11ème Conférence Internationale de Modélisation, Optimisation et SIMulation - MOSIM'16 - 22 au 24 Août 2016 - ÉTS, Montréal, Québec, Canada « L'innovation technologique au service des systèmes : défis et opportunités»

Quelques méthodes d'approximation des probabilités de ruine et application au modèle de Lundberg

L. TLILANE, H. ALLAOUA, Z. BENOUARET et D. AISSANI

Unité de recherche LaMOS
Université de Bejaia, Targa−Ouzamour, 06000 (Algérie)
http://www.lamos.org
lydia.tlilane@dauphine.fr, allaoua@lipn.univ − paris13.fr,
benouaret_z@yahoo.fr, djamil$_a$issani@hotmail.com

RÉSUMÉ : Dans la gestion du risque en assurance, la probabilité de ruine représente une mesure très importante à évaluer. Dans ce travail, nous nous intéréssons à quelques résultats et les différentes méthodes utilisés dans l'estimation des probabilités de ruine où nous présentons plusieurs expressions en temps fini et infini. En particulier, nous détaillons l'application de ces approches dans le cas du modèle de Lundberg.

MOTS-CLÉS : Modèles de risque, Modèle de Lundberg, Probabilités de ruine, Théorie du risque, Approximation de Cramér-Lundberg.

1 INTRODUCTION

Dans ce travail, on va considérer l'évolution en temps de la richesse d'une compagnie d'assurance qui souhaite que son surplus reste positif, mais du fait des aléas elle ne peut pas en générale en être certaine. Afin d'avoir une analyse fine des pertes et des primes reçues, on se place dans le cadre des modèles stochastiques à temps continu et démontrer les résultats de quelques méthodes et outils d'approximation des probabilités de ruine.

En assurance, la théorie du risque a pour objectif l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. On qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, devienne négative à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

Il existe plusieurs mesures du risque mais la probabilité de ruine reste pour l'instant l'une des mesures les plus intéressantes à étudier. En effet, les actuaires accordent une importance particulière au processus de réserve de la compagnie d'assurance et tentent de quantifier la probabilité de tomber dans l'insolvabilité.

L'emploi de modèles stochastiques comporte plusieurs avantages et permet notamment de prédire les probabilités associées à des valeurs non observées d'une part et les probabilités associées à des réclamations futures d'autre part. Ce type de modèles sont appelés modèles de risque. Ils sont utilisés principalement pour décrire le mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. En d'autres termes, ces modèles servent à décrire le mécanisme de l'activité d'assurance.

Le modèle de risque classique fondé par Filip Lundberg (cf. Lundberg, F., (1903)), est connu comme la base du fondement de la théorie du risque. Le modèle de Lundberg, cas particulier du modèle de risque classique, permet d'obtenir des expressions explicites de la probabilité de ruine en raison de la queue de la distribution des montants des réclamations qui est légère.

L'objectif de ce travail est de détailler quelques méthodes d'évaluation des probabilités de ruine à horizon fini et infini dans le cas du modèle de Lundberg (P/P). A travers cet article, nous tenterons d'apporter quelques détails et éléments de réponses aux interrogations posées. Ainsi, notre méthodologie de travail fait appel à une recherche bibliographique sur le thème, c'est-à-dire, la théorie du risque, en particulier, la théorie classique de la ruine et l'application des résultats de cette théorie dans le cas du modèle de Lundberg (P/P).

2 Modèles de risque

Le modèle de risque permet de présenter l'évolution de la réserve d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique. De ce fait, parmi les éléments qui ont généralement un caractère stochastique en assurance, les éléments suivants:

- Les instants de réclamation des sinistres (arrivées des réclamations) désignés par la suite $\{\sigma_n\}_{n\in N}$ où $\sigma_0 = 0$
- Les temps entre deux réclamations successives (inter-arrivées des réclamations) définis par $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \geq 1$. Désignons par T, la variable aléatoire qui génère ces inter-arrivées.
- Le nombre de réclamations jusqu'à l'instant t (processus de comptage des réclamations) noté $N(t)$ où $N(t) = \sup\{n : \sigma_n \leq t\}$.
- La réclamation survenant à l'instant σ_n a une taille Z_n qui représente le montant de cette réclamation, c'est-à-dire, le montant d'indemnisation du sinistre. Soit Z la variable aléatoire qui génère le montant des réclamations des sinistres.
- Le montant cumulé des réclamations ou la charge totale des sinistres à l'instant t donné par $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, avec $R(t) = 0$ si $N(t) = 0$.
- La prime, notée $\Pi(t)$, qui représente le total de primes reçues jusqu'à l'instant t.
- La réserve de la compagnie d'assurance à l'instant t est $X(t)$.

La configuration ci$-$dessus permet une certaine souplesse en ce qui concerne les demandes individuelles, qui signifient une réclamation pour un client individuel (par exemple l'assurance-responsabilité civile) ou une réclamation du fait d'un événement unique comme le cas de l'assurance tempête. Une fois ces éléments définis, nous pouvons construire le modèle de risque reflétant l'activité d'assurance.

2.1 Modèle de risque classique

Le modèle de risque de Cramér-Lundberg ou P/G, qui est désigné aussi sous le nom du modèle de risque classique ou encore Poisson composé, a été introduit en 1903 par l'actuaire Suédois Filip Lundberg (cf. Lundberg, F., (1903)) et est connu comme la base du fondement de la théorie du risque.

La notation P/G, empruntée de la théorie des files d'attentes, fournit l'information au sujet des lois des arrivées et des montants des réclamations des sinistres. La lettre G signifie général et P signifie Poisson (cf. Janssen, J. and R. Manca, (2007)). Il s'ensuit que la suite $\{\sigma_n\}_{n\in N}$ des arrivées des réclamations forme un processus de Poisson ce qui est équivalent à dire que les temps des inter-occurrences $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \geq 1$ sont de distribution exponentielle.

Ce modèle est construit selon les hypothèses suivantes:

- Le processus de comptage $\{N(t),\ \ t \geq 0\}$ du nombre de réclamations est un processus de Poisson d'intensité λ.
- La séquence $\{Z_n\}_{n\in N^*}$ des montants des réclamations est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie μ.
- La prime est proportionnelle au temps, c'est-à-dire, $\Pi(t) = ct$ où $c > 0$ est le taux de prime constant choisi de telle sorte que la société ait de bonnes chances de survie.
- Pour tout $t > 0$ et $n \geq 1$, la variable aléatoire $N(t)$ et le vecteur aléatoire $(Z_1, ..., Z_n)$ sont indépendants.

Le processus de Poisson composé modélise la réserve $\{X(t),\ t \geq 0\}$ avec

$$X(t) = u + ct - R(t), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

où $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ est le montant cumulé des réclamations à l'instant t.

Le processus de risque est donné par

$$\{S(t) = ct - R(t),\ t \geq 0\}.$$

De plus

$$E[ct-R(t)] = ct-E[N(t)]\mu = ct-\lambda t\mu = (c-\lambda\mu)t = \theta t,$$

où θ est le chargement de sécurité positif.

2.2 Cas particulier: Modèle de Lundberg ou P/P

Un cas particulier du modèle de risque classique est le modèle de Lundberg appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire

$$F_Z(y) = 1 - e^{\frac{-1}{\mu}y}, \qquad y \geq 0,$$

où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui génère le montant des réclamations.

3 Théorie classique de la ruine

Nous considérons dans cette section, la théorie classique de la ruine. Autrement dit, nous présentons les principaux résultats de la théorie de la ruine pour le modèle de risque classique.

3.1 Probabilité de ruine: Présentation

Considérons le processus de réserve $\{X(t),\ t \geq 0\}$ d'une compagnie d'assurance où

$$X(t) = u + \Pi(t) - R(t)$$

et définissons la variable aléatoire

$$\tau(u) = \inf_{t \geq 0}\{X(t) < 0/X(0) = u\}.$$

$\tau(u)$ représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, sachant que la réserve initiale est u. Autrement dit, $\tau(u)$ est l'instant de ruine du portefeuille d'assurance.

On appelle probabilité de ruine à horizon fini T, la fonction

$$\begin{aligned} \psi(u,T) &= P[\inf_{0 \leq t \leq T}\{X(t) < 0/X(0) = u\}] \\ &= P[\tau(u) \leq T]. \end{aligned}$$

En temps infini, elle est définie par

$$\begin{aligned} \psi(u,\infty) &= \psi(u) = P[\inf_{t \geq 0}\{X(t) < 0/X(0) = u\}] \\ &= P[\tau(u) < \infty]. \end{aligned}$$

Il est parfois plus commode d'utiliser les probabilités de non ruine en temps fini et en temps infini définies respectivement par

$$\phi(u,T) = 1 - \psi(u,T) \quad \textit{et} \quad \phi(u) = 1 - \psi(u).$$

Une condition nécessaire et suffisante

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu.$$

Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnisations payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante:

Propriété 3.1 *(cf. Asmussen, S., (2000))*

- *Si $\theta > 0$, cela garantit, d'après la loi forte des grands nombres, que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ et que $\psi(u) < 1$. L'activité est dite dans ce cas "rentable".*
- *Si $\theta \leq 0$, alors $X(t)$ tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini et par conséquent $\psi(u)=1$.*

Preuve 3.1 *(Cf. Asmussen, S., (2000)).*

De façon évidente, la compagnie doit s'assurer que $\theta > 0$. Sous cette hypothèse, nous pouvons quantifier la probabilité de ruine, autrement, la ruine sera certaine. Généralement, nous ferons l'hypothèse que l'activité est rentable.

L'évaluation de la probabilité de ruine est très compliquée. Cette dernière dépend fortement de la distribution du montant des réclamations. Si cette distribution correspond au cas typique d'une distribution à queue légère, la probabilité de ruine se révélera être bornée. Cependant, lorsque la distribution du montant des réclamations a une queue lourde, alors une seule grande réclamation peut être responsable de la ruine de la compagnie d'assurance. L'évaluation de la probabilité de ruine à horizon infini par des formules explicites est en général plus simple qu'à horizon fini. Comme nous le verrons dans les prochaines sections, des bornes et des approximations de $\psi(u)$ sont souvent disponibles.

3.2 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini

Nous présentons dans cette section des formules exactes de la probabilité de ruine à horizon infini $\psi(u)$.

3.2.1 Une équation intégro-différentielle

Considérons la probabilité de non ruine définie par $\phi(u) = 1 - \psi(u)$. Le théorème suivant montre que $\phi(u)$ satisfait une équation intégro-différentielle.

Théorème 3.1 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) La fonction de non ruine $\phi(u)$ est continue sur R_+ et admet des dérivées à gauche et à droite $\phi'_-(u)$ et $\phi'_+(u)$ respectivement. De plus,*

$$c\phi'_+(u) = \lambda\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(u-y)dF_Z(y)\right) \tag{2}$$

et

$$c\phi'_-(u) = \lambda\left(\phi(u) - \int_0^{u-} \phi(u-y)dF_Z(y)\right). \tag{3}$$

Preuve 3.2 *Considérons $\{X(t),\, t \geq 0\}$ à l'instant σ_1. Pour $h > 0$, nous avons*

$$\phi(u) = E[\phi(X(\sigma_1 \wedge h))]$$

L'idée est de distinguer les cas $\sigma_1 \leq h$ (dans ce cas le processus repart après un temps aléatoire σ_1 de la position aléatoire $u+c\sigma_1-Z_1$) et $\sigma_1 > h$ (dans ce cas, le processus repart après un temps h de la position $u+ch$). La perte de mémoire de la loi exponentielle nous garantit la perte de mémoire du processus de Poisson $\{N(t),\ t \geq 0\}$, et donc du processus $\{X(t),\ t \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \phi(u+ch)P[\sigma_1 > h] \\
&+ \int_0^h f_{\sigma_1}(t) \int_0^\infty \phi(u+ct-y)dF_{Z_1}(y)dt \\
&= \phi(u+ch)e^{-\lambda h} \\
&+ \int_0^h \lambda e^{-\lambda t}dt \int_0^\infty \phi(u+ct-y)dF_{Z_1}(y)dt.
\end{aligned}$$

En inversant les signes, en rajoutant $\phi(u+ch)$ à droite et à gauche, et en divisant par h, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(u+ch)-\phi(u)}{h} &= \phi(u+ch)\left(\frac{1-e^{-\lambda h}}{h}\right) \\
&- \frac{1}{h}\int_0^h \lambda e^{-\lambda t}dt \int_0^\infty \phi(u+ct-y)dF_{Z_1}(y)dt.
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $h \to 0$, en utilisant la continuité à droite de ϕ et le fait que

$$\frac{1}{h}\int_0^h g(t)dt \to g(0)$$

quand $h \to 0$ pour toute fonction g continue à droite, on obtient

$$c\phi'_+(u) = \lambda\left(\phi(u) - \int_0^\infty \phi(u-y)dF_Z(y)\right),$$

ce qui fournit le résultat demandé en observant que $\phi(x) = 0$ pour $x < 0$.
On obtient de même pour tout $u \geq 0$,

$$c\phi'_-(u) = \lambda\left(\phi(u) - \int_0^{u-} \phi(u-y)dF_Z(y)\right).$$

Remarques:

- *Dans le cas où F_Z est continue, les dérivées à droite et à gauche sont les mêmes pour tout u et correspondent alors à $\phi'(u)$.*
- *Notons qu'en général (2) ne peut être résolue analytiquement. Cependant, il est possible de calculer la probabilité de non ruine $\phi(u)$ à partir de (2) numériquement.*

Application au modèle de Lundberg (P/P)

Lorsque les montants des réclamations sont exponentiels de paramètre $\delta = 1/\mu$, l'équation intégro-différentielle (2) peut être résolue analytiquement. La fonction de non ruine $\phi(u)$ est différentiable et satisfait

$$\begin{aligned}
c\phi'(u) &= \lambda\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(u-y)dF_Z(y)\right) \\
&= \lambda\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(u-y)\delta e^{-\delta y}dy\right).
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $x = u - y$, on obtient

$$\begin{aligned}
c\phi'(u) &= \lambda\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta(x-u)}dx\right) \\
&= \lambda\left(\phi(u) - \int_0^u \phi(x)\delta e^{-\delta u}e^{\delta x}dx\right)
\end{aligned}$$

$$c\phi'(u) = \lambda\left(\phi(u) - e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx\right). \tag{4}$$

Cette dernière équation implique que $\phi'(u)$ est différentiable et que

$$\begin{aligned}
c\phi''(u) &= \lambda\left(\phi'(u) + \delta e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx\right) \\
&- \lambda\left(e^{-\delta u}\frac{d}{du}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx\right) \\
&= \lambda\left(\phi'(u) + \delta e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx\right) \\
&- \lambda\left(e^{-\delta u}[\phi(u)\delta e^{\delta u} - 0.\delta\phi(0)]\right)
\end{aligned}$$

$$c\phi''(u) = \lambda\left(\phi'(u) + \delta e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx - \delta\phi(u)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda\phi'(u) - \lambda\delta\phi(u) + \lambda\delta e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx \\
&= \lambda\phi'(u) - \lambda\delta\left(\phi(u) - e^{-\delta u}\int_0^u \phi(x)\delta e^{\delta x}dx\right) \\
&= \lambda\phi'(u) - \delta c\phi'(u) \qquad (cf.\ quation\ (4)) \\
&= (\lambda - \delta c)\phi'(u).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\phi''(u)}{\phi'(u)} = \frac{\lambda - \delta c}{c} = \lambda/c - \delta.$$

En intégrant deux fois, nous obtenons la solution générale de cette équation différentielle qui a la forme suivante:

$$\phi(u) = c_1 - c_2 e^{-(\delta - \lambda/c)u}, \tag{5}$$

où $c_1, c_2 \in R$. Il s'ensuit que $c_1 = 1$ en vertu du théorème 3.2.

En substituant (5) dans (4), on obtient

$$\begin{aligned}
c_2(\delta c - \lambda)e^{-(\delta-\lambda/c)u} &= \lambda\left(1 - c_2 e^{-(\delta-\lambda/c)u} - (1 - e^{-\delta u})\right) \\
&+ \lambda\left(c_2 e^{-\delta u}\frac{c\delta}{\lambda}(e^{\lambda u/c} - 1)\right)
\end{aligned}$$

pour lequel $c_2 = \lambda/(c\delta)$. Ainsi,

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c\delta}e^{-(\delta-\lambda/c)u}.$$

Finalement,

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta}e^{-(\delta-\lambda/c)u}. \tag{6}$$

3.2.2 Une équation intégrale

L'équation (2) n'est pas facile à résoudre parcequ'elle implique la dérivée et l'intégrale de $\phi(u)$. Il serait plus commode de se défaire de la dérivée. En intégrant (2), nous arrivons au résultat du théorème 3.3.

Théorème 3.2 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999))*

$$\lim_{u\to+\infty}\phi(u) = 1.$$

Théorème 3.3 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) Pour tout $u \geq 0$,*

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-y)(1 - F_Z(y))dy. \tag{7}$$

De plus

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{8}$$

Preuve 3.3 *D'après (3), pour $u > 0$,*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\phi(u) - (\phi * f_Z)(u)\right).$$

En prenant la transformée de Laplace, on obtient pour $s > 0$

$$s\widehat{L}_\phi(s) - \phi(0) = \frac{\lambda}{c}\widehat{L}_\phi(s) - \frac{\lambda}{c}\widehat{L}_\phi(s).s\widehat{L}_{F_Z}(s). \tag{9}$$

En effet, rappelons que

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_{\phi'}(s) &= \int_0^\infty \phi'(u).e^{-su}du = \left[\phi(u).e^{-su}\right]_0^{+\infty} \\
&+ \int_0^\infty \phi(u).se^{-su}du = -\phi(0) + s\widehat{L}_\phi(s),
\end{aligned}$$

en utilisant une intégration par parties. De la même manière,

$$\widehat{L}_{\phi * f_Z}(s) = \widehat{L}_\phi.\widehat{L}_{f_Z}(s),$$

et comme $F_Z(0) = 0$,

$$\widehat{L}_{f_Z}(s) = \widehat{L}_{F_Z'}(s) = -F_Z(0) + s\widehat{L}_{F_Z}(s) = s\widehat{L}_{F_Z}(s).$$

En divisant par s l'équation (9), on obtient

$$\widehat{L}_\phi(s) = \frac{\phi(0)}{s} + \frac{\lambda}{c}\left(\widehat{L}_\phi(s)\left(\frac{1}{s} - \widehat{L}_{F_Z}(s)\right)\right).$$

Or, pour toute constante $C > 0$,

$$\widehat{L}_C(s) = \frac{C}{s},$$

donc

$$\frac{1}{s} - \widehat{L}_{F_Z}(s) = \widehat{L}_{1-F_Z}(s)$$

et on obtient pour tout $s > 0$

$$\widehat{L}_\phi(s) = \widehat{L}_{\phi(0) + \frac{\lambda}{c\phi*(1-F_Z)}}(s),$$

ce qui donne le résultat recherché d'après l'injectivité de la transformée de Laplace.

En passant à la limite dans l'équation (7) et en vertu du théorème 3.2, on obtient

$$\phi(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Remarques:

- *L'équation (7) est appelée équation de renouvellement défective (defective renewal equation).*
- *La formule (8) constitue un résultat très robuste qui ne dépend de F_Z que par la moyenne μ de Z.*
- *Pour tout $u \geq 0$, remplaçons $\phi(u)$ par $(1-\psi(u))$ dans l'equation (7), on obtient alors l'équation intégrale de la probabilité de ruine de la forme*

$$\begin{aligned} c\psi(u) &= \lambda\left(\int_u^\infty (1-F_Z(y))dy\right) \\ &+ \lambda\left(\int_0^u \psi(u-y)(1-F_Z(y))dy\right). \end{aligned} \quad (10)$$

- *Dans le cas du modèle de Lundberg, on obtient le même résultat que (6) en résolvant l'équation intégrale (7) car cette dernière est obtenue en développant l'équation intégro-différentielle (2).*

3.2.3 Formule de Pollaczek-Khinchin

Bien que l'équation intégrale (10) est plus simple que l'équation intégro-differentielle (2), il est généralement difficile de la résoudre. Cependant, (10) nous mène à une formule de $\psi(u)$ de la forme d'une série de convolution infinie. Nous avons besoin d'intégrer les distributions F_Z^s de F_Z tel que F_Z^s est la queue de la distribution intégrée de Z définie par

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-F_Z(y))\,dy, \;\; x \geq 0.$$

Théorème 3.4 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) Pour tout $u \geq 0$,*

$$\psi(u) = \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u) \quad (11)$$

où $\overline{(F_Z^s)^{*n}} = 1-(F_Z^s)^{*n}$ et $(F_Z^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de (F_Z^s).

Preuve 3.4 *En prenant la tranformée de Laplace de l'équation (10), on obtient*

$$\widehat{L}_\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c}\widehat{L}_{\overline{F_Z^s}}(s) + \frac{\lambda\mu}{c}\widehat{L}_\psi(s)\widehat{L}_{\overline{F_Z^s}}(s)$$

D'où,

$$\widehat{L}_\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c}\widehat{L}_{\overline{F_Z^s}}(s)\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\widehat{L}_{\overline{F_Z^s}}(s)\right)^{-1}, \quad (12)$$

c'est-à-dire, $\widehat{L}_\psi(s)$ est la transformée de Laplace de la queue de distribution d'une loi géometrique composée [1] *de caractéristiques $(\frac{\lambda\mu}{c}, F_Z^s)$. En faisant correspondre les transformées de Laplace de (12) par leurs fonctions respectives, on obtient la formule (11).*

La formule (11) est appelée formule de Pollaczek-Khinchin ou encore formule de Beehan. La représentation en série infinie donnée dans (11) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine $\psi(u)$, comme l'algorithme de Panjer (cf. Panjer, H. H., (1981)). Une autre méthode pour le calcul numérique de $\psi(u)$ est basée sur l'inversion numérique de la transformée de Laplace (cf. Schmidt, V. et al. (1999)). Plus loin, les sections 3.4.1 et 3.4.2 traitent des bornes et des approximations de $\psi(u)$ dérivées de (11).

Application au modèle de Lundberg (P/P)

En utilisant la formule de Pollaczek-Khinchin, nous allons déduire la formule exacte de $\psi(u)$ donnée dans (6) pour le modèle de risque de Lundberg (P/P).

$$\psi(u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\overline{(F_Z^s)^{*n}}(u),$$

où $\rho = \lambda/(\delta c)$. Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre δ, nous avons

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1-e^{-\delta u} & , \; u \geq 0; \\ 0 & , \; u < 0. \end{cases}$$

Calculons $F_Z^s(u) = \delta\int_0^u (1-F_Z(y))\,dy, \;\; x \geq 0.$

$$\begin{aligned} F_Z^s(u) &= \delta\int_0^u e^{-\delta y}dy \\ &= \delta\left(\frac{-1}{\delta}\right)\left[e^{-\delta y}\right]_0^u \\ &= 1-e^{-\delta u}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_Z^s(u) = F_Z(u), \qquad u \in R.$$

$(F_Z^s)^{*n}$ représente la $n^{\text{ème}}$ convolution de F_Z^s. Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires Z_i, $i = \overline{1,n}$, de distribution commune $Exp(\delta)$ et que

[1] La distrubtion F_Y d'une loi géometrique composée de caractéristiques (p, F_X) où $p < 1$ est donnée par

$$F_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k F_X^{*k}(x).$$

$F_Z^s = F_Z$, alors $(F_Z^s)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme des n variables aléatoires Z_i, $i = 1, ..., n$. Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer $(F_Z^s)^{*n}$.

$$\widehat{L}_{(F_Z)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{(F_Z)}(x)]^n,$$

ou encore

$$\widehat{L}_{(f_Z)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{(f_Z)}(x)]^n,$$

où f_Z est la densité de probabilité des montants des réclamations Z_i, $i = 1, ..., n$. Ainsi,

$$\widehat{L}_{(f_Z)}(x) = \int_0^\infty f_Z(t)e^{-xt}dt = \int_0^\infty \delta e^{-(\delta+x)t}dt = \frac{\delta}{\delta + x}.$$

D'où,

$$\widehat{L}_{(f_Z)^{*n}}(x) = \left[\frac{\delta}{\delta + x}\right]^n.$$

En se référant aux tables des transformées de Laplace (cf. Schiff, J. L., (1999)), nous trouvons que

$$(f_Z)^{*n}(x) = \frac{\delta(\delta x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\delta x}, \qquad x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'$Erlang(\delta, n)$ dont la fonction de répartition est donnée par

$$(F_Z)^{*n}(x) = (F_Z^s)^{*n}(x) = \frac{\Gamma(n, \delta x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta x}\frac{(\delta x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielle de même paramètre δ est une loi d'$Erlang(\delta, n)$. Alors,

$$\overline{(F_Z^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta x}\frac{(\delta x)^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\delta u}\frac{(\delta u)^k}{k!} \\
&= (1-\rho)e^{-\delta u}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta u)^k}{k!} \\
&= (1-\rho)e^{-\delta u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta u)^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}\rho^n \\
&= (1-\rho)e^{-\delta u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta u)^k}{k!}\frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\
&= \rho e^{-\delta u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho\delta u)^k}{k!} = \rho e^{-\delta u}e^{\rho\delta u} \\
&= \rho e^{-(\delta-\lambda/c)u},
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule (6).

3.3 Calcul de la probabilité de ruine à horizon fini

Contrairement au cas infini, il n'y a pas de formule générale pour la probabilité de ruine à horizon fini comme l'équation (11). Dans la littérature, nous ne trouvons qu'une équation intégro-différentielle qui satisfait la probabilité de non-ruine $\phi(u, T)$, (cf. Panjer, H. H. and G. E. Willmot, (1992)). Un résultat explicite est connu uniquement pour des réclamations exponentielles (modèle de Lundberg ou P/P), et même dans ce cas, une intégration numérique est nécessaire (cf. Asmussen, S., (2000)).

Le théorème suivant propose une alternative de la probabilité de ruine à horizon fini $\psi(u, T)$ pour des montants réclamations exponentiels.

Théorème 3.5 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) Supposons que $F_Z(x) = 1 - e^{-\delta x}$ pour tout $x \geq 0$. Alors*

$$\begin{aligned}
\psi(u, T) &= \frac{1}{r}e^{-(r-1)r^{-1}\delta u} \\
&- e^{-\delta u-(1+r)T}.\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(\delta u, \lambda T, y)dy, \qquad (13)
\end{aligned}$$

où $r = \delta c/\lambda$ et

$$g(w, s, y) = 2\sqrt{r}\frac{e^{(2\sqrt{r}s + w/\sqrt{r})\cos y}}{1 + r - 2\sqrt{r}\cos y}(\sin y \sin(y + \frac{w}{\sqrt{r}}\sin y)).$$

Preuve 3.5 *(Cf. Schmidt, V. et al. (1999)).*

3.4 Bornes et approximations de la probabilité de ruine

En général, il est difficile de trouver une expression explicite de $\psi(u)$. Par conséquent, des approximations de la probabilité de ruine sont requises. Nous verrons dans cette section différentes bornes et approximations de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

3.4.1 Bornes de Lundberg

L'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine à horizon infini $\psi(u)$ est bornée par une fonction qui décroît de manière exponentielle en fonction du capital initial u lorsque le coefficient d'ajustement γ existe, c'est-à-dire, $\gamma > 0$ est l'unique solution positive de

$$\Delta(s) = \lambda(\hat{m}_Z(s) - 1) - cs = 0 \qquad (14)$$

où $\hat{m}_Z(s)$ est la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Z qui génère les montants des

réclamations.
Une application de l'équation intégrale (10) conduit au résultat suivant:

Théorème 3.6 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) Soit* $x_0 = \sup\{x : F_Z(x) < 1\}$.
Supposons que le coefficient d'ajustement $\gamma > 0$ *existe. Pour tout* $u \geq 0$

$$a_- e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq a_+ e^{-\gamma u} \tag{15}$$

où

$$a_- = \inf_{x\in[0,x_0)} \frac{e^{\gamma x}\int_x^{\infty}(1-F_Z(y))dy}{\int_x^{\infty} e^{\gamma y}(1-F_Z(y))dy}$$

et

$$a_+ = \sup_{x\in[0,x_0)} \frac{e^{\gamma x}\int_x^{\infty}(1-F_Z(y))dy}{\int_x^{\infty} e^{\gamma y}(1-F_Z(y))dy}.$$

Preuve 3.6 *(Cf. Schmidt, V. et al. (1999)).*

Le résultat du théorème 3.6 est connu dans la théorie de la ruine comme les bornes de Lundberg de la fonction de ruine $\psi(u)$. En outre, pour tout $u \geq 0$ (cf. Schmidt, V. et al. (1999))

$$\psi(u) < a_+ e^{-\gamma u}, \quad si \quad a_+ > \psi(0),$$

$$\psi(u) > a_- e^{-\gamma u}, \quad si \quad a_- < \psi(0).$$

Application au modèle de Lundberg (P/P)

Lorsque Z est de distribution exponentielle de paramètre δ, la fonction génératrice des moments de Z est

$$\hat{m}_Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)e^{st}dt = \int_0^{+\infty} \delta e^{-\delta t}e^{st}dt$$

$$\hat{m}_Z(s) = \delta \int_0^{+\infty} e^{-(\delta - s)t}dt = \frac{\delta}{\delta - s}.$$

Ainsi, l'équation (14) prend la forme suivante:

$$\lambda(\frac{\delta}{\delta - s} - 1) - cs = 0$$

qui admet comme solution positive

$$\gamma = s = \delta - \frac{\lambda}{c}.$$

Il s'agit maintenant de développer les bornes de Lundberg du théorème 3.6 pour le modèle de Lundberg.

$$\begin{aligned} x_0 &= \sup_{x\geq 0}\{F_Z(x) < 1\} = \sup_{x\geq 0}\{1 - e^{-\delta x} < 1\} \\ &= \sup_{x\geq 0}\{e^{-\delta x} > 0\} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_- &= \inf_{x\in[0,x_0)} \frac{e^{\gamma x}\int_x^{\infty}(1-F_Z(y))dy}{\int_x^{\infty} e^{\gamma y}(1-F_Z(y))dy} \\ &= \frac{e^{\gamma 0}\int_0^{\infty}(1-F_Z(y))dy}{\int_0^{\infty} e^{\gamma y}(1-F_Z(y))dy} = \frac{\int_0^{\infty}(1-F_Z(y))dy}{\int_0^{\infty} e^{\gamma y}(1-F_Z(y))dy} \\ &= \frac{\lambda}{c\delta}. \end{aligned}$$

Nous trouvons le même résultat pour a_+. Ainsi,

$$\frac{\lambda}{c\delta}e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq \frac{\lambda}{c\delta}e^{-\gamma u} \ \Leftrightarrow \ \psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta}e^{-(\delta - \lambda/c)u},$$

ce qui correspond à la formule (6).

3.4.2 Approximation de Cramér-Lundberg

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au comportement asymptotique de $\psi(u)e^{\gamma u}$. La question est de savoir si $\psi(u)e^{\gamma u}$ converge vers une limite ou oscille entre deux bornes lorsque $u \to \infty$. Nous allons voir que la limite $\lim_{u\to\infty} \psi(u)e^{\gamma u}$ existe.

Théorème 3.7 *(cf. Schmidt, V. et al. (1999)) Supposons que le coefficient d'ajustement* $\gamma > 0$ *existe. Si* $\hat{m}'_Z(\gamma) < \infty$, *alors*

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u)e^{\gamma u} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\hat{m}'_Z(\gamma) - c},$$

sinon

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u)e^{\gamma u} = 0.$$

Preuve 3.7 *(Cf. Schmidt, V. et al. (1999)).*

Le résultat asymptotique obtenu dans le théorème 3.7 pour la probabilité de ruine $\psi(u)$ donne lieu à l'appelation d'approximation de Cramér-Lundberg

$$\psi_{app}(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\hat{m}'_Z(\gamma) - c}e^{-\gamma u}. \tag{16}$$

Application au modèle de Lundberg (P/P)

Il s'agit d'appliquer l'expression (16) au modèle de Lundberg.

$$\hat{m}'_Z(s) = \frac{\delta}{(\delta - s)^2} \Rightarrow \hat{m}'_Z(\gamma) = \frac{c^2\delta}{\lambda^2}.$$

Ce dernier résultat donne lieu à l'inégalité de Cramer-Lundberg pour le modèle de Lundberg:

$$\psi_{app}(u) = \frac{c - \lambda/\delta}{c^2\delta/\lambda - c} e^{-(\delta-\lambda/c)u} = \frac{c - \lambda/\delta}{c\delta/\lambda(c - \lambda/\delta)} e^{-(\delta-\lambda/c)u}.$$

Ainsi,

$$\psi_{app}(u) = \frac{\lambda}{c\delta} e^{-(\delta-\lambda/c)u},$$

qui est la même que la formule (6).

Finalement, les approximations de $\psi(u)$ correspondent à l'expression exacte de $\psi(u)$ donnée dans la formule (6).

3.4.3 Approximation de Segerdahl

Le résultat suivant, dû à Segerdahl (cf. Segerdahl, C. O., (1955)), est une version de l'approximation de Cramér-Lundberg qui est fonction du temps (probabilité de ruine à horizon fini). Sous l'hypothèse que le coefficient d'ajustement $\gamma > 0$ existe et $c = 1$, nous avons

$$\psi_{app}(u, T) = C\ e^{-\gamma u} \Phi\left(\frac{T - u m_L}{\omega_L \sqrt{u}}\right), \tag{17}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
$C = \theta\mu/(\hat{m}'_Z(\gamma) - \mu(1+\theta))$, $m_L = 1/(\lambda \hat{m}'_Z(\gamma) - 1)$ et $\omega_L^2 = \lambda \hat{m}''_Z(\gamma) m_L^3$.

4 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de la ruine: des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

La recherche d'approximations pour la probabilité de ruine dans les modèles de risque a été l'un des points principaux en mathématiques de l'assurance.

D'autre part, les méthodes numériques, comme les méthodes récursives ou inversion numérique des transformées de Fourier sont de plus en plus importantes et produisent d'excellents résultats pour le cas d'un intervalle de valeurs finies. Néanmoins, les bornes et les techniques asymptotiques, comme l'étude du comportement de la queue de la distribution du montant des réclamations sont toujours d'intérêt.

Le développement des résultats de la théorie classique de la ruine au modèle de Lundberg nous ont permis d'obtenir l'expression exacte de la probabilité de ruine à temps infini. Quant à la probabilité de ruine à temps fini, il existe des résultats théoriques pour ce modèle particulier. Cependant, l'application numérique demeure compliquée en raison des expressions complexes de cette probabilité. Il est alors intéressant d'utiliser des méthodes numériques ou des techniques de simulation.

REFERENCES

Lundberg, F., 1903. Approximerad framställning av sannolikehetsfunktionen, aterförsäkering av kollektivrisker. *Almqvist and Wiksell, Uppsala*

Janssen, J. and R. Manca, 2007. Semi-Markov risk models for finance, insurance and reliability.*Springer.*

Asmussen, S., 2000. Ruin probabilities. *World Scientific.*

Schmidt, V., T. Rolski, J. Teugels and H. Schmidli, 19991. Stochastic Processes for Insurance and Finance. *Wiley.*

Panjer, H. H., 1981. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin*, vol. 12, p. 22-26.

Schiff, J. L., 1999. The Laplace transform: Theory and applications. *Springer-Verlag.*

Panjer, H. H. and G. E. Willmot, 1992. Insurance Risk Models. *Society of Actuaries. Schaumburg, IL.*

Segerdahl, C. O., 1955. When Does Ruin Occur in the Collective Theory of Risk?.*Skand. Aktuarietidskr*, vol. 38, p. 22-36.