres termes, nous étudions l'influence des vacances du serveur sur les mesures de performance de ce modèle.

En première étape, nous étudions la v -stabilité forte la chaîne de Markov induite X , représentant le nombre de clients présents dans le système d'attente $M/G/1$ juste après le n -ème départ. Nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approcher la distribution stationnaire relative au modèle d'attente $M/G/1/\infty-(V,E)$ par celle correspondante du modèle classique $M/G/1$.

Au préalable, nous énonçons le lemme suivant que nous utiliserons dans la démonstration

de la v -stabilité forte de la chaîne de Markov X .

Lemme 4.3.1. [1] *Supposons que dans le modèle d'attente M/G/1 classique, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\lambda \mathbf{E}(S) < 1$, où S est la durée de service (condition d'ergodicité géométrique) ;
2. $\exists a > 0, \mathbf{E}(e^{aS}) = \int e^{at} dS(t) < \infty$ (condition de Cramér).

Alors, il existe $\beta > 1$ tel que :

$$\rho = \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta} < 1. \quad (4.16)$$

Théorème 4.3.1. *Supposons que dans le modèle d'attente M/G/1 les conditions du Lemme 4.3.1 soient vérifiées et posons :*

$$\Gamma = \sup \{ \beta : \rho < 1 \}. \quad (4.17)$$

Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \Gamma$, la chaîne de Markov X est fortement v -stable pour une fonction test $v(k) = \beta^k$.

Démonstration. Pour pouvoir prouver le fait de v -stabilité de la chaîne de Markov X pour la fonction test $v(k) = \beta^k$, où $\beta > 1$, nous utilisons le critère de stabilité forte (Théorème 2.2.6). Pour cela, nous choisissons la fonction mesurable :

$$h(i) = \mathbf{1}_{i=0} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

et la mesure :

$$\alpha_j = P_{0j}.$$

Alors, vérifions les trois conditions $a.$, $b.$ et $c.$ du Théorème 2.2.6.

On a :

- $\pi h = \pi_0 = 1 - \rho > 0$;
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} a_j = 1$;
- $\alpha h = h(i) \alpha_j = a_0 > 0$.

Condition a : la matrice tabou T est non négative :

Par définition de la matrice T , on a : $T_{ij} = P_{ij} - h(i) \alpha_j$, alors

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 0; \\ P_{ij}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ce qui implique que $T_{ij} \geq 0$, pour tout $i, j \geq 0$.

Condition b : Montrons qu'il existe une constante $\rho < 1$ telle que $Tv(i) \leq \rho v(i), \forall i \geq 0$:

Par définition, on a :

$$Tv(i) = \sum_{j \geq 0} v(j)T_{ij}.$$

o Si $i = 0$

$$Tv(0) = \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{0j} = \sum_{j \geq 0} \beta^j \times 0 = 0.$$

o Si $i \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{ij} \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{(j)!} dS(t) \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^{j+i-1} \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dS(t) \\ &\leq \beta^{i-1} \int e^{-\lambda t} \sum_{j \geq 0} \frac{(\lambda \beta t)^j}{j!} dS(t) \\ &\leq \beta^i \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir :

$$\rho = \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta}.$$

Ainsi, on obtient :

$$Tv(i) \leq \rho v(i),$$

d'après le Lemme 4.3.1, la **condition b** est vérifiée.

Condition c : La décomposition de la matrice T est donnée par :

$$T = P - h\alpha \Rightarrow P = T + h\alpha \Rightarrow \|P\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v,$$

or, on a :

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \sum_{j \geq 0} v(j) |T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \left(\frac{1}{v(i)} \rho v(i) \right) \leq \rho < 1,$$

et nous avons

$$\|h\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h(i)| = 1,$$

et

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) |\alpha_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j P_{0j} \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j a_j \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dS(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-\beta)t} dS(t) \\ &= S^*(\lambda(1-\beta)) < \beta < \infty. \end{aligned}$$

Alors, pour β défini dans le Lemme 4.3.1

$$\|\alpha\|_v < \infty,$$

donc $\|P\|_v < \infty$.

Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées.

□

L'une des constantes intervenant dans la définition des bornes de perturbation de la méthode de stabilité forte est celle qui estime la déviation en norme v de la matrice de probabilités de transition P . Cette constante est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Soient P et \tilde{P} les matrices de probabilités de transition relatives aux chaînes de Markov induites X et \tilde{X} respectivement et S^*, V^* les transformées de Laplace de S, V*

respectivement. Supposons que les conditions du Lemme 4.3.1 soient vérifiées. Alors, pour tout $1 < \beta < \Gamma$, nous avons

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq |V^*(\lambda(1 - \beta)) - 1| S^*(\lambda(1 - \beta)) = \Delta. \quad (4.18)$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\|P - \tilde{P}\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{ij} - \tilde{p}_{ij}|.$$

◦ Si $i \geq 1$, alors

$$\|P - \tilde{P}\|_v = 0.$$

◦ Si $i = 0$, alors

$$\begin{aligned} \|P - \tilde{P}\|_v &= \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \sum_{j \geq 0} v(j) |b_j - a_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |b_j - a_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \left(\left| \sum_{k=1}^{j+1} \frac{v_k}{1 - v_0} a_{j-k+1} - a_j \right| \right) \\ &\leq \sum_{j \geq 0} |V^*(\lambda(1 - \beta)) \beta^j a_j - \beta^j a_j| \\ &\leq |V^*(\lambda(1 - \beta)) - 1| S^*(\lambda(1 - \beta)) = \Delta, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où a_j et v_j sont définies par les relations (4.11) et (4.12) respectivement.

□

La première borne de stabilité forte obtenue dans le cas d'analyse de notre modèle est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.2. Soient π et $\tilde{\pi}$ les distributions stationnaires associées aux chaînes de Markov X et \tilde{X} respectivement. Supposons que les hypothèses du Lemme 4.3.1 sont vérifiées. Alors, pour tout $1 < \beta < \Gamma$, et sous la condition :

$$\Delta < \frac{1 - \rho}{c}.$$

Alors, l'estimation de l'erreur d'approximation est donnée comme suit :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq \frac{\Delta c \|\pi\|_v}{1 - \rho - c \Delta} \triangleq B e_1,$$

où $\Delta = |V^*(\lambda(1 - \beta)) - 1| S^*(\lambda(1 - \beta))$, $c = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \left(\frac{(1-\varrho)S^*(\lambda(1-\beta))(1-\beta)}{S^*(\lambda(1-\beta))-\beta} \right)$, $\varrho = \lambda \mathbf{E}(S)$ et $\rho = \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta}$.

Démonstration. Par définition, on a :

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} = 1,$$

et

$$\begin{aligned} \|\pi\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) |\pi_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \pi_j \\ &= \frac{(1 - \varrho) S^*(\lambda(1 - \beta))(1 - \beta)}{S^*(\lambda(1 - \beta)) - \beta}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\varrho = \lambda \mathbf{E}(S)$.

Ainsi, $c = 1 + \|\pi\|_v$. □

Une autre borne de la méthode de stabilité forte peut-être obtenue par application du Théorème 2.2.9. Celle-ci est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.3. *Soient π et $\tilde{\pi}$ les distributions stationnaires associées aux chaînes de Markov X et \tilde{X} respectivement. Supposons que les hypothèses du Lemme 4.3.1 sont vérifiées. Alors, pour tout $1 < \beta < \Gamma$, et sous la condition :*

$$\Delta < \frac{1 - \rho}{c}.$$

Alors, l'estimation de l'erreur d'approximation est donnée cette fois-ci par :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq \frac{\|\alpha\|_v}{(1 - \rho - \Delta)^2} \left(1 + \frac{\|\alpha\|_v \varrho}{1 - \rho} \right) \Delta \triangleq B e_2.$$

où $\Delta = |V^*(\lambda(1 - \beta)) - 1| S^*(\lambda(1 - \beta))$, $c = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \left(\frac{(1-\varrho)S^*(\lambda(1-\beta))(1-\beta)}{S^*(\lambda(1-\beta))-\beta} \right)$, $\varrho = \lambda \mathbf{E}(S)$, $\rho = \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta}$ et $\|\alpha\|_v = S^*(\lambda(1 - \beta))$.

Démonstration. Les constantes intervenant dans la définition de cette borne de perturbation étant déjà calculées. Donc, il suffit de les remplacer dans l'expression de la borne pour la calculer. \square

Le dernier résultat obtenu lors d'analyse de perturbation du modèle M/G/1/∞-(V,E) concerne l'obtention de la troisième borne de stabilité forte. Celle-ci est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.4. *Soient π et $\tilde{\pi}$ les distributions stationnaires associées aux chaînes de Markov X et \tilde{X} respectivement. Supposons que les hypothèses du Lemme 4.3.1 sont vérifiées. Alors, pour tout $1 < \beta < \Gamma$, et sous la condition :*

$$\Delta < \frac{1 - \rho}{1 + \rho}.$$

Alors, la majoration de l'erreur d'approximation est donnée par :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho - (1 + \rho)\Delta} \frac{\|\alpha\|_v \varrho}{1 - \rho} \Delta \triangleq B e_3.$$

où $\Delta = |V^*(\lambda(1 - \beta)) - 1| S^*(\lambda(1 - \beta))$, $\varrho = \lambda \mathbf{E}(S)$, $\rho = \frac{S^*(\lambda(1-\beta))}{\beta}$ et $\|\alpha\|_v = S^*(\lambda(1 - \beta))$.

Pour démontrer ce Théorème, il suffit de suivre la même démarche que celle adoptée lors de la démonstration des Théorèmes 4.3.2 et 4.3.3.

Nous terminons cette section par une application numérique, où nous considérons une étude comparative des trois bornes de perturbation obtenues par application de la méthode de stabilité forte. Cette analyse nous permettra d'étudier la qualité de ces trois bornes. Pour ce faire, supposons que la durée de temps de service est Hyper-exponentielle d'ordre 2 ayant μ_1 et μ_2 comme paramètres. Dans ce cas, les formes explicites de S^* , V^* et ϱ sont données comme suit :

$$S^*(\lambda(1 - \beta)) = \gamma \frac{\mu_1}{\lambda(1 - \beta) + \mu_1} + (1 - \gamma) \frac{\mu_2}{\lambda(1 - \beta) + \mu_2}$$

$$V^*(\lambda(1 - \beta)) = \frac{1}{\lambda\theta(1 - \beta) + 1}$$

et

$$\varrho = \lambda \left(\frac{\gamma}{\mu_1} + \frac{1 - \gamma}{\mu_2} \right).$$

Toutefois, nous fixons les valeurs des autres paramètres comme suit :

$$\lambda = 0.1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \gamma = 0.5, \beta = 1.01.$$

L'illustration graphique des trois bornes de perturbation Be_1 , Be_2 et Be_3 obtenues dans les Théorèmes 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 respectivement est donnée en Figure (4.3).

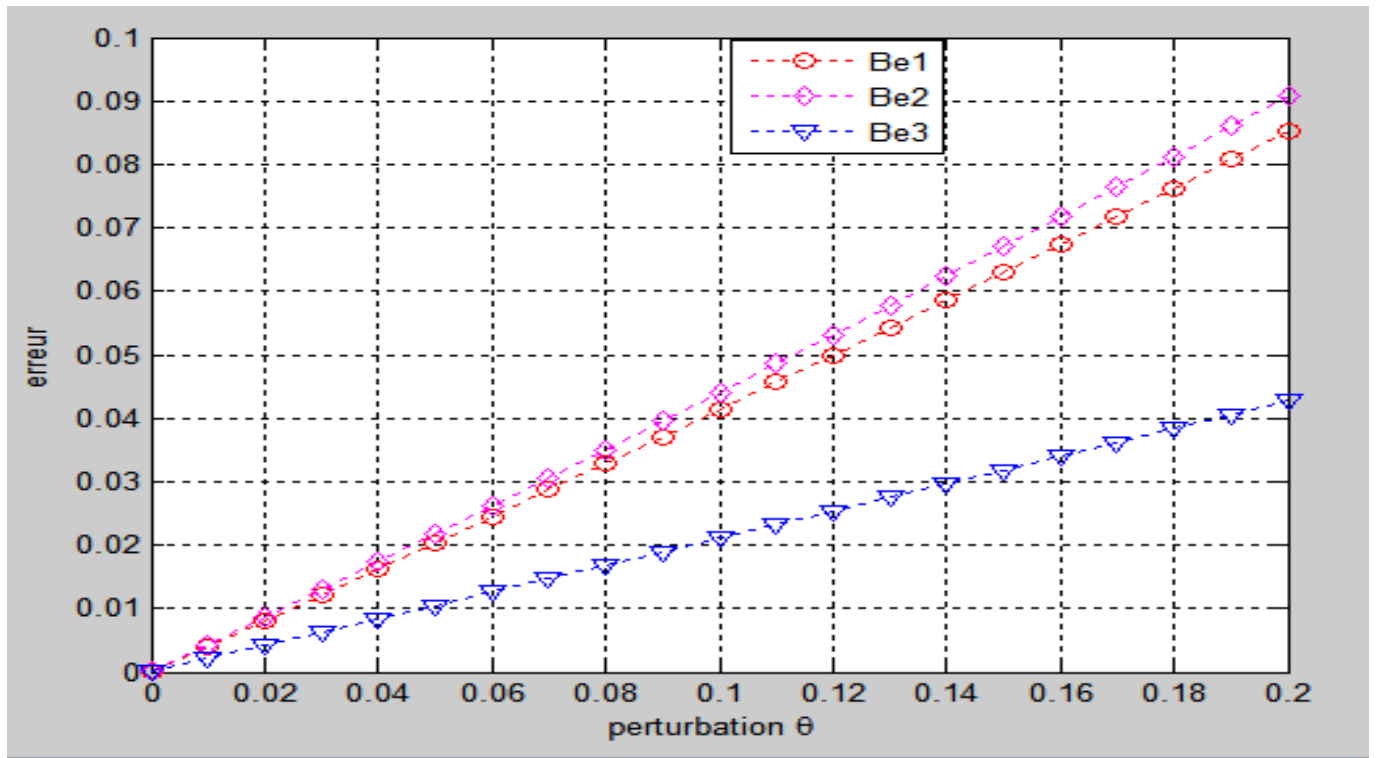


Figure 4.3: Courbes comparatives des bornes de perturbation : M/H₂/1-(V,E)

En comparant les valeurs numériques des trois bornes de perturbation obtenues par application de la méthode de stabilité forte, nous remarquons que les valeurs relatives à la borne Be_3 sont significativement petites par rapport aux valeurs des deux autres bornes. De même, les valeurs de la borne Be_1 sont petites par rapport à celles de la borne Be_2 . Par conséquent, nous obtenons :

$$Be_3 \leq Be_1 \leq Be_2.$$

4.4 Analyse de sensibilité de la file d'attente M/G/1/N-(V,E)

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'analyse de sensibilité des caractéristiques stationnaires du système d'attente M/G/1/N-(V,E) par rapport aux perturbations du taux de vacances, et ce en utilisant l'approche de développements en séries de Taylor introduite par Heidergott et Hordijk [52]. En effet, par utilisation de cette nouvelle approche nous pouvons représenter la distribution stationnaire de la longueur de la file d'attente M/G/1/N-(V,E) par un polynôme, où ces coefficients sont définis en fonction de la matrice de déviation D_θ associée à la chaîne de Markov décrivant l'état du système étudié. Cette Matrice est définie par [52] :

$$D_\theta(N) = \sum_{n \geq 0} \left(\tilde{P}_\theta^n(N) - \Pi_\theta(N) \right),$$

où Π_θ est le projecteur stationnaire de la chaîne de Markov. Cette représentation polynômial est possible sous la condition que toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition \tilde{P}_θ soient n fois continûment dérivables par rapport au paramètre de contrôle θ (dans notre cas, θ est le taux de vacances).

H : Supposons que les fonctions de probabilités b_k , définies dans (4.4), sont k -fois continûment dérivables par rapport à θ dans Θ , et ce pour tout $0 \leq k \leq N - 2$. Dans ce cas, notons sa $k^{\text{ème}}$ dérivée par $b^{(k)}$.

Ainsi, on définit la matrice dérivée d'ordre k de la matrice de probabilités de transition par :

$$\tilde{P}^{(k)} = (\tilde{p}_{ij}^{(k)})_{0 \leq i, j \leq N-1},$$

où

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)} = \frac{d^k}{d\theta^k} \tilde{p}_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N - 1.$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à développer la distribution stationnaire associée à la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle d'attente M/G/1/N - (V, E) sous la forme de la

série définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \tilde{\pi}_{\theta}^{(n)}(N) \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^k \frac{\Delta^n}{n!} \tilde{\pi}_{\theta}^{(n)}(N)}_{H_{\theta}(k,\Delta)} + r_{\theta}(k, \Delta),\end{aligned}$$

où $r_{\theta}(k, \Delta)$ est le reste du développement de Taylor (ou l'erreur d'approximation de $\tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(N)$ par la série d'ordre k) et $\tilde{\pi}_{\theta}^{(n)}$ est la sensibilité d'ordre k de la distribution stationnaire (ou la dérivée d'ordre k de celle-ci). Cette dérivée est donnée dans [52] :

$$\tilde{\pi}_{\theta}^{(n)} = \tilde{\pi}_{\theta} K_{\theta}(n), \quad (4.21)$$

avec $K_{\theta}(n)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}K_{\theta}(n) &= \sum_{\substack{1 \leq m \leq n; \\ 1 \leq l_k \leq n; \\ l_1 + \dots + l_m = n}} \frac{n!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{k=1}^m \left(\tilde{P}_{\theta}^{(l_k)} D_{\theta} \right).\end{aligned}$$

Afin de faciliter le calcul de ces dérivées, une nouvelle démarche de calcul des dérivées de la distribution stationnaire $\tilde{\pi}_{\theta}$ sous forme récursive est établie par Abbas et al. [6]. Nous illustrons cette nouvelle démarche du calcul pour le cas des dérivées d'ordre $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{\theta}^{(1)} &= \tilde{\pi}_{\theta} \tilde{P}_{\theta}^{(1)} D_{\theta}, \\ \tilde{\pi}_{\theta}^{(2)} &= \tilde{\pi}_{\theta} \tilde{P}_{\theta}^{(2)} D_{\theta} + 2\tilde{\pi}_{\theta}^{(1)} \tilde{P}_{\theta}^{(1)} D_{\theta}\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\pi}_{\theta}^{(3)} = \tilde{\pi}_{\theta} \tilde{P}_{\theta}^{(3)} D_{\theta} + 3\tilde{\pi}_{\theta}^{(2)} \tilde{P}_{\theta}^{(1)} D_{\theta} + 3\tilde{\pi}_{\theta}^{(1)} \tilde{P}_{\theta}^{(2)} D_{\theta}.$$

En fin de cette section, nous illustrons l'applicabilité de la méthode de développements en séries de Taylor sur le cas du modèle d'attente M/G/1/N-(V,E), où nous supposons que la distribution de temps de service est Hyper-exponentielle d'ordre 2 de paramètres μ_1 et μ_2 . Ainsi, les trois premières dérivées de la distribution stationnaire du nombre de clients de ce modèle d'attente se calculent de la façon suivante.

La probabilité a_j étant indépendante du paramètre des vacances θ . Par conséquent, pour tout $k \geq 1$:

$$a_j^{(k)} = \frac{d^k}{d\theta^k} a_j = 0, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, N-2\}.$$

Néanmoins, pour calculer les dérivées d'ordre supérieur de la probabilité b_j définie par :

$$b_j^{(k)} = \frac{d^k}{d\theta^k} b_j, \quad (4.22)$$

nous allons exploiter l'écriture de celle-ci sous forme du produit de deux fonctions du paramètre de contrôle θ :

$$b_j = \underbrace{\frac{1}{1-v_0}}_{w(\theta)} \underbrace{(v_1 a_j + v_2 a_{j-1} + v_3 a_{j-2} + \dots + v_j a_1 + v_{j+1} a_0)}_{S(\theta)}.$$

À cet effet, nous utilisons la formule de Leibniz donnée par :

$$\begin{aligned} b_j^{(k)} &= \sum_{n=0}^k C_k^n w^{(n)}(\theta) S^{(k-n)}(\theta) \\ &= \sum_{n=0}^k C_k^n \frac{d^n}{d\theta^n} w(\theta) \frac{d^{k-n}}{d\theta^{k-n}} S(\theta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

En utilisant la formule (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} b_j &= \frac{d}{d\theta} w(\theta) S(\theta) + w(\theta) \frac{d}{d\theta} S(\theta), \\ \frac{d^2}{d\theta^2} b_j &= \frac{d^2}{d\theta^2} w(\theta) S(\theta) + 2 \frac{d}{d\theta} w(\theta) \frac{d}{d\theta} S(\theta) + w(\theta) \frac{d^2}{d\theta^2} S(\theta) \end{aligned}$$

et

$$\frac{d^3}{d\theta^3} b_j = \frac{d^3}{d\theta^3} w(\theta) S(\theta) + 3 \frac{d^2}{d\theta^2} w(\theta) \frac{d}{d\theta} S(\theta) + 3 \frac{d}{d\theta} w(\theta) \frac{d^2}{d\theta^2} S(\theta) + w(\theta) \frac{d^3}{d\theta^3} S(\theta).$$

Pour calculer les trois dérivées introduites ci-dessus pour le cas du modèle M/H₂/1/N-(V,E), on procède comme suit :

$$\frac{d^k}{d\theta^k} w(\theta) = (-1)^k \frac{k! \lambda^k}{(\lambda\theta + 1)^{k+1}}$$

et

$$\frac{d^k}{d\theta^k} S(\theta) = \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1} \frac{d^k}{d\theta^k} v_i, \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\},$$

où les trois premières dérivées de la probabilité v_j sont données par :

$$\frac{d}{d\theta} v_j = \lambda \left[\frac{j(\lambda\theta)^{j-1}}{(\lambda\theta + 1)^{j+1}} - \frac{(j+1)(\lambda\theta)^j}{(\lambda\theta + 1)^{j+2}} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} v_j &= \lambda^2 \left[\frac{j(j-1)(\lambda\theta)^{j-2}}{(\lambda\theta+1)^{j+1}} - 2 \frac{(j+1)j(\lambda\theta)^{j-1}}{(\lambda\theta+1)^{j+2}} + \frac{(j+2)(j+1)(\lambda\theta)^j}{(\lambda\theta+1)^{j+3}} \right]. \\ \frac{d^3}{d\theta^3} v_j &= \lambda^3 \left[\frac{j(j-1)(j-2)(\lambda\theta)^{j-3}}{(\lambda\theta+1)^{j+1}} - 3 \frac{(j+1)j(j-1)(\lambda\theta)^{j-2}}{(\lambda\theta+1)^{j+2}} \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{(j+2)(j+1)j(\lambda\theta)^{j-1}}{(\lambda\theta+1)^{j+3}} - \frac{(j+3)(j+2)(j+1)(\lambda\theta)^j}{(\lambda\theta+1)^{j+4}} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, la structure de la matrice dérivée relative au modèle M/H₂/1/N-(V/E) prendra la forme suivante :

$$P_{(N)}^{(k)} = \begin{pmatrix} b_0^{(k)} & b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & b_3^{(k)} & \cdots & b_{N-2}^{(k)} & -\sum_{j=0}^{N-2} b_j^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Dans ce qui suit nous considérons trois exemples numériques illustrant l'analyse de sensibilité de la distribution stationnaire par rapport à la perturbation du paramètre θ . Pour ce faire, nous fixons les valeurs des paramètres du modèle étudié :

$$\lambda = 1, \theta = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \gamma = 0.5, N = 4 \text{ et } \Delta \in [0, 0.1].$$

Comme premier exemple numérique, on considère la série de Taylor d'ordre 1, i.e.,

$$\begin{aligned} H_\theta(1, \Delta) &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}'_\theta \\ &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta, \end{aligned}$$

et nous traçons les courbes représentatives des erreurs relatives absolues commises sur le calcul des composantes de la distribution stationnaire par la série de Taylor d'ordre 1 (voir la figure (4.4)) :

$$\left| \frac{H_\theta(1, \Delta)(i) - \tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(i)}{\tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(i)} \right|$$

pour $i = 0, \dots, 3$.

Pour les mêmes valeurs des paramètres, nous répétons cet exemple avec une série de Taylor d'ordre 2, i.e.,

$$\begin{aligned} H_\theta(2, \Delta) &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}_\theta^{(1)} + \frac{\Delta^2}{2} \tilde{\pi}_\theta^{(2)} \\ &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta + \frac{\Delta^2}{2} \tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(2)} D_\theta + \Delta^2 \tilde{\pi}_\theta (\tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta)^{(2)}. \end{aligned}$$

De même, nous illustrons graphiquement les erreurs relatives absolues dues au calcul des composantes de la distribution stationnaire par la série de Taylor d'ordre 2 (voir la figure (4.5)). Celles-ci sont données par :

$$\left| \frac{H_\theta(2, \Delta)(i) - \tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(i)}{\tilde{\pi}_{\theta+\Delta}(i)} \right|$$

pour tout $i = 0, \dots, 3$.

Finalement, en troisième exemple, nous considérons la série de Taylor d'ordre 3 donnée par :

$$\begin{aligned} H_\theta(3, \Delta) &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}_\theta^{(1)} + \frac{\Delta^2}{2} \tilde{\pi}_\theta^{(2)} \\ &= \tilde{\pi}_\theta + \Delta \tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta + \frac{\Delta^2}{2} \tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(2)} D_\theta + \Delta^2 \tilde{\pi}_\theta (\tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta)^{(2)} \\ &\quad + \frac{\Delta^3}{6} \left(\tilde{\pi}_\theta \tilde{P}_\theta^{(3)} D_\theta + 3 \tilde{\pi}_\theta^{(2)} \tilde{P}_\theta^{(1)} D_\theta + 3 \tilde{\pi}_\theta^{(1)} \tilde{P}_\theta^{(2)} D_\theta \right), \end{aligned}$$

L'illustration graphique des erreurs relatives absolues commises lors du calcul des composantes de la distribution stationnaire par une série d'ordre 3 est donnée en Figure (4.6) :

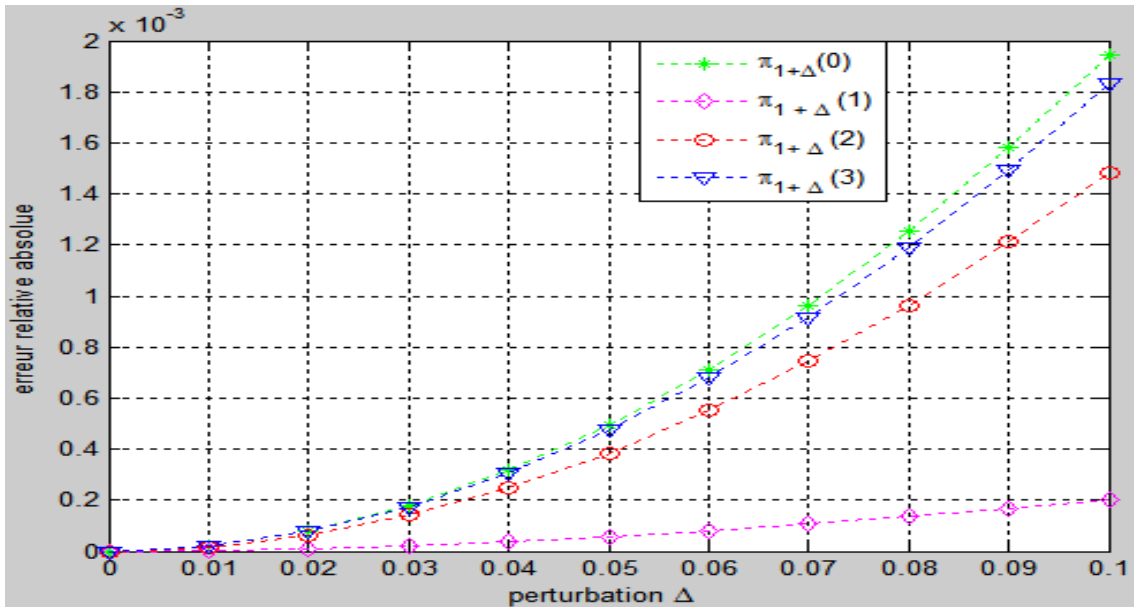


Figure 4.4: Courbes représentatives des erreurs relatives absolues sur le calcul de la distribution stationnaire du modèle M/H₂/1/4-(V,E) par la série de Taylor d'ordre 1.

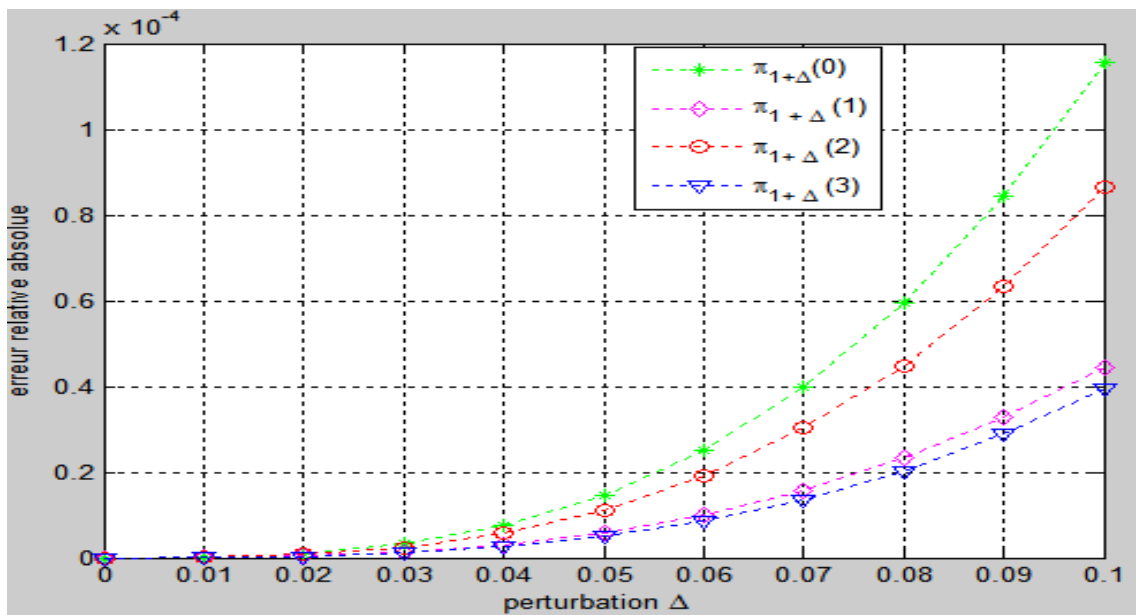


Figure 4.5: Courbes représentatives des erreurs relatives absolues sur le calcul de la distribution stationnaire du modèle M/H₂/1/4-(V,E) par la série de Taylor d'ordre 2.

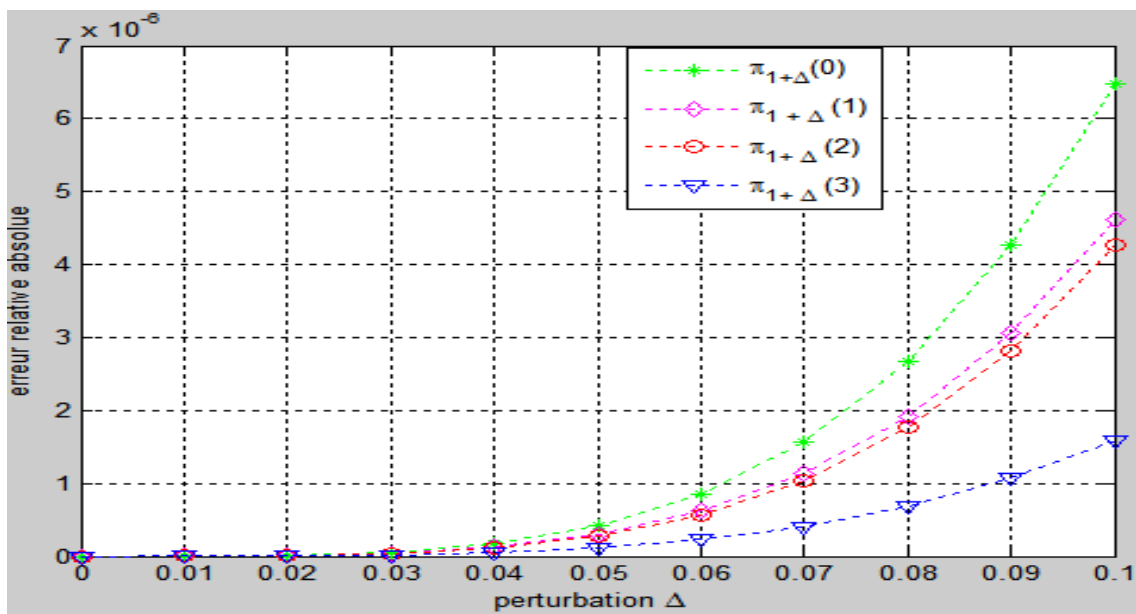


Figure 4.6: Courbes représentatives des erreurs relatives absolues sur le calcul de la distribution stationnaire du modèle M/H₂/1/4-(V,E) par la série de Taylor d'ordre 3.

D'après les figures précédentes, on constate que plus on augmente l'ordre du développement de la série de Taylor, l'erreur relative absolue associée au calcul des valeurs des composantes de la distribution stationnaire diminue en chaque point de l'intervalle de perturbation $[0, 0.1]$. En outre, la perturbation du paramètre θ de dix pour cent induit une erreur sur le calcul des composantes de la distribution stationnaire $\tilde{\pi}_\theta$ de grandeur de 10^{-6} , et ce en utilisant un polynôme de degré 3. Cela nous permet de confirmer l'efficacité de l'approche utilisée. En d'autres termes, le calcul de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/4-(V,E)$ par l'approche de séries de Taylor s'est réalisé avec une meilleure précision.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu illustrer numériquement l'applicabilité de trois méthodes différentes (la chaîne de Markov censurée, la stabilité forte et le développements en séries de Taylor), permettant de déterminer l'approximation des caractéristiques stationnaires des systèmes de files d'attente de type $M/G/1$ et $M/G/1/N$ avec vacances, tout en suivant des démarches différentes. Cette applicabilité des trois méthodes nous a permis d'analyser leurs performances.

Bibliographie

- [1] K. Abbas and D. Aïssani, Approximation in an $M/G/1$ queueing system with breakdowns and repairs; EWiC review, British Computer Society Ed. (**2007**).
- [2] K. Abbas and D. Aïssani, Strong stability of the embedded Markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers; Applied Mathematical Modelling 34, 2806-2812, (**2010**).
- [3] K. Abbas and D. Aïssani, Approximation of performance measures in an M/G/1 queue with breakdowns; Quality Technology and Quantitative Management Vol. 7, No. 4, pp. 353-363, (**2010**) .
- [4] K. Abbas and D. Aïssani, Structural perturbation analysis of a single server queue with breakdowns; Stochastic Models, 26 : 78-97, (**2010**).
- [5] K. Abbas, B. Heidergott and D. Aïssani, A Taylor series approach to the numerical analysis of the M/D/1/N queue; Procedia Computer Science 1 1553-1560, (**2010**).
- [6] K. Abbas, B. Heidergott and D. Aïssani, A functional approximation for the M/G/1/N queue; Discrete Event Dyn Syst 23 : 93-104, (**2013**).
- [7] K. Adel, K. Abbas and D. Aïssani, Strong truncation approximation in tandem queues with blocking; Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, (**2012**).
- [8] D. Aïssani, Estimate of the strong stability in an M/G/1 system; VINITI 4119-82 R. Journal Matematika, IB 83 : 1-33, (**1982**).
- [9] D. Aïssani et A. Aïssani, La Théorie des Files d'Attente; Ecole Doctorale en Informatique, Département d'Informatique, Béjaïa (**2004**).
- [10] S.L. Albin, Analyzing M/M/1 queues with perturbations in the arrival process; The Journal of the Operational Research Society, Vol. 35, No. 4 , pp. 303-309, (**1984**).

-
- [11] E. Altman, Perturbation Analysis for Denumerable Markov Chains with Application to Queueing Models; Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis ,France, (2004).
- [12] G.H. Andrew and R.L. Tweedie, Convergence of invariant measures of truncation approximations to Markov processes; Applied Mathematics, 3, 2205-2215, (2012).
- [13] J.R. Artalejo, Analysis of an $M/G/1$ queue with constant repeated attempts and server vacations; Computers. Ops. 24(6), 493-504, (1997).
- [14] H. Ayhan and F. Baccelli, Expansions for joint Laplace transforms of stationary waiting times in $(\max,+)$ -linear systems with Poisson input; Queueing Systems 37, 291-328, (2001).
- [15] S. Balaji and S.P. Meyer, Multiplicative ergodicity and large deviations for an irreducible Markov chains; Stochastic Processes and their Applications 90 (1) : 123-144, (2000).
- [16] A. Boualem née Bareche, Application de Méthodes d'Estimation non Paramétrique dans l'Etude de Stabilité des Systèmes d'Attente; Thèse de Doctorat Université A.MIRA-BEJAIA, (2008).
- [17] V.S. Barbu and N. Limnios, Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications; Springer Science+Business Media, LLC, USA, (2008).
- [18] J. Barlow, Error bounds for the computation of null vectors with applications to Markov chains; SIAM J. Matrix anal. Appl. 14, 798-812, (1993).
- [19] B. Baynat, Théorie de Files d'Attente; Hermes Science Europe, France, (2000).
- [20] M. Benaouicha and D. Aïssani, Estimate of the strong stability in the $G/M/1$ queueing system; In Applied Stochastic Model and Data Analysis, G. Govaert, J. Jansen and N. Limnios Editors, volume 1, pages 172-177, Compiègne, (2001).
- [21] L. Berdjoudj and D. Aïssani, On the strong stability of retrial queues, Theor. Probab. Math. Statist. vol. 68, pp. 11-17, (2004).
- [22] L. Berdjoudj-Bouraine, Analyse des Systèmes de Files d'Attente avec Rappel et Arrivées Négatives, Thèse de Doctorat, Université de Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, (2007).
- [23] G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer and K.S. Trivedi, Queueing Networks and Markov Chains; John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved (Second Edition), USA, (2006).

-
- [24] A. A. Borovkov, *Processus probabilistes de la théorie des files d'attente*; Navka, Moscou, (1972).
- [25] M. Boualem, *La Propriété de Décomposition Stochastique dans un Système d'Attente avec Rappels et Vacances*; Thèse de Doctorat Université A.M-Bejaia, (2009).
- [26] L. Breuer and D. Baum, *An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods*; Springer,P.O Dordrecht, The Netherlands, (2005).
- [27] X.R. Cao, *Realization Probabilities : The Dynamics of Queueing Systems*; New York : Springer-Verlag, USA, (1994).
- [28] X.R. Cao, *Semi-Markov Decision Problems and Performance Sensitivity Analysis*; IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, NO. 5, USA, (2003).
- [29] X.R. Cao and H. F. Chen, *Potentials, perturbation realization, and sensitivity analysis of Markov processes*; IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, pp. 1382-1393, (1997).
- [30] X.R. Cao, X. M. Yuan and L. Qiu, *A new formula for performance sensitivities of discrete-time Markov chains*; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, 1814-1817, (1996).
- [31] H. F. Chen, *Stochastic Approximation and Its Applications*,; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2002).
- [32] W.K. Ching and M.K. Ng, *Markov Chains : Models, Algorithms and Applications*; Springer Science+Business Media, Inc, USA, (2006).
- [33] G.E. Cho and C.D. Meyer, *Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain*; Linear Algebra and its Applications 335, 137-150, (2001).
- [34] R.B. Cooper, *Introduction to Queueing Theory*; North-Holland, New York, 2nd Edition, USA, (1981).
- [35] J. P. Demailly, *Analyse Numérique et Equation Différentielle*; EDP Science, France; (2006).
- [36] M. Van Dijk, *Error bounds for state space truncation of finite Jackson networks*; European Journal of Operational Research 186 : 164-181, (2008).
- [37] M. Van Dijk, *Truncation of Markov Chains with Applications to Queueing*; Operation Research,39, 1018-1026, (1991).

-
- [38] M. Van Dijk, Approximate uniformization for continuous-time Markov chains with an application to performability analysis; *Stochastic Processes and their Applications* 40 : 339-357, North-Holland, (1992).
- [39] B.T. Doshi, Queueing systems with vacations A survey; *Queueing Syst*, Vol. 1, 129-166, (1986).
- [40] K. Dris, Etude comparative des méthodes de stabilité des modèles stochastiques; Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaïa, (2006).
- [41] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications; 3rd edition, vol. I. Wiley, New York, USA, (1968).
- [42] J.M. Fourneau, N. Pekergin and S. Younès, Censoring Markov Chains and Stochastic Bounds; INRIA Project MESCAL, Montbonnot, France,(2007).
- [43] D. Freedman, Approximating Countable Markov Chains; 2nd edn. Springer, New York, USA, (1983).
- [44] R.E. Funderlic and C.D. Meyer , Sensitivity of the stationary distribution vector for an ergodic Markov chain; *Linear Algebra and its Applications* Volume 76, Pages 1-17, (1986).
- [45] J. Genet et G. Pupion, Analyse Moderne 2; Librairie Vulbert Broché, France; (1974) .
- [46] W.B. Gong and J. K. Hu, The Maclaurin series of the GI/G/1 queues; *J.Appl. Prob*, 29 : 184-276, (1992).
- [47] W. Grassmann, Perturbation Analysis of Production Networks in Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems; Springer Series in Operations Research, New York, USA, (1994).
- [48] W.K. Grassmann and D.P. Heyman, Computation of steady-state probabilities for infinite state Markov chains with repeating rows; *ORSA J. Comput.* 5, 292-303, (1993).
- [49] N. Hamadouche, Approximation dans les Systèmes Prioritaires; Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaïa, (2004).
- [50] A.G. Hart and R.L. Tweedie, Convergence of invariant measures of truncation approximations to Markov processes; *Applied Mathematics* : 3, 2205-2215, (2012).

-
- [51] M. Haviv and L. Vande Der Heyden, Perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite Markov chain; *Adv. Appl. Probab.* 16, 804-818, (**1984**).
- [52] B. Heidergott and A. Hordijk, Taylor series expansions for the stationary Markov chains; *Adv. Appl. Prob.* 35, 1046-1070 (**2003**).
- [53] B. Heidergott, A. Hordijk and M. Uitert, Series expansions for finite-state Markov chains; *Probability in Engineering and Informational Sciences* 21 : 381-400, (**2005**).
- [54] B. Heidergott, A. Hordijk and N. Leder, Series expansions for continuous-time Markov processus; *Probability in Engineering and Informational Sciences* 21 : 381-400, (**2007**).
- [55] B.Heidergott, A. Hordijk and H. Leabu, Strong bounds on perturbations; *Math Meth Oper Res* 70 :99-127, (**2009**).
- [56] D.P. Heyman, Aproximating the stationary distribution of an infinite stochastic matrix; *1 Appl. Prob.* 28, 96-103, (**1991**).
- [57] Y.C. Ho and J.Q. Hu, An Infinitesimal Perturbation Analysis Algorithm for a Multiclass G/G/1 Queue; Division of Applied Science, Cambridge, RU, (**1988**).
- [58] Y. C. Ho and X. R. Cao, Perturbation Analysis and Optimization of Queueing Networks; *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 40, 559-582, (**1983**).
- [59] Y.C.Ho and J.Q. Hu, An Infinitesimal Perturbation Analysis Algorithm for a Multiclass G/G/1 Queue; (submitted to the *OR Letters*,Division of Applied Science Harvard University Cambridge, RU,(**1988**).
- [60] J. Hunter, Stationary distributions of perturbed Markov chains; *Linear Algebra and its Applications* 82 : 201-214, (**1986**).
- [61] I. C. F.Ipsen and C. D. Meyer, Uniform stability of Markov chains; *SIAM J. Matrix Anal. Appl* 15, 1061-1074, (**1994**).
- [62] V. V. Kalashnikov, The Stability Concept for Stochastic Risk Models; Wadsworth and Brooks Cole, (**2000**).
- [63] V. Kalashnikov and S. Rachev, Mathematical Methods for Construction of Queueing Models; Wadsworth and Brooks,Cole :431 pages, (**1990**).
- [64] N.V. Kartachov, On ergodicity and stability properties of Markov chains with respect to various norm in the measure space; *Theor. Prob. and its Appl.* 29 (1) : 195-196, (**1981**).

- [65] N.V. Kartachov and D. Aïssani, Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels; Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, ser A,11 : 3-5, (**1983**).
- [66] N.V. Kartachov, Inequalities in theorems of ergodicity and stability for Markov hains with common phase I; Theor. Prob. Appl., 30(2) :247-259, (**1985**).
- [67] N.V. Kartachov, Strong Stable Markov Chains; VSP Utrech, TbiMC Scientific Publishers, (**1996**).
- [68] J. Kemeny, Finite continuous time Markov chains; Th. Probab. appl. 6, 101-105, (**1961**).
- [69] G. Koole, The diviation matrix of the $M/M/1/\infty$ and $M/M/1/N$ queue, with applications to controlled queueing models; Proc. of the 37-th IEEE CDC, Tampa; pp. 56-59, (**1996**).
- [70] G. Latouche and P. Taylor, Matrix-Analytic Methods Theory and Applications; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA;(**2002**).
- [71] S.S. Lee, S.H. Yoon and K.C. Chae, Batch arrival queue with n-policy and single vacation; Comput. Oper. Res., 22 , 173-189, (**1995**).
- [72] P. Levy, Processus markoviens et stationnaires : cas dénombrable; Annales de l'I.H.P., tome 16 n° 1, p. 7-25, (**1958**).
- [73] Q.L. Li, Constructive computation in stochastic models with applications, the RG-Factorization; Tsinghua University Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 7-25, (**2010**).
- [74] Y. Liu, Augmented truncation approximations of discrete-time Markov chains; Operations Research Letters 38, 218-222, China, (**2010**).
- [75] Y. Liu and Y. Q. Zhao, The censored Markov chain and the best augmentation; J. Appl. Prob. Printed in Israel 33, 623-629 (**1996**).
- [76] Y. Liu and Y.Q. Zhao, Asymptotic behavior of the loss probability for an M/G/1/N queue with vacations; Applied Mathematical Modelling 37, 1768-1780, (**2013**).
- [77] M. Manitz , Queuing-model based analysis of assembly lines with finite buffers and general service times; Computers and Operations Research, Vol.35, pp.2520-2536, (**2008**).
- [78] D.J. Mercier, Formules de Taylor. Applications; IUMF de Guadeloupe, France, (**2003**).

- [79] C.D. Meyer, The condition of finite Markov chain and perturbation bounds for the limiting probability ; SIAM J. Algebraic Discrete Methods 1 : 273 - 283, (**1980**).
- [80] Z. Mouhoubi and D. Aïssani, New perturbation bounds for denumerable Markov chains ; Linear Algebra and its Applications 432, 1627-1649, (**2010**).
- [81] Z. Mouhoubi, Bornes de perturbation des caractéristiques transitoires et stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états général. Application aux systèmes avec impatientie et aux modèles de production et de gestion des stocks ; Thèse de Doctorat, Université de Béjaia, (**2010**).
- [82] E. Nummelin, General Irreducible Markov Chains and non-Negative Operators ; Cambridge Univ. Press, Cambridge, RU, (**1983**).
- [83] S. Ouazine, K. Abbas and B. Heidergott, The Taylor series expansions for performance functions of queues : *Sensitivity Analysis* ; In A. Dudin and K. de Turck (Eds), ASMTA 7984, 1-11, Springer, (**2013**).
- [84] S. Ouazine and K. Abbas, Algorithmic approach for Taylor series expansions with applications to queueing networks ; ITM, Amsterdam, (**2013**).
- [85] B. Rabta and D. Aïssani, Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains ; Linear Algebra and its Applications 428 : 1921-1927, (**2008**).
- [86] B. Rabta, Nouvelles Conditions et Nouvelles Estimations de Stabilité des Chaînes de Markov avec Application aux Modèles Stochastiques de Gestion des Stocks ; Thèse de Doctorat, Université de Béjaia, (**2006**).
- [87] B. Rabta, Perturbation results for comparison of Markov models ; J. Stat. Appl. Pro. 2, No. 1, 27-31 (**2013**).
- [88] S.T. Rachev, The problem of stability in queueing theory ; Queueing Systems, 287-318, (**1989**).
- [89] F. Rahmoune et D. Aïssani, Series expansions in queues with server vacation ; G. Reiner (ed.), Springer-VLL, (**2010**).
- [90] F. Riesz et B.S. Nagy, Functional Analysis ; Ungar, New York, NY, (**1955**).
- [91] H.J. Rossberg, Über die verteilung von wartereiten ; Mathematische Nachrichten 30 (1/2), 1-16, (**1965**).

- [92] A. Ruegg, *Processus stochastique*; Presses polytechniques romandes. Lausanne, Suisse, (1989).
- [93] P.J. Schweitzer, *Perturbation theory and finite Markov chains*; J. Appl. Prob. 5 : 401-413, (1968).
- [94] E. Senata , *The principle of truncations in applied probability*; Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 , No. 2, 237–242, (1968).
- [95] E . Senata, *Non-negative Matrices and Markov Chains*; The University of Sydney School of Mathematics and Statistics Sydney, N.S.W. (2006).
- [96] E. Senata, *Computing the stationary distribution for infinite Markov chains*; Linear Algebra Appl. 34 , 259-267, (1980).
- [97] E. Senata, *Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients*; Adv. Appl. Probab. 20 : 228-230, (1988).
- [98] E. Senata, *Sensitivity analysis, ergodicity coefficient, and rank-one updates for finite Markov chains*; Probab. Pure Appl. Marcel Dekker, New York ; pp. 121-129, (1991).
- [99] E. Senata and D. Gibson, *Augmented truncations of infinite stochastic matrices*; Journal of Applied Probability, Vol. 24, No. 3. , pp. 600-608, (1987).
- [100] E. Senata and N. Gibson, *Monotone infinite stochastic matrices and their augmented truncations*; Stochastic Processes and their Applications 24, 287-292, North-Holland, (1987).
- [101] F. Simonot, *Sur l’approximation de la distribution stationnaire d’une chaîne de Markov stochastiquement monotone*; Stochastic Processes and their Applications 56, 133-149, (1995).
- [102] J. Smith, *Approximative stationary probability vectors of a finite Markov chain*; SIAM J. Appl. Math. 20 : 612-618, (1971).
- [103] D. Stoyan, *Ein stetigkeitssatz für einlinige Wartemodelle der Bedienungstheorie*; Math.Operations forschu. Statist. N 2, 103-111, (1977).
- [104] R. Suri, *Infinitesimal perturbation analysis for general discrete event systems*; J. of the ACM, Vol. 34, No 3, pp. 686-717, (1987).

- [105] H. Takagi, Analysis Of an M/G/1/N Queue With Server's Multiple Vactions and Exhaustive Service, and Its Applicationto a Polling Model; IBM Tokyo, (**1990a**).
- [106] H. Takagi, Time-dependent avnalysis of M/G/1 action models with exhaustive service; Queue. syst, 6 : 369-389, (**1990b**).
- [107] Y. Takahashi, On the effects of small deviations in the transition matrix of a finite Markov chain; J. Oper. Res. Soc. Japan 16 : 104-129, (**1973**).
- [108] K.D. Turck, A Taylor Series Expansions Approach to Queues with Train Arrivals; SMACS research group, Department TELIN, Ghent University St-Pietersnieuwstraat 41, 9000 Gent, Belgium, (**2011**).
- [109] R.L. Tweedie, Truncation approximations of invariant measures for Markov chains; J. Appl. Probab. Volume 35, Number 3 , 517-536, (**1998**).
- [110] D. Williams, A new method of approximation in Markov chain theory and its application to some problems in the theory of random time substitution : Proc. Lond. Math. Soc. 16, 213-240, (**1966**).
- [111] D. Wolf, Approximation of the invariant probability measure of an infinite stochastic matrix; Adv. Appl. Prob. 12, 710-726, (**1980**).
- [112] M.A. Zazanis, Analyticity for Poisson driven stochastic systems; Adv. Appl. Prob,24 : 532-541, (**1992**).
- [113] Z. Zhang and J. Tong, Censoring technique applied to a MAP/G/1 queue with set-up time and multiple vacations; Taiwaneze Journal of Mathematics, Vol. 15, No. 2, pp. 607-622, (**2011**).
- [114] Y.Q. Zhao, Censoring Technique in Studying Block-Structured Markov Chains; Department of Mathematics and Statistics, University of Winnipeg, Manitoba, Canada, (**2010**)
- [115] Y.Q. Zhao, W.J. Braun and W. Li, Northwest Corner and Banded Matrix Approximations to a Countable Markov Chain, Department of Mathematics and Statistics University of Winnipeg Winnipeg, Canada, (**2004**).
- [116] Y.Q. Zhao et W. Li, Censoring, Factorizations, and Spectral Analysis for Transition Matrices with Block-Repeating Entrie; Kluwer Academic Publishers. Manufactured in the Netherlands, (**2003**).

-
- [117] V.M. Zolotarev, Sur la Continuité des Suites Stochastiques Engendrées par des Procédures Récurrentes; Journal Theory of Probability and Applications, T. 20. 4, 834-847, (1975).

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire s'intègre dans le cadre d'obtention des approximations stochastiques, où un calcul numérique peut alors être utilisé ou des modifications dans le système peuvent être suggérées pour obtenir des bornes simples ou des approximations faciles à calculer. Le support analytique formel pour la précision ou la nature de telles modifications ou approximations alors devient d'un intérêt primordial. Dans ce mémoire, nous avons obtenu des résultats sur le cas d'approximation des caractéristiques stationnaires de la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle d'attente $M/G/1$ avec vacances, tout en utilisant trois méthodes différentes : la troncature, la stabilité forte et les développements en séries de Taylor.

Mots clés : *Approximation, Chaîne de Markov censurée, Stabilité forte, Développements en séries de Taylor, Système d'attente $M/G/1$ avec vacances.*