

ДОПОВІДІ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР

СЕРІЯ А



ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
ТА ТЕХНІЧНІ НАУКИ

11

1983

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Акад. АН УРСР К. М. СИТНИК
(головний редактор)

Акад. АН УРСР Ф. С. БАБИЧЕВ
(заст. головного редактора)

Акад. АН УРСР В. О. БЕЛІЦЕР

Акад. АН УРСР С. М. ГЕРШЕНЗОН

Акад. АН УРСР Ф. Б. ГРИНЕВИЧ

Акад. АН УРСР А. М. ГРОДЗІНСЬКИЙ

Акад. АН УРСР В. С. ГУТИРЯ

Акад. АН УРСР О. С. ДАВИДОВ
(заст. головного редактора)

Акад. АН УРСР Д. А. ДУДКО

Акад. АН УРСР В. Н. ЄРЕМЕНКО
(заст. головного редактора)

Акад. АН УРСР В. С. КОРОЛЮК

Акад. АН УРСР Ю. С. ЛІПАТОВ

Акад. АН УРСР О. П. МАРКЕВИЧ

Акад. АН УРСР В. О. МАРЧЕНКО

Акад. АН УРСР Г. С. ПИСАРЕНКО

Акад. АН УРСР Я. С. ПІДСТРИГАЧ

Акад. АН УРСР П. М. СЕРКОВ

Акад. АН УРСР В. І. СКУРИХІН

Акад. АН УРСР В. І. ТОЛУБІНСЬКИЙ

Акад. АН УРСР А. В. ЧЕКУНОВ

Акад. АН УРСР В. П. ШЕСТОПАЛОВ

Акад. АН УРСР М. П. ЩЕРБАК

Ю. Г. АБАНИНА

(заст. головного редактора)

Адреса редакції: 252601 Київ 1, вул. Героїв революції, 4

тел. 29 75 98 — відповідальний секретар

29 46 31 — редактори

УДК 519.21

Д. Ж. АЙССАНИ, М. В. КАРТАШОВ

**ЕРГОДИЧНІСТЬ ТА СТІЙКІСТЬ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА
 ПО ВІДНОШЕННЮ ДО ОПЕРАТОРНИХ ТОПОЛОГІЙ
 У ПРОСТОРІ ПЕРЕХІДНИХ ЯДЕР**

(Представлено академіком АН УРСР В. С. Королюком)

Нехай $X = (X_t, t \geq 0)$ — однорідний ланцюг Маркова, що набуває значення у вимірному просторі (E, \mathfrak{E}) , та заданий регулярним перехідним ядром $P(x, A), x \in E, A \in \mathfrak{E}$. Припустимо, що σ -алгебра \mathfrak{E} є зліченно породженою, а ланцюг X має єдину ймовірнісну інваріантну міру π .

Позначимо $m\mathfrak{E}$ простір скінченних мір на \mathfrak{E} , $f\mathfrak{E}$ простір вимірних функцій на E , $m\mathfrak{E}^+$ та $f\mathfrak{E}^+$ конуси невід'ємних елементів з $m\mathfrak{E}$ та $f\mathfrak{E}$. Перехідне ядро Q задає лінійне відображення $Q: m\mathfrak{E} \rightarrow m\mathfrak{E}$, дія якого на $\mu \in m\mathfrak{E}$ дорівнює $\mu Q(\cdot) = \int \mu(dx) Q(x, \cdot)$. Для $\mu \in m\mathfrak{E}$, $f \in f\mathfrak{E}$ символом μf позначимо інтеграл $\int \mu(dx) f(x)$, а $f \circ \mu$ — перехідне ядро вигляду $f(x) \mu(A), x \in E, A \in \mathfrak{E}$. Добуток PQ перехідних ядер P, Q є ядро $\int P(\cdot, dy) Q(y, \cdot)$.

Нехай простір $m\mathfrak{E}$ наділений деякою нормою $\|\cdot\|$, що задає в $m\mathfrak{E}$ банахів простір $m = \{\mu \in m\mathfrak{E} : \|\mu\| < \infty\}$. Поставимо у відповідність кожному перехідному ядру Q на (E, \mathfrak{E}) лінійний оператор $Q: m \rightarrow m$ на m з нормою

$$\|Q\| = \sup (\|\mu Q\|, \|\mu\| \leq 1).$$

При цьому стохастичному ядру P відповідає лінійний додатний оператор P на конусі $m^+ = m \cap m\mathfrak{E}^+$.

Припустимо, що норма $\|\cdot\|$ узгоджена з структурою порядку на m та рівномірною топологією в $m\mathfrak{E}$:

- а) $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|$ при $\mu_i \in m^+$
- в) $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|$ при $\mu_i \in m^+$ та $\mu_1 \perp \mu_2$
- с) $|\mu|(E) \leq k \|\mu\|$ при $\mu \in m$, де $|\mu|$ — варіація міри μ , а k — деяка постійна.

Умови а), в), с) задовольняють, наприклад, норми $\|\mu\|_v = \int v(x) |\mu|(dx)$, де v — довільна вимірна функція, що відділена знизу від нуля (не обов'язково обмежена), а також норми $\|\mu\|_{q,\varphi} = \left(\int |\mu'_\varphi|^q d\varphi\right)^{1/q}$ при $\mu \ll \varphi$ та $\|\mu\|_{q,\varphi} = \infty$ в інших випадках, де μ'_φ — похідна μ по φ , а φ — скінченна додатна міра.

Припустимо також, що лінійний оператор $P: m \rightarrow m$ обмежений:

д) $\|P\| < \infty$.

Позначимо $\Pi = 1 \circ \pi$ стаціонарний проектор ядра P , де $1 \in f\mathfrak{E}$ функція, що тотожно дорівнює одиниці, I — одиничний оператор в m , та розглянемо середні по Чезаро $P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=1}^{t-1} P^s$.

Визначення 1. Ланцюг X рівномірно ергодичний по відношенню до норми $\|\cdot\|$, якщо він має єдину ймовірнісну інваріантну міру π та $\|P^{(t)} - \Pi\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

У випадку, коли $\|\mu\| = |\mu|(E)$, рівномірно ергодичні ланцюги вивчались в роботах [1] (сильно додатньо рекурентні ланцюги), [2, гл. 5],

[3, гл. 6] (ланцюги з квазікомпактним перехідним ядром). Наведені в [4, 5] приклади свідчать, що для широкого класу ланцюгів Маркова (типу випадкових блукань) властивість сильної додатної рекурентності не справджується, але ці ланцюги рівномірно ергодичні при відповідному виборі норми $\|\cdot\|$.

Теорема 1. Ланцюг X рівномірно ергодичний по відношенню до норми $\|\cdot\|$ тоді і тільки тоді, коли оператор $I - P + \Pi$ обмежено обернений: $\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty$. Ця умова еквівалентна ізольованості одиниці в спектрі оператора $P: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$.

В умовах теореми 1 оператори P^t , взагалі кажучи, не повинні збігатися, оскільки ланцюг X може бути періодичним. У зв'язку з цим визначимо період $d(X)$ ланцюга X рівністю

$$d(X) = \sup_t \dim \{ \mu \in \mathfrak{m} : \mu = \mu P^t \}.$$

У випадку, коли $d(X) = 1$, назвемо ланцюг X аперіодичним.

Теорема 2. Нехай ланцюг X рівномірно ергодичний по відношенню до норми $\|\cdot\|$.

Тоді він має скінченний період $d(X) = d$, й існує розбиття простору E ; $E = \bigcup_{i=0}^{d-1} E_i$, $E_i \in \mathfrak{E}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, таке, що при кожному $1 \leq i \leq d$ звуження P_i ядра P^d на простір $(E_i, E_i \cap \mathfrak{E})$ є стохастичним перехідним ядром, яке відповідає аперіодичному рівномірно ергодичному ланцюгу Маркова на E_i по відношенню до норми $\|\mu(\cdot)\|_i = \|\mu(E_i \cap \cdot)\|$, а множина E_0 неістотна: $\pi(E_0) = 0$ та $\|\mu P^{(t)}\|_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ рівномірно на множині $\{\mu : \|\mu\| \leq 1\}$.

Враховуючи теорему 2, обмежимося вивченням аперіодичного випадку. Визначимо такий показник ергодичності ланцюга X :

$$\Lambda_t(P) = \sup (\|\mu P^t\|, \|\mu\| \leq 1, \mu(E) = 0).$$

Теорема 3. Рекурентний за Харрісом ланцюг Маркова X рівномірно ергодичний в нормі $\|\cdot\|$ та аперіодичний тоді і тільки тоді, коли виконується одна з еквівалентних умов:

- 1) $\Lambda_t(P) < 1$ при деякому $t \geq 1$,
- 2) $\Lambda_t(P) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,
- 3) існує компактний оператор K такий, що $\|P^t - K\| < 1$ при деякому $t \geq 1$ та $d(X) = 1$,
- 4) $\|P^t - \Pi\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,
- 5) $\|P^t - \Pi\| = O(\rho^t)$ при $t \rightarrow \infty$ для деякого $0 < \rho < 1$.

Визначення 2. Ланцюг X сильно стійкий по відношенню до норми $\|\cdot\|$, якщо кожне стохастичне ядро Q в деякому околі $\{Q : \|Q - P\| < \varepsilon\}$ має єдину ймовірнісну інваріантну міру ν та $\|\nu - \pi\| \rightarrow 0$ при $\|Q - P\| \rightarrow 0$.

Теорема 4. Сильна стійкість ланцюга X по відношенню до норми $\|\cdot\|$ еквівалентна його рівномірній ергодичності в цій нормі. При цьому для кожного ядра Q з інваріантною мірою ν $\|\nu - \pi\| = O(\|Q - P\|)$, $\sup_t \|Q^t - P^t\| = O(\|Q - P\|)$, $\|Q - P\| \rightarrow 0$.

Теорема 5. Властивість рівномірної ергодичності ланцюга X по відношенню до норми $\|\cdot\|$ зберігається при малих в цій нормі збуреннях ядра P .

Для доведення рівномірної ергодичності і для оцінки збіжності в теоремах 2 і 4 можна скористатися наступним критерієм.

Теорема 6. Рекурентний за Харрісом ланцюг Маркова X рівномірно ергодичний по відношенню до норми $\|\cdot\|$ та аперіодичний тоді і тільки тоді, коли для деяких $n \geq 1$, $\alpha \in m\mathfrak{E}^+$, $f \in f\mathfrak{E}^+$ виконуються умови:

- (A) $\pi h > 0$, $\alpha 1 > 0$, $ah > 0$,
- (B) ядро $T = P^n - h \circ \alpha$ невід'ємне,
- (C) $\|T^m\| < 1$ при деякому $m \geq 1$.

Крім того, умова (C) впливає з рівномірної ергодичності та аперіодичності X при будь-яких n , α , h , що задовольняють (A), (B).

З а у в а ж е н н я 1. При $\|\mu\| = |\mu| (E)$ умови теореми еквівалентні умові Деблінна квазікомпактності ядра P [2].

З а у в а ж е н н я 2. Для класу норм $\|\cdot\|_v$, введених вище, умова (С) теореми еквівалентна умові (Сv) $T^m v(x) \leq \rho v(x)$ для всіх $x \in E$ та деяких $m \geq 1$, $0 < \rho < 1$. Тому вибір відповідної норми $\|\cdot\|_v$ зводиться до відшукування ρ -ексцесивної функції v . Методи побудови таких функцій для ряду класів ланцюгів Маркова наведені в [3, 4].

Наведемо для прикладу

Н а с л і д о к. Нехай $E = Z_+$, ланцюг X має один істотний клас станів і задається за допомогою матриці $P = (P_{ij})$, а норма $\|\cdot\|_v$ побудована по функції $v_j = v^j$, де $v \geq 1$ — деякий параметр. Припустимо, що $\sup_i \sum_j p_{ij} v^{j-i} < \infty$ для деякого $v > 1$ та $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \sum_j (j-i) p_{ij} < 0$. Тоді ланцюг X рівномірно ергодичний по відношенню до однієї з норм $\|\cdot\|_v$ при $v > 1$.

Зокрема, блукання Бернуллі на Z_+ з $p_{i,i+1} = p < q = p_{i,i-1}$ рівномірно ергодичне по відношенню до $\|\cdot\|_v$ для всіх $1 < v < q/p$ і не має цієї властивості при $v = 1$ (тобто не є сильно додатно рекурентним).

SUMMARY. Properties of uniform ergodicity and strong stability of general Markov's chains are introduced and investigated in the communication. These properties are defined with respect to the given norms in the space of measures and consist in a uniform convergence (uniform stability) of the n -step transition kernels in the induced operator topology.

1. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1976.— 184 с.
2. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 310 с.
3. Revuz D. Markov chains.— Amsterdam: North-Holland Elsevier, 1975.— 336 p.
4. Карташов Н. В. Сильно устойчивые цепи Маркова.— В кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара. М.: Всесоюз. научно-исслед. ин-т системных исследований, 1981, с. 54—59.
5. Карташов Н. В. Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления.— Киев, 1977.— 17 с.— (Препринт / АН УССР; Ин-т математики АН УССР; № 77—24).

Київський
державний університет

Надійшло
10.02.83

УДК 519.9

С. В. ДЯЧКОВСЬКИЙ

ОПЕРАТОРНІ АНАЛОГИ ДРУГОЇ ВИЗНАЧНОЇ ГРАНИЦІ

(Представлено академіком АН УРСР В. С. Королюком)

Нехай A_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, — обмежені оператори, що діють в банаховому просторі \mathfrak{B} . Припустимо, що для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k = A_\varepsilon$ збігається в операторній нормі.

В роботі досліджуються границі виду

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon \left\lfloor \frac{t}{\alpha_\varepsilon} \right\rfloor = S(t; \alpha, \mathfrak{A}), \quad (1)$$

де $t > 0$, α_ε — деяка додатна функція, що прямує до нуля разом з ε , $\left\lfloor \frac{t}{\alpha_\varepsilon} \right\rfloor$ — ціла частина числа $\frac{t}{\alpha_\varepsilon}$.

З М І С Т

Математика

<i>Айссані Дж., Карташов М. В.</i> Ергодичність та стійкість ланцюгів Маркова по відношенню до операторних топологій у просторі перехідних ядер	3
<i>Дячковський С. В.</i> Операторні аналоги другої визначної границі	5
<i>Зінченко Н. М.</i> Сильний принцип інваріантності для сум випадкових величин з мультиіндексами	9
Академік АН УРСР <i>Митропольський Ю. О., Перестюк М. О., Черникова О. С.</i> Конвергентність систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням	11
<i>Кльосов О. І.</i> Про умови відновлення сигналів по дискретних відліках	15
<i>Ковальов В. Ф., Мельниченко І. П.</i> Бігармонічні алгебри та геометрія області граничної задачі	17
<i>Константинов О. Ю.</i> Про умови існування хвильових операторів	19
<i>Рвачов В. О., Старець Г. О.</i> Деякі атомарні функції та їх застосування	22
<i>Черніков М. С.</i> Нескінченні групи, що складаються в добуток попарно переставних підгруп	24
<i>Штабалоук П. І.</i> Майже періодичні розв'язки факторизованого диференціального рівняння в частинних похідних	27

Механіка

<i>Блажівська О. В.</i> Один із підходів до розв'язування задачі дифракції акустичної хвилі на пружній оболонці	30
<i>Галієв Ш. У., Кофто Н. І., Сторожук В. Н.</i> Взаємодія бульбашкової рідини з конструкцією	34
<i>Гололобов В. І.</i> Співвідношення пружності для шаруватих п'єзокерамічних пластин	37
<i>Василенко А. Т.,</i> член-кореспондент АН УРСР <i>Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д.</i> Розв'язання задач статички товстостінних циліндричних оболонок при нежорсткому контакті шарів	39
<i>Кравець В. В., Приходько О. А.</i> Вдування поперечного звукового струменя у надзвуковий потік	43
<i>Левітас В. І.</i> До теорії великих пружно-пластичних деформацій	46

Фізика

<i>Альошин В. Г.,</i> академік АН УРСР <i>Немошкаленко В. В., Семашко О. М., Сенкевич А. Й.</i> Вплив умов нанесення діелектричних шарів на склад поверхні арсеніду галію	52
<i>Герасименко В. І., Малишев П. В., Стащенко М. О.</i> Дифузія речовини і фільтрація рідини в неоднорідному середовищі	55
Академік АН УРСР <i>Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.</i> Розсіяння Е-поляризованих електромагнітних хвиль тонкою слабопровідною циліндричною оболонкою	58
<i>Рекало М. П.</i> Проявлення нейтральних слабких струменів у процесах $\pi + q \rightarrow q + \mu^+ + \mu^-$	61
<i>Харченко В. Ф., Шадчин С. О.</i> Ефект кулонівського багаторазового розсіяння в системі трьох тіл: далекодіючий протон-дейтронний потенціал	65

Кібернетика та обчислювальна техніка

- Буй Д. Б.* Про проблему порожності для схем програм над пам'яттю 70
Шпак В. Д. Оцінка середніх збитків протягом заданого часу для обривного процесу відновлення методом статистичного моделювання 72

Енергетика

- Дудко Д. Я., Кучерявий В. І., Рена І. І.* Підвищення питомих характеристик плазми продуктів згоряння МГД пристрою відкритого циклу 75
Усинін В. І. Структурний інваріант мінімальних нестационарних і нелінійних електричних ланцюгів 78

Матеріалознавство

- Тюхтенко С. І., Баталін І. І., Стахов Д. А., Баталін В. Г., Обушенко І. М.* Магнітні властивості бінарних сплавів германію з рідкоземельними металами . 81

Журнал видається українською та російською мовами

Редактори *Н. Т. Варченко, В. Ф. Кошик, Л. Г. Дончевська, Л. М. Литвинова*

Художній редактор *Т. М. Немеровська*

Технічний редактор *О. В. Дивуля*

Коректор *Н. О. Ставрова*

Здано до набору 06.09.83. Підп. до друку 25.10.83. БФ 01994. Формат 70×108/16. Вис. друк. Ум. друк. арк. 7,7. Ум. фарбо-відб. 8,2. Обл.-вид. арк. 7,62. Тираж 340 пр. Зам. 3-679.

Київська книжкова друкарня наукової книги. 252004 Київ 4, вул. Репіна, 4.

Доклады Академии наук Украинской ССР. Серия А. Физико-математические и технические науки. № 11, 1983, ноябрь. Научный журнал Президиума АН УССР. Основан в 1939 г. Выходит ежемесячно на украинском и русском языках (на украинском языке). Адрес редакции: 252001 Киев 1, ул. Героев революции, 4. Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.