

# *Inégalités stochastiques pour le modèle d'attente M/G/1/1 avec rappels*

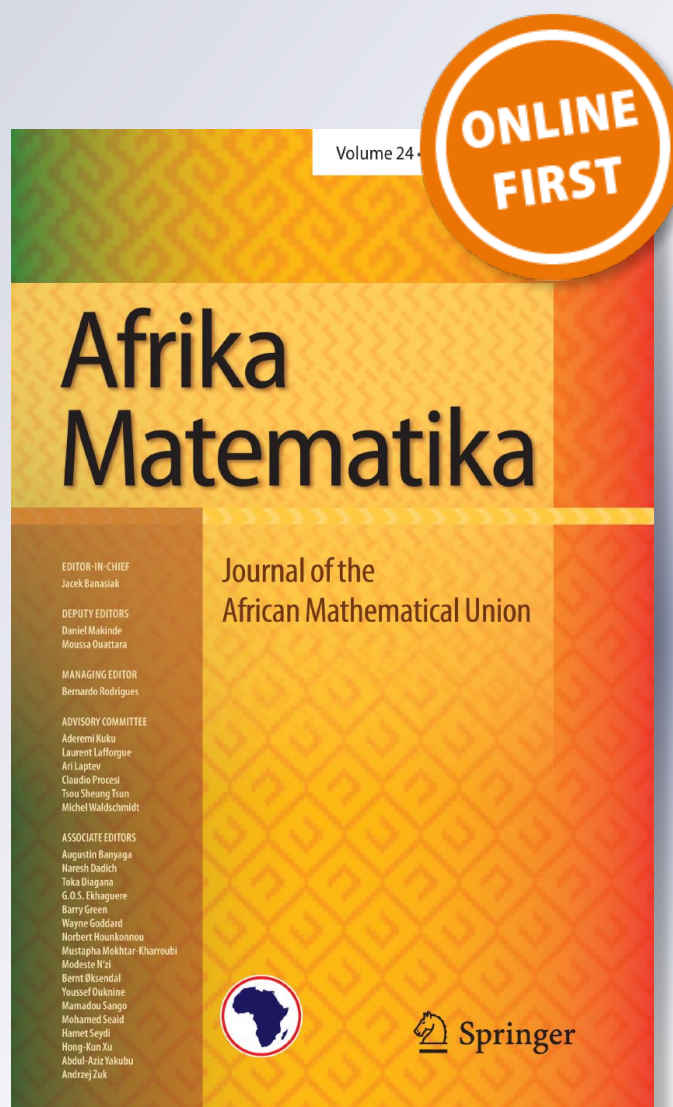
**Mohamed Boualem, Mouloud Cherfaoui, Natalia Djellab & Djamil Aïssani**

**Afrika Matematika**

ISSN 1012-9405

Afr. Mat.

DOI 10.1007/s13370-017-0492-x



**Your article is protected by copyright and all rights are held exclusively by African Mathematical Union and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. This e-offprint is for personal use only and shall not be self-archived in electronic repositories. If you wish to self-archive your article, please use the accepted manuscript version for posting on your own website. You may further deposit the accepted manuscript version in any repository, provided it is only made publicly available 12 months after official publication or later and provided acknowledgement is given to the original source of publication and a link is inserted to the published article on Springer's website. The link must be accompanied by the following text: "The final publication is available at [link.springer.com](http://link.springer.com)".**

# Inégalités stochastiques pour le modèle d'attente M/G/1/1 avec rappels

Mohamed Boualem<sup>1</sup>  · Mouloud Cherfaoui<sup>2,3</sup> ·  
Natalia Djellab<sup>4</sup> · Djamil Aïssani<sup>5</sup>

Received: 5 November 2013 / Accepted: 30 January 2017  
© African Mathematical Union and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017

**Abstract** Dans ce travail, nous nous sommes focalisés sur les propriétés de monotonie qui permettent d'établir quelques bornes stochastiques utiles dans la compréhension de modèles compliqués et leur remplacement par des modèles plus simples pour lesquels, une évaluation peut être faite. Nous avons considéré la file d'attente  $M/G/1/1$  avec rappels. Nous avons dérivé différentes inégalités stochastiques par rapport aux ordres stochastique, convexe croissant et transformée de Laplace, qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov induite. Les inégalités stochastiques obtenues fournissent des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov incluse liée au modèle d'attente étudié. De plus, des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques obtenus.

**Keywords** Files d'attente avec rappels · Chaîne de Markov · Monotonie · Ordre stochastique

---

✉ Mohamed Boualem  
mohandboualem@gmail.com; robertt15dz@yahoo.fr

Mouloud Cherfaoui  
mouloudcherfaoui2013@gmail.com

Natalia Djellab  
djellab@yahoo.fr

Djamil Aïssani  
lamos\_bejaia@hotmail.com

- <sup>1</sup> Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria
- <sup>2</sup> Département de Mathématiques, Université de Biskra, 07000 Biskra, Algeria
- <sup>3</sup> Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria
- <sup>4</sup> Laboratoire LaPs, Département de Mathématiques, Université de Annaba, 23000 Annaba, Algeria
- <sup>5</sup> Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria

**Mathematics Subject Classification** 60E15 · 60K25 · 60J10

## 1 Introduction

Les phénomènes d'attente sont devenus l'une des préoccupations de l'Homme depuis bien longtemps. *Attendre*, constitue la tâche la plus désagréable de la vie moderne. Plusieurs situations d'attente ont la caractéristique que les clients doivent rappeler, pour une certaine raison, pour être servis. Quand le service d'un client est insatisfait, il doit rappeler jusqu'à l'accomplissement de son service. Ces modèles d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Il existe aujourd'hui des centaines de publications sur les systèmes avec rappels où des exemples concrets en rapport avec les nouveaux développements technologiques dont l'intérêt porté s'accroît de jour en jour ont été cités [3, 11, 20]. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les monographies de [3, 10, 11] et la classification bibliographique sur les systèmes avec rappels est donnée dans [1, 2].

La prise en considération des appels répétés, des clients secondaires à des instants aléatoires, introduit de grandes difficultés analytiques. En effet, des résultats analytiques détaillés n'existent que pour un certain nombre de files d'attente avec rappels particulières, avec des hypothèses contraignantes sur certains paramètres tels que le nombre de serveurs (un seul serveur), les distributions des temps de rappels, d'arrivées (lois exponentielles) et l'état du système (régime stationnaire), alors que pour beaucoup d'autres, les résultats obtenus sont extrêmement limités. Ceci est dû essentiellement aux difficultés d'obtenir des résultats analytiques. La résolution de ces modèles peut se faire alors à l'aide de méthodes approximatives. Parmi les principales approches développées dans ce sens, on trouve les méthodes de comparaison stochastique. Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques tels que la recherche opérationnelle, la théorie de décision, les télécommunications, .... Elles fournissent un outil d'aide à la décision pour l'étude et la conception des systèmes complexes. En effet, elles permettent d'obtenir des estimations et de mettre en évidence des propriétés qualitatives des mesures de performance, et ceci en termes de monotonie ou de comparabilité, suivant des ordres stochastiques donnés.

Les propriétés de monotonie et de comparabilité sont bien documentées dans la littérature. L'une de ces propriétés a été étudiée dans [13]. Les auteurs ont utilisé la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonie du système  $M/G/1$  avec rappels suivant des ordres stochastiques donnés. En particulier, ils ont déterminé des bornes simples pour le nombre moyen de clients servis durant une période d'activité. Boualem et al. [4] ont étudié quelques problèmes de comparabilité et de monotonie pour l'analyse du système  $M/G/1$  avec rappels constants et vacances du serveur en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques. Oukid et Aïssani [14] ont obtenu des bornes stochastiques pour les périodes d'activité et d'inactivité du serveur. Récemment, Boualem et al. [6] ont établi quelques approximations qualitatives pour le système  $M/G/1$  avec rappels et Bernoulli feedback, en utilisant les propriétés qualitatives des chaînes de Markov par rapport aux taux d'arrivée, aux distributions du temps de service et aux paramètres de rappels. Le lecteur peut également consulter les références [7, 8] traitant de la même problématique.

Dans ce travail, nous utilisons les outils mathématiques de l'analyse qualitative pour étudier les propriétés de monotonie et de comparabilité du modèle d'attente  $M/G/1/1$  avec

rappels par rapport aux ordres stochastique, convexe croissant et de transformée de Laplace. Les mesures de performance d'un tel système sont disponibles sous des formes explicites mais complexes (elles contiennent des transformées de Laplace, des expressions intégrales). Elles ne sont donc pas faciles à interpréter pour que le praticien puisse en bénéficier. Pour pallier ces difficultés, les méthodes de comparaison stochastique ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant (en les majorant ou en les minorant) par des mesures de performance d'autres modèles plus simples. Particulièrement, nous avons prouvé la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse, du modèle considéré, relativement aux ordres stochastique et convexe croissant. Nous avons également établi des conditions pour lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires du nombre de clients, de deux chaînes de Markov incluses associées à deux systèmes  $M/G/1/1$  avec rappels ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe croissant.

Le reste du document est organisé comme suit: la deuxième section est consacrée à la description mathématique du modèle. Dans la troisième section, on énonce trois lemmes qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service. Les conditions de monotonie et de comparabilité de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse sont données dans la quatrième section. Les conditions de comparabilité des distributions stationnaires sont présentés dans la cinquième section. La dernière section est consacrée à l'application numérique.

## 2 Description du modèle

Les systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être caractérisés comme des systèmes de files d'attente avec clients impatientes de type empêchement (balking) ayant la propriété de persistance à rappeler ou un système avec une certaine vacation particulière [20]. Ces systèmes sont les plus réalistes qu'on rencontre notamment dans les réseaux téléphoniques où le client qui rappelle après un certain nombre de tentatives décide d'y renoncer. Ceci se traduit par une fonction de persistance  $H = \{H_k, k \geq 1\}$ , où  $H_k$  est la probabilité qu'après une  $k^{\text{ième}}$  tentative échouée, l'abonné décide d'effectuer une  $(k + 1)^{\text{ième}}$  tentative. On admet que chaque décision est indépendante du nombre de tentatives précédentes, c'est-à-dire  $H_2 = H_3 = \dots = H_k, \forall k \geq 2$ .

Dans notre étude on considère le modèle d'attente  $M/G/1/1$  avec rappels. Les clients primaires (appels primaires) arrivent dans le système selon un processus poissonnien de taux  $\lambda > 0$ . À l'arrivée d'un client primaire, s'il trouve le serveur libre, le client en question est pris en charge immédiatement et quitte le système à la fin de son service. Dans le cas contraire, le client quitte l'aire du service pour rejoindre l'orbite avec une probabilité  $H_1$  et devient une source d'appels répétés (appels secondaires), ou quitte le système définitivement avec une probabilité complémentaire  $1 - H_1$ . Nous supposons que  $H_2 = H_3 = \dots = H_k = 1, \forall k \geq 2$  (uniquement les clients primaires ont le droit de quitter le système sans recevoir leur service). Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux  $n\mu$ , quand le nombre de clients en orbite est  $n \in \mathbb{N}$  [5]. Les temps de service sont supposés d'une loi générale, d'une fonction de distribution  $B(t)$ , de premier moment  $\beta_1$  et d'une transformée de Laplace–Stieltjes  $\tilde{B}(s)$ .

Finalement, on suppose que le flux des arrivées primaires, les intervalles entre les rappels successifs et les temps de service sont mutuellement indépendants. Le schéma général d'un tel système d'attente est donné par la Fig. 1.

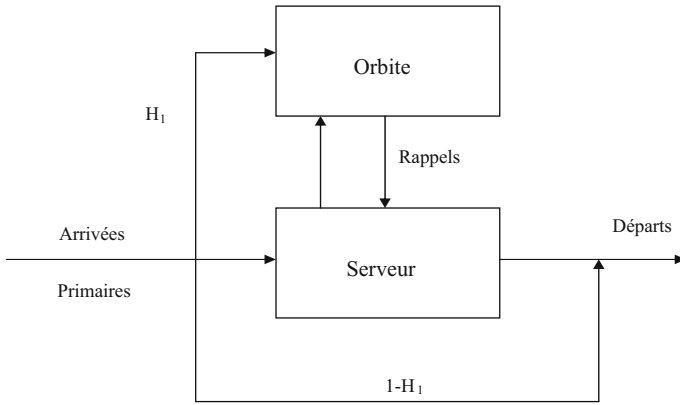


Fig. 1 Représentation schématique du système d'attente  $M/G/1/1$  avec rappels

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus

$$(C(t), N_o(t), \xi(t))_{(t \geq 0)},$$

où

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est oisif,} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases} \quad (1)$$

$N_o(t)$ : le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

$\xi(t)$ : représente le temps de service écoulé du client en service à l'instant  $t$ , si  $C(t) = 1$ .

Le modèle d'attente  $M/G/1$  avec rappels et clients impatientes (où  $H_2 = 1$  et  $H_2 < 1$ ) est analysé dans [11]. Dans le cas de  $H_2 = 1$ , les auteurs ont étudié le régime non stationnaire du système. La chaîne de Markov incluse, la distribution jointe à l'état d'équilibre de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite ont fait l'objet de leurs investigations. Dans le cas de  $H_2 < 1$ , cette situation, étant très compliquée, n'a fourni des résultats que pour la distribution exponentielle des temps de service. Dans le cas de fonction de distribution générale  $B(x)$ , différentes approximations ont été proposées telles que la généralisation du modèle classique avec des clients impatientes qui quittent le système avec un certain taux  $\tau$  [9], l'utilisation d'une transformation algébrique [12] et enfin l'application de l'approche du maximum d'entropie [17].

### 2.1 Chaîne de Markov incluse

Soit  $\{t_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  une suite d'instants de la fin d'un service. La suite de variables aléatoires  $\{X_n = N_o(t_n^+), n \in \mathbb{N}\}$  forme une chaîne de Markov incluse, dont l'équation fondamentale est :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_{X_n} + \Delta_{n+1}, \quad (2)$$

où la variable aléatoire  $\Delta_{n+1}$  représente le nombre de clients primaires (nouvelles arrivées) arrivant dans le système durant le service du  $(n + 1)^{ième}$  client. Cette variable ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant du début de service du  $(n + 1)^{ième}$  client. Sa distribution est donnée par:

$$P(\Delta_{n+1} = k) = a_k = \int_0^\infty \exp(-\lambda H_1 x) \frac{(\lambda H_1 x)^k}{k!} dB(x), \quad k \geq 0, \quad (3)$$

avec la fonction génératrice

$$a(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k = \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda H_1 x(1-z)\} dB(x) = \tilde{B}(\lambda H_1(1-z)). \tag{4}$$

$\delta_{X_n}$  est la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$\delta_{X_n} = \begin{cases} 1, & \text{si le } (n+1)\text{ième client servi provient de l'orbite;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

Elle a pour distribution

$$P(\delta_{X_n} = 1 | X_n = k) = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu} \quad \text{et} \quad P(\delta_{X_n} = 0 | X_n = k) = \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}. \tag{6}$$

La condition d'ergodicité de la chaîne  $(X_n)$  est  $\rho = \lambda\beta_1 H_1 < 1$  [17]. Par ailleurs, la chaîne de Markov  $(X_n)$  est toujours ergodique si  $H_2 < 1$  [11].

### 3 Résultats préliminaires

#### 3.1 Ordres stochastiques et notions d'âge

L'objectif des ordres stochastiques est l'approximation du modèle complexe par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions sont plus simples. Cela fournit des informations sur notre modèle qui sont difficiles à avoir directement.

**Definition 1** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires non négatives de fonctions de répartition  $F$  et  $G$ , respectivement. On dit que  $X$  est plus petite que  $Y$  par rapport à:

- (a) Ordre stochastique (noté  $X \leq_{st} Y$ ) ssi  $F(x) \geq G(x), \forall x \geq 0$ .
- (b) Ordre convexe croissant (noté  $X \leq_{icx} Y$ ) ssi  $\int_x^{+\infty} \bar{F}(u) d(u) \leq \int_x^{+\infty} \bar{G}(u) d(u), \forall x \geq 0$ .
- (c) Ordre de Laplace (noté  $X \leq_L Y$ ) ssi  $\int_0^{+\infty} e^{-sx} dF(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-sx} dG(x), \forall s \geq 0$ .

Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ , et en notant par  $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$  et  $\nu = (\nu_n)_{n \geq 0}$ , pour  $i \in \mathbb{Z}$ , leurs distributions de fonction correspondantes, alors

- (a)  $\omega \leq_{st} \nu$  ssi  $\bar{\omega}_m = \sum_{n \geq m} \omega_n \leq \bar{\nu}_m = \sum_{n \geq m} \nu_n, \forall m$ .
- (b)  $\omega \leq_{icx} \nu$  ssi  $\bar{\bar{\omega}}_m = \sum_{n \geq m} \sum_{k \geq n} \omega_k \leq \bar{\bar{\nu}}_m = \sum_{n \geq m} \sum_{k \geq n} \nu_k, \forall m$ .
- (c)  $\omega \leq_L \nu$  ssi  $\sum_{n \geq 0} \omega_n z^n \geq \sum_{n \geq 0} \nu_n z^n, \forall z \in [0, 1]$ .

Pour une discussion complète sur ces ordres stochastiques et leurs applications, on peut se référer à [15, 16, 18, 19].

**Definition 2** Soient  $X$  et  $X_\tau$  des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément. Soient  $F$  et  $F_\tau$  leurs distributions respectives. On dit que  $F$  est:

- (a) *NBUE* (New Better than Used in Expectation), si  $E(X_\tau) \leq E(X), (0 < \tau < \infty)$ .
- (b) *NWUE* (New Worse than Used in Expectation), si  $E(X) \leq E(X_\tau), (0 < \tau < \infty)$ .

La Fig. 2 illustre les relations d'implication existantes entre certaines classes de distributions d'âge.

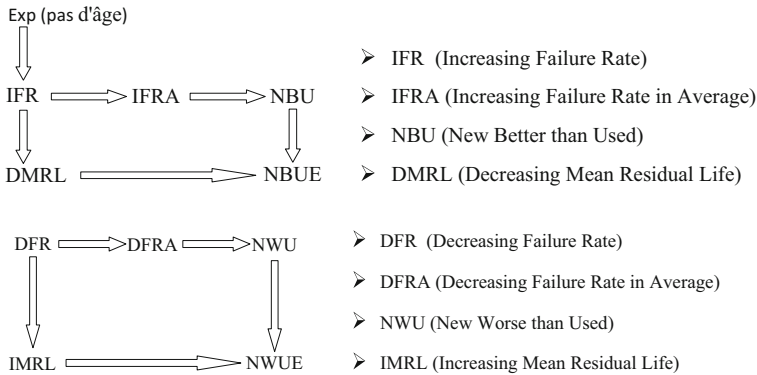


Fig. 2 Relations entre les classes de distributions d'âge

### 3.2 Inégalités préliminaires

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux modèles d'attente  $M/G/1/1$  avec rappels de paramètres (respectivement, pour  $i = 1, 2$ ):

$\lambda^{(i)}$ : taux d'arrivées dans  $\Sigma_i$ .

$\mu^{(i)}$ : taux de rappels dans  $\Sigma_i$ .

$H_1^{(i)}$ : la probabilité de persistance dans  $\Sigma_i$ .

$B^{(i)}(x)$ : la distribution du temps de service dans  $\Sigma_i$ .

$a_n^{(i)}$ : la probabilité du nombre de clients qui entrent dans le système durant le service du  $n^{i\text{ème}}$  client dans  $\Sigma_i$ .

$\pi_n^{(i)}$ : la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $\Sigma_i$ .

On compare, dans cette section, les probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service,  $\{a_n^{(i)}, i = 1, 2\}$ , dans le système  $\Sigma_i$ , suivant les ordres partiels: stochastique ( $\leq_{st}$ ), convexe croissant ( $\leq_{icx}$ ) et en transformée de Laplace ( $\leq_L$ ).

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables aux sens des ordres cités ci-dessus:

**Lemma 1** Si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ ,  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$ , alors  $\{a_n^{(1)}\} \leq_{st} \{a_n^{(2)}\}$ .

*Proof* Par définition de l'ordre stochastique  $\leq_{st}$ , on a pour une loi discrète les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
 \{a_n^{(1)}\} \leq_{st} \{a_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{a}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} a_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} a_m^{(2)} = \bar{a}_n^{(2)} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x)^m}{m!} e^{-\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x} dB^{(1)}(x) \\
 &= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x)^m}{m!} e^{-\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x} dB^{(1)}(x) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)} H_1^{(2)} x)^m}{m!} e^{-\lambda^{(2)} H_1^{(2)} x} dB^{(2)}(x). \tag{7}
 \end{aligned}$$



Pour prouver l'inégalité numérique (7), on considère la fonction

$$g_n(x, \lambda, H_1) = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda H_1 x)^m}{m!} \exp\{-\lambda H_1 x\}. \tag{8}$$

En prenant sa dérivée par rapport à  $x$ , on obtient l'expression positive suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, \lambda, H_1) = \lambda H_1 \frac{(\lambda H_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda H_1 x\} > 0. \tag{9}$$

Donc  $g_n(x, \lambda, H_1)$  est une fonction croissante en  $x$ . En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g_n(x, \lambda, H_1) &= \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda H_1 \frac{(\lambda H_1 x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda H_1 x\} \\ &\quad - \sum_{m=n}^{+\infty} \lambda H_1 \frac{(\lambda H_1 x)^m}{m!} \exp\{-\lambda H_1 x\} \\ &= \lambda H_1 \frac{(\lambda H_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda H_1 x\} > 0, \quad \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport à  $\lambda$  et  $H_1$  s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} g_n(x, \lambda, H_1) &= H_1 x \exp\{-\lambda H_1 x\} \frac{(\lambda H_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0, \\ \frac{\partial}{\partial H_1} g_n(x, \lambda, H_1) &= \lambda x \exp\{-\lambda H_1 x\} \frac{(\lambda H_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0. \end{aligned}$$

On remarque que les dérivées sont positives pour toutes les valeurs positives que peuvent prendre les paramètres  $\lambda$  et  $H_1$ . Alors, la fonction  $g_n(x, \lambda, H_1)$  est croissante.

Comme  $g_n(x, \lambda, H_1)$  est une fonction croissante en  $x$  et  $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$ , alors à l'aide du Théorème 1.2.2 énoncé dans [18], l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(2)}(x). \tag{10}$$

D'autre part, puisque la fonction  $g_n(x, \lambda, H_1)$  est monotone par rapport à  $\lambda$  et  $H_1$  et que  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$ , on a

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(2)}, H_1^{(2)}) dB^{(2)}(x). \tag{11}$$

Par conséquent, des inégalités (10) et (11), l'inégalité (7) est vérifiée par transitivité.

**Lemma 2** Si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ ,  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)} \leq_{icx} B^{(2)}$ , alors  $\{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\}$ .

*Proof* Par définition de l'ordre convexe croissant  $\leq_{icx}$ , on a:

$$\begin{aligned}
 \{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{a}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{a}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{a}_m^{(2)} = \bar{a}_n^{(2)} \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x)^k}{k!} e^{-\lambda^{(1)} H_1^{(1)} x} dB^{(1)}(x) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)} H_1^{(2)} x)^k}{k!} e^{-\lambda^{(2)} H_1^{(2)} x} dB^{(2)}(x) \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(1)}(x) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}, H_1^{(2)}) dB^{(2)}(x), \tag{12}
 \end{aligned}$$

avec

$$g_m(x, \lambda^{(i)}, H_1^{(i)}) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} H_1^{(i)} x)^k}{k!} \exp\{-\lambda^{(i)} H_1^{(i)} x\}. \tag{13}$$

Les fonctions  $g_m(x, \lambda, H_1)$  sont croissantes par rapport à  $\lambda$  et  $H_1$ , alors la fonction définie par:  $\bar{g}_n(x, \lambda, H_1) = \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda, H_1)$  l'est aussi. D'autre part, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{g}_n(x, \lambda, H_1) = (\lambda H_1)^2 \left( \frac{(\lambda H_1 x)^{n-2}}{(n-2)!} \right) e^{-\lambda H_1 x} > 0. \tag{14}$$

Par conséquent,  $\bar{g}_n(x, \lambda, H_1)$  est croissante et convexe par rapport à la variable  $x$ . D'après le Théorème 1.3.1 donné dans [18], on obtient l'inégalité suivante:

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(2)}(x). \tag{15}$$

En outre, grâce à la monotonie de la fonction  $\bar{g}_n(x, \lambda, H_1)$  par rapport à  $\lambda$  et  $H_1$ , on trouve que:

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}, H_1^{(1)}) dB^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}, H_1^{(2)}) dB^{(2)}(x). \tag{16}$$

Finalement, l'inégalité (12) est vérifiée par transitivité des inégalités (15) et (16).

**Lemma 3** Si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ ,  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)} \leq_L B^{(2)}$ , alors  $\{a_n^{(1)}\} \leq_L \{a_n^{(2)}\}$ .

*Proof* Par définition, on a:

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda H_1 x)^n}{n!} \exp\{-\lambda H_1 x\} z^n dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda H_1 x z)^n}{n!} \exp\{-\lambda H_1 x\} dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda H_1 x(1-z)\} dB(x) = \tilde{B}(\lambda H_1(1-z)). \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité  $\{a_n^{(1)}\} \leq_L \{a_n^{(2)}\}$  a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$a^{(1)}(z) \geq a^{(2)}(z), \tag{17}$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\tilde{B}^{(1)}(\lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(2)} H_1^{(2)}(1-z)), \tag{18}$$

c'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante:

$$\{a_n^{(1)}\} \leq_L \{a_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \tilde{B}^{(1)}(\lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(2)} H_1^{(2)}(1-z)). \tag{19}$$

De plus, on a

$$B^{(1)} \leq_L B^{(2)} \Rightarrow \tilde{B}^{(1)}(s) \geq \tilde{B}^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier, pour  $s = \lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)$ , on obtient

$$\tilde{B}^{(1)}(\lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)). \tag{20}$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  impliquent l'inégalité suivante:

$$\tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(1)} H_1^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(2)} H_1^{(2)}(1-z)). \tag{21}$$

Par conséquent, l'inégalité (19) découle des inégalités (20) et (21).

#### 4 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système M/G/1/1 avec rappels sont données par la formule suivante:

$$p_{n,m} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} a_{m-n+1}. \tag{22}$$

Soit l'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  de la chaîne de Markov incluse  $(X_i)$  qui, à chaque distribution  $p = (p_n)_{n \geq 0}$ , associe une distribution  $\mathcal{T}p = q = (q_m)_{m \geq 0}$  telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n p_{nm}. \tag{23}$$

Les deux Théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe croissant.

**Theorem 1** *L'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques  $p^{(1)}$  et  $p^{(2)}$ , l'inégalité  $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$  implique  $\mathcal{T}p^{(1)} \leq_{st} \mathcal{T}p^{(2)}$ .*

*Proof* Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante:

$$\bar{p}_{n-1m} \leq \bar{p}_{nm}, \quad \forall n, m, \tag{24}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{nk} = \sum_{k=m}^{+\infty} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{k-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} a_{k-n+1} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{a}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{a}_{m-n+1} \\ &= \bar{a}_{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} a_{m-n} \\ &= \bar{a}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n}, \end{aligned}$$

et

$$\bar{p}_{n-1 m} = \bar{a}_{m-n+2} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n+1}. \tag{25}$$

Finalement, on trouve:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm} - \bar{p}_{n-1 m} &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n} + \left[ 1 - \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \right] a_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} a_{m-n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (24) est vérifiée pour tout  $n$  et  $m$ .

**Theorem 2** *L'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  est monotone par rapport à l'ordre convexe croissant. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques  $p^{(1)}$  et  $p^{(2)}$ , l'inégalité  $p^{(1)} \leq_{icx} p^{(2)}$  implique  $\mathcal{T}p^{(1)} \leq_{icx} \mathcal{T}p^{(2)}$ .*

*Proof*  $\mathcal{T}$  est monotone par rapport à l'ordre convexe croissant si et seulement si:

$$\bar{\bar{p}}_{nm} \leq \bar{\bar{p}}_{n-1m} + \bar{\bar{p}}_{n+1m}, \quad \forall n, m, \tag{26}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\bar{p}}_{nm} &= \sum_{k=m}^{+\infty} \bar{p}_{nk} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{\bar{a}}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{\bar{a}}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{\bar{a}}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} [\bar{\bar{a}}_{m-n} - \bar{a}_{m-n}] \\ &= \bar{\bar{a}}_{m-n} + \bar{\bar{a}}_{m-n+1} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{a}_{m-n} \\ &= \bar{\bar{a}}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{a}_{m-n}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m} - 2\bar{p}_{nm} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} a_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} a_{m-n-1} \geq 0.$$

Alors l'inégalité (26) est vérifiée pour tout  $n$  et  $m$ .

*Remark 1* Les deux Théorèmes précédents impliquent que si à l'instant  $t = 0$  le système est vide, alors le nombre de clients dans le système aux instants de départs forme une suite croissante par rapport aux ordres partiels  $\leq_{st}$  et  $\leq_{icx}$ .

*Remark 2* L'opérateur  $\mathcal{T}$  n'est pas monotone par rapport à l'ordre  $\leq_L$ . En effet, pour  $p^{(1)} = (1, 0, 0, \dots)$  et  $p^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$ , on a  $p^{(1)} \leq_L p^{(2)}$  mais  $\mathcal{T}p^{(1)} \not\leq_L \mathcal{T}p^{(2)}$ .

Maintenant, notons par  $\mathcal{T}^{(1)}, \mathcal{T}^{(2)}$  les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov incluses de chaque système. Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels: stochastique et convexe croissant.

**Theorem 3**

Si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$  alors  $\mathcal{T}^{(1)} \leq_{st} \mathcal{T}^{(2)}$ .

C'est-à-dire, pour une distribution quelconque  $p$  on a  $\mathcal{T}^{(1)}p \leq_{st} \mathcal{T}^{(2)}p$ .

*Proof* D'après le Théorème 4.2.3 donné dans [18], nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,

$$\bar{p}_{nm}^{(1)} \leq \bar{p}_{nm}^{(2)},$$

ce qui revient à montrer:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(2)}. \end{aligned} \tag{27}$$

D'après le Lemme 1, on a  $\{a_n^{(1)}\} \leq_{st} \{a_n^{(2)}\}, \forall n \geq 0$ . D'autre part,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ alors } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}. \tag{28}$$

En outre, du fait que la fonction  $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$  est croissante par rapport à  $x$ , l'inégalité suivante a lieu:

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \tag{29}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ &= \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} a_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} a_{m-n}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(2)} \\ &= \bar{p}_{nm}^{(2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (27) est vérifiée.

**Theorem 4**

Si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ ,  $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$ ,  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)} \leq_{icx} B^{(2)}$  alors  $\mathcal{T}^{(1)} \leq_{icx} \mathcal{T}^{(2)}$ ,

c'est-à-dire que pour une distribution quelconque  $p$  on a  $\mathcal{T}^{(1)} p \leq_{icx} \mathcal{T}^{(2)} p$ .

*Proof* D'après le Théorème 4.2.3 donné dans [18], nous établirons les probabilités de transition en un pas  $p_{nm}^{(1)}$  et  $p_{nm}^{(2)}$ , qui vérifient les inégalités suivantes:

$$\bar{p}_{nm}^{(1)} \leq \bar{p}_{nm}^{(2)},$$

ce qui est équivalent à montrer:

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(2)}. \end{aligned} \tag{30}$$

D'après le Lemme 2, on a  $\{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\}$ ,  $\forall n \geq 0$ . En utilisant les mêmes techniques que la preuve précédente, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ &= \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n}^{(2)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{a}_{m-n+1}^{(2)} \\ &= \bar{p}_{nm}^{(2)}. \end{aligned}$$

### 5 Bornes stochastiques des distributions stationnaires

On considère  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux systèmes de files d'attente M/G/1/1 avec rappels. Soient  $\pi_n^{(1)}$  et  $\pi_n^{(2)}$  les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, respectivement.

Le Théorème suivant donne les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour les deux systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , par rapport aux ordres partiels: stochastique et convexe croissant.

**Theorem 5** *Si les inégalités suivantes ont lieu*

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \quad H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)} \quad \text{et} \quad B^{(1)} \leq_{so} B^{(2)}, \tag{31}$$

*alors on a aussi les inégalités suivantes sur les distributions stationnaires*

$$\{\pi_n^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_n^{(2)}\}, \quad \text{où} \quad \leq_{so} = \leq_{st} \quad (\text{ou} \quad \leq_{icx}). \tag{32}$$

*Proof* D'après les Théorèmes 3–4, les inégalités  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ ,  $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$ ,  $H_1^{(1)} \leq H_1^{(2)}$  et  $B^{(1)}(x) \leq_{so} B^{(2)}(x)$  impliquent  $T^{(1)} \leq_{so} T^{(2)}$ , c'est-à-dire, pour une distribution quelconque  $p$  on a l'inégalité suivante:

$$T^{(1)} p \leq_{so} T^{(2)} p. \tag{33}$$

Des Théorèmes 1–2, l'opérateur  $T^{(2)}$  associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques  $p_1^{(2)}$ ,  $p_2^{(2)}$  telles que  $p_1^{(2)} \leq_{so} p_2^{(2)}$ , on a

$$T^{(2)} p_1^{(2)} \leq_{so} T^{(2)} p_2^{(2)}. \tag{34}$$

Cependant, de l'inégalité (33), on obtient

$$T^{(1)} p^{(1)} \leq_{so} T^{(2)} p^{(1)}. \tag{35}$$

Il existe une probabilité  $p_1^{(2)}$  telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$T^{(2)} p^{(1)} \leq_{so} T^{(2)} p_1^{(2)}. \tag{36}$$

En combinant les inégalités (34)–(36), on obtient le résultat suivant

$$T^{(1)} p^{(1)} \leq_{so} T^{(2)} p^{(2)}, \tag{37}$$

pour deux distributions quelconques  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$ .

L'inégalité (37) peut être réécrite de la manière suivante

$$T^{(1)} p_n^{(1)} = P(X_k^{(1)} = n) \leq_{so} P(X_k^{(2)} = n) = T^{(2)} p_n^{(2)}.$$

Quand  $k \rightarrow \infty$ , on déduit le résultat recherché, c'est-à-dire,  $\{\pi_n^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_n^{(2)}\}$ .

En se basant sur le Théorème 5, le résultat suivant donne des bornes stochastiques simples pour la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système M/G/1/1 avec rappels.

**Theorem 6** *Si pour le modèle M/G/1/1 avec rappels, la distribution de temps de service est NBU E, respectivement NWU E, alors la distribution stationnaire  $\pi_n$  du nombre de clients dans ce système est inférieure, respectivement supérieure, par rapport à l'ordre  $\leq_{icx}$ , à la distribution stationnaire,  $\pi_n^*$ , du nombre de clients dans le système M/M/1/1 avec rappels.*

*Proof* Considérons un système de files d'attente  $M/M/1/1$  avec rappels ayant les mêmes paramètres: taux d'arrivée  $\lambda$ , taux de rappels  $\mu$ , temps moyen de service  $\beta_1$  et la probabilité de persistance  $H_1$ , que le système  $M/G/1/1$  avec rappels, mais avec un temps de service exponentiellement distribué de taux  $\frac{1}{\beta_1}$ .

$$B^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\beta_1}}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Si  $B(x)$  est *NBUE* (respectivement *NWUE*), alors

$$B(x) \leq_{icx} B^*(x), \text{ (respectivement } B(x) \geq_v B^*(x) \text{) [18].} \tag{39}$$

D'après le Théorème 5, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $M/G/1/1$  avec rappels est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $M/M/1/1$  avec rappels.

### 6 Application numérique

Afin de confirmer le résultat théorique donné dans le Théorème 6, nous avons élaboré un simulateur, sous environnement Matlab, basé sur l'approche "événements discrets", qui reproduira le comportement du modèle considéré. En effet, notre simulateur nous permet d'estimer les probabilités stationnaires d'un tel système lorsque la distribution des temps de service est NBUE (respectivement NWUE) afin de les comparer à celles du système  $M/M/1/1$  avec rappels. Pour ce faire, on a choisi deux lois de probabilités de type NBUE (une distribution de Weibull ( $Wbl(a, b)$ , avec  $a > 1$ ) et une distribution d'Erlang d'ordre  $k$  ( $E_k(\lambda)$ )) et deux autres lois de type NWUE (une distribution de Weibull ( $Wbl(a, b)$ , avec  $a \leq 1$ ) et une distribution Gamma ( $\Gamma(a, b)$ , avec  $0 \leq a < 1$ )) pour les temps de service. De plus, afin d'analyser l'influence de l'intensité du trafic  $\rho$  et la probabilité  $H_1$  sur la qualité des bornes stochastiques obtenues pour avoir une tendance générale des résultats, nous avons fixé le taux

**Table 1** Différentes situations prises en considération lors de la simulation

Situation $N$	$H_1$	$\rho$	lois NBUE		loi $exp$	loi NWUE	
			$E_2(\lambda)$	$W(a, b)$	$E(B_1)$	$W(a, b)$	$\Gamma(a, b)$
1		0.3	2.5	(5.5163, 4)	5.00	(0.3, 0.2664)	(0.5, 10)
2	0.2	0.6	5	(11.0326, 4)	10.00	(0.3, 0.2373)	(0.5, 20)
3		0.9	7.5	(16.5489, 4)	15.00	(0.3, 0.2236)	(0.5, 30)
4		0.3	1	(2.2065, 4)	2.00	(0.5, 0.3699)	(0.5, 4)
5	0.5	0.6	2	(4.4130, 4)	4.00	(0.5, 0.3099)	(0.5, 8)
6		0.9	3	(6.6196, 4)	6.00	(0.5, 0.2839)	(0.5, 12)
7		0.3	0.625	(1.3791, 4)	1.25	(0.5, 0.4156)	(0.5, 2.5)
8	0.8	0.6	1.250	(2.7582, 4)	2.50	(0.5, 0.3506)	(0.5, 5.0)
9		0.9	1.875	(4.1372, 4)	3.75	(0.5, 0.3150)	(0.5, 7.5)
10		0.3	0.500	(1.1033, 4)	1	(0.5, 0.5000)	(0.5, 2.0)
11	1	0.6	1.000	(2.2065, 4)	2	(0.5, 0.3754)	(0.5, 4.0)
12		0.9	1.500	(3.3098, 4)	3	(0.5, 0.3333)	(0.5, 6.0)



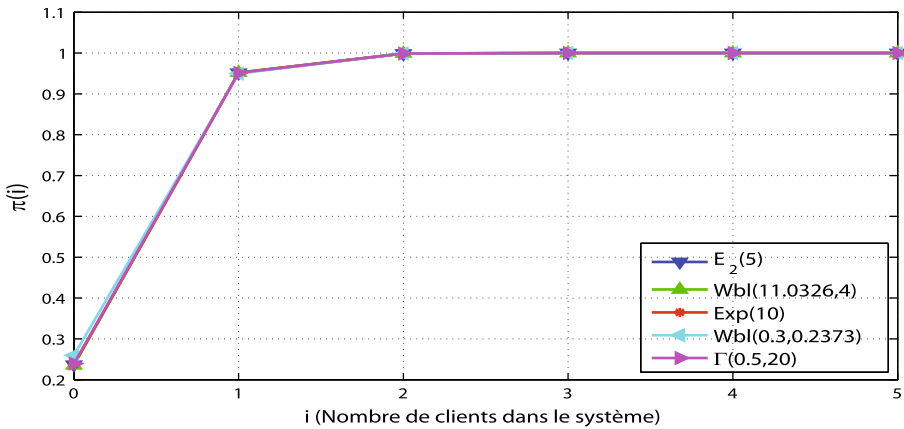


Fig. 3 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.6$  et  $H_1 = 0.2$

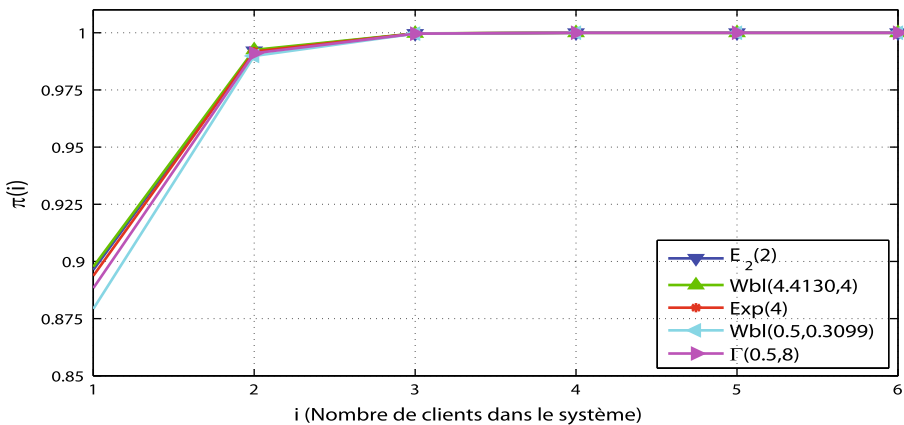


Fig. 4 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.6$  et  $H_1 = 0.5$

des arrivées  $\lambda = 0.3$  et le taux de rappels  $\mu = 1$ . En outre, nous avons considéré plusieurs situations de variation de  $\beta_1$ ,  $H_1$  et  $\rho$  qui sont résumées dans le tableau suivant:

Pour un temps de simulation  $t_{max} = 10,000$  unités de temps et  $n = 100$  (nombre de répliquions), les résultats obtenus pour les situations présentées dans le Tableau 1 nous permettent de constater que:

- Les bornes stochastiques données dans le Théorème 6 dépendent de l'intensité du trafic  $\rho$  (voir les Figs. 3, 4, 5) ainsi que de la probabilité  $H_1$  (voir les Figs. 6, 7, 8).
- Si la probabilité  $H_1$  est assez petite (la probabilité de découragement des clients est importante) ou l'intensité du trafic est faible alors le système M/G/1/1 avec rappels se comporte de la même manière qu'un système M/M/1/1 avec rappels (voir les Figs. 3, 4, 5, 6, 7, 8).
- Si la probabilité  $H_1$  est assez grande ou l'intensité du trafic est élevée alors les caractéristiques du système M/G/1/1 avec rappels s'éloignent de celles du système M/M/1/1 avec rappels.

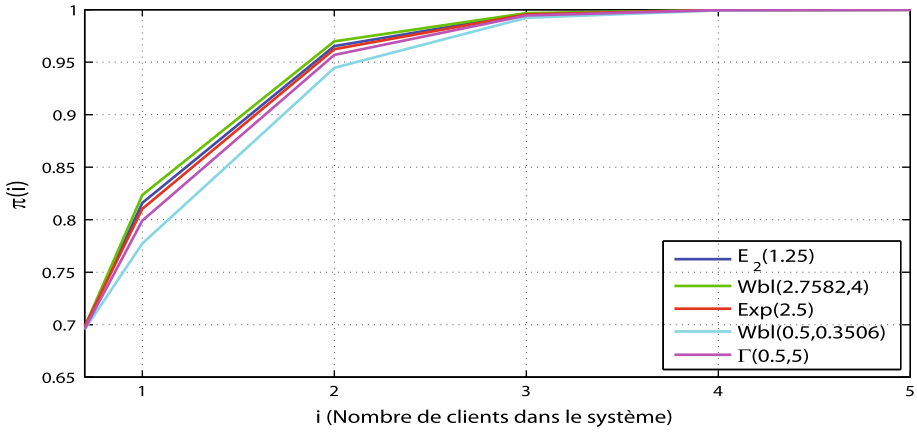


Fig. 5 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.6$  et  $H_1 = 0.8$

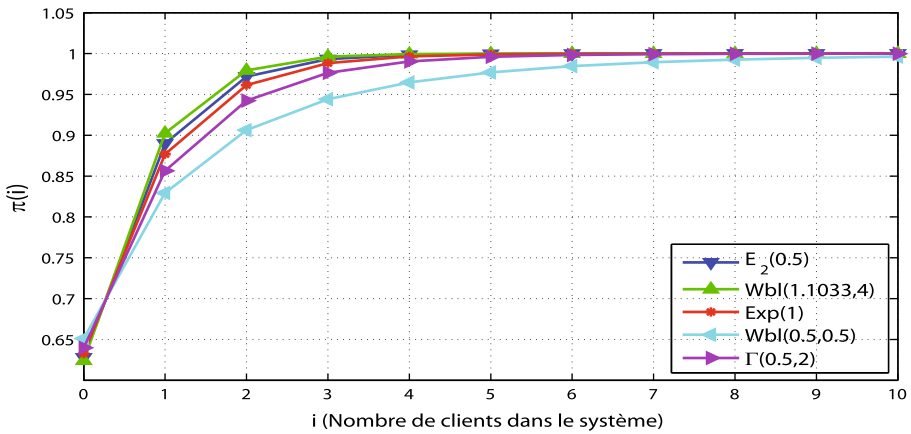


Fig. 6 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.3$  et  $H_1 = 1$

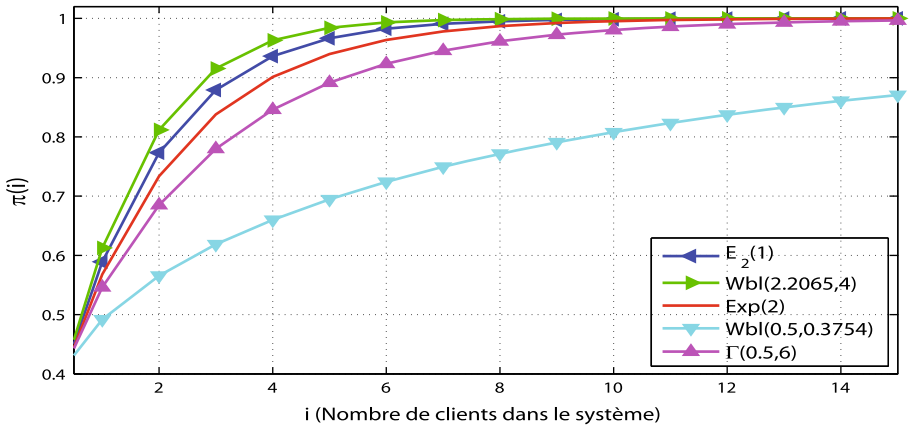


Fig. 7 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.6$  et  $H_1 = 1$

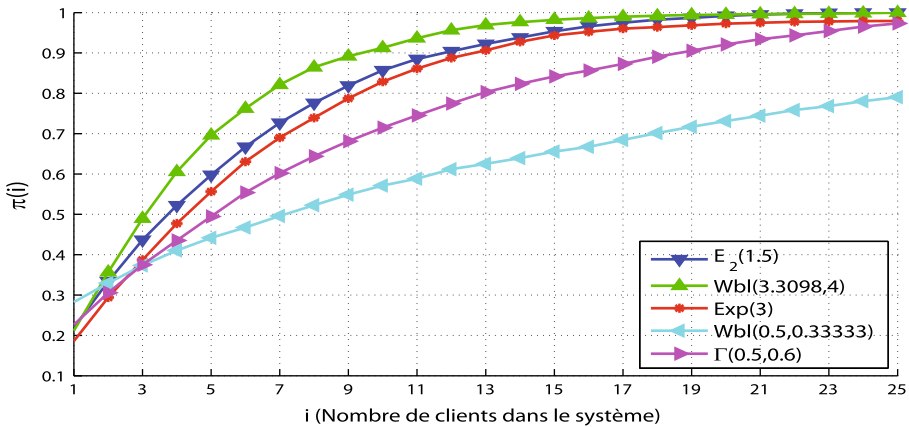


Fig. 8 Comparaison des probabilités stationnaires des systèmes: cas  $\rho = 0.9$  et  $H_1 = 1$

D'une manière générale, les résultats théoriques obtenus sont confirmés par les résultats de simulation. De plus, si l'intensité du trafic et la probabilité  $H_1$  sont faibles alors les bornes stochastiques en question sont une bonne approximation pour les probabilités stationnaires du modèle considéré dans notre étude et ce quelque soit la distribution des temps de service  $G$  (NBUE ou NWUE). Par conséquent, les performances d'un tel système (nombre moyen de clients dans le système, le temps d'attente moyen,...) peuvent être estimés par celles du système  $M/M/1/1$  avec rappels.

## 7 Conclusion

Dans ce travail, on a établi des conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe croissant. On a montré aussi que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système  $M/G/1/1$  avec rappels est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système  $M/M/1/1$  avec rappels, si la distribution des temps de service est  $NBUE$  (respectivement  $NWUE$ ). De plus, des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques obtenus. Pour cela, on observe une bonne concordance entre les résultats analytiques et ceux issus de la simulation. D'une manière générale, les résultats de simulation obtenus confirment nos investigations analytiques.

## References

1. Artalejo, J.R.: A classical bibliography of research on retrial queues. *Math. Comput. Model.* **30**, 1–6 (1999)
2. Artalejo, J.R.: Accessible bibliography on retrial queues: progress in 2000–2009. *Math. Comput. Model.* **51**, 1071–1081 (2010)
3. Artalejo, J.R., Gómez-Corral, A.: *Retrial Queueing System: A Computation Approach*, vol. 332. Springer Edition, Berlin (2008)
4. Boualem, M., Djellab, N., Aïssani, D.: Stochastic inequalities for  $M/G/1$  retrial queues with vacations and constant retrial policy. *Math. Comput. Model.* **50**, 207–212 (2009)

5. Boualem, M., Djellab, N., Aïssani, D.: Approche régénérative de la file d'attente  $M/G/1$  avec rappels classiques et vacances exhaustives du serveur. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* **45**(1–3), 253–267 (2011)
6. Boualem, M., Djellab, N., Aïssani, D.: Stochastic approximations and monotonicity of a single server feedback retrial queue. *Math. Probl. Eng.* Article ID 536982, pp. 1–13 (2012)
7. Boualem, M., Djellab, N., Aïssani, D.: Stochastic bounds for a single server queue with general retrial times. *Bull. Iran. Math. Soc.* **40**(1), 183–198 (2014)
8. Boualem, M.: Insensitive bounds for the stationary distribution of a single server retrial queue with server subject to active breakdowns. *Adv. Oper. Res.* Article ID 985453, pp. 1–12 (2014)
9. Cohen, W.J.: Basics problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecommun. Rev.* **18**, 49–100 (1957)
10. Falin, G.I.: A survey of retrial queues. *Queueing Syst.* **7**, 127–168 (1990)
11. Falin, G.I., Templeton, J.G.C.: *Retrial Queues*, vol. 328. Chapman and Hall, London (1997)
12. Greenberg, B.S., Wolff, R.W.: An upper bound on the performance of queues with returning customers. *J. Appl. Probab.* **24**, 446–475 (1987)
13. Khalil, Z., Falin, G.: Stochastic inequalities for  $M/G/1$  retrial queues. *Oper. Res. Lett.* **16**, 285–290 (1994)
14. Oukid, N., Aïssani, A.: Bounds on busy period for queues with breakdowns. *Adv. Appl. Stat.* **11**, 137–156 (2009)
15. Shaked, M., Shanthikumar, J.G.: *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, San Diego (1994)
16. Shaked, M., Shanthikumar, J.G.: *Stochastic Orders*. Springer, New York (2007)
17. Stihl, N., Djellab, N.: Approximation of the steady state system state distribution of the  $M/G/1$  retrial queue with impatient customers. *Yugosl. J. Oper. Res.* **22**(2), 285–296 (2012)
18. Stoyan, D.: *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, vol. 217. Wiley, New York (1983)
19. Szekli, R.: *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*. Springer, New York (1995)
20. Yang, T., Templeton, J.G.C.: A survey on retrial queues. *Queueing Syst.* **2**, 201–233 (1987)