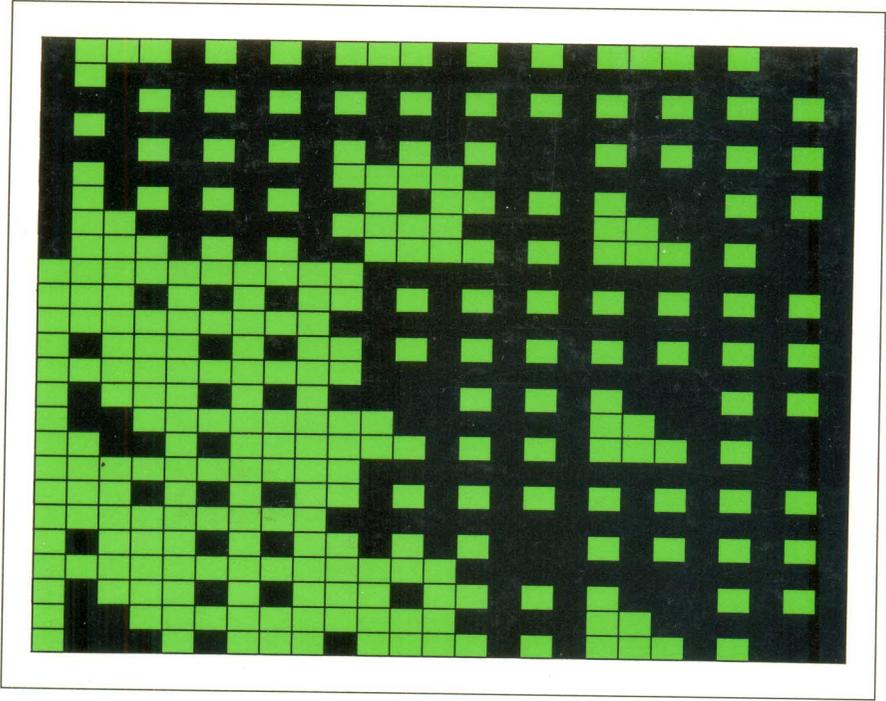


Laboratoire
Analyse et Modèles Stochastiques
CNRS - URA 1378



SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUE
ROUEN

*Comptes rendus des séances
septembre 1989 - juin 1990*



**ERGODICITÉ UNIFORME ET STABILITÉ FORTE
DES CHAÎNES DE MARKOV
APPLICATION AUX SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE.**

Djamel AISSANI
I.N.E.S de BEJAIA (Algérie)

D'abord nous rappelons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov par rapport à des normes données dans les espaces des mesures et des noyaux de transition. Puis nous appliquons le critère de stabilité forte pour la recherche de l'ergodicité et de la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov incluses pour une série de systèmes de files d'attente (après perturbation de la distribution du flot des arrivées [7], de l'intensité de service [9], du schéma de service [8], variant par rapport à une famille de normes exponentielles).

A. Critères pour l'ergodicité uniforme et la stabilité forte [1], [10]

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) , donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, où $x \in E, A \in \mathcal{E}$. Supposons que la σ -algèbre \mathcal{E} soit dénombrablement engendrée et que la chaîne X admette une probabilité invariante unique π .

Notons $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$) l'espace des mesures finies (non négatives) sur \mathcal{E} , $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$) l'espace des fonctions mesurables (non négatives) sur E . Le noyau de transition donne une application linéaire $Q : m\mathcal{E} \rightarrow m\mathcal{E}$, dont l'action sur la mesure $\mu \in m\mathcal{E}$ est égale à $\mu Q(\cdot) = \int \mu(dx)Q(x, \cdot)$.

Pour $\mu \in m\mathcal{E}, f \in f\mathcal{E}$ le symbole μf désignera l'intégrale $\int \mu(dx)f(x)$, $f \circ \mu$ le noyau de transition de la forme $f(x)\mu(A), x \in E, A \in \mathcal{E}$. Le produit PQ des noyaux de transition P et Q est le noyau $\int P(\cdot, dy)Q(y, \cdot)$.

Supposons que l'espace $m\mathcal{E}$ est muni d'une certaine norme $\| \cdot \|$, qui met en évidence l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \| \mu \| < \infty\}$

A chaque noyau de transition Q sur (E, \mathcal{E}) , nous mettons en correspondance l'opérateur linéaire $Q : \mu \rightarrow \mu Q$ sur \mathcal{M} , de norme induite définie par :

$$\| Q \| = \sup(\| \mu Q \|, \| \mu \| \leq 1)$$

Pour cela, le noyau stochastique P correspond à un opérateur linéaire positif P sur le cône $\mathcal{M}^+ = m\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{M}$. Supposons que la norme $\| \cdot \|$ est compatible avec l'ordre structurel sur \mathcal{M} et la topologie uniforme dans $m\mathcal{E}$:

- a) $\| \mu_1 \| \leq \| \mu_1 + \mu_2 \|$ pour $\mu_i \in \mathcal{M}^+$
- b) $\| \mu_1 \| \leq \| \mu_1 - \mu_2 \|$ pour $\mu_i \in \mathcal{M}^+$ et $\mu_1 \perp \mu_2$

c) $|\mu|(E) \leq k \|\mu\|$ pour $\mu \in \mathcal{M}$, où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ et k une certaine constante.

Les conditions a), b), c) sont, par exemple vérifiées pour des normes de la forme $\|\mu\|_v = \int v(x) |\mu|(dx)$, où v est une fonction mesurable, différente de zéro (pas nécessairement bornée).

Supposons également que l'opérateur linéaire $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est borné :

d) $\|P\| < \infty$. Notons $\Pi = \mathbb{1} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P , où $\mathbb{1} \in f\mathcal{E}$ est la fonction identiquement égale à l'unité, I l'opérateur identité dans \mathcal{M} et considérons la moyenne de Césaro $P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s$

Définition 1

La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si elle admet une mesure invariante probabiliste unique π et si $\|P^{(t)} - \Pi\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

Pour le cas où $\|\mu\| = |\mu|(E)$, l'ergodicité uniforme des chaînes ont été étudiées dans [4](chap.5), [5](chap.6) (chaînes à noyau de transition quasicomact) et [6] (chaînes récurrentes fortement positives). Les nombreux exemples traités (voir bibliographie) montrent qu'une large classe de chaînes de Markov (de type marches aléatoires) n'ont pas la propriété de récurrence fortement positive et ne sont pas quasicomactes. Cependant, ces chaînes sont uniformément ergodiques pour un choix judicieux de la norme $\|\cdot\|$.

Théorème 1

La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty$

Nous introduisons la période $d(X)$ de la chaîne X :

$$d(X) = \sup_t \dim \{\mu \in \mathcal{M} : \mu = \mu P^t\}$$

Dans le cas où $d(X) = 1$, la chaîne est dite apériodique. Définissons le coefficient d'ergodicité de la chaîne X ,

$$\Lambda_t(P) = \sup \{\|\mu P^t\|; \|\mu\| \leq 1, \mu(E) = 0\}$$

Théorème 2

Une chaîne de Markov X , récurrente au sens de Harris est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1) $\Lambda_t(P) < 1$ pour un certain $t \leq 1$
- 2) $\Lambda_t(P) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
- 3) Il existe un opérateur compact K tel que $\|P^t - K\| < 1$ pour certain $t \geq 1$ et $d(X) = 1$
- 4) $\|P^t - \Pi\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
- 5) $\|P^t - \Pi\| = O(\rho^t)$ pour $t \rightarrow \infty$ et pour certain $0 < \rho < 1$.

Définition 2

La chaîne X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \varepsilon\}$ admet une probabilité invariante unique ν et $\|\nu - \pi\| \rightarrow 0$ quand $\|Q - P\| \rightarrow 0$

Théorème 3

La stabilité forte de la chaîne de Markov X par rapport à la norme $\| \cdot \|$ est équivalente à son ergodicité uniforme dans cette même norme. C'est pourquoi, pour chaque noyau Q de mesure invariante ν , $\| \nu - \pi \| = 0(\| Q - P \|)$ et $\sup_t \| Q^t - P^t \| = 0(\| Q - P \|)$ pour $\| Q - P \| \rightarrow 0$

Théorème 4

La propriété d'ergodicité uniforme de la chaîne X par rapport à la norme $\| \cdot \|$ se conserve pour de petites perturbations du noyau P .

Pour démontrer l'ergodicité uniforme et l'estimation de la vitesse de convergence dans le théorème 3, on peut utiliser le critère de stabilité forte suivant:

Théorème 5

Une chaîne de Markov X , récurrente au sens de Harris est uniformément ergodique par rapport à la norme $\| \cdot \|$ et apériodique si et seulement si, pour certains $n \geq 1$, $\alpha \in m\mathcal{E}^+$, $h \in f\mathcal{E}^+$ sont vérifiées les conditions :

- a) $\pi h > 0$, $\alpha 1 > 0$, $\alpha h > 0$
- b) Le noyau $T = P^n - h\alpha$ est non négatif
- c) $\| T^m \| < 1$ pour un certain $m \geq 1$

De plus, la condition c) découle de l'ergodicité uniforme et de l'apériodicité de X pour tout n, α, h vérifiant a), b).

Remarque 1: Pour $\| \mu \| = | \mu | (E)$, les conditions du théorème sont équivalentes aux conditions de Doeblin pour le noyau P quasicompact (voir [4]).

Remarque 2: Pour la classe de norme introduite précédemment $\| \cdot \|_v$, la condition c) du théorème est équivalente à la condition :

$c_v) T^m v(x) \leq \rho v(x)$ pour tout $x \in E$ et un certain $\rho < 1$. C'est pourquoi le choix de la norme correspondante (convenable) $\| \cdot \|_v$ conduit à rechercher une fonction ρ - excessive v .

B) Application aux systèmes de files d'attente

Les inégalités de stabilité obtenues peuvent être utilisées pour estimer la précision des caractéristiques recherchées des systèmes de files d'attente, pour de petites perturbations des paramètres de ces systèmes.

1. Estimation de la stabilité forte dans un système M/G/1 [7].

Nous exposons ici les estimations de la stabilité forte de la distribution stationnaire de la taille de la file dans un système M/G/1. La perturbation concerne le flot des arrivées. On démontre des inégalités de type :

$$\sum_n \beta^n | \nu_n - \pi_n | \leq c_1(\beta) \mathcal{V}_\varepsilon(G, E)$$

$$\int \exp(\varepsilon t) | W - E | (dt) \leq c_2(\varepsilon) \mathcal{V}_\varepsilon(G, E)$$

où

- ν_n est la W -distribution stationnaire du processus nombre de demandes et du temps jusqu'à l'arrivée de la demande suivante dans un système GI/G/1 (de distribution du flot des arrivées G).

- π_n les mêmes distributions pour le système M/G/1 de distribution exponentielle E du flot des arrivées.

On suppose que la distance de variation entre les distributions G et E est suffisamment petite $\mathcal{V}_\varepsilon(G, E) = \int \exp(\varepsilon t) |G - E| (dt) \leq \rho_\varepsilon$

Ici, $|\mu|$ désigne la variation de la mesure μ , $\beta > 1$ et $\varepsilon > 0$ sont des paramètres donnés. On obtient également l'estimation des constantes $C_1(\beta)$, $C_2(\beta)$ et ρ_ε .

2. Système M2/G2/1 avec priorité relative [9]

Considérons un système M2/G2/1 avec priorité relative, de fonction de répartition de la durée de service du flot prioritaire B_1 (resp. non prioritaire B_2) et d'intensité du flot non prioritaire λ (resp. prioritaire $\lambda\theta$).

Si le paramètre θ est petit (i.e que les pannes prioritaires se produisent rarement dans le système), la partie du système M2/G2/1 liée aux demandes prioritaires peut être interprétée comme une (petite) perturbation du système M/G/1, de paramètre du flot des arrivées λ et de fonction de répartition de la durée de service B_2 .

Notons par $\pi_\theta(\cdot, \cdot)$ [resp. $\pi_0(\cdot, \cdot)$] la distribution stationnaire conjointe du processus nombre de demandes de la première et de la deuxième priorité du système M2/G2/1 (resp. du système M/G/1). Si la condition suivante est vérifiée :

$\lambda E[\xi_2] < 1$, et il existe $a > 0$ $E[\exp(a\xi_2)] = \int \exp(au)dB_2(u) < \infty$ alors, on obtient une inégalité de type

$$\| \pi_\theta - \pi_0 \|_v = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} v(i, j) | \pi_\theta(i, j) - \pi_0(i, j) | \leq \theta W$$

où W est estimé exactement.

3. Estimation de la stabilité forte dans un système G/M/ ∞ [8]

Considérons un système de files d'attente G/M/m de distribution quelconque H des intervalles entre les moments d'arrivées des demandes et soit P_∞ (resp. P_m), le noyau de transition de la chaîne incluse du système G/M/ ∞ (resp. G/M/m).

Si $\int_0^\infty dH(t)/t < \infty$ (1), alors $\| P_m - P_\infty \|_v \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$, où $\| \mu \|_v = \sum_{n \geq 0} v^n |\mu_n|$ pour tout $v > 1$

D'autre part, nous désignons par π^m (resp. π^∞), la distribution stationnaire du processus nombre de demandes après le moment d'arrivée de la n -ième demande du système G/M/m (resp. G/M/ ∞).

Si la condition (1) est vérifiée alors, pour tout $v > 1$,

$$\| \pi^m - \pi^\infty \|_v = \sum_{i \geq 0} v^i \left| \prod_i^m - \prod_i^\infty \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Bibliographie

- [1] AISSANI D., KARTASHOV N.V., Ergodicity and Stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels., *C. R. Academy of Sciences U.S.S.R.*, ser. A, **11**, 1983, pp.3-5 (Russe).
- [2] AISSANI D., Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de Markov., *Cahiers Mathématiques* **1**, 1988, pp. 7-12.
- [3] STOYAN D., *Qualitative eigenschaften und abschätzungen stochastischer modelle*, Akademie Verlag, Berlin, 1977.
- [4] NEVEU J., *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1964.
- [5] REVUZ D., *Markov chains*, North Holland Elsevier, 1975.
- [6] KOROLIOK V.S, TURBIN A.F, *Processus semi-Markoviens* (écrit en russe), N. Doumka, 1976.
- [7] AISSANI D., KARTASHOV N.V., Strong stability of an imbedded Markov chain in an $M/G/1$ system, *J. Theory of Prob. and Math. Stat.* **29**, 1984, American Math. Soc.1-5.
- [8] AISSANI D., *Proceeding of the C.M.M.N.I.2*, Rabat (Marocco), Vol.1, pp.106-112.
- [9] AISSANI D., *Proceeding of the S.E.A.M.2*, Kumasi, (Ghana), 1990.
- [10] KARTASHOV N.V, *Theory of Prob. and Math. Stat.* **30**, 1985, pp.71-89.

AISSANI Djamel
I.N.E.S. de BEJAIA
BEJAIA (Algérie)

SOMMAIRE

Avant-propos	5
19/10/89 SAADA Ellen <i>Hydrodynamique du processus d'exclusion simple</i>	7
26/10/89 ROBERT Christian <i>Faut-il accepter ou rejeter les p-values ? Une alternative à Neyman-Pearson pour les tests</i>	13
09/11/89 HANSEL Georges et TROALLIC Jean-Pierre <i>Sur une classe de fonctions faiblement presque périodiques</i>	25
16/11/89 GEFFROY Jean <i>Convergence des processus ponctuels et convergence des suites aléatoires associées</i>	33
14/12/89 BLANCHARD François et HANSEL Georges <i>Entropie et mélange topologiques</i>	39
11/01/90 RAVISHANKAR Krishnamurti <i>On some limit theorems in the study of an elementary neural network model</i>	41
18/01/90 LANDIM Claudio <i>Grandes déviations pour le processus d'exclusion simple symétrique</i>	47
25/01/90 FROLÍKOVÁ Ivana <i>Approximation stochastique des observations retardées</i>	53
22/02/90 et 15/03/90 DUCHAMP Gérard <i>Algèbres de Lie libres</i>	59
09/03/90 FRICKER Christine <i>Étude de files d'attentes avec redemande</i>	75
22/03/90 KROB Daniel <i>Algèbres de Lie partiellement commutatives</i>	81
19/04/90 ITMI M'hamed <i>À propos des réseaux de Petri</i>	91
26/04/90 MOCANU Petru <i>Subordination différentielle dans le plan complexe</i>	105
03/05/90 COCOZZA-THIVENT Christiane <i>L'algorithme E.M. vu par les praticiens. Applications à la reconnaissance de la parole et au traitement d'images</i>	109

10/05/90	AISSANI Djamel	
	<i>Approximation des chaînes de Markov. Applications aux files d'attente</i>	115
17/05/90	BERGER James O.	
	<i>Testing precise hypotheses : the conflict between classical and Bayesian approaches</i>	121
31/05/90	LANÉRY Étienne	
	<i>L'exhaustivité en contrôle impulsif stochastique</i>	125
07/06/90	COTTRELL Marie	
	<i>Réseau de neurones : différentes approches</i>	131
14/06/90	STRAWDERMAN William	
	<i>Combining biased and unbiased estimators of location</i>	139

Les conférences suivantes ne font pas l'objet d'une publication dans ce volume.

02/11/89	LEGROS Stéphane	
	<i>Construction par récurrence transfinie et mesurabilité</i>	
23/11/89	MICLO Laurent	
	<i>Recuit simulé sur \mathbb{R}^n</i>	
30/11/89	STRELCYN Jean-Marie	
	<i>Sur les intégrales premières des systèmes linéaires</i>	
07/12/89	N'DONG N'GUEMA Eugène	
	<i>Évaluation des constantes dans la méthode BCa de construction d'intervalles de confiance</i>	
01/02/90	RUCKEBUSCH Guy	
	<i>Le traitement du signal et l'analyse multi-échelle</i>	
01/03/90	COUCHOURON Jean-François	
	<i>Des semi-groupes linéaires aux semi-groupes non-linéaires dans les espaces de Banach</i>	
29/03/90	HIRSCH Francis	
	<i>Une extension du théorème de Girsanov</i>	
26/04/90	TROALLIC Jean-Pierre	
	<i>Équicontinuité, structure uniforme et dénombrabilité dans les groupes localement compacts</i>	

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 1989/1990 au séminaire de mathématiques du laboratoire d'Analyse et Modèles Stochastiques. Ils sont centrés autour des probabilités et statistiques, avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains. Sans imposer une longueur aux auteurs, nous leur avons cependant demandé d'être plutôt brefs, sauf s'ils estimaient que c'était l'occasion d'un article de survol.

Le comité de lecture a veillé à ce que le tout soit agréable à voir et à lire.

Maquette de couverture : Danielle CIMPELLO

Illustration : automate stochastique

I.S.B.N. 2-87775-025-6

Prix public : 150 F