

MÉTHODE DU NOYAU ET APPROCHE DE STABILITÉ FORTE DANS L'APPROXIMATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

A. TOUAZI, Z. BENOURET, D. AISSANI, S. ADJABI

Unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algerie

touazi_atik@hotmail.fr

<http://www.lamos.org>

RÉSUMÉ : Dans ce travail, Nous nous intéressons à l'application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des probabilités de ruine dans le modèle de risque Sparre Adersen (loi des inter-sinistres et des montants de réclamation sont générale). En particulier, nous présentons quelques noyaux associés asymétriques et continus pour estimer non paramétriquement la fonction de densité des inter-sinistres. L'approche simulation sera utilisé afin d'évaluer numériquement la borne de stabilité forte des probabilités de ruine lors d'approximation du modèle de risque Cramér-Lundberg (loi exponentielle des inter-sinistres et loi générale du montant de réclamation) par le modèle de risque Sparre Andersen.

MOTS-CLÉS : modèle de risque, stabilité forte, probabilité de ruine, estimation non paramétrique, approximation.

1 INTRODUCTION

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom de la méthode des opérateurs, élaborée par (Aissani et Kartashov, 1983) permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et quantitative de certains systèmes complexes. Elle permet d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. En utilisant cette méthode (Kalashnikov, 2000) a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine. Par la suite, plusieurs travaux ont été réalisés sur différents modèles : le modèle de risque avec investissement (Rusaityte, 2001); les modèles de risque semi-markovien sans investissement (Enikeeva et al, 2001) et le modèle de risque classique à deux dimensions (Benouaret et Aissani, 2010).

Le problème de stabilité, en théorie de risque, concerne le domaine dans lequel le modèle de risque idéal peut être appliqué comme une bonne approximation du modèle de risque réel considéré. Un modèle de risque est dit stable, l'orsqu' une petite perturbation dans ces paramètres entraîne une petite perturbation dans ces caractéristiques. Ainsi, l'écart entre les probabilités de ruine corespondantes de deux modèles de risque stables s'obtient en fonction de l'écart entre leurs paramètres (borne de stabilité).

Depuis les traveaux de (Rosenblatt, 1956) et (Parzen, 1962), la méthode du noyau a roncontré beaucoup de succès auprès des spécialistes de l'estimation non

paramétrique de la fonction de densité. Les noyaux symétriques (dit aussi classiques) sont employés pour estimer des fonctions de densité à supports non bornés. Cependant, l'orsque on veut estimer des densités à support borné au moins d'un coté, l'estimateur à noyau classique devient non consistant, à cause du problème des effets du bord dû à l'utilisation d'un noyau qui assigne un poids en dehors du support. Une simple technique pour corriger les effets de bord des fonctions densité à support $[0, +\infty[$ est l'image miroir, ajustement considéré par (Schuster, 1985) et utilisé par (Baraiche and Aissani, 2008) et (Baraiche and Aissani, 2010). Une autre solution pour remédier à cette difficulté est de remplacer le noyau symétrique par un noyau asymétrique, qui n'assigne pas un poids en dehors du support de la densité que l'on veut estimer.

La notion d'un noyau associé $K_{x,h}$ de cible x et du paramètre de lissage h a été introduite par (Kokonendji et al, 2007) et (Senga Kiessé, 2008) dans le cas discret, et étendue récemment par (Konkonendji and Libengué, 2011) et (Libengué, 2013) pour le cas continu. Les noyaux associés continus englobent les noyaux continus symétriques et asymétriques.

L'objectif de ce travail est de prouver l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude d'un modèle de risque à une dimension l'orsque la loi des inter-sinistres est générale et inconnue. Dans ce cas, on doit faire appel d'abord à la méthode du noyau pour

estimer la fonction densité de la distribution considérée. Par la suite, en utilisant l'approche simulation, nous évaluons numériquement la borne de stabilité forte (erreur d'approximation) entre les probabilités de ruine des deux modèles de risque considéré.

2 APPROXIMATION DU MODÈLE SPARRE ANDERSEN PAR LE MODÈLE CRAMÉR-LUNDBERG

2.1 Description des modèles

2.1.1 Modèle Cramér-Lundberg

Le modèle de risque Cramér-Lundberg peut être décrit par son vecteur paramètre $a = (c, E_\lambda, F_Z)$ et son processus de risque $R = \{R_n\}_{n \geq 0}$ qui est donné par la récurrence suivante:

$$R_{n+1} = R_n + c\theta_n - Z_n, \quad R_0 = u, \quad (1)$$

Où $u \geq 0$ est la réserve initiale, $c > 0$ est le taux de prime constant. $\{\theta_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées (i.i.d) où θ_n est la durée de temps entre la $(n+1)^{ème}$ et la $n^{ème}$ réclamation, de fonction de distribution exponentiel E_λ de paramètre λ .

$\{Z_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de variable aléatoire i.i.d. où Z_n est le montant du $n^{ème}$ sinistre, de fonction de distribution F_Z et de moyenne μ finie.

Le processus inverse $\{V_n\}_{n \geq 0}$ associé au modèle considéré est de la forme suivante:

$$V_{n+1} = (V_n - c\theta_n + Z_n)_+, \quad V_0 = 0, \quad (2)$$

On peut retrouver l'aspect général pour construire le processus $\{V_n\}_{n \geq 0}$ dans (Asmussen and Albrecher, 2010).

Suivant la forme recursive de la chaîne $\{V_n\}_{n \geq 0}$ donnée par l'équation (2), on a V_{n+1} qui ne dépend que de V_n , θ_n et Z_n . D'où, $\{V_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu. En fonction de la chaîne $\{V_n\}_{n \geq 0}$, la probabilité de ruine $\Psi(u)$ s'écrit comme suit:

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V_n > u). \quad (3)$$

2.1.2 Modèle Sparre Andersen

Le modèle Sparre Andersen peut être également décrit par le processus de risque $R' = \{R'_n\}_{n \geq 0}$ donné par la récurrence suivante:

$$R'_{n+1} = R'_n + c\theta'_n - Z_n, \quad R'_0 = u, \quad (4)$$

Où $\{\theta'_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de variable aléatoire i.i.d de même fonction de distribution $F_{\theta'}$.

Ce modèle est gouverné par le vecteur paramètre $a' = (c, F_{\theta'}, F_Z)$.

Nous supposons dans ce travail que le taux de prime c , la loi des montants de réclamation F_Z et la réserve initiale u sont les mêmes dans les deux modèles.

Son processus inverse $\{V'_n\}_{n \geq 0}$ associé est de la forme suivante:

$$V'_{n+1} = (V'_n - c\theta'_n + Z_n)_+, \quad V'_0 = 0, \quad (5)$$

Donc sa probabilité de ruine $\Psi'(u)$ s'écrit:

$$\Psi'(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V'_n > u). \quad (6)$$

2.2 v-Stabilité forte

Dans cette partie, nous présentons l'aspect quantitatif de la méthode de stabilité dans l'estimation de l'erreur d'approximation (borne de stabilité forte) du modèle de risque(1) et le modèle de risque (4).

2.2.1 Borne de stabilité forte

Pour une entrée a donnée, on suppose que la condition suivante est vérifiée:

$$\exists \epsilon \text{ tel que } E e^{\epsilon(Z - c\theta)} = \rho(\epsilon) < 1. \quad (7)$$

Sous cette hypothèse et pour $v(u) = e^{\epsilon u}$, la déviation entre les noyaux de transition, obtenue par (Enikeeva et al, 2001) est donnée par la formule suivante:

$$\|P - P'\|_v \leq E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - F_Z\|_v. \quad (8)$$

Sous la condition suivante qui représente le domaine de perturbation des paramètres:

$$u(a, a') \leq (1 - \rho)^2, \quad (9)$$

où

$$u(a, a') = E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - F_{\theta'}\|_v. \quad (10)$$

nous avons l'inégalité de stabilité suivante:

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{u(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - u(a, a'))} = \Gamma \quad (11)$$

2.2.2 Cas particulier

Lorsque la loi des montants de réclamation dans le modèle Cramér-Lundberg défini par le processus (1) est exponentiel de paramètre $\frac{1}{\mu}$, alors:

$$\rho(\epsilon) = \frac{\lambda}{(1 - \epsilon\mu)(\lambda + \epsilon c)} \quad (12)$$

et

$$u(a, a') = \frac{1}{1 - \epsilon\mu} \int e^{\epsilon x} |f_{\frac{\lambda}{c}} - f_{c\theta}|(x) dx \quad (13)$$

3 MÉTHODE DU NOYAU POUR L'ESTIMATION DE LA DENSITÉ DES INTER-SINISTRES

Soit X_1, \dots, X_n un n-échantillon issu d'une variable aléatoire X de la fonction de densité inconnue f sur l'ensemble $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}$ borné au moins d'un côté. Les estimateurs à noyau associé, asymétrique et continu sont de la forme:

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i). \quad (14)$$

où h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ est le noyau associé continu asymétrique.

3.1 Noyau Gamma modifié.

Le noyau associé gamma a été introduit par (Chen, 2000) pour estimer des densités à support $\mathfrak{R} = [0, \infty[$. Le noyau Gamma modifié est donné comme suit:

$$K_{GAM(\rho_h(x),h)}(u) = \frac{u^{\rho_h(x)-1} \exp(-\frac{u}{h})}{h^{\rho_h(x)} \Gamma(\rho_h(x))}, \quad (15)$$

où

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si } x \geq 2h \\ \frac{1}{4}(\frac{x}{h})^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2h. \end{cases} \quad (16)$$

L'estimateur à noyau gamma modifié est donné par:

$$f_h^{GAM}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{GAM(\rho_h(x),h)}(X_i). \quad (17)$$

3.2 Noyau Birnbaum Saunders

Le noyau BS a été introduit par (Jin and Kawczak, 2003) qui est basé sur les distributions BS. le noyau BS a la forme suivante:

$$K_{BS(h^{\frac{1}{2}},x)}(u) = \frac{1}{2\sqrt{2h\pi}} \left[\sqrt{\frac{1}{xu}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}} \right] e^{-\frac{1}{2h}(\frac{u}{x} - 2 + \frac{x}{u})} \quad (18)$$

L'estimateur à noyau BS est donné par:

$$f_h^{BS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{BS(h^{\frac{1}{2}},x)}(X_i) \quad (19)$$

4 ÉVALUATION NUMÉRIQUE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION

Nous allons appliquer les différents estimateurs ci dessus pour évaluer numériquement la distance de variation $u(a, a')$ définie dans (10) et l'erreur Γ définie dans (11) entre les deux modèles considérés.

4.1 Démarche à suivre

nous développons un algorithme de simulation qui contient les étapes suivantes:

- Générer un n-échantillon de fonction de répartition F_θ des inter-sinistres supposé inconnue dans le modèle Sparre Andersen;
- Estimer la densité f_θ par f_h en utilisant le noyau GAM et BS;
- Introduire le montant moyen de réclamation μ et le taux de prime c ;
- Déterminer le taux moyen d'arrivée des sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg $\lambda \leftarrow \int_0^\infty x f_h(x)$;
- Verifier si $c > \lambda\mu$, sinon la ruine est certaine;
- Déterminer le domaine de ϵ tel que:
 $E(\exp(\epsilon(Z - c\theta))) = \rho < 1$ et
 $u(a, a') = E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - F_Z\|_v \leq (1 - \rho)^2$;
- Détermination de l'erreur d'approximation $\Gamma = \frac{u(a, a')}{(1-\rho) \left((1-\rho)^2 - u(a, a') \right)}$.

4.2 Moyens utilisés

Pour arriver à exécuter les étapes de simulation données ci dessus nous avons utilisé les moyens suivants:

1. La programmation est faite en utilisant le logiciel MATLAB R2014a.
2. Utilisation de la fonction "Rand" de l'environnement MATLAB R2014a pour la génération des nombres aléatoires.
3. Le paramètre de lissage h des noyaux GAM et BS est choisi suivant la méthode de validation croisée non biaisée (UCV)

h est donné par:

$$h_{ucv} = \arg \min_h UCV(h), \quad (20)$$

où

$$UCV(h) = \int_{\mathbb{R}} f_h^2(x) dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_{h,i}(X_i),$$

avec

$$f_{h,i}(X_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{(X_i, h)}(X_j).$$

4.3 Simulation

4.3.1 Exemple1

Dans cette exemple, nous considérons:

- Le montant moyen de réclamation $\mu = 0.09$ et le taux de prime $c = 10$ sont les mêmes dans les deux modèles.
- La loi des montants de réclamation, supposée exponentielle est la même aussi dans les deux modèles avec $f_Z = e_{\frac{1}{\mu}}$.
- La fonction densité de la loi générale $F_{\theta'} = Burr(k = 1, r = 20)$ des inter-sinistres dans le modèle Sparr Andersen est donnée par:

$$f_1(x) = \begin{cases} kr \frac{x^{k-1}}{(1+x^k)^{r+1}} & \text{if } x > 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- La loi des inter-sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg est exponentielle avec $f_{1\theta} = e_{\lambda_1}$ où $\lambda_1 = \frac{1}{\int x f_1(x) dx}$.

La courbe de la fonction densité f_1 et la courbe de la fonction densité e_{λ_1} sont présentées dans la figure1.

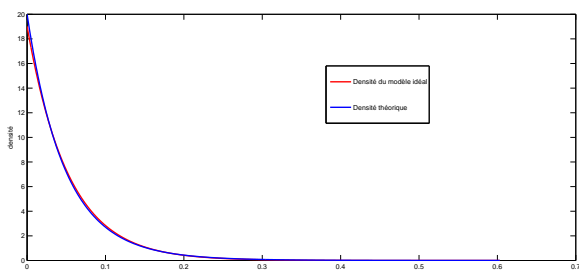


Figure 1: Densité $f_1(Burr(1, 20))$, et densité e_{λ_1}

Dans la figure1, on remarque que les densités des deux modèles sont très proche et puisque les autres paramètres sont les mêmes, alors, nous pouvons dire que les deux modèles considérés sont très proche.

En générant un échantillon issu de la loi $Burr(1, 20)$ de taille 200, nous appliquons la méthode du noyau avec le noyau GAM (respectivement le noyau BS) pour estimer la fonction densité f_{1h}^{GAM} (respectivement f_{1h}^{BS}) où $h = 0.005$ (respectivement $h = 0.04$). Les courbes des densités estimées f_{1h}^{GAM} et f_{1h}^{BS} et la courbe de la densité théorique f_1 sont tracées dans la figure2.

4.3.2 Exemple2

Dans cet exemple, nous allons donner les valeurs suivantes aux paramètres des deux modèles:

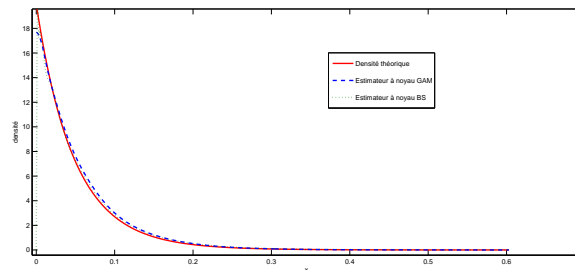


Figure 2: Densité théorique f_1 , et densités estimées

- Le montant moyen de réclamation $\mu = 0.2$ et le taux de prime $c = 10$ sont les mêmes dans les deux modèles.
- La loi des montants de réclamation, supposée exponentielle est la même aussi dans les deux modèles avec $f_Z = e_{\frac{1}{\mu}}$.
- La fonction densité de la loi générale $F_{\theta'} = Burr(k = 1.5, r = 3)$ des inter-sinistres dans le modèle Sparr Andersen.
- La loi des inter-sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg est exponentielle avec $f_{2\theta} = e_{\lambda_2}$ où $\lambda_2 = \frac{1}{\int x f_2(x) dx}$.

La courbe de la fonction densité f_2 et la courbe de la fonction densité e_{λ_2} sont présentées dans la figure3 suivante:

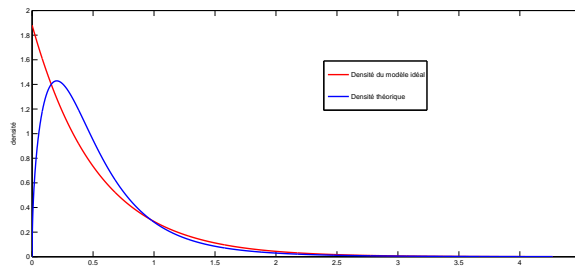


Figure 3: Densité $f_2(Burr(1.5, 3))$, et densité e_{λ_2}

Dans la figure3, on remarque que les densités des deux modèles sont éloignées. Ce qui veut dire, dans cette exemple que les deux modèles sont moins proche par rapport au premier exemple.

En suivant la même démarche présentées dans l'exemple précédent, les courbes des densités estimées f_{2h}^{GAM} avec $h = 0.017$ et f_{2h}^{BS} avec $h = 0.006$ et la courbe de la densité théorique f_2 sont tracées dans la figure4.

On liste dans le tableau 1: le domaine de variation du paramètre de la norme $\|\cdot\|_v$ (ε) où la condition donnée par l'inégalité (7) est vérifiée, la borne de déviation des

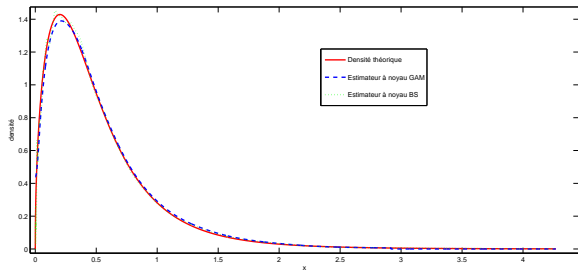


Figure 4: Densité théorique f_2 , et densités estimées

noyaux de transition $u(a, a')$ et la borne de déviation des probabilités de ruine avec les deux lois théoriques et les différents estimateurs.

	domaine de ϵ	$u(a, a')$	Γ
f_1	[0.557581, 6.681403]	0.0582	0.7707
f_{1h}^{GAM}	[0.797616, 6.425306]	0.1044	1.3647
f_{1h}^{BS}	[0.856487, 5.965530]	0.1122	1.6715
f_2	[0.228500, 1.096622]	0.3736	3.3475
f_{2h}^{GAM}	[0.238424, 0.946988]	0.3834	4.1692
f_{2h}^{BS}	[0.231111, 1.087019]	0.3771	3.4560

Tableau 1: Borne de stabilité forte avec les lois théoriques et les différents estimateurs

Dans le tableau 1, on remarque que:

- L'erreur entre les probabilités de ruine des modèles Cramér-Lundberg Sparr-Adersen est déterminée avec les deux densités théoriques et les densités estimées.
- L'erreur d'approximation donnée avec f_1 ($\Gamma = 0.7707$) est moins petite par rapport à l'erreur donnée avec f_2 ($\Gamma = 3.4560$). Ce qui est dû à l'éloignement de la fonction f_2 par rapport à la fonction de la loi exponentielle.

5 CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons montré l'applicabilité de la méthode de stabilité forte pour évaluer la proximité de la probabilité de ruine d'un modèle de risque complexe par celle d'un autre modèle de risque plus simple. Nous avons considéré le cas où la fonction densité de loi générale F_θ des inter-sinistres du modèle complexe est inconnue et doit être estimée par une méthode non-paramétrique.

Les résultats de simulation présentés nous ont permis de voir l'intérêt de l'application de la méthode de noyau pour vérifier et consolider l'hypothèse de petitesse de la perturbation commise pour déterminer l'erreur de proximité de deux modèles de risque lors de l'application de la méthode de stabilité forte.

REFERENCES

- Aissani, D. and N. V. Kartashov, 1983. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr*, Ser. A11, p. 3-5.
- Asmussen, S. and H. Albrecher, 2010. *Ruin probabilities*, Word Scientific.
- Bareche, A. and D. Aissani, 2008. Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queuing system. *Operations Research Letters*, 36(5), p. 535-538.
- Bareche, A. and D. Aissani, 2010. Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of G/G/1 and G/M/1 queuing systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, p. 1296-1304.
- Benouaret, Z. and D. Aissani, 2010. Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, p. 83-93.
- Chen, SX., 2000. Gamma kernel estimators for density functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52, p. 471-480.
- Enikeeva, F., V. Kalashnikov and D. Rusaityte, 2001. Continuity estimates for ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, p. 18-39.
- Jin, X. and J. Kawczak, 2003. Birnbaum-Saunders and lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data. *Annals of Economics and Finance*, 4, p. 103-124.
- Kalashnikov, V., 2000. *The stability concept for stochastic risk models*. Working Paper Nr 166, Laboratory of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen.
- Kartashov, N. V., 1996. *Strong stable Markov chains*. VSP, Utrecht.
- Kokonendji, C. C., T. Senga Kiessé and S. S. Zocchi, 2007. Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Nonparametric Statistics*, 19, p. 241-257.
- Kokonendji, C. C. and F. G. Libengué 2011. Méthode des noyaux associés continus et estimation de densité. *Journées de Statistique de la SFdS*, Tunis, Tunisia.
- Libengué, F. G., 2013. *Méthodes non paramétriques des noyaux associés mixtes et applications*. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, France, Université de Ougadougou, Burkina-Faso.

- Parzen, E., 1962. On estimation of a probability density function and mod. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, p. 1065-1076.
- Rosenblatt, M., 1956. Remarks in some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27, p. 832-837.
- Rusaityte, D., 2001. *Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments*, Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen, Working Paper Nr. 178.
- Schuster, E. F., 1985. Incorporating support constraints into nonparametric estimation of densities. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 14, p. 1123-1136.
- Senga Kiessé, T., 2008. *Approche non-paramétrique par noyaux associés des données de dénombrement*. Thèse de Doctorat, Université de Pau, France.