

# STABILITÉ FORTE DE LA DISTRIBUTION STATIONNAIRE DU TEMPS D'ATTENTE PAR LE CONCEPT DE DUALITÉ

Z. BENOURET, A. TOUAZI et D. AISSANI

Unité de recherche LaMOS

Université de Bejaia, Targa-Ouzamour, 06000 (Algérie)

<http://www.lamos.org>

*benouaret\_z@yahoo.fr, touazi\_atik@hotmail.com, lamos\_bejaia@hotmail.com*

**RÉSUMÉ :** La méthode de stabilité forte possède un large champ d'application en théorie de files d'attente et récemment en modèles de risque. Dans ce travail, nous nous intéressons à la translation des inégalités de stabilité forte obtenues dans les modèles de risque afin d'estimer la déviation de la distribution stationnaire du temps d'attente qui ne peut être déterminée explicitement et exactement que dans des cas très simple ainsi que la complexité de son analyse de stabilité par l'application directe de la méthode de stabilité forte. Cette approximation est basée sur les relations d'équivalence et la dualité connues entre la théorie de la ruine et celle des systèmes d'attente. Une approche algorithmique sera présentée afin d'illustrer numériquement l'inégalité de stabilité forte obtenue pour la distribution stationnaire du temps d'attente.

**MOTS-CLÉS :** Systèmes d'attente, Modèles de risque, Dualité, Stabilité forte, Probabilité de ruine, Temps d'attente.

## 1 INTRODUCTION

C'est l'académicien V. Kalashnikov, qui a initié l'étude de stabilité forte (voir Aissani, D. and N.-V. Kartashov, 1983) dans les modèles de risque (voir Kalashnikov, V., 2000). Par la suite, plusieurs autres applications ont été réalisé afin d'estimer la déviation des probabilités de ruine dans des modèles qui cernent mieux la réalité (voir Benouaret, Z. and D. Aissani, 2010, Enikeeva, F. et al., 2001, Rusaityte, D., 2001a et 2001b). D'autres part, d'énormes progrès ont été réalisés sur la performance de la méthode de stabilité forte dans l'extension des fondements théoriques et dans l'applicabilité (du point de vue théorique) à plusieurs classes spécifiques de systèmes d'attente en analysant la stabilité de la distribution stationnaire du nombre de clients. Cependant, la distribution stationnaire du temps d'attente, qui ne peut aussi être estimée explicitement et exactement que dans des cas très simple, représente une caractéristique très importante à analyser. (voir Hêche, J.-F., 2003)

Dans ce travail, notre objectif est de déterminer des inégalités de stabilité forte pour la distribution stationnaire du temps d'attente en utilisant l'interaction qui existe entre la théorie de risque et celle des files d'attente (voir Janssen, J. 1982). Autrement dit, nous présentons le concept de translation de borne de stabilité obtenue d'un modèle de risque vers un système de file d'attente qui lui est équivalent. Une

application numérique à un systèmes d'attente spécifique, sera présentée afin d'illustrer numériquement le concept de translation des inégalités de stabilité obtenues en modèles de risque vers les systèmes d'attente.

## 2 DUALITÉ ENTRE SYSTÈMES D'ATTENTE ET MODÈLES DE RISQUE

Dans cette section, nous présentons des relations précises sur l'interaction qui existe entre les systèmes d'attente et la théorie de la ruine.

### 2.1 Distribution stationnaire du temps d'attente

Plusieurs approches sont possibles pour l'étude exacte d'une file d'attente G/G/1. Si le système est régi par la discipline FIFO, l'étude du temps d'attente est possible à l'aide d'une relation classique: l'équation de Lindley. Afin d'établir cette relation ou, du moins, d'esquisser les étapes de sa dérivation, nous allons considérer une séquence d'arrivées de clients indexée par  $n$  et utiliser les notations suivantes:

- $C_n$  le  $n$ ème client arrivé dans le système,
- $a_n$  la date d'arrivée de  $C_n$ ,
- $d_n$  la date de départ de  $C_n$ ,

- $t_n$  l'intervalle de temps entre l'arrivée de  $C_{n-1}$  et  $C_n$  ( $t_n = a_n - a_{n-1}$ ),
- $s_n$  le temps de service de  $C_n$ ,
- $w_n$  le temps d'attente de  $C_n$ .

Le processus qui nous intéresse est la suite  $\{w_n, n = 0, 1, \dots\}$  des temps d'attente.

Afin d'établir qu'il s'agit d'un processus markovien, remarquons premièrement que la date de départ du client  $C_{n+1}$  est

$$d_{n+1} = \begin{cases} d_n + s_{n+1} & \text{si } d_n \geq a_{n+1}, \\ a_{n+1} + s_{n+1} & \text{si } d_n \leq a_{n+1}. \end{cases} \quad (1)$$

La première alternative correspond au cas où  $C_{n+1}$  doit attendre le départ de  $c_n$  pour accéder au serveur alors que le second s'applique lorsque  $C_{n+1}$  arrive dans un système vide.

Par définition, le temps d'attente de  $C_{n+1}$  est:

$$w_{n+1} = d_{n+1} - a_{n+1} - s_{n+1},$$

ainsi, en soustrayant  $(a_{n+1} + s_{n+1})$  de (1), on obtient

$$w_{n+1} = \begin{cases} d_n - a_{n+1} & \text{si } d_n - a_{n+1} \geq 0, \\ 0 & \text{si } d_n - a_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

En utilisant l'identité  $w_n = d_n - a_n - s_n$ , cette dernière expression s'écrit aussi

$$w_{n+1} = \begin{cases} w_n + s_n - t_{n+1} & \text{si } w_n + s_n - t_{n+1} \geq 0 \\ 0 & \text{si } w_n + s_n - t_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

L'introduction de la variable  $u_n = s_n - t_{n+1}$  aboutit finalement à la relation simple mais fondamentale

$$w_{n+1} = \begin{cases} w_n + u_n & \text{si } w_n + u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } w_n + u_n \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Les suites  $\{s_n, n \geq 0\}$  et  $\{t_n, n \geq 0\}$  étant indépendantes entre elles et forment de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La suite  $\{u_n, n \geq 0\}$  est également composée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et, en vertu de (2), la suite  $\{w_n, n \geq 0\}$  définie bien un processus markovien.

La prochaine étape consiste à établir la fonction de répartition  $U_n(z)$  de  $u_n$  en fonction de celle des intervalles de temps entre les arrivées successives de clients, notée  $A(t)$ , et de celle des temps de service, notée  $B(s)$ .

Par définition, pour  $z \in R$ ,

$$U_n(z) = P[u_n = s_n - t_{n+1} \leq z]$$

et il vient

$$\begin{aligned} U_n(z) &= P[s_n - t_{n+1} \leq z] \\ &= \int_{t=0}^{\infty} P[s_n \leq z + t / t_{n+1} = t] dA(t) \\ &= \int_{t=0}^{\infty} B(z + t) dA(t). \end{aligned} \quad (3)$$

La dernière égalité étant basée sur l'indépendance entre le temps de service  $s_n$  de  $C_n$  et  $t_{n+1}$ . L'expression (3) montre que la fonction de répartition  $U_n(z)$  est en réalité indépendante de  $n$ . Elle sera donc par la suite simplement notée  $U(z)$ .

Remarquons que la file est stable si et seulement si la variable  $u_n$  a une séquence négative car

$$\begin{aligned} E[u_n] &= E[s_n - t_{n+1}] = E[s_n] - E[t_{n+1}] \\ &= E[S] - E[A] = E[A](\rho - 1) \end{aligned}$$

où  $E(S)$  et  $E(A)$  représentent, ici encore, les espérances des temps de service et des intervalles entre les arrivées successives de clients. Ainsi, l'espérance de  $u_n$  est négative si et seulement si

$$\rho = E(S)/E(A) < 1.$$

Notons  $W_n(y)$  la fonction de répartition du temps d'attente  $w_n$  de  $C_n$ , nous obtenons, pour  $y \geq 0$  et grâce à (3),

$$\begin{aligned} W_{n+1}(y) &= P[w_n + u_n \leq y] \\ &= \int_0^{\infty} P[u_n \leq y - w / w_n = w] dW_n(w) \\ &= \int_0^{\infty} U(y - w) dW_n(w). \end{aligned} \quad (4)$$

Pour la dernière égalité, nous avons eu recours à l'indépendance entre  $u_n$  et  $w_n$ . La file étant supposée stable, le processus  $\{w_n, n \geq 0\}$  est ergodique et admet une distribution invariante  $W(y)$  vérifiant l'équation fonctionnelle

$$W(y) = \int_0^{\infty} U(y - w) dW(w), \quad y \geq 0.$$

Par ailleurs, le temps d'attente étant une grandeur non négative, il est clair que  $W(y) = 0$  pour  $y < 0$ .

Dans une file  $G/G/1$  stable, la distribution stationnaire du temps d'attente satisfait donc l'équation in-

tégrale de Lindley:

$$W(y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} U(y-w)dW(w), & y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Cette équation de type Wiener-Hopf ne peut être résolue explicitement et exactement que dans des cas très simple et que se laisse traiter par les méthodes numériques disponibles de nos jours. Pour cette raison, une analyse de stabilité de la distribution stationnaire du temps d'attente est très importante afin d'étudier son comportement et d'estimer sa déviation par rapport à la variation des paramètres gouvernant le système.

## 2.2 Modèles de risque et probabilités de ruine

D'une manière générale, un modèle de risque peut être entièrement décrit à l'aide des éléments suivants:

1.  $\{A_n, n \geq 1\}$  est le processus des inter-arrivées successives des réclamations.
2.  $\{B_n, n \geq 1\}$  est le processus des montants successifs des réclamations.
3. Nous supposons que les revenus de la compagnie d'assurance ont un taux constant  $c > 0$ .

### Remarque:

Sans perdre de généralité, nous supposons que  $c = 1$ . En effet, si  $c \neq 1$ , nous pouvons introduire la séquence  $\{\tilde{A}_n\}_n$  telle que:

$$\tilde{A}_n = c A_n. \quad (6)$$

Alors la fonction de répartition  $\tilde{F}$  de  $\tilde{A}_n$  est donnée par

$$\tilde{F}(x) = F(x/c),$$

et si  $\tilde{\alpha} = E(\tilde{A}_n)$ , nous avons  $\tilde{\alpha} = c \alpha_n$ .

Alors les séquences  $\{\tilde{A}_n\}_n$  et  $\{B_n\}_n$  représentent un modèle de risque équivalent au modèle considéré avec  $c = 1$ .

Associons au modèle de risque considéré les processus stochastiques suivants:

$$\{X_n, n \geq 0\}, \text{ avec } X_n = B_n - cA_n, n \geq 0, \quad (7)$$

$$\{S_n, n \geq 0\}, \text{ avec } S_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 0, S_0 = 0, \quad (8)$$

$$\{T_n, n \geq 0\}, T_n = \sum_{i=1}^n A_i, n > 0, T_0 = 0, \quad (9)$$

$$\{M_n, n \geq 0\}, \text{ avec } M_n = \sup\{S_0, S_1, \dots, S_n\}. \quad (10)$$

Nous considérons aussi le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  où  $N(t)$  est le nombre total de réclamations dans l'intervalle  $[0, t]$  et le processus  $\{X(t), t > 0\}$ , où  $X(t)$  représente le montant cumulé des réclamations sur l'intervalle  $[0, t]$ . Autrement dit,

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < A_1, \\ \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & t \geq A_1. \end{cases} \quad (11)$$

On considère le processus  $\{Z(t), t \geq 0\}$ , où  $Z(t)$  représente la fortune de l'assureur à l'instant  $t$ , avec

$$Z(t) = u + ct - X(t) \quad (12)$$

En utilisant le processus des réserves  $\{Z(t), t \geq 0\}$ , on peut définir deux types de probabilités de non-ruine; en temps fini et en temps infini, définies comme suit:  $\forall u \geq 0$ ,

$$\Phi(u, t) = P(Z(t') \geq 0, t' \in [0, t] | Z(0) = u), t > 0, \quad (13)$$

$$\Phi(u) = P(Z(t') \geq 0, \forall t' \geq 0 | Z(0) = u). \quad (14)$$

Par conséquent,

$$\Phi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u, t).$$

## 2.3 Relations de dualité

D'un point de vue géométrique, les trajectoires du processus de temps d'attente et celle du processus des réserves ont la même structure. Le problème fondamental est de montrer que cette technique conduit à une équivalence entre les deux modèles d'un point de vue probabiliste.

Nous avons les relations précises suivantes, présentées par Janssen en 1982, sur cette interaction:

$$P(W_n \leq x) = P(M_n \leq x) = \Phi_n(x), \quad (15)$$

$$P(W_{N(t)} \leq x) = P(M_{N(t)} \leq x) = \Phi(x, t). \quad (16)$$

Sur le comportement asymptotique, nous avons

$$\lim_t \Phi(x, t) = \lim_t P(W_{N(t)} \leq x). \quad (17)$$

De plus, on a

$$\lim_t P(W_{N(t)} \leq x) = \lim_n P(W_n \leq x),$$

on obtient

$$\Phi(x) = \lim_n P(W_n \leq x). \quad (18)$$

Avec cette dernière relation, on peut translater des résultats déjà obtenus sur la distribution du temps d'attente ou sur la probabilité de non-ruine entre un système d'attente et le modèle de risque qui lui est équivalent.

### 3 STABILITÉ FORTE DE LA DISTRIBUTION STATIONNAIRE DU TEMPS D'ATTENTE

Dans cette section, une partie est consacrée d'abord aux concepts de stabilité forte et son application dans les modèles de risque. Par la suite, en utilisant les relations de dualité, nous présentons le principe de la translation des inégalités de stabilité forte obtenues en modèles de risque vers les systèmes d'attente afin d'estimer la déviation de la distribution stationnaire du temps d'attente.

#### 3.1 Concepts de stabilité forte

Dans cette partie, nous présentons les concepts de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov qui a été élaborée par Aissani, D. and N.-V. Kartashov en 1983.

#### Préliminaires et notations

Commençons par la présentation de tous les objets mathématiques dont on aura besoin au cours de cette partie.

1. Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable, où  $\mathcal{E}$  est une  $\sigma$ -algèbre engendrée par une partie dénombrable de  $E$ .
2. On considère  $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  une chaîne de Markov homogène à valeurs dans  $E$ , donnée par un noyau de transition régulier  $P(x, A)$ ,  $x \in E$ ,  $A \in \mathcal{E}$ .
3. On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante  $\pi$  de l'opérateur  $P$  tel que  $\pi(E) = 1$  (mesure de probabilité).
4. On considère  $m\mathcal{E}$  ( $m\mathcal{E}^+$ ), l'espace des mesures finies (non-négatives) sur  $\mathcal{E}$ .
5. On considère  $f\mathcal{E}$  ( $f\mathcal{E}^+$ ), l'espace des fonctions mesurables bornées (non-négatives).

Associons à chaque noyau de transition  $P$  les deux applications linéaires suivantes:

$$\mathcal{L}_P : m\mathcal{E} \rightarrow m\mathcal{E}$$

et

$$\mathcal{L}_P^* : f\mathcal{E} \rightarrow f\mathcal{E},$$

dont les valeurs au points  $\mu \in m\mathcal{E}$  et  $f \in f\mathcal{E}$  sont données respectivement par

$$\mu P(A) = \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A), \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

et

$$Pf(x) = \mathcal{L}_P^*(f)(x) = \int_E P(x, dy) f(y), \quad \forall x \in E.$$

Le produit de la mesure  $\mu \in m\mathcal{E}$  et la fonction  $f \in f\mathcal{E}$ , noté par  $\mu f$ , désigne l'intégrale suivante

$$\mu f = \int_E \mu(dx) f(x).$$

Le produit de deux noyaux de transition  $P$  et  $Q$  est le noyau

$$PQ(x, A) = \int P(x, dy) Q(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}.$$

Supposons que l'espace  $m\mathcal{E}$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , qui met en évidence l'espace normé complet et par suite l'espace de Banach  $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$ . De plus, pour chaque noyau de transition  $P$ , nous mettons en correspondance l'espace  $\mathcal{B}$  des opérateurs bornés dont la norme, induite par celle de  $\mathcal{M}$  est définie par

$$\|P\| = \sup\{\|\mu P\|, \|\mu\| \leq 1\}.$$

Notons par  $\mathcal{M}^+ = m\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{M}$  et  $\eta^+ = f\mathcal{E}^+ \cap \eta$  les cônes des mesures non négatives bornées et des fonctions non-négatives bornées respectivement.

On suppose de plus que la norme  $\|\cdot\|$  est compatible avec l'ordre structurel sur  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire:

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|, \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+, \forall i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|, \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2 \quad (20)$$

et

$$|\mu|(E) \leq k \|\mu\|, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}, \quad (21)$$

où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$  et  $k$  une certaine constante positive finie.

Supposons également que l'opérateur linéaire

$P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est borné:

$$\|P\| < \infty. \quad (22)$$

Supposons, en plus, dans certaines situations que la propriété suivante est vérifiée

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \|\mu_1 + \mu_2\|, \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2. \quad (23)$$

La propriété (23) signifie que  $|\mu|$  et  $\mu$  ont la même norme. De plus

$$|\mu(E)| \leq k \|\mu\| \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}.$$

**Remarque:**

Les trois conditions (19), (20) et (21) sont particulièrement satisfaites pour des normes de la forme suivante:

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x) |\mu|(dx),$$

où  $v$  est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive (pas nécessairement finie) sur  $E$ .

Notons que dans l'expression (21),

$$\begin{aligned} |\mu \mathbf{1}| &= |\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq k \|\mu\|, \forall \mu \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow \|\mathbf{1}\| &\leq k < \infty \Rightarrow \mathbf{1} \in f\mathcal{E}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{1}$  est la fonction identiquement égale à l'unité.

Pour  $\mu \in m\mathcal{E}$  et  $f \in f\mathcal{E}$ , on note par  $f \circ \mu$  le noyau de transition défini comme suit

$$f \circ \mu = f(x) \mu(A), \quad x \in E, A \in \mathcal{E}.$$

On note par  $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$  le projecteur stationnaire du noyau  $P$  avec  $\mathbf{1} \in f\mathcal{E}$  est la fonction identiquement égale à l'unité. En d'autres termes, le noyau défini par

$$\Pi(x, dy) = \mathbf{1}(x) \pi(dy), \forall (x, dy) \in E \times \mathcal{E}.$$

$I$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{M}$ .

Munissons l'espace  $\mathcal{M}$  de la norme  $\|\cdot\|_v$  définie par

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x) |\mu|(dx). \quad (24)$$

Les normes induites dans les espaces  $f\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  sont respectivement

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|$$

et

$$\|P\|_v = \sup \left( \frac{\int_{\infty} v(y) |P(x, dy)|}{v(x)}, x \in E. \right).$$

**Stabilité forte d'une chaîne de Markov**

**Définition:**

La chaîne de Markov homogène  $X$  est dite fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si

1.  $\|P\| < \infty$ .
2. Chaque noyau de transition  $Q$  dans un certain voisinage  $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ , admet une mesure invariante unique  $\nu = \nu(Q)$ .
3. Il existe une constante  $C = C(P)$ , telle que  $\|\nu - \pi\| \leq C \|P - Q\|$ .

Voici maintenant un résultat fondamental qui est le critère de stabilité forte.

**Théorème: Critère de stabilité forte** Pour qu'une chaîne de Markov homogène, d'opérateur de transition  $P$  à valeurs dans  $E$  soit fortement  $v$ -stable, il est suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées:

1.  $\|P\|_v < \infty$ .
2.  $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $\exists h \in f\mathcal{E}^+$  telles que  $\pi h > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$ ,  $\alpha h > 0$ .
3.  $T = P - h \circ \alpha$ , où  $T$  est un noyau non négatif,  $\alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $h \in f\mathcal{E}^+$ .
4.  $\exists 0 < \rho < 1$  tel que  $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in E$ .

**Inégalités de stabilité forte**

Des estimations quantitatives de la stabilité telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov en terme des fonctions  $v, h$  et la mesure  $\alpha$  ont été obtenues. La particularité de la méthode de stabilité forte est la possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes.

**Théorème:**(voir **Kartashov, N. V., 1996**) Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées:

1.  $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $\exists h \in f\mathcal{E}^+$  telles que  $\pi h > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$ ,  $\alpha h > 0$ .
2.  $T = P - h \circ \alpha$ , où  $T$  est un noyau non négatif,  $\alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $h \in f\mathcal{E}^+$ .
3.  $\exists 0 < \rho < 1$  tel que  $\|T\| \leq \rho$ .

Soit la norme  $\|\cdot\|$  vérifiant les conditions (19), (21) et (23) alors tout noyau de transition  $Q$  dans le voisinage de  $P$  défini par:

$$\|Q - P\| = \Delta < \Delta_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \sigma \rho} \quad (25)$$

a une unique mesure de probabilité invariante qui vérifie

$$\|\nu - \mu\| \leq \frac{\Delta \|\pi\|}{\Delta_0 - \Delta} \quad (26)$$

et

$$\|\nu - \pi - \pi Q(I - \Pi)(I - T)^{-1}(I - \Pi)\| \leq \frac{\Delta^2 \|\tau\|}{\Delta_0(\Delta_0 - \Delta)}, \quad (27)$$

où  $\tau = \|(I - P - \Pi)^{-1} - \Pi\|$  et  $\sigma = \|\Pi\| \leq k\|\pi\|$ .

### 3.2 Stabilité forte dans les modèles de risque

La première application de la méthode de stabilité forte dans les modèles de risque a été réalisée par l'académicien V. Kalashnikov dans son article "The stability concept for stochastic risk models" ( voir Kalashnikov, V., 2000) où il a présenté deux exemples d'application sur des modèles de risque avec et sans investissement. Par la suite, plusieurs autres chercheurs ont réussi de démontrer la stabilité forte dans différents types de modèles de risque et ils ont présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine. (voir Benouaret, Z. et D. Aissani, 2010)

Un modèle de risque général, représentant la réserve d'une compagnie d'assurance, peut être décrit en fonction des deux processus suivants:

- $S = \{S(t), t \geq 0\}$ : représente la richesse entre les primes et les réclamations.
- $R = \{R(t), t \geq 0\}$  est le processus des intérêts:

Pour une entrée  $a = (S, R)$  donnée, le modèle de risque est alors défini par son processus des réserves  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  tel que

$$X(t) = e^{R(t)} \left( u + \int_0^t e^{-R(x)} dS(x) \right), \quad t \geq 0 \quad (28)$$

où  $u$  est le surplus initial, i.e:  $X(0) = u$ , avec la supposition que l'intégrale dans la formule (28) est bien définie. C'est une supposition qui reste vraie dans le cas où  $S$  et  $R$  sont des processus de Lévy indépendants. L'équation (28) représente donc la forme générale du processus des réserves.

Nous avons  $S(t) = ct - \sum_{i \leq N(t)} Z_i$

où  $c > 0$  est le taux de primes constant,  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  est une séquence qui représente successivement les montants des réclamations indépendantes et identiquement distribuées; de fonction de distribution  $F$  et indépendante de  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations  $\{T_n\}_{n \geq 1}$ , on considère alors la chaîne suivante:

$$X_{T_{n+1}} = e^{(R_{T_{n+1}} - R_{T_n})} (X_{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{(R_{T_n} - R_u)} dS_u) \quad (29)$$

Supposons que les processus  $\{R(t), t \geq 0\}$  et  $\{S(t), t \geq 0\}$  sont indépendants, alors la séquence  $\{X_{T_n}\}_{n \geq 0}$  forme une chaîne de Markov.

La probabilité de ruine exprimée en fonction de la chaîne  $\{X_{T_n}\}_{n \geq 1}$  est donnée par la formule suivante:

$$\Psi(u) = \mathbf{P}(\inf_{n \geq 1} [X_{T_n}] / X_{T_n} < 0, X_0 = u) \quad (30)$$

et par

$$\Psi_n(u) = \mathbf{P}(\inf_{1 \leq k \leq n} [X_{T_k}] / X_{T_k} < 0, X_0 = u) \quad (31)$$

la probabilité de ruine en temps fini.

#### Processus inverse "reversed process"

Le processus inverse associé au modèle de risque considéré dans cette approche est de la forme suivante

$$V_{n+1} = \xi_{n+1}(V_n + \eta_{n+1})_+, \quad V_0 = 0 \quad (32)$$

où les paires  $(\xi_i, \eta_i)$  sont indépendantes et identiquement distribuées, générées par le couple  $(\xi, \eta)$  qui est distribué comme suit:

$$\left( \exp(-R_\theta), Z - c \int_0^\theta \exp(R_\theta - R_t) dt \right) \quad (33)$$

Dans la formule (33), les variables aléatoires  $\theta$ ,  $Z$  et  $\{R_u\}$  sont indépendantes où  $\theta$  est de fonction de distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ , représentant les inter-arrivées des réclamations, et  $Z$  est un générateur des montants des réclamations de fonction de distribution  $F$  et de moyenne supposée finie.

En fonction de cette chaîne, les probabilités de ruine en temps fini et infini prennent les formes suivantes:

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(V_n > u). \quad (34)$$

$$\Psi_n(u) = \mathbf{P}(V_n > u). \quad (35)$$

A partir des formules (34) et (35), nous nous intéressons donc aux distributions suivantes:

$$G_n(u) = \mathbf{P}(V_n \leq u), \quad n \geq 0 \quad (36)$$

et

$$G(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(V_n \leq u). \quad (37)$$

Considérons un modèle de risque classique sans investissement, c'est-à-dire:

$\{R(t), t \geq 0\} \equiv 0$ , qui est un cas particulier du modèle de risque donné par (28).

Notons par  $a = (\lambda, c, F)$  son vecteur des paramètres.

Le processus inverse  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  associé au modèle considéré est de la forme suivante:

$$V_{n+1} = (V_n - c \theta_{n+1} + Z_{n+1})_+, \quad V_0 = 0. \quad (38)$$

Pour une entrée  $a$  donnée, on suppose que la condition suivante est vérifiée:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \mathbf{E} \exp(\epsilon(Z - c \theta)) = \rho < 1. \quad (39)$$

Sous cette hypothèse, les conditions du critère de stabilité forte sont satisfaites pour  $v(u) = e^{\epsilon u}$ ,  $u \in \mathbf{R}^+$  et  $\alpha(\cdot) = \delta_0(\cdot)$ .

Si on note par  $P'$  le noyau de transition d'un autre modèle de risque (modèle perturbé) qui est de paramètre  $a' = (\lambda', c', F')$ , la déviation  $\|P - P'\|_v$  entre les noyaux de transition des deux modèles considérés est estimée comme suit: (voir Enikeeva, F., et al., 2001)

$$\|P - P'\|_v \leq 2 \mathbf{E} e^{\epsilon Z} \left| \ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c} \right| + \|F - F'\|_v. \quad (40)$$

Notons la partie droite de l'inégalité (40) par  $\mu(a, a')$ , alors l'inégalité (26) devient:

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{\mu(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - \mu(a, a'))} \quad (41)$$

qui est une borne supérieure de stabilité au point  $a$ .

Par conséquent, une estimation de la déviation  $\|\Psi - \Psi'\|_v$  de la probabilité de ruine a été obtenue avec un calcul explicite des constantes.

En résumé, le principe de l'application de la méthode de stabilité forte dans les modèles de risque est basé sur la représentation de la probabilité de ruine en fonction de la distribution stationnaire d'un processus dit "processus inverse" noté  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  tel que

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V_n > u). \quad (42)$$

### 3.3 Translation des inégalités de stabilité

Dans les systèmes d'attente, tous les résultats de l'application de la méthode de stabilité forte concernent la distribution stationnaire du nombre de clients. Afin de déterminer une borne de stabilité forte pour la déviation de la distribution stationnaire du temps d'attente, nous utilisons les relations d'interaction présentées précédemment. La figure suivante illustre le concept de la translation.

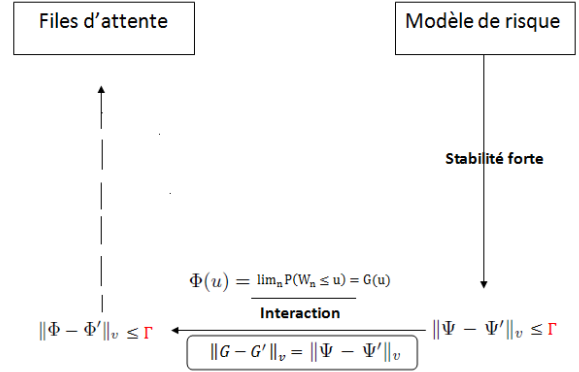


Figure 1: Concept de la translation: modèles de risque vers systèmes d'attente

Nous avons  $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$  est la probabilité de non-ruine. Par conséquent, la déviation, en norme  $v$ , de la probabilité de ruine  $\|\Psi - \Psi'\|_v$  représente également la déviation de la probabilité de non ruine  $\|\Phi - \Phi'\|_v$ . Par ailleurs, de la relation (18), nous avons

$$\Phi(x) = \lim_n P(W_n \leq x) = W(u)$$

où  $W(u)$  est la distribution stationnaire du temps d'attente du système d'attente équivalent.

D'où, la borne de stabilité donnée par (41) représente aussi une estimation de la déviation  $\|W - W'\|_v$  de la distribution stationnaire du temps d'attente.

### 4 ILLUSTRATION NUMÉRIQUE

Dans cette partie, nous présentons un algorithme qui nous permettra de calculer numériquement les conditions et l'erreur d'approximation du modèle perturbé (réel) par le modèle idéal (fortement stable).

La construction des étapes de cette algorithme est basée sur la vérification des conditions du critère de stabilité forte ainsi que la positivité du chargement de sécurité afin d'éviter la ruine certaine. Son implémentation nous permettra donc de générer les valeurs du paramètre de la norme  $\epsilon$ , de calculer la déviation  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$  ainsi que sa borne supérieure notée par  $\Gamma$ .

## Algorithme

### Début

1. **Étape 1** Introduire les paramètres  $\lambda, \mu, c$  du modèle idéal et  $\lambda', \mu', c'$  du modèle perturbé;

2. **Étape 2** Vérifier la positivité des chargements de sécurité relatifs  $\eta$  et  $\eta'$ ,

$$\text{avec } \eta = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad \text{et} \quad \eta' = \frac{c'-\lambda'\mu'}{\lambda'\mu'};$$

si oui, (\* la ruine des modèles n'est par certaine \*) passer à l'Étape 3;  
sinon retourner à l'Étape 1;

3. **Étape 3** Générer une valeur de  $\epsilon$  entre 0 et  $\min\{M_1, M_2\}$  qui vérifie  $0 < \rho(\epsilon) < 1$  (avec  $M_1 = \frac{1}{\mu}, M_2 = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}$ );

4. **Étape 4** Calculer  $\mu(a, a')$  et tester:  $\mu(a, a') < (1 - \rho)^2$   
si oui, (\* on peut déduire l'inégalité de stabilité forte \*) passer à l'Étape 5;  
sinon retourner à l'Étape 3;

5. **Étape 5** Calculer la déviation  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$ , la borne  $\Gamma$ , avec

$$\Gamma = \frac{\mu(a, a')}{(1 - \rho) \left( (1 - \rho)^2 - \mu(a, a') \right)},$$

et afficher les résultats;

**Fin.**

### Implémentation de l'algorithme et interprétation des résultats

En fixant au préalable les valeurs des paramètres du modèle idéal et du modèle perturbé, nous déterminons certaines valeurs du paramètre de la norme  $\epsilon$ , qui doit vérifier la condition  $0 < \rho(\epsilon) < 1$  du critère de stabilité forte et la condition  $\mu(a, a') < (1 - \rho)^2$  liée au domaine de perturbation.

Puisque la distribution des montants de réclamations du modèle idéal est supposée exponentielle de moyenne  $\mu$ , le paramètre  $\rho$ , qui est en fonction de  $\epsilon$ , est donné par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon) &= E(e^{\epsilon(Z_1 - c\theta_1)}) \\ &= \frac{\lambda}{(c\epsilon + \lambda)(1 - \epsilon\mu)}, \end{aligned}$$

car les séquences  $\{Z_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$  sont supposées indépendantes où  $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$  est une séquence de variables aléatoires de distribution exponentielle, qui représente les inter-arrivées des réclamations. On obtient ainsi:

$$\begin{cases} \rho(\epsilon) < 1 & \Rightarrow \epsilon < \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}, \\ \rho(\epsilon) > 0 & \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Pour certaines valeurs significatives de  $\epsilon$ , les résultats sont présentés dans le tableau suivant:

| $\epsilon$    | $\rho < 1$    | $\mu(a, a')$  | $\ \Psi_a - \Psi_{a'}\ _v$ | $\Gamma$      |
|---------------|---------------|---------------|----------------------------|---------------|
| 0.0044        | 0.8551        | 0.0206        | 0.0061                     | 360.6114      |
| 0.0050        | 0.8407        | 0.0209        | 0.0063                     | 29.3974       |
| 0.0057        | 0.8251        | 0.0213        | 0.0065                     | 13.0982       |
| 0.0073        | 0.7939        | 0.0222        | 0.0072                     | 5.3229        |
| 0.0078        | 0.7853        | 0.0225        | 0.0074                     | 4.4509        |
| 0.0082        | 0.7788        | 0.0228        | 0.0076                     | 3.9343        |
| 0.0084        | 0.7757        | 0.0230        | 0.0077                     | 3.7193        |
| 0.0090        | 0.7666        | 0.0233        | 0.0080                     | 3.2010        |
| 0.0140        | 0.7132        | 0.0272        | 0.0112                     | 1.7185        |
| 0.0160        | 0.7008        | 0.0291        | 0.0131                     | 1.6086        |
| <b>0.0176</b> | <b>0.6940</b> | <b>0.0308</b> | <b>0.0149</b>              | <b>1.6045</b> |
| 0.0190        | 0.6902        | 0.0325        | 0.0168                     | 1.6555        |
| 0.031882      | 0.7495        | 0.0627        | 0.0917                     | 20122.9577    |

Tableau. 1 - Tableau comparatif entre  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$  et  $\Gamma$  par rapport à la variation de  $\epsilon$ .

La représentation graphique est donnée en figure 1.7:

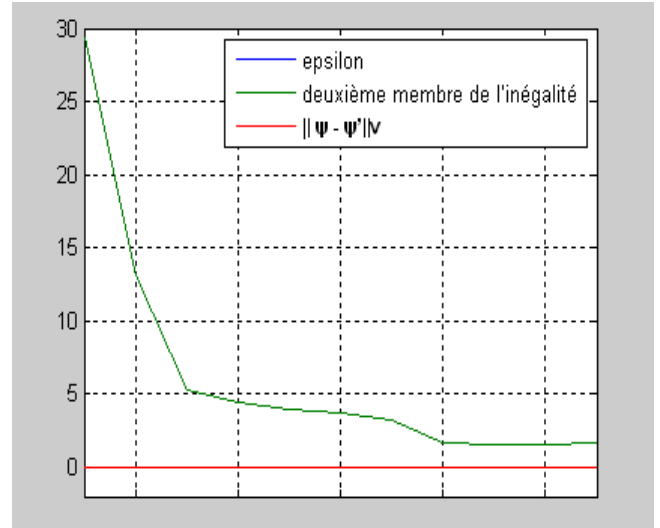


Figure 2: Courbes comparatives entre  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$  et  $\Gamma$  par rapport à la variation de  $\epsilon$ .

D'après le tableau 1, on remarque que:

- les conditions sur le paramètre de la norme  $\epsilon$  sont satisfaites pour  $0.0044 \leq \epsilon < 0.031882$ . Pour  $\epsilon =$



0.031882,  $\Gamma = 20122.9577$  n'est pas une borne de stabilité forte.

- en faisant varier  $\epsilon$ , on constate que l'augmentation de la valeur de  $\epsilon$  induit à une augmentation de la déviation  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$ . Lorsque  $\epsilon$  est proche de ses bornes (inférieure et supérieure), la qualité de l'inégalité de stabilité forte diminue. Autrement dit,  $\Gamma$  devient plus loin de la déviation  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$ . Parmi les résultats présentés dans le tableau 1, la meilleure estimation de  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$  correspondant à  $\epsilon = 0.0176$ .
- le choix de  $\epsilon$  ( le paramètre de la norme) est crucial afin d'obtenir une bonne estimation de la déviation  $\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v$ .

Par conséquent, grâce à la dualité et aux relations d'équivalence développées précédemment, les résultats numériques de la borne de stabilité de la probabilité de ruine obtenus dans le modèle de risque classique représentent ainsi une estimation de la déviation de la distribution stationnaire du temps d'attente  $\|W - W'\|_v$  qui n'est pas évidente à obtenir par l'application directe de la méthode de stabilité forte.

## 5 CONCLUSION

Afin d'éviter la complexité de l'application directe du critère de stabilité forte dans l'analyse de stabilité de la distribution stationnaire du temps d'attente, nous avons utilisé l'interaction et les relations d'équivalence qui existent entre la théorie de la ruine et celle des systèmes d'attente. Par conséquent, nous avons obtenu une inégalité de stabilité de cette caractéristique par la translation de la borne déjà obtenue en modèles de risque vers les systèmes d'attente. De plus, une approche algorithmique a été présentée afin d'illustrer numériquement cette inégalité qui représente une estimation de la déviation de la distribution stationnaire du temps d'attente.

## REFERENCES

- Aissani, D. and N.-V. Kartashov, 1983. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. S.S.R., ser. A*, vol. 11, p. 3-5.
- Aissani, D. et Z. Benouaret, 2010. Modèles de risque et files d'attente: la méthode de stabilité forte. *Journal Afrika Statistika*, vol. 5, p. 210-218.
- Benouaret, Z. and D. Aissani, 2010. Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2010, p. 83-93.
- Enikeeva, F. and V. Kalashnikov and D. Rusaityte, 2001. Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1, p. 18-39.
- Hêche, J.-F., T.-M. Liebling et Werra, D., 2003. Recherche Opérationnelle pour ingénieurs II. *Presses polytechniques et universitaire romandes, CH-1015*.
- Janssen, J., 1982. On the interaction between risk and queueing theories. *Paper presented at the first Tagung fiber Risikotheorie at the Mathematics Research Center, Oberwolfach*.
- Kalashnikov, V., 2000. The Stability Concept for stochastic risk models. *orking Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*.
- Kartashov, N. V., 1996. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht*.
- Rusaityte, D., 2001. Continuity of the ruin probability in a model with borrowing and investments. *Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 172*.
- Rusaityte, D., 2001. Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments. *Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 178*.