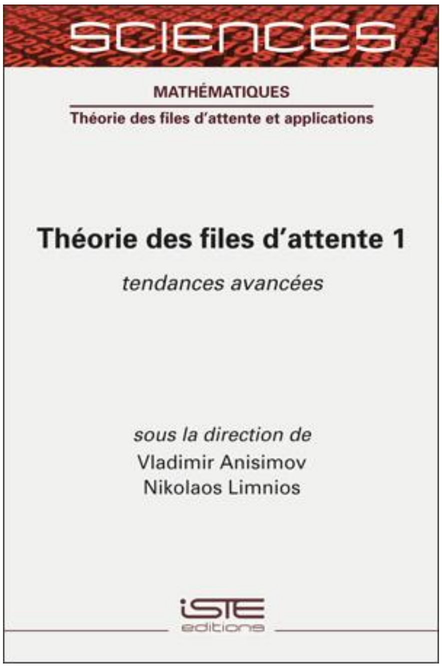
SCIENCES
MATHÉMATIQUES
Théorie des files d'attente et applications
Théorie des files d'attente 1
tendances avancées
sous la direction de
Vladimir Anisimov
Nikolaos Limnios
iSTE
editions

X


iSTE GROUP
NOUVEAUTÉS
SCIENCES
PUBLICATIONS
COMMANDES
CONTACTS
AUTEURS
CATALOGUES
Domaine : Mathématiques
Thème : Théorie des files d'attente et applications
Théorie des files d'attente 1
Tendances avancées
sous la direction de
Vladimir Anisimov, AMGEN, Royaume-Uni
Nikolaos Limnios, Université de Technologie de Compiègne, France

SCIENCES

MATHÉMATIQUES

Théorie des files d'attente et applications

Théorie des files d'attente 1

tendances avancées

sous la direction de
Vladimir Anisimov
Nikolaos Limnios

iSTE editions

Théorie des files d’attente 1

First published 2021 in Great Britain by ISTE Editions Ltd.

ISTE Editions Ltd
27-37 St George's Road
London SW19 4EU
UK

British Library Cataloguing-in-Publication Data
A CIP record for this book is available from the British Library
ISBN: 978-1-78948-001-6 (print)
ISBN: 978-1-78949-001-5 (e-book)

ERC code:
PE1 Mathematics
PE1_21 Application of mathematics in industry and society

FSC www.fsc.org
MIX
Paper from responsible sources
FSC® C013604

Printed and bound in Great Britain by CPI Group (UK) Ltd., Croydon, Surrey CR0 4YY, January 2021

9

Stabilité forte des systèmes et réseaux de files d'attente : synthèse et perspectives

Boualem RABTA, Ouiza LEKADIR et Djamil AÏSSANI
Unité de recherche LaMOS, Université de Béjaïa, Algérie

L'analyse de la stabilité des modèles de files d'attente vise à déterminer les conditions dans lesquelles le modèle mathématique est une bonne représentation du système réel malgré les erreurs d'approximation et d'estimation. Un système est stable si de petites perturbations dans ses paramètres génèrent au plus un écart limité dans ses caractéristiques. La méthode de stabilité forte a été utilisée pour l'étude de la sensibilité de divers types de files d'attente et de réseaux de files d'attente. En plus de l'affirmation qualitative de la stabilité, des estimations quantitatives de l'erreur de perturbation ont été obtenues dans la plupart des cas. Dans ce chapitre, nous examinons l'application de la méthode de stabilité forte aux files d'attente et aux réseaux de files d'attente et nous fournissons des orientations pour les recherches futures.

9.1. Introduction

Les modèles de file d'attente sont utiles pour la modélisation et l'analyse de nombreux systèmes tels que les systèmes de communication, les réseaux informatiques ainsi que les chaînes de production et de fabrication. L'analyse des modèles de files d'attente vise à évaluer un ensemble de mesures de performance

Théorie des files d'attente 1,
coordonné par Vladimir ANISIMOV et Nikolaos LIMNIOS. © ISTE Editions 2021.

comme l'utilisation des ressources, la capacité et le temps de réponse. Cependant, les systèmes réels sont généralement très compliqués et leur représentation par des modèles mathématiques n'est effectuée que par approximations. Par conséquent, le système réel est souvent remplacé par un autre, qui lui est proche dans un certain sens, mais dont la structure et/ou les composants sont plus simples. Ceci est nécessaire afin d'obtenir un modèle qui soit analytiquement traitable ou qui puisse être résolu par des méthodes numériques. De plus, les paramètres du modèle ainsi que les distributions de probabilité sous-jacentes sont estimés à partir de données empiriques au moyen de méthodes statistiques. Habituellement, ces approximations sont effectuées avec soin afin de s'assurer que le modèle construit est suffisamment robuste pour résister aux perturbations dans sa structure et ses paramètres et qu'il demeure une représentation fiable du système réel. Il est donc très important de justifier ces approximations et d'estimer l'erreur qui en résulte.

Outre les propriétés qualitatives du modèle, il est également important d'obtenir une estimation de l'écart des caractéristiques (sortie) résultant de la perturbation des paramètres (entrée). L'analyse de sensibilité est une étape très importante dans la validation des modèles mathématiques.

Différentes méthodes mathématiques ont été élaborées pour l'étude des propriétés qualitatives des systèmes stochastiques, en particulier leur stabilité. Nous utilisons ici le terme « stabilité » pour désigner la capacité du système à résister aux perturbations (robustesse, insensibilité). Les premiers résultats ont été obtenus par Rossberg (1965), Gnedenko (1970), Franken (1970) et Kennedy (1972). Kalachnikov et Tsitsiachvili (1972) ont proposé la méthode des fonctions tests inspirée de la méthode classique de Liapunov initialement appliquée pour étudier la stabilité des équations différentielles (Kalashnikov et Tsitsiachvili 1972 ; Kalashnikov 1978). Stoyan (1977) a étudié les propriétés de continuité des modèles de files d'attente en se basant sur la théorie de la convergence faible (voir aussi (Stoyan 1984)). Zolotariev (1975) et Rachev (1989) ont considéré le problème de stabilité comme un problème de continuité, qui apparaît lorsque l'on applique certains espaces métriques dans d'autres espaces. Borovkov (1984) a obtenu des théorèmes d'ergodicité et de stabilité avec des conditions minimales en utilisant la théorie du renouvellement. Cao (1998) a présenté une approche basée sur les développements en série de Maclaurin de la distribution stationnaire des chaînes de Markov pour étudier l'effet de la perturbation des paramètres (voir aussi (Heidergott et Hordijk 2003)). Anisimov (1988) a exprimé les limites des chaînes de Markov générales en termes de coefficients d'ergodicité du noyau de transition itéré, qui sont difficiles à calculer pour des espaces d'états infinis, en utilisant des méthodes théoriques et probabilistes.

La méthode de stabilité forte (Aïssani et Kartashov 1983a, 1983b ; Kartashov 1996) peut être utilisée pour étudier la stabilité d'une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans un espace d'états général lorsque la perturbation de son noyau de transition est faible par rapport à une certaine norme. Une chaîne de Markov est dite fortement stable lorsque de petites perturbations dans les entrées (noyau de transition) peuvent conduire au maximum à un écart limité des sorties (mesure stationnaire). Dans ces conditions, les approximations et les erreurs d'estimation des paramètres entraînent un écart contrôlé des caractéristiques du système dans un certain sens. Outre l'affirmation qualitative de la stabilité (robustesse) de la chaîne de Markov considérée, la méthode de stabilité forte permet également de dériver des bornes supérieures de l'écart des caractéristiques stationnaires résultant de la perturbation (erreurs d'approximation).

Les systèmes de files d'attente sont parmi les premiers et les plus étudiés des systèmes stochastiques dans le contexte de la théorie de stabilité forte. De nombreux types de files d'attente et de réseaux de files d'attente ont été analysés et leur stabilité établie. Dans la plupart des cas, on a également obtenu des estimations quantitatives (bornes de perturbation). Ce chapitre se concentre sur l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente, passe en revue les résultats antérieurs et discute des perspectives futures.

Le reste du présent document est organisé comme suit. D'abord, nous présentons les notations et les définitions ainsi que les théorèmes de base de la théorie de stabilité forte. Ensuite, nous passons en revue l'application de la méthode de stabilité forte aux files d'attente individuelles, aux réseaux de files d'attente ainsi que l'utilisation de la méthode d'estimation de densité non paramétrique dans l'étude de ces systèmes. Le chapitre se termine par une conclusion générale avec quelques perspectives futures.

9.2. Préliminaires et notations

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène avec des valeurs dans un espace mesurable $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ (où nous supposons que la σ-algèbre $\mathcal{E}$ est dénombrablement engendrée), donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, $x \in \mathbb{E}$, $A \in \mathcal{E}$ et ayant une mesure invariante unique π.

On représente par $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$) l'espace des mesures finies (non négatives) sur $\mathcal{E}$, $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$) l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur $\mathbb{E}$.

Considérons dans l'espace $m\mathcal{E}$, l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$ avec norme $\|.\|$ compatible avec l'ordre structurel dans $m\mathcal{E}$, c'est-à-dire :

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \text{ pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, i = 1, 2 \qquad [9.1]$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \text{ pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, i = 1,2 \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2 \qquad [9.2]$$

$$|\mu|(\mathbb{E}) \leq k\|\mu\| \text{ pour } \mu \in \mathcal{M} \qquad [9.3]$$

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ, k est une constante positive finie et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$.

Nous introduisons en $m\mathcal{E}$ la famille spéciale des normes :

$$\| \mu \|_v = \int_{\mathbb{E}} v(x) \,|\, \mu \,|\, (dx), \forall \mu \in m\mathcal{E} \qquad [9.4]$$

où v est une fonction mesurable minorée par une constante positive (non nécessairement finie) sur $\mathbb{E}$. Par conséquent, les normes induites sur $f\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ auront les formes suivantes :

$$\| P \|_v = \sup\{\| \mu P \|_v, \| \mu \|_v \leq 1\} = \sup_{x \in \mathbb{E}} \left(v(x)\right)^{-1} \int_{\mathbb{E}} | P(x, dy) | \, v(y) \qquad [9.5]$$

$$\| f \|_v = \sup\{| \mu f |, \| \mu \|_v \leq 1\} \quad = \sup_{x \in \mathbb{E}} \left(v(x)\right)^{-1} | f(x) | \qquad [9.6]$$

Nous associons à chaque noyau de transition $P(x, A)$ dans l'espace des opérateurs linéaires bornés, les applications linéaires $\mathcal{L}_P : m\mathcal{E} \to m\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}_P^* :$ $f\mathcal{E} \to f\mathcal{E}$, dont les valeurs pour $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}$ sont, respectivement :

$$\mu P(A) = \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_{\mathbb{E}} \mu(dx) P(x, A), \ \ \forall A \in \mathcal{E}$$

$$Pf(x) = \mathcal{L}_P^*(f)(x) = \int_{\mathbb{E}} P(x, dy) f(y), \ \ \forall x \in \mathbb{E}$$

et à chaque fonction $f \in f\mathcal{E}$, nous associons la fonctionnelle linéaire $f : \mu \to \mu f$ telle que :

$$\mu f = \int_{\mathbb{E}} \mu(dx) f(x)$$

Pour $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}, f \circ \mu$ est le noyau de transition ayant la forme :

$$f(x)\mu(A), x \in \mathbb{E}, A \in \mathcal{E}$$

où $\circ$ désigne la convolution entre une mesure et une fonction.

DÉFINITION 9.1. La chaîne de Markov X vérifiant $\| P \|_v < \infty$ est fortement v– stable, si chaque noyau stochastique Q dans le voisinage $\{Q : \|Q - P\|_v < \epsilon\}$ admet une mesure stationnaire unique ν et :

$$\|\nu - \pi\|_v \to 0 \text{ quand } \|Q - P\|_v \to 0$$

Le résultat suivant (voir (Aïssani et Kartashov 1983a)) donne des conditions suffisantes pour la v – stabilité forte d'une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris.

THÉORÈME 9.1.– *La chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris et vérifiant $\| P \|_v < \infty$ est fortement v-stable, si les conditions suivantes sont remplies :*

1) $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\mathcal{E}^+$ *tels que* $\pi h > 0$, $\alpha \mathbb{I} = 1$, $\alpha h > 0$;

2) $T = P - h \circ \alpha$ *est un noyau non négatif* ;

3) $\exists \rho < 1$ *tel que* $Tv(x) \leq \rho\, v(x)$, $\forall x \in \mathbb{E}$.

où $\mathbb{I}$ *est la fonction identiquement égale à 1.*

Une caractéristique importante de la méthode de stabilité forte est la possibilité d'obtenir des estimations quantitatives. Le théorème suivant (voir (Kartashov 1981, 1986c)) permet d'obtenir une borne supérieure de la norme de l'écart de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X fortement stable.

THÉORÈME 9.2.– *Dans les conditions du théorème 9.1 et pour* $\Delta = (Q - P)$ *vérifiant la condition* $\| \Delta \|_v < C^{-1}(1 - \rho)$, *nous avons :*

$$\| \nu - \pi \|_v \leq \| \Delta \|_v \| \pi \|_v \, C\left(1 - \rho - C \| \Delta \|_v\right)^{-1} \qquad [9.7]$$

où :

$$C = 1 + \| \mathbb{I} \|_v \| \pi \|_v \text{ et } \| \pi \|_v \leq (\alpha v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)$$

La démonstration des théorèmes 9.1 et 9.2, des conditions supplémentaires pour la stabilité forte des chaînes de Markov homogènes et des bornes de perturbations ainsi que des résultats complets sur cette théorie sont fournis dans diverses études (Aïssani 1990 ; Aïssani et Kartashov 1983a ; Kartashov 1985, 1986a, 1986b, 1986c, 1996 ; Rabta et Aïssani 2008 ; Mouhoubi et Aïssani 2014 ; Rabta et Aïssani 2018).

Enfin, nous désignons par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{A}^+$ désigne la partie non négative de l'ensemble $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}/\{0\}$. Notons que les notations introduites dans chaque section sont indépendantes de celles du reste du document et pourraient être redéfinies dans une section différente.

9.3. Stabilité forte des systèmes de files d'attente

Les modèles de files d'attente peuvent comporter un grand nombre de paramètres susceptibles d'être perturbés étant donné qu'en pratique ils sont inconnus et doivent être approximés et/ou estimés à partir de données empiriques. Évidemment, les lois des interarrivées et des temps de service sont les premières candidates.

Nous distinguons les types de perturbations suivants :

– perturbations de paramètres : seules les perturbations de certains paramètres du système sont prises en compte. Par exemple, dans un système de file d'attente $M/M/1$, les arrivées sont distribuées selon une loi de Poisson mais le taux d'arrivée doit être estimé. Considérant la perturbation du taux d'arrivée en utilisant une distribution de même forme (exponentielle) pour les temps interarrivées, le système perturbé est également de type $M/M/1$;

– perturbations de distribution : ici, la distribution d'une variable aléatoire constitutive est inconnue et/ou approximée par une autre distribution d'une forme donnée (mais différente). Dans un système de file d'attente $M/G/1$, la distribution générale des temps de service est inconnue. Sous certaines conditions (distance), elle peut être remplacée par une distribution exponentielle avec la même moyenne. Le système résultant est de type $M/M/1$;

– perturbations non paramétriques : nous avons mis dans cette catégorie les applications de la méthode de stabilité forte où la distribution inconnue est ajustée à partir de données en utilisant des méthodes statistiques non paramétriques telles que l'estimation de la densité par la méthode du noyau.

Dans tous ces types de perturbations, la même question se pose. Les paramètres et/ou distributions estimés sont imprécis et, par conséquent, la représentation mathématique (modèle) diffère du système original. Nous devons nous assurer que les erreurs d'estimation n'auront pas une grande incidence sur la performance de notre modèle et estimer l'écart dans les mesures du performance entre le système original et sa représentation mathématique, à savoir les erreurs de perturbation.

9.3.1. *File d'attente M/M/1*

Le système de file d'attente $M/M/1$ est le modèle de file d'attente le plus simple. Les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux λ et attendent leur service devant un seul serveur. Nous dénotons par E_λ la distribution exponentielle des temps d'interarrivée. La capacité de la file d'attente est infinie, les durées de service suivent une distribution exponentielle E_μ avec un taux μ tandis que la discipline de service suit le schéma du premier entré, premier sorti (PEPS). Les mesures de performance de ce modèle sont calculées sous forme fermée. Dans cette section, nous clarifions les conditions dans lesquelles le modèle $M/M/1$ de file d'attente peut être utilisé comme une bonne approximation dans le cas où la distribution du temps d'interarrivée ou la distribution des services est différente (mais suffisamment proche en quelque sorte) de la distribution exponentielle.

9.3.1.1. *Perturbation de la distribution des temps d'interarrivée*

On considère le système de file d'attente $M/M/1$ (PEPS, ∞) tel que décrit précédemment. Soit X_n le nombre de clients dans la file d'attente juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée. $X = \{X_n : n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov homogène avec états dans $\mathbb{Z}^+$ et une matrice de transition $P = (P_{ij})_{ij\geq 0}$ où :

$$P_{ij} = \begin{cases} d_{i+1-j} = \dfrac{\lambda\mu^{i+1-j}}{(\lambda+\mu)^{i+2-j}} & \text{si } 1 \leq \text{j} \leq \text{i} + 1, \\ 1 - \sum_{k=0}^{i} d_k = (\dfrac{\mu}{\mu+\lambda})^i & \text{si j} = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.8]$$

Sous la condition que la charge $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, la chaîne de Markov X admet un vecteur stationnaire unique $\pi = (\pi_k)_{k\geq 0}$. Considérons, d'autre part, un système de file d'attente $GI/M/1$ (PEPS, ∞) où les temps d'interarrivée sont indépendants et identiquement distribués selon une distribution générale H . Les temps de service sont répartis selon une distribution exponentielle E_μ. Soit X_n^* le nombre de clients dans la file d'attente juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée. On montre très facilement que $X^* = \{X_n^* : n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov homogène avec états dans $\mathbb{Z}^+$ et une matrice de transition $P^* = (P_{ij}^*)_{i,j\geq 0}$ dans laquelle :

$$P_{ij}^{*} = \begin{cases} d_{i+1-j}^{*} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} (\mu t)^{i+1-j} \, dH(t) & \text{si } 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum_{k=0}^{i} d_k^{*} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [9.9]$$

Ici encore, il existe un vecteur stationnaire $\pi^* = (\pi_k^*)_{k\geq 0}$ unique de la chaîne de Markov X^*, à condition que la charge soit inférieure à 1. Pour que le premier système soit une bonne approximation du second, les distributions des temps d'interarrivée des deux systèmes doivent être suffisamment proches l'une de l'autre. Nous mesurons la distance entre les deux distributions à l'aide de la métrique suivante :

$$w = w(H, E_\lambda) = \int_0^{\infty} |H - E_\lambda|(dt) \quad [9.10]$$

où $|a|$ est la variation de la mesure a.

THÉORÈME 9.3.– *Soit* $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ *la charge de la file d'attente* $M/M/1$. *Alors, pour chaque* β *tel que* $1 < \beta < \frac{\mu}{\lambda}$, *la chaîne de Markov* X *est fortement* v*-stable (par rapport à la perturbation de la distribution des temps d'interarrivée) pour une fonction test* $v(k) = \beta^k$.

Pour prouver la v-stabilité forte de la chaîne de Markov X par rapport à la fonction $v(k) = \beta^k$, $\beta > 1$ nous vérifions les conditions du théorème 9.1. Supposons que $\lambda/\mu < 1$ et soient :

$$h_i = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^i \text{ pour } i \geq 0 \text{ et } \alpha_{\mathrm{j}} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \geq 1, \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}$$

Le calcul est simple. En particulier :

$$\rho = \frac{\beta\lambda}{\mu - \frac{\mu}{\beta} + \lambda} < 1 \text{ pour } 1 < \beta < \mu/\lambda \quad [9.11]$$

Le résultat suivant fournit une estimation de la distance (dans la norme $\|.\|_v$) entre les matrices de transition des deux chaînes de Markov. Cela pourrait nous indiquer à quel point le système réel ($G/M/1$) est proche de sa représentation mathématique ($M/M/1$).

THÉORÈME 9.4.– *Pour chaque β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, nous avons :*

$$\left\|P^* - P\right\|_v \leq (1+\beta)w$$

où w est donné par [9.10].

Nous sommes maintenant prêts à estimer l'écart de la distribution stationnaire qui résulte de la perturbation considérée de la distribution des temps d'interarrivée. Le théorème 9.5 donne une majoration à la différence entre les distributions stationnaires π et π^* par rapport à la norme $\|.\|_v$.

THÉORÈME 9.5.– *Dans les conditions du théorème 9.3 et pour chaque distribution H satisfaisant :*

$$w < \frac{(1-\rho)(\mu-\lambda\beta)}{(1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))}$$

nous avons :

$$\left\|\pi^* - \pi\right\|_v \leq \frac{(1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))(\mu-\lambda)\,w}{\dfrac{(\beta-1)(\mu-\lambda\beta)^3}{(\beta-1)\mu+\lambda\beta} - (2\mu-\lambda(1+\beta))(1+\beta)(\mu-\lambda\beta)\,w}$$

où ρ est donné par [9.11].

La démonstration de ce résultat est basée sur le théorème 9.2. Pour des calculs détaillés, voir (Bouallouche et Aïssani 2006a).

9.3.1.2. *Perturbation de la distribution des durées de service*

Considérons à nouveau le système de file d'attente de type $M/M/1$ (PEPS, ∞) décrit ci-avant. Cette fois, nous considérons la variable aléatoire X_n représentant le nombre de clients dans la file d'attente juste après le $n^{\text{ième}}$ départ. $X = \{X_n : n \geq 1\}$

est une chaîne de Markov homogène avec états dans $\mathbb{Z}^+$ et une matrice de transition $P = (P_{ij})_{ij \geq 0}$ où :

$$P_{ij} = \begin{cases} f_j & \text{si } i = 0 \\ f_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.12]$$

où :

$$f_k = \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}$$

Dans les conditions habituelles de charge $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, X est irréductible et apériodique. Par conséquent, elle admet un vecteur stationnaire unique π.

Considérons le système de file d'attente $M/G/1$ (PEPS, ∞) obtenu en remplaçant la distribution des durées de service dans le modèle précédent par une distribution générale F ayant la même moyenne. Soit X_n^* le nombre de clients dans la file d'attente dans ce nouveau modèle juste après le $n^{\text{ième}}$ départ. $X^* = \{X_n^* : n \geq 1\}$ est une chaîne de Markov homogène avec états dans $\mathbb{Z}^+$ et une matrice de transition $P^* = (P_{ij}^*)_{ij \geq 0}$ où :

$$P_{ij}^* = \begin{cases} f_j^* & \text{si } i = 0 \\ f_{j-i+1}^* & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.13]$$

avec :

$$f_k^* = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(t)$$

Supposons que la distribution des durées de service dans le système $M/G/1$ soit proche de la distribution exponentielle des durées de service du système $M/M/1$. Nous mesurons la distance entre les deux distributions par :

$$w = w(F, E_\mu) = \int_0^\infty |F - E_\mu|(dt) \qquad [9.14]$$

Nous prouvons d'abord le résultat suivant.

THÉORÈME 9.6.– *Supposons que la charge du système* $M/M/1$ *soit* $\lambda/\mu < 1$. *Alors, pour chaque* β *tel que* $1 < \beta < \mu/\lambda$, *la chaîne de Markov* X *est fortement* v*-stable pour une fonction test* $v(k) = \beta^k$ *par rapport à la perturbation de la distribution des durées de service.*

Pour prouver ce résultat, nous choisissons :

$$h(i) = \delta_{i0} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i > 0 \end{cases}$$

et :

$$\alpha_j = f_j$$

Ensuite, nous vérifions les conditions du théorème 9.1. En particulier, il apparaît que si $\beta < \mu/\lambda$, *alors :*

$$\rho = \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} < 1 \qquad [9.15]$$

Ce résultat intermédiaire est nécessaire pour prouver les théorèmes suivants.

LEMME 9.1.– Sous les conditions :

$$\int_0^\infty t^2 |F - E_\mu|(dt) < +\infty$$

et :

$$\int_0^\infty t|F - E_\mu|(dt) < w/\lambda$$

où w est donné par [9.14], il existe $\beta > 1$ tel que :

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - E_\mu|(dt) < \beta w$$

La distance entre les matrices de transition des deux systèmes est estimée par le résultat suivant.

THÉORÈME 9.7.– *Sous les conditions du lemme 9.1, nous avons :*

$$\left\| P - P^* \right\|_v \leq \beta_o w$$

avec $v(k) = \beta^k$ *et :*

$$\beta_o = \max\left(\beta : 1 < \beta < \frac{\mu}{\lambda} \text{et} \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} \left| F - E_\mu \right| (dt) < \beta w \right) \qquad [9.16]$$

Nous appliquons maintenant le théorème 9.2 pour estimer l'écart du vecteur stationnaire par rapport à la perturbation de la distribution des durées de service.

THÉORÈME 9.8.– *Sous les conditions du théorème 9.6 et du lemme 9.1, pour chaque* β *tel que* $1 < \beta < \mu / \lambda$ *et si :*

$$w \leq \frac{(1-\rho)}{C\beta_o}$$

nous avons :

$$\left\| \pi - \pi^* \right\|_v \leq \beta_o w C C' (1 - \rho - \beta_o w C)^{-1} = e(\beta)$$

avec $v(k) = \beta^k$, β_o *est donné par [9.16] et* ρ *est donné par [9.15] :*

$$C' = \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda\beta} \text{ et } C = \frac{2\mu - \lambda(1+\beta)}{\mu - \lambda\beta}$$

En plus des probabilités stationnaires, on peut obtenir l'écart des autres mesures de performance. Par exemple, soit N_s (respectivement, N_s^*) le nombre moyen de clients dans le système, N_q (respectivement, N_q^*) le nombre moyen de clients dans la file d'attente et T_s (respectivement, T_s^*) le temps de réponse moyen tandis que T_q (respectivement, T_q^*) est le temps d'attente moyen dans le système $M / M / 1$ (respectivement, $M / G / 1$).

THÉORÈME 9.9.– *Dans les mêmes conditions que le théorème 9.8, nous avons les inégalités :*

$$\left|N_s - N_s^*\right| = \left|N_q - N_q^*\right| < e(\beta)/\ln(\beta) \qquad [9.17]$$

$$\left|T_s - T_s^*\right| = \left|T_q - T_q^*\right| < e(\beta)/(\lambda \ln(\beta)) \qquad [9.18]$$

avec :

$$e(\beta) = \beta_O wCC'(1-\rho-\beta_O wC)^{-1}$$

Les démonstrations détaillées des résultats de cette section se trouvent dans (Bouallouche et Aïssani 2006b).

9.3.2. *Files d'attente PH/M /1 et M/PH /1*

Dans la section 9.3.1, la distribution des interarrivées (respectivement, la distribution des durées de service) est approchée par une distribution exponentielle ayant la même moyenne. C'est une condition assez stricte parce qu'en pratique peu de distributions peuvent être approximées par la distribution exponentielle à un niveau de précision acceptable. Il serait très utile de trouver une famille de distributions qui puisse approximer un grand nombre de distributions générales avec un bon niveau de précision tout en ayant des propriétés permettant des solutions analytiques du modèle de file d'attente sous-jacent. C'est précisément ce que la famille des distributions de type phase (PH) peut nous fournir. De nombreux problèmes de files d'attente de type PH peuvent être résolus analytiquement à l'aide de techniques géométriques matricielles (Latouche et Ramaswami 1999). De plus, l'ensemble des distributions PH est dense dans l'ensemble des distributions positives, ce qui permet (en théorie) d'approximer toute distribution positive par une distribution PH à n'importe quel niveau de précision désiré (Asmussen 2003).

Dans (Djabali *et al.* 2018), le modèle de file d'attente $M/PH/1$ est utilisé pour représenter un système $M/G/1$ en approximant la distribution générale des durées de service de ce dernier par une distribution PH. Ceci est réalisé en faisant correspondre les deux premiers moments des deux distributions. La distribution PH correspondante est choisie dans la famille des distributions hyperexponentielles ou hypoexponentielles en fonction de la valeur du coefficient de variabilité de la distribution originale. La confirmation de la stabilité forte de la chaîne de Markov sous-jacente ainsi que des estimations quantitatives de l'erreur de perturbation sont obtenues dans chaque cas. Des résultats similaires (Djabali *et al.* 2015) existent pour la file d'attente $PH/M/1$ lorsque l'on perturbe la distribution des temps d'interarrivée.

9.3.3. *Files d'attente G/M/1 et M/G/1*

Cette section concerne la perturbation de la distribution des durées de service (respectivement, les temps d'interarrivée) dans un système de file d'attente $G/M/1$ (respectivement, $M/G/1$). La distribution exponentielle est remplacée par une distribution générale avec la même moyenne et le résultat de cette perturbation est un modèle de file d'attente $G/G/1$. Les conditions de la stabilité forte de la chaîne de Markov sous-jacente sont clarifiées dans chaque cas et on obtient des bornes supérieures de la déviation des vecteurs stationnaires.

9.3.3.1. *Stabilité forte dans le système de file d'attente G/M/1*

Considérons un système de file d'attente $G/G/1$ avec une distribution générale des durées de service G et une distribution générale des temps d'interarrivées F. Les notations suivantes sont utilisées : θ_n (l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client), ω_n (l'instant de départ du $n^{\text{ième}}$ client), γ_n (l'intervalle de temps de θ_n au départ du client suivant) et $V_n = V(\theta_n - 0)$ (le nombre de clients qui se trouvent dans le système immédiatement avant θ_n).

Désignons par $v_{\theta_n} = \min\{m > 0, \omega_m \geq \theta_n\}$. Alors, $\gamma_n = \omega_{v_{\theta_n}} - \theta_n$.

On définit récursivement la séquence suivante :

$$\begin{cases} T_0 = \omega_{v_{\theta_n}} - (\theta_n + \gamma_n) = 0, \\ T_k = T_{k-1} + \omega_{v_{\theta_n}+k}, \forall \mathrm{k} > 0 \end{cases} \qquad [9.19]$$

La séquence $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ décrit le processus de départ après θ_n.

Considérons également un système $G/M/1$ avec des durées de service exponentiellement distribuées avec un paramètre μ et avec la même distribution des temps d'interarrivée que ceux du système $G/G/1$. Nous introduisons les notations suivantes correspondantes : $\overline{\theta}_n$, $\overline{\omega}_n$, $\overline{\gamma}_n$ et $\overline{V}_n = \overline{V}(\overline{\theta}_n - 0)$ définis comme ci-avant. Nous définissons également le processus $\{\overline{T}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ similaire à la séquence $\{T_n\}$.

Dans ce qui suit, lorsqu'aucun domaine d'intégration n'est indiqué, on étend une intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

LEMME 9.2.– La séquence $X_n = (V_n, \gamma_n)$ forme une chaîne de Markov homogène avec espace d'états $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$ et opérateur de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j\geq 0}$ défini par :

$$Q_{ij}(x,dy) = P(V_{n+1} = j, \gamma_{n+1} \in dy / V_n = i, \gamma_n = x)$$

$$= \begin{cases} q_{i-j}(x,dy) & \text{pour } 1 \leq j \leq i, i \geq 1 \\ \Sigma_{k\geq i}\, q_k(x,dy) & \text{pour } j = 0, i \geq 0 \\ p(x,dy) & \text{pour } j = i+1,\ i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } j > \ i+1,\ i \geq 0 \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} q_k(x,dy) = \displaystyle\int_x^\infty P(T_k \leq u - x < T_{k+1}, T_{k+1} - (u-x) \in dy)dF(u) \\ p(x,dy) = \displaystyle\int_0^x P(x - u \in dy)dF(u) \end{cases} \qquad [9.20]$$

LEMME 9.3.– La séquence $\overline{X}_n = (\overline{V}_n, \overline{\gamma}_n)$ forme une chaîne de Markov homogène avec espace d'états $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$ et opérateur de transition $\overline{Q} = (\overline{Q}_{ij})_{i,j\geq 0}$ ayant la même forme que Q (lemme 9.2), où :

$$\overline{q}_k(x) = \int_x^\infty e^{-\mu(u-x)} \frac{[\mu(u-x)]^k}{k!} dF(u) \qquad [9.21]$$

REMARQUE 9.1. L'hypothèse $\overline{\tau}\mu > 1$, où $\overline{\tau}$ est le temps moyen entre les arrivées dans le système de file d'attente $G/M/1$, implique l'existence d'une distribution stationnaire $\overline{\pi}$ pour la chaîne de Markov induite $\overline{X}$. Cette distribution se présente sous la forme suivante :

$$\overline{\pi}(\{k\}, A) = \overline{\pi}_k(A) = p_k E_\mu(A), \quad \forall \{k\} \subset \mathbb{Z}^+ \text{ et } A \subset \mathbb{R}^+ \qquad [9.22]$$

où $p_k = \lim_{n\to\infty} P(\overline{V}_n = k)$ est donnée par la relation suivante :

$$p_k = (1-\sigma)\sigma^k,\ k = 0,1,2,\ldots \qquad [9.23]$$

σ est la solution unique de l'équation :

$$\sigma = F^*(\mu - \mu\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\mu-\mu\sigma)x} dF(x) \qquad [9.24]$$

F^* est la transformée de Laplace de la fonction de densité de probabilité des temps d'interarrivée des clients. Nous pouvons montrer que $0 < \sigma < 1$ (Kleinrock 1975).

Sinon, notons que :

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = k) = \frac{1}{\overline{\tau}\mu} p_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \text{ et } \lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0) = 1 - \frac{1}{\overline{\tau}\mu} \qquad [9.25]$$

où $X(t)$ représente la taille du système $G/M/1$ à l'instant t.

Les formules [9.23] et [9.25] nous permettent de calculer la distribution stationnaire de la taille de la file d'attente dans un système $G/M/1$. Malheureusement, pour le système $G/G/1$, les formules exactes ne sont pas connues. Donc, si nous supposons que le système $G/G/1$ est proche du système $G/M/1$, nous pouvons utiliser les formules [9.23] et [9.25] pour approximer les caractéristiques du système $G/G/1$ avec estimation préalable de l'erreur d'approximation correspondante.

Supposons que la distribution des durées de service du système $G/G/1$ soit proche de la distribution exponentielle avec paramètre μ. Cette proximité est caractérisée par la distance de variation :

$$W^* = W^*(G, E_\mu) = \int e^{\delta t} \,|\, G - E_\mu \,|\, (dt), \text{ où } \delta > 0 \qquad [9.26]$$

Considérons également la distance suivante :

$$W_0 = W_0(G, E_\mu) = \int |\, G - E_\mu \,|\, (dt) \qquad [9.27]$$

Nous appliquons le théorème 9.1 à la chaîne de Markov induite $\overline{X}$. On considère la fonction test :

$$\begin{array}{llll} v: & \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (k, x) & \mapsto & v(k, x) = \beta^k e^{\delta x} \end{array} \qquad [9.28]$$

où $1 < \beta < 1/\sigma$ et $0 < \delta = \mu - \dfrac{\mu}{\beta} < \mu$ et σ est donné par la relation [9.24].

Soit α une mesure définie comme suit, pour $\{j\}\times dy\in \mathcal{E}_{\mu}$, nous avons :

$$\alpha\left(\{j\},dy\right)=\alpha_j(dy)=\begin{cases}E_\mu(dy) & \text{pour j = 0}\\ 0 & \text{pour j} \neq 0\end{cases} \qquad [9.29]$$

Et la fonction mesurable :

$$\begin{aligned}&h:\mathbb{Z}^+ \text{x } \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ &(i,x) \quad \mapsto h_i(x)=h\ (i,x)=\sum\nolimits_{k\geq i}\overline{q}_k(x)\end{aligned} \qquad [9.30]$$

où $\overline{q}_k(x)$ est défini par la relation [9.21].

Nous pouvons à présent énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 9.10.– *Supposons que la condition d'ergodicité géométrique* $\mu\overline{\tau}>1$ *soit vérifiée. Alors,* $\forall\beta\in\mathbb{R}^+$ *tel que* $1<\beta<\dfrac{1}{\sigma}$, *la chaîne de Markov* $\overline{X}$ *est fortement* v *-stable pour une fonction* $v(k,x)=\beta^k e^{\delta x}$ *où :*

$$0<\delta=\mu-\frac{\mu}{\beta}<\mu$$

Afin de prouver ce résultat, nous vérifions que toutes les conditions du théorème 9.1 sont remplies (Benaouicha et Aïssani 2005). En particulier :

$$\rho=\beta F^*(\mu-\frac{\mu}{\beta})<1.$$

Le résultat suivant nous donne l'estimation quantitative de la norme de l'écart de l'opérateur de transition dans le système $G/M/1$, après perturbation de la distribution des durées de service. La démonstration est basée sur une série de lemmes démontrés dans (Benaouicha et Aïssani 2005).

THÉORÈME 9.11.– *Soit* Q *et* $\overline{Q}$ *les noyaux de transition des chaînes de Markov* X *et* $\overline{X}$, *respectivement. Supposons que pour chaque* β *tel que* $1<\beta<1/\sigma$ *les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) $G^*=\int e^{\delta t}G(dt)<+\infty$;

2) $\exists a > 0$ *tel que* $\int e^{au} dF(u) = N < +\infty$;

3) $W_0 = \int |G - E_\mu|(dt) < \dfrac{a}{a+\mu}$;

4) la condition d'ergodicité géométrique $\mu\overline{\tau} > 1$.

Alors, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\| Q - \overline{Q} \|_v \leq W^*(1 + \mu\overline{\tau}) + W_0 G^* \frac{N + \mu M}{1 - C_0}$$

où $C_0 = W_0 + \dfrac{\mu}{a+\mu} < 1$ *et* $M = \int u e^{au} dF(u) < +\infty$.

La borne supérieure de la norme de l'écart de la mesure stationnaire de la chaîne de Markov $\overline{X}$ est donnée par le théorème 9.12.

THÉORÈME 9.12.– *Soit* π et $\overline{\pi}$ *les mesures stationnaires de* X *et* $\overline{X}$, *respectivement. Si :*

$$W^* = W^*(G, E_\mu) < \frac{1-\rho}{2C(1 + \mu\overline{\tau} + C_1)}$$

et si :

$$W_0 < \frac{a}{a+\mu}$$

alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\| \pi - \overline{\pi} \|_v \leq 2[(1 + \mu\overline{\tau})W^* + C_1 W_0] \frac{C(C-1)}{1-\rho}$$

où :

$$C = 1 + \| \overline{\pi} \|_v = \frac{1 + \beta(1 - 2\sigma)}{1 - \beta\sigma}, C_1 = \frac{N + \mu M}{1 - C_0} G^* \qquad [9.31]$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème 9.2 et utilise une série de résultats intermédiaires. D'autres détails peuvent être trouvés dans des études antérieures (Aïssani 1982, 1987a, 1987b ; Benaouicha et Aïssani 2005).

9.3.3.1.1. Stabilité forte de la file d'attente M/G/1

On considère un modèle de file d'attente $G/G/1$(PEPS, ∞). Nous indiquons par τ'_n le temps d'interarrivée entre les dates d'arrivée des $(n-1)^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ clients. La séquence des durées de service indépendantes et identiquement distribuées est désignée par $\{\xi_n\}$. Soit $\theta'_n = \tau'_1 + \cdots + \tau'_n$ le moment d'arrivée du $(n+1)^{\text{ième}}$ client avec $\theta'_0 = 0$, et on considère les distributions $G(t) = P(\tau'_n < t)$ et $F(t) = P(\xi_n < t)$ avec $m = \mathrm{E}\xi_n$.

Soit q_n le nombre de clients dans le système à la fin du service du $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ client, γ_n le temps (résiduel) jusqu'à la prochaine arrivée. La séquence $X_n = (q_n, \gamma_n)$ est donc une chaîne de Markov homogène à états dans $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$ et un noyau de transition :

$$Qf(n,x) = \mathrm{E}(f(n-1, x-\xi_1), \xi_1 < x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(f(n-1+k, \theta'_k + x - \xi_1),\ \theta'_{k-1} \le \xi_1 - x < \theta'_k) \qquad [9.32]$$

où $n > 0$ et $Qf(n,x) = \mathrm{E}Qf(1,\tau'_1)$. Q peut être obtenus à partir des distributions G et F.

D'autre part, considérons un modèle de file d'attente $M/G/1$ (PEPS, ∞). Les instants d'arrivée des clients sont notées $\{\theta_n\}_{n\ge 1}$, $\theta_0 = 0$ et les interarrivées sont de moyenne $1/\lambda$. La distribution des durées de service est F. Soit P le noyau de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}$ dans le système $M/G/1$.

Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions suivantes sont remplies :

$$\lambda\, \mathrm{E}\, \xi_1 < 1,\ \mathrm{E}\, exp\,(a\xi_1) < +\infty \qquad [9.33]$$

pour un certain $a > 0$.

Supposons que la distribution des temps d'interarrivée G dans le système $G/G/1$ soit proche de la distribution exponentielle E_λ des temps d'interarrivée du modèle $M/G/1$. La distance entre les deux distributions est mesurée par :

$$w(G, E_\lambda) = \int \exp(ct) \,|\, G - E_\lambda \,|\, (dt) \qquad [9.34]$$

où $0 < c < \lambda$ est un paramètre fixe.

On considère la fonction test mesurable $v(k, x)$ sur $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$ définie par :

$$v(k, x) = \beta^k \exp(\varepsilon x),$$

et la $v-$ norme correspondante $\|\,.\,\|_{\beta\varepsilon}$.

Il est facile de prouver que $\| P \|_{\beta\varepsilon} < \infty$ sous la condition $\lambda / \mu < 1$ et pour chaque $0 < \varepsilon < \lambda$ et $1 < \beta < 1 + a\lambda^{-1}$. En outre, nous avons le résultat suivant.

LEMME 9.4.– Supposons que la condition $\lambda / \mu < 1$ soit satisfaite et soit $0 < c < \lambda$ une constante fixe. Alors, il existe $\beta_1 = \beta_1(\lambda, c, F) > 1$ et $L_1(\beta) < \infty$ tels que $\| Q - P \|_{\beta c} \leq L_1(\beta) w(G, E_\lambda)$ pour chaque $1 < \beta < \beta_1$ et chaque distribution G tels que $w(G, E_\lambda)$ soit suffisamment petit.

Soit $v(n, x) = \beta^n (exp\,(cx) + b exp(-\delta x))$. Par le fait que $b^{-1} \| T \|_{\beta c} \leq \| T \|_v$ $\leq (1 + b) \| T \|_{\beta c}$, la chaîne X_n est fortement stable par rapport à la norme $\|\,.\,\|_{\beta c}$.

Vérifions les conditions de la stabilité forte de la chaîne de Markov X.

On vérifie facilement que $\| P \|_v < \infty$.

On définit la mesure α et la fonction mesurable h sur $I \times \mathbb{R}_+$ comme suit :

$$h(n, x) = 0 \text{ pour } n > 0, h(0, x) = 1$$

$$\alpha(\{n\} \times A) = P(\theta_n \leq \xi_1 < \theta_{n+1}, \theta_{n+1} - \xi_1 \in A)$$

On peut facilement montrer que pour l'opérateur $T = P - h o \alpha$, $Tf(n, x)$ $= Pf(n, x)$ pour $n > 0$ et $Tf(0, x) = 0$. Clairement, T est non négatif.

On observe que pour $n > 0$ et $v(k, x) = \beta^k \; exp\,(-\delta x)$.

$$Tv(n, x) = \beta^{n-1} \mathrm{E}(exp\,(\delta\xi_1 - \delta x), \xi_1 < x) + \sum_{k \geq 1} \beta^{n-1+k} \times$$

$$\times \mathrm{E}(exp(-\delta\theta_k - \delta x + \delta\xi_1), \theta_{k-1} \leq \xi_1 - x < \theta_k) = \beta^{n-1} exp(-\delta x) \times$$

$$\times \mathrm{E}(exp(\delta\xi_1 - \delta x), \xi_1 < x) + \lambda(\lambda+\delta)^{-1}\beta^n \mathrm{E}(exp(\lambda(\beta-1)(\xi_1 - x), (\xi_1 \geq x) \qquad [9.35]$$

Pour $\delta = \lambda(\beta - 1)$, nous obtenons $Tv(n,x) = \rho_0 v(n,x)$, où $\rho_0 = \beta^{-1}\mathrm{E}\ exp(\lambda(\beta-1)\xi_1$. Étant donné que $\lambda / \mu < 1$, il est facile d'établir que $\rho_0 < 1$ pour $\beta < 1$ suffisamment petit.

En choisissant β et en posant $\delta = \lambda(\beta - 1)$ dans l'expression de $v(n,x)$, nous obtenons pour $n > 0$:

$$Tv(n,x) \leq (b\rho_0 + \lambda(\lambda - c)^{-1}\beta)\ \beta^n\ exp\ (-\delta x) + \beta^{n-1} exp(cx) \leq \rho V(n,x)$$

où $\rho = \rho_0 + b^{-1}\lambda(\lambda - C)^{-1}\beta$. En outre, $Tv(0,x) = 0 < \rho v(0,x)$.

Il suffit de choisir $\rho < 1$, ce qui est possible parce que $\rho_0 < 1$ et la constante b peut être prise suffisamment grande.

9.3.4. *Autres files d'attente*

De la même manière, une multitude de systèmes de files d'attente ont été étudiés. Par conséquent, des résultats de stabilité et des bornes de perturbation ont également été obtenus pour les systèmes de files d'attente suivants :

– les files d'attente avec arrivées en groupes : perturbation de la distribution de la taille du groupe (Boukir *et al.* 2009) ;

– les files d'attente avec rappel : perturbation du taux de rappel (Berdjoudj et Aïssani 2003) ;

– les files d'attente à serveurs multiples $M / M / m$: perturbation de la distribution des temps d'interarrivée (Issaadi *et al.* 2016) ;

– les files d'attente avec serveur non fiable : perturbation du taux de panne (Abbas et Aïssani 2010a, 2010c) ;

– les files d'attente avec vacances du serveur : perturbation du taux de vacances (Rahmoune et Aïssani 2008, 2014) ;

– les files d'attente $GI / M / \infty$: perturbation de la taille du système (Aïssani 1992a, 1992b ; Bareche *et al.* 2016) ;

– les files d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité : perturbation du taux d'arrivées prioritaires (Aïssani 1991 ; Bouallouche et Aïssani 2008 ; Hamadouche et Aïssani 2011) ;

– les files d'attente $GI/M/1$ à clients négatifs : perturbation du taux d'arrivées négatives (Abbas et Aïssani 2010b).

9.3.5. *Réseaux de files d'attente*

L'application de la méthode de stabilité forte aux réseaux de files d'attente pose de nombreux défis. À l'exception des réseaux de Jackson, les mesures de performance ne peuvent pas être obtenues sous forme fermée. L'approximation des réseaux généraux de files d'attente par les réseaux de Jackson pose également des problèmes. Ainsi, la dimension de la chaîne de Markov sous-jacente pourrait être grande. De plus, la méthode de stabilité forte suppose que le processus perturbé soit également markovien. L'interconnexion des nœuds du réseau et la dynamique complexe de ces systèmes rendent très difficile le maintien de la propriété de Markov ou la définition d'une chaîne de Markov induite dans le système perturbé.

9.3.5.1. *Réseaux de Jackson avec deux stations en tandem*

Considérons le réseau de Jackson suivant avec deux files d'attente en tandem $[M/M/1 \to M/M/1]$. Les clients arrivent à la première station selon un processus de Poisson avec un taux λ. On indique par E_λ la distribution exponentielle des temps d'interarrivée. Les durées de service suivent une distribution exponentielle avec le taux μ dans la première station et une distribution exponentielle avec le taux μ_1 dans la seconde. Les mesures de performance de ce modèle peuvent être calculées sous forme fermée en exploitant la propriété de forme produit (Jackson 1957).

Dans cette section, nous clarifions les conditions dans lesquelles ce type de réseau de file d'attente peut être utilisé comme une bonne approximation dans le cas où la distribution des durées de service dans la première station est différente (mais suffisamment proche d'une certaine manière) de la distribution exponentielle.

L'état du réseau en tandem précédent est complètement décrit par le processus de Markov bidimensionnel $\overline{V}(t) = (\overline{X}(t), \overline{Y}(t))$, où $\overline{X}(t)$ est le nombre de clients dans la première station à l'instant t, et $\overline{Y}(t)$ est le nombre de clients dans la deuxième station en même instant t.

On représente par $\overset{-+}{d}_n$ le moment juste après le départ du $n^{\text{ième}}$ client de la première station. Ensuite, la séquence induite $(\overline{V}_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires où $\overline{V}_n = \overline{V}(\overset{-+}{d}_n)$, $\overline{V}_0 = 0$ est une chaîne de Markov. Sous la condition $\lambda \leq \min(\mu_1, \mu)$, les probabilités de transition de la chaîne de Markov $\overline{V}_n$ sont données par :

$$\overline{Q}_{ij}(k,l) = \begin{cases} \overline{P}_j \overline{q}kl & \text{si } i=0,\ j\geq 0,\ 1\leq l\leq k+1,\ k\geq 0 \\ \overline{P}_j \overline{q}k0 & \text{si } i=0,\ j\geq 0,\ l=0,\ k\geq 0 \\ \overline{P}_{j-i+1} \overline{q}kl & \text{si } 1\leq i\leq j+1, j\geq 0,\ 1\leq l\leq k+1,\ k\geq 0 \\ \overline{P}_{j-i+1} \overline{q}k0 & \text{si } 1\leq i\leq j+1,\ j\geq 0,\ l=0,\ k\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.36]$$

où :

$$\overline{P}_r = \int_0^\infty \exp(-\lambda x)\frac{(\lambda x)^r}{r!} dE_{\mu_1}(x), \forall r \in \mathbb{N}$$

$$\overline{q}_{kl} = \int_0^\infty \exp(-\mu x)\frac{(\mu x)^{k+1-l}}{(k+1-l)!} dE_\lambda(x)$$

$$\overline{q}_{ko} = 1 - \sum_{l=1}^{k+1} \overline{q}_{kl}$$

D'autre part, considérons le réseau à deux stations en tandem $[M/G/1 \to \cdot/M/1]$. Les arrivées à la première station sont distribuées suivant une loi de Poisson avec le même taux λ qu'auparavant alors que la distribution des durées de service H est générale. Par conséquent, le processus d'arrivée à la deuxième station n'est plus poissonien. On désigne par F la distribution des temps d'interarrivée à cette station. Les durées de service à la deuxième station sont distribuées de façon exponentielle et ont une distribution commune E_μ avec un taux μ. Soit $V(t) = (X(t), Y(t))$ le processus bidimensionnel, où $X(t)$ est le nombre de clients dans la première station à l'instant t, $Y(t)$ est le nombre de clients dans la deuxième station à l'instant t. $V(t)$ décrit complètement l'état du réseau considéré $[M/G/1 \to ./M/1]$. Toutefois, $V(t) = (X(t), Y(t))$ n'est pas un processus markovien. On représente par d_n^+ le moment juste après le départ du $n^{\text{ième}}$ client de la première station. Alors, la séquence de variables aléatoires $V_n = (\overline{X}_n, \overline{Y}_n)$ à ces instants est une chaîne de Markov induite qui décrit l'état du réseau

$[M/G/1 \to \cdot/M/1]$ à ces dates spécifiques. Sous la condition $\lambda < \min(\mu_1, \mu_2)$ les probabilités de transition de la chaîne V_n s'écrivent :

$$Q_{ij}(k,l) = \begin{cases} P_j q_{kl} & \text{si } i=0, j \geq 0,\ 1 \leq l \leq k+1,\ k \geq 0 \\ P_j q_{k0} & \text{si } i=0, j \geq 0,\ l=0,\ k \geq 0 \\ P_{j-i+1} q_{kl} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, j \geq 0,\ 1 \leq l \leq k+1,\ k \geq 0 \\ P_{j-i+1} q_{k0} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, j \geq 0,\ l=0,\ k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.37]$$

où :

$$P_r = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^r}{r!} dH(x), \forall r \in \mathbb{N}.$$

$$q_{kl} = \int_0^\infty \exp(-\mu x) \frac{(\mu x)^{k+1-l}}{(k+1-l)!} dE_\lambda(x)$$

$$q_{ko} = 1 - \sum_{l=1}^{k+1} q_{kl}$$

Soit α la mesure définie comme suit :

$$\alpha(\{i\},\{j\}) = \begin{cases} P_i q_{kj} & \text{si } 0 \leq l \leq k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.38]$$

Considérons également la fonction mesurable h définie par :

$$h(i,k) = h_i(k) = \mathbf{1}_{(i=0)} \qquad [9.39]$$

En les utilisant dans le théorème 9.1, le résultat suivant est prouvé.

THÉORÈME 9.13.– *Sous la condition* $\lambda < \min(\mu_1, \mu)$, *la chaîne de Markov* $\{V_n\}_{n\geq 0} = \{X_n, Y_n\}_{n\geq 0}$ *est fortement* v*-stable par rapport à la fonction test* $v(i,j) = \gamma^i \beta^j$, *pour* γ, β *tels que :*

$$1 < \gamma < \frac{\mu_1}{\lambda} \text{ et } 1 < \beta < \gamma(\frac{\lambda + \mu_1 - \gamma\lambda}{\mu_1})$$

9.3.5.2. *Files d'attente en tandem avec répétition constante des rappels*

Considérons le réseau de files d'attente en tandem $[M/G/1 \to ./G/1/1]$ avec blocage après le service, constitué d'une séquence de deux stations de services sans file d'attente intermédiaire. Les clients arrivent à la première station selon un processus de Poisson avec intensité λ. Chaque client reçoit le service à la station 1, puis se rend à la station 2 pour un service supplémentaire. Comme il n'y a pas d'espace d'attente intermédiaire, un client dont le service dans la station 1 est terminé ne peut pas se rendre à la deuxième station si celle-ci est occupée. Au lieu de cela, le client reste à la station 1 qui reste bloquée jusqu'à ce que la station 2 devienne vide. Le client arrivant qui trouve la station 1 occupée ou bloquée se comporte comme un client en rappel, c'est-à-dire qu'il ne se joint pas à une file d'attente, mais qu'il est placé en orbite ayant une capacité infinie et qu'il réessaie pour le service selon une politique de rappel constante. Selon cette politique, le paramètre du temps de rappel exponentiel de chaque client en orbite est $\frac{\mu}{n}$, où n est la taille du groupe de rappels. Ainsi l'intensité totale est μ. Si le serveur de la station 1 est libre au moment d'une tentative, le client à la tête du groupe de rappel reçoit immédiatement le service. Sinon, ils réitèrent leur demande plus tard.

Les durées de service aux stations 1 et 2 sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec des fonctions de densité de probabilité $b_i(x)$, des fonctions de répartition $B_i(x)$ et des moyennes finies $1/\mu_i$, pour $i=1,2$, respectivement.

Soit $X(t)$ le nombre de clients en orbite à l'instant t, et pour $l = 1, 2$:

$$\xi^1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est inoccupé à l'instant } t \\ 1 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est en fonctionnement à l'instant } t \\ 2 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est bloqué à l'instant } t \end{cases}$$

Le modèle considéré est complètement décrit par le processus de régénération :

$$V(t) = \left(X(t), \xi^1(t), \xi^2(t)\right)$$

Cependant, ce processus n'est pas markovien. Nous désignons par $d_n, n \in \mathrm{N}$, l'instant du $n^{\text{ième}}$ départ de la station 1. Nous supposons, sans nuire à la généralité, que $d_0 = 0$, et nous notons :

$$V_n = V(d_n+0) = \left(X(d_n+0), \xi^1(d_n+0), \xi^2(d_n+0)\right) = \left(X_n, 0, 0\right)$$

Il s'agit donc d'un processus semi-régénératif avec un processus de renouvellement de Markov induit $(X,D)=\{X_n, d_n : n\in \mathrm{N}\}$. Le processus $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible et apériodique avec matrice de transition $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}_{i,j\geq 0}$, où :

$$p_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} f_0(t)dt, & \text{pour } \; i=0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} f_1(t)dt & \\ \qquad \displaystyle + \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda t} f_2(t)dt, & \text{pour } \; 1\leq i < j+1 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f_2(t)dt & \text{pour } \; i=j+1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.40}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} f_0(t) &= \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda w} \frac{d}{dt}\left(B_1(t)B_2(t+w)\right)dw \\ f_1(t) &= \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+\mu)w} \frac{d}{dt}\left(B_1(t)B_2(t+w)\right)dw \\ f_2(t) &= \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu e^{-(\lambda+\mu)w} \frac{d}{dt}\left(B_1(t)B_2(t+w)\right)dw \end{cases}.$$

Soit $\psi_u(s)$ la fonction définie comme :

$$\psi_u(s) = \int_0^{+\infty} ue^{-uw}dw \int_0^{+\infty} e^{-sx} d_x\left(B_1(x)B_2(x+w)\right) \tag{9.41}$$

Supposons que le taux moyen de rappel dans les files d'attente en tandem ci-avant tende vers l'infini, c'est-à-dire que les clients du groupe de rappel essaient continuellement de trouver une place pour le service et qu'ils deviennent des clients ordinaires. Cela signifie que si $\mu \to +\infty$, le réseau en tandem à rappels constants devient similaire au modèle classique de deux files d'attente en tandem sans espace d'attente intermédiaire.

Maintenant, soit $\overline{X}(t)$ le nombre de clients dans la première file d'attente du réseau en tandem classique au moment t et pour $l = 1, 2$, nous considérons :

$$\overset{-1}{\xi}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est inoccupé à l'instant } t \\ 1 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est en fonctionnement à l'instant } t \\ 2 \text{ si le } l^{\text{ième}} \text{ serveur est bloqué à l'instant } t \end{cases}$$

L'état du réseau en tandem ordinaire $[M/G/1 \to ./G/1]$ est complètement décrit par le processus $\overline{V}(t) = \left(\overline{X}(t), \overline{\xi}^1(t), \overline{\xi}^2(t)\right)$. Il est clair que $\overline{X}_n = (\overline{X}, D) = \{\overline{X}_n, \overline{d}_n, n \geq 0\}$ est un processus de renouvellement markovien induit du processus semi-régénératif $\left(\overline{X}(t), \overline{\xi}^1(t), \overline{\xi}^2(t)\right)$ au moment $\overline{d}_n$ du $n^{\text{ième}}$ départ de la station 1.

Nous supposons maintenant que $\rho = \lim\limits_{\mu \to +\infty} \rho^* < 1$. Alors $\overline{X}_n$ est une chaîne de Markov irréductible et homogène, apériodique et récurrente positive avec matrice de transition $\overline{\mathbf{P}} = \left\{\overline{p}_{ij}\right\}_{i,j \geq 0}$:

$$\overline{P}_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)}{j!} e^{-\lambda t}{}_0(t)\,dt, & i = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} e^{-\lambda t} d_t\left(B_1(t)\mathrm{B}_2(t)\right), & i \in [i, j, +1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad [9.42]$$

On montre facilement que :

$$\lim_{\mu \to +\infty} \psi_{\lambda+\mu}(s) = \psi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d_t\left(B_1(t)B_2(t)\right); \quad \lim_{\mu \to +\infty} v_{\lambda+\mu} = \frac{\rho}{\lambda}$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}\rho^* = \rho = -\lambda\frac{d\psi(s)}{ds}|_{s=0} = \lambda\int_0^{+\infty} t d_t\left(B_1(t)B_2(t)\right)$$

Supposons que le taux moyen de nouveaux rappels dans le réseau en tandem avec des nouveaux rappels constants tend vers l'infini. La distance entre les deux distributions d'interarrivée est mesurée par : $W = \int_0^{+\infty} | f_2(t) - \frac{d}{dt}(B_1(t)B_2(t)) | \, dt$.

On considère la fonction test $v(j) = \beta^j, \beta > 1$, la mesure α et la fonction mesurable h définies par :

$$\alpha(\{j\}) = \alpha_j = \overline{p}_{0j}, \quad h(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En les utilisant dans le théorème 9.1, et sur la base d'une série de lemmes démontrés dans une étude précédente (Lekadir et Aïssani 2008a), on peut prouver les théorèmes suivants.

THÉORÈME 9.14.– *Dans le réseau à deux stations en tandem avec blocage* $[M/G/1 \to ./G/1/1]$, *la chaîne de Markov* $\overline{X}_n$ *représentant le nombre de clients dans la première station au moment du* $n^{ième}$ *départ de la première station est fortement* v*-stable par rapport à la fonction* $v(k) = \beta^k$ *pour tout* β *tel que* $1 < \beta \le \beta_0$, *où* β_0 *est donné par :* $\beta_0 = \sup\left\{\beta : \gamma(\beta) = \frac{\psi(\lambda - \lambda\beta)}{\beta} < 1\right\}$.

THÉORÈME 9.15.– *Soit* π *(respectivement* $\overline{\pi}$*) la distribution stationnaire de la chaîne de Markov* X_n *(resp.* $\overline{X}_n$*). Pour* β *tel que* $1 < \beta < \beta_0$, *nous avons :*

$$\| \pi - \overline{\pi} \|_v \le c_0(1 + c_0) \| \Delta \|_v \, (1 - \gamma - (1 + c_0) \| \Delta \|_v)^{-1}$$

où : $c_0 = \dfrac{\psi_\lambda(\lambda\beta - \lambda) - \gamma}{1 - \gamma}$.

9.3.5.3. *Files d'attente en tandem avec priorité non préemptive*

On considère le réseau de files d'attente en tandem $[M_2/G_2/1 \to ./G/1/1]$ avec priorité non préemptive. Les clients arrivent à la première station selon un processus de Poisson. On désigne par $(\theta\lambda)$ (respectivement (λ)) le taux d'arrivée des clients prioritaires (respectivement, les clients non prioritaires). La fonction de répartition des durées de service des clients prioritaires (respectivement, non prioritaires) dans la première station est $C_1(x)$ (respectivement, $C_2(x)$) et la fonction de densité correspondante est $c_1(x)$ (respectivement, $c_2(x)$). De plus, les durées de service dans la deuxième station sont indépendantes et ont une fonction de répartition $D(x)$ et une fonction de densité $d(x)$ communes aux deux classes de priorité. On désigne $\{(X^i(t)\}_{i=1,2}$ représentant le nombre de clients dans la station i au moment du départ du $n^{\text{ième}}$ client. L'état du système considéré est complètement décrit par le processus bidimensionnel $V(t)=\left(X^1(t),X^2(t)\right)$. Supposons que θ tend vers zéro, la partie de la file d'attente en tandem liée aux clients prioritaires peut être interprétée comme une perturbation du réseau $[M/G/1\to ./G/1/1]$ de deux stations en tandem avec seulement des clients non prioritaires. La chaîne de Markov $\left(X_n^{(1)},X_n^{(2)}\right)_{n\geq 0}$ a des probabilités de transition $P_{k,l}(i,j,\theta)$ définies par :

$$
\begin{cases}
\int_0^\infty \left(\frac{(\lambda\theta x)^{i-k+1}}{(i-k+1)!}\right)\left(\frac{(\lambda x)^{j-l}}{(j-l)!}\right)e^{-\lambda(\theta+1)x}d\left[C_1(x)D(x)\right] \text{ si } k\neq 0, l\geq 0; i\geq k-1, j\geq l \\[2ex]
\int_0^\infty \left(\frac{(\lambda\theta x)^{i}}{i!}\right)\left(\frac{(\lambda x)^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\right)e^{-\lambda(1+\theta)x}\left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} d\left(C_2(x)D(x+t)\right)dt\right] \\
\text{si } k=0, l\neq 0; i\geq 0, j\geq l-1 \\[2ex]
\frac{\theta}{1+\theta}\int_0^\infty \left(\frac{(\lambda\theta x)^{i}}{i!}\right)\left(\frac{(\lambda x)^{j}}{j!}\right)e^{-\lambda(1+\theta)x}\left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} d\left(C_1(x)D(x+t)\right)dt\right]+ \\
\quad +\frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty \left(\frac{(\lambda\theta x)^{i}}{i!}\right)\left(\frac{(\lambda x)^{j}}{j!}\right)e^{-\lambda(1+\theta)x}\left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} d\left(C_2(x)D(x+t)\right)dt\right] \\
\text{si } k=0, l=0; i\geq 0, j\geq 0 \\[2ex]
0 \text{ sinon}
\end{cases}
$$

Les probabilités de transition $P_{k,l}(i,j,0)$ de la chaîne de Markov $\left(\overline{X}_n^{(1)},\overline{X}_n^{(2)}\right)_{n\geq 0}$ décrivant l'état du réseau en tandem $[M/G/1\to ./G/1/1]$ sont données par :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \left(\frac{(\lambda x)^{j-l}}{(j-l)!} \right) e^{-\lambda x} d\left[C_1(x)D(x)\right]; & \text{si } k \neq 0, l \geq 0; i = k-1, j \geq l \\ \int_0^\infty \left(\frac{(\lambda x)^{j-l+1}}{(j-l+1)!} \right) e^{-\lambda x} \left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} d\left(C_2(x)D(x+t)\right) dt \right] & \text{si } k = 0, l \neq 0; i = 0, j \geq l-1 \\ \int_0^\infty \left(\frac{(\lambda x)^{j}}{j!} \right) e^{-\lambda x} \left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} d\left(C_2(x)D(x+t)\right) dt \right]; & \text{si } k = 0, l = 0; i = 0, j \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les conditions de la v-stabilité forte du réseau $[M/G/1 \to ./G/1/1]$ sont clarifiées par le théorème suivant.

THÉORÈME 9.16.– *Supposons que dans le réseau en tandem* $[M/G/1 \to ./G/1/1]$, *les conditions suivantes sont remplies :*

1) $\lambda E(\xi_2) < 1$ *(condition géométrique d'ergodicité),* ξ_i *est la variable aléatoire représentant les durées de service des clients avec priorité i ;*

2) $\exists a > 0 / E(e^{a\xi_2}) < \infty$ *(condition de Cramer).*

Alors, pour tout β *tel que* $1 < \beta < \beta_0$ *et* $\delta > 1$, *la chaîne de Markov* $\left(\overline{X}_n^{(1)}, \overline{X}_n^{(2)}\right)_{n \geq 0}$ *est fortement* v *- stable par rapport à la fonction* $v(i,j) = \delta^i \beta^j$ *avec* $\delta = \dfrac{E(e^{x\xi_1})}{\gamma_2}$, *où* $\gamma_2 = \dfrac{E(e^{x\xi_2})}{\beta}$ *et* $\beta_0 = \sup\{\beta / E(e^{x\xi_2}) < \beta\}$.

Pour prouver le théorème 9.16, il suffit de vérifier les conditions du théorème 9.1 en utilisant la fonction test :

$$v : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$$

$$(i,j) \to v(i,j) = \delta^i \times \beta^j \text{ avec } \delta > 1, \beta > 1$$

La mesure α et la fonction mesurable h sont définies par :

$$\alpha : \sigma(N) \times \sigma(N) \to \mathbb{R}^+, h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} ; \; (\{i\},\{j\}) \to P_{0,0}(i,j,0), \; (k,l) \to 1_{\{k=0,\, l=0\}}$$

On note :

$$f_i(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{d}{dx}(C_i(x)D(x+t))dt,\ i = \overline{1,2}$$

donc :

$$\alpha(\{i\},\{j\}) = \begin{cases} P_{0,0}(0,j,0) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} f_2(x)dx & \text{si } i = 0 \\ P_{0,0}(i,j,0) = 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Selon le théorème ci-avant, le réseau en tandem $[M/G/1 \to ./G/1/1]$ est fortement v-stable. Cela signifie que ses caractéristiques peuvent se rapprocher du réseau en tandem $\left[M_2/G_2/1 \to ./G/1/1\right]$ à condition que le taux d'arrivée θ des clients prioritaires tende vers zéro. Pour caractériser cette proximité, il est essentiel d'estimer l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes X_n et $\overline{X}_n$. Pour ce faire, nous estimons d'abord l'écart $\|\Delta\|_v$ de l'opérateur de transition $\mathbf{P}$.

LEMME 9.5.–

$$\|\Delta\|_v = \|\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}}\|_v = \sup_{k\geq 0}\sup_{l\geq 0} \frac{1}{\delta^k \beta^l} \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \delta^i \beta^j \left|\Delta_{kl}(i,j,\theta)\right|$$

avec : $\left|\Delta_{kl}(i,j,\theta)\right| = \left|P_{kl}(i,j,\theta) - P_{kl}(i,j,0)\right|$.

On note $\Theta = \sup\{E_{00}, E_{0l}, E_{kl}\}$. Alors :

$$\|\Delta\|_v \leq \Theta \tag{9.43}$$

où :

$$E_{00} \leq \phi_2(\lambda - \lambda\beta) + \frac{1}{1+\theta}\phi_2(\lambda\theta + \lambda - \lambda\beta - \lambda\delta\theta)$$

$$-\left(\frac{1}{1+\theta} + 1\right)\phi_2(\lambda\theta + \lambda - \lambda\beta) + \frac{\theta}{1+\theta}\phi_1(\lambda\theta + \lambda - \lambda\beta - \lambda\theta\delta)$$

$$E_{0l} = \frac{1}{\beta}\left[\psi_2(\lambda - \lambda\beta) + \psi_2(\lambda + \lambda\theta - \lambda\beta - \lambda\delta\theta) - 2\psi_2(\lambda + \lambda\theta - \lambda\beta)\right]$$

$$E_{kl} = \frac{1}{\delta}\left[\psi_1(\lambda+\lambda\theta-\lambda\theta\delta-\lambda\beta)+\psi_1(\lambda-\lambda\beta)-2\psi_1(\lambda+\lambda\theta-\lambda\beta)\right]$$

$$\phi_i(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dt\int_0^\infty e^{-sx}\,d[C_i(x)D(x+t)]$$

$$\psi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d[C_i(x)D(x)]$$

Le lemme 9.6 est également nécessaire pour prouver le prochain théorème.

LEMME 9.6.– Considérons la constante ϖ définie par $\varpi = \beta P_0\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)$, où :

$$P_0 = \frac{1+\lambda\psi_1'(0)+\theta\lambda\phi_1'(0)}{1+\lambda\psi_1'(0)+\theta\lambda\psi_2'(0)-\lambda\phi_1'(0)-\theta\lambda\phi_1'(0)}, \text{ alors } \|\overline{\pi}\|_v \leq \varpi$$

La borne supérieure sur la norme de la différence entre les mesures stationnaires des chaînes de Markov des files d'attente en tandem $[M/G/1 \to ./M/1/1]$ et $[M_2/G_2/1 \to ./M/1/1]$ est donnée par le théorème 9.17.

THÉORÈME 9.17.– *Soit* $\overline{\pi}$ *(respectivement,* π*) la distribution stationnaire de* $\left[M/G/1 \to ./M/1/1\right]$ *(respectivement,* $[M_2/G_2/1 \to ./M/1/1]$*). Sous la condition* $\Theta < \frac{1-\gamma}{C}$*, nous avons :*

$$\left\|\pi-\overline{\pi}\right\|_v \leq \frac{\Theta\varpi(1+\varpi)}{1-\gamma-(1+\varpi)\Theta} \qquad [9.44]$$

où γ *,* Θ*,* ϖ *et* p_0 *sont définis précédemment.* $1<\beta<\beta_0$ *où* β_0 *est défini par :*

$$\beta_0 = \sup\left\{\beta : \frac{\psi_2(\lambda\beta-\lambda)}{\beta} < 1\right\}, 1 < \beta_0 < +\infty$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème 9.2 et utilise une série de résultats intermédiaires (pour plus de détails, voir (Lekadir et Aïssani 2011)).

9.3.5.4. *Files d'attente en tandem avec blocage*

Une étude précédente a considéré un réseau de type tandem à deux stations $[M / M / 1 / \infty \leftrightarrow M / M / 1 / N]$ avec blocage (Adel-Aissanou *et al.* 2012). La mémoire tampon infinie de la première station est tronquée en rejetant les arrivées lorsque la longueur de la file d'attente atteint un niveau donné Q. On s'attend à ce qu'une telle troncature se rapproche du modèle original à mesure que le niveau (ou la taille) de la troncature devient important. Les conditions qui garantissent que la distribution de la longueur de la file d'attente commune en régime permanent du système de file d'attente en tandem d'origine est bien approchée par la troncature du tampon fini sont clarifiées et des bornes d'erreur sur la distribution stationnaire de la longueur de la file sont obtenues.

9.3.6. *Perturbation non paramétrique*

Les résultats ci-avant concernent l'utilisation de distributions paramétriques de forme connue ou inconnue. Dans d'autres travaux, les auteurs explorent l'utilisation de distributions non paramétriques telles que les fonctions de densité du noyau ajustées à partir de données empiriques. En combinant les résultats de la théorie statistique avec la méthode de stabilité forte, on peut estimer l'impact de l'utilisation d'une telle technique.

Il est à noter que, dans la pratique, tous les paramètres du modèle sont connus de façon imprécise parce qu'ils sont obtenus au moyen de méthodes statistiques. C'est pourquoi les inégalités de stabilité forte nous permettront d'estimer numériquement l'erreur commise lors d'une telle analyse.

En ce sens, un aspect intéressant est celui où une distribution régissant un système de file d'attente est inconnue et où l'on a recours à des méthodes non paramétriques pour estimer sa fonction de densité. Par exemple, si on avait des données réelles, on pourrait appliquer la méthode du noyau pour estimer la fonction de densité correspondante.

De plus, il arrive très souvent que le domaine naturel de définition d'une densité à estimer ne soit pas l'ensemble de la ligne réelle mais un intervalle délimité d'un ou des deux côtés. Par exemple, lorsque les données sont des mesures de quantités positives, il sera préférable d'obtenir des estimations de densité qui prennent la valeur zéro pour tous les nombres négatifs.

En effet, la méthode de la stabilité forte stipule que la perturbation doit être faible en ce sens que la loi générale G des arrivées (respectivement, des durées de service) doit être proche mais non égale à la loi de Poisson (respectivement, exponentielle). Par conséquent, la fonction de densité de la loi G doit être proche de la densité exponentielle, définie sur un support borné. Ainsi, les effets aux limites doivent être pris en compte lors de l'utilisation de la méthode du noyau pour l'estimation de la densité.

En combinant les techniques de correction des effets aux limites avec le calcul de la distance de variation caractérisant la proximité des systèmes cités, on pourra vérifier si cette densité est suffisamment proche de celle de la loi de Poisson (ou celle de la loi exponentielle), puis appliquer la méthode de stabilité forte pour rapprocher les caractéristiques du système réel avec celles d'un modèle classique (Bareche et Aïssani 2008, 2011, 2014a, 2014b).

9.4. Conclusion et perspectives futures

Ce chapitre examine l'évolution des applications de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente et à leurs réseaux. De nombreux types de files d'attente et de réseaux ont déjà été étudiés et, dans la plupart des cas, on obtient à la fois des résultats qualitatifs (stabilité) et quantitatifs (bornes de perturbation). Cependant, les systèmes de files d'attente peuvent faire intervenir un grand nombre de paramètres et la perturbation de chacun peut avoir un effet complètement différent des autres. Il est donc nécessaire d'étendre l'analyse de stabilité à ces modèles et types de perturbations inexplorés, par exemple, la perturbation de la probabilité de collision dans la file d'attente avec rappels $M/M/1$ avec collisions et erreurs de transmission (modélisation de la méthode d'accès dans le canal IEEE 802.11 (Lakaour *et al.* 2018)), ainsi que la perturbation du paramètre qui caractérise les clients impatients dans les systèmes de files d'attente $M/G/c/k$ avec clients impatients (modélisation du *Cloud Data Center* (Outamazirt *et al.* 2018)).

L'application aux réseaux de file d'attente généraux pourrait s'avérer difficile en raison de la dimension élevée de la chaîne de Markov induite et de la dynamique complexe de ces modèles. De plus, les perturbations dans un nœud entraînent généralement la perte de la propriété de Markov dans de nombreux autres nœuds (connectés) ou dans l'ensemble du réseau. Cependant, des réseaux particuliers (par exemple réseaux en tandem) peuvent être étudiés.

La théorie de la stabilité forte est riche en résultats. Les conditions de stabilité et les estimations quantitatives peuvent être obtenues à l'aide de diverses techniques. Par exemple, on peut utiliser des inverses généralisés, des coefficients d'ergodicité, des valeurs propres, etc. Il est essentiel d'appliquer d'autres résultats de stabilité forte aux files d'attente afin d'aiguiser encore les bornes de perturbation.

Enfin, la comparaison avec d'autres méthodes démontre l'utilité de la théorie (voir, par exemple, (Abbas et Heidergott 2010)).

9.5. Bibliographie

Abbas, K., Aïssani, D. (2010a). Structural perturbation analysis of a single server queue with breakdowns. *Stoch. Models.*, 26(1), 78–97.

Abbas, K., Aïssani, D. (2010b). Strong stability of the embedded Markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers. *Appl. Math. Modell.*, 34(10), 2806–2812.

Abbas, K., Aïssani, D. (2010c). Approximation of performance measures in an M/G/1 queue with breakdowns. *Quality Technology and Quantitative Management*, 7(4), 353–363.

Abbas, K., Heidergott, B., Aïssani, D. (2010). A Taylor series approach to the numerical analysis of the M/D/1/N queue. *Procedia Comput. Sci.*, 1(1), 1547–1554.

Adel-Aissanou, K., Abbas, K., Aïssani, D. (2012). Strong truncation approximation in tandem queues with blocking. *Math. Prob. Eng.*, 2012, 906486.

Aïssani, D. (1982). Estimate of the strong stability in an M/G/1 system. *VINITIN 4119–82, R. Journal Matematika*, 83, 1–33.

Aïssani, D. (1987a). Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition d'un système M/G/1. *Cahiers Mathématiques*, 2, 125–133.

Aïssani, D. (1987b). Sur les conditions d'approximation d'un système G/G/1 par un système M/G/1. *Journal of Technology*, 4, 96–107.

Aïssani, D. (1990). Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov: application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Math. Rouen*, 167, 115–121.

Aïssani, D. (1991). Application of the operator methods to obtain inequalities of stability in the M2/G2/1 system with relative priority. *Annales Maghrèbines de l'Ingénieur*, 2, 701–709.

Aïssani, D. (1992a). Stabilité forte de la chaîne de Markov incluse dans un système G/M/o. *Technologies Avancées*, 2(1), 28–33.

Aïssani, D. (1992b). Estimate of the strong stability in the system G/M/o. *Technologies Avancées*, 2(2), 29–33.

Aïssani, D., Kartashov, N.V. (1983a). Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR*, A11, 3–5.

Aïssani, D., Kartashov, N.V. (1983b). Strong stability of an imbedded Markov chain in the M/G/1 queueing system, *Theor. Probab. Math. Statist.*, 29(1984), 1–5.

Asmussen, S. (2003). *Applied Probability and Queues.* Springer, New York.

Cette bibliographie est identique à celle de l'ouvrage correspondant en anglais publié par ISTE.

Anisimov, V. (1988). Estimates for the deviations of the transition characteristics of nonhomogeneous Markov processes. *Ukrainian Math. J.*, 40(6), 588–592.

Bareche, A., Aïssani, D. (2008). Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queueing system. *Oper. Res. Lett.*, 36(5), 535–538.

Bareche, A., Aïssani, D. (2011). Statistical techniques for numerical evaluation of the proximity of G/G/1 and G/M/1 queueing systems. *Comput. Math. Appl.*, 61(5), 1296–1304.

Bareche, A., Aïssani, D. (2014a). Interest of boundary kernel density techniques in evaluating an approximation error of queueing systems characteristics. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2014, 871357.

Bareche, A., Aïssani, D., (2014b). Statistical Methodology for Approximating G/G/1 Queues by the Strong Stability Technique. *Proceedings of the 3rd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, 241–248.

Bareche, A., Cherfaoui, M., Aïssani, D. (2016). Approximate analysis of an GI/M/o queue using the strong stability method. *IFAC-PapersOnLine*, 49(12), 863–868.

Benaouicha, M., Aïssani, D. (2005). Strong stability in a G/M/1 queueing system. *Theory Probab. Math. Statist.*, 71, 25–36.

Berdjoudj, L., Aïssani, D. (2003). Strong stability in retrial queues. *Theory Probab. Math. Statist.*, 68, 11–17.

Berdjoudj, L., Benaouicha, M., Aïssani, D. (2012). Measure of performance of the strong stability method. *Math. Comput. Modell.*, 56(11–12), 241–246.

Borovkov, A.A. (ed.). (1984). *Asymptotic Methods in Queueing Theory.* Wiley, New York.

Bouallouche, L., Aïssani, D. (2006a). Measurement and performance of the strong stability method. *Theory Probab. Math. Statist.*, 72, 1–9.

Bouallouche, L., Aïssani, D. (2006b). Performance analysis approximation in a queueing system of Type M/G/1. *Math. Method. Oper. Res.*, 63(2), 341–356.

Bouallouche, L., Aïssani, D. (2008). Quantitative estimates in an M2/G2/1 queue with non-preemptive priority customers: the method of strong stability. *Stoch. Models*, 24(4), 626–646.

Boukir, L., Bouallouche-Medjkoune, L., Aïssani, D. (2009). Strong stability of the batch arrival queueing systems. *Stoch. Anal. Appl.*, 28(1), 8–25.

Cao, X.R. (1998). The Maclaurin series for performance functions of Markov chains. *Adv. Appl. Probab.*, 30(3), 676–692.

Djabali, Y., Rabta, B., and Aïssani, D. (2015). Strong stability of P H/M/1 queues. Unpublished.

Djabali, Y., Rabta, B., and Aïssani, D. (2018). Approximating service-time distributions by phase-type distributions in single-server queues: Astrong stability approach. *International Journal of Mathematics and Operation Research*, 12(4), 507–531.

Franken, P. (1970). Ein stetigkeitssatz für Verlustsusteme. *Operations-forschung Math Stat.*, 11, 1–23.

Gnedenko, B.V. (1970). Sur certains problèmes non résolus de la théorie de files d'attente. *Six International Telegraphic Congress*, Munich.

Hamadouche, N., Aïssani, D. (2011). Approximation in the M2/G2/1 queue with preemptive priority. *Methodol. Comput. Appl.*, 13(3), 563–581.

Heidergott, B., Hordijk, A. (2003). Taylor series expansions for stationary Markov chains. *Adv. Appl. Probab.*, 35(4), 1046–1070.

Issaadi, B., Abbas, K., Aïssani, D. (2016). Perturbation analysis of the GI/M/s queue. *Methodol. Comput. Appl.*, 19(3), 819–841.

Jackson, J.R. (1957). Networks of waiting lines. *Oper. Res.*, 5, 518–521.

Kalashnikov, V.V., Tsitsiachvili, G.C. (1972). Sur la stabilité des systèmes de files d'attente relativementà leurs fonctions de répartition perturbées. *J. Izv AN USSR Technique Cybernétique*, (2), 41–49.

Kalashnikov, V.V. (1978). Qualitative Analysis of Behavior of Complex Systems Using the Method of Test Functions. Nauka, Moscow (in Russian)

Kartashov, N.V. (1981). Strong stability of Markov chains. *VNISSI, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Moscow, 54–59.

Kartashov, N.V. (1985). Criteria for ergodicity and stability for Markov chains with common phase space. *Theory Probab. Math. Statist.*, 30, 71–89.

Kartashov, N.V. (1986a). Inequalities in theorems of ergodicity and stability for Markov chains with common phase space I. *Theor. Probab. Appl.*, 30(2), 247–259.

Kartashov, N.V. (1986b). Inequalities in theorems of ergodicity and stability for Markov chains with common phase space II. *Theor. Probab. Appl.*, 30(3), 507–515.

Kartashov, N.V. (1986c). Strong stability of Markov chains. *J. Sov. Math.*, 34(2), 1493–1498.

Kartashov, N.V. (1996). *Strong Stable Markov Chains.* VSP, Utrecht.

Kennedy, D. (1972). The continuity of the single server queue. *J. Appl. Probab.*, 9(3), 370–381.

Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems. Volume 1: Theory.* John Wiley & Sons, New York.

Lakaour, L., Aïssani, D., Adel, K., Barkaoui, K. (2018). M/M/1 retrial queue with collisions and transmission errors. *Methodol. Comput. Appl.*. https://doi.org/10.1007/s11009-018-9680-x

Latouche, G., Ramaswami, V. (1999). Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modelling. ASA-SIAM, Philadelphia.

Lekadir, O., Aïssani, D. (2008a). Stability of two-stage queues with blocking. In *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences. MCO 2008.* Le Thi, H.A., Bouvry, P., Pham Dinh, T. (eds). Springer, Berlin, 526–535.

Lekadir, O., Aïssani, D. (2008b). Strong stability in a Jackson queueing network. *Theory Probab. Math. Statist.*, 77, 107–119.

Lekadir, O., Aïssani, D. (2011). Error bound on practical approximations for two tandem queues with non-preemptive priority. *Comput. Math. Appl.*, 61(7), 1810–1822.

Mouhoubi, Z., Aïssani, D. (2014). Uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains. *J. Math. Sci.*, 200(4), 452–461.

Outamazirt, A., Barkaoui, K., Aïssani, D. (2018). Maximizing profit in cloud computing using M/G/c/k queuing model. *13th International Symposium on Programming and System*, Zeralda, Algiers.

Rabta, B., Aïssani, D. (2008). Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra Appl.*, 428(8–9), 1921–1927.

Rabta, B., Aïssani, D. (2018). Perturbation bounds for Markov chains with general states space. *J. Math. Sci.*, 228(5), 510–521.

Rachev, S.T. (1989). The problem of stability in queueing theory. *Queueing Syst.*, 4(4), 287–318.

Rahmoune, F., Aïssani, D. (2008). Strong stability of queues with multiple vacations of the server. *Stoch. Anal. Appl.*, 26(3), 665–678.

Rahmoune, F., Aïssani, D. (2014). Quantitative stability estimates in queues with server vacation. *J. Math. Sci.*, 200(4), 480–485.

Rossberg, H.J. (1965). Über die Verteilung von Wartezeiten. *Math. Nachr.*, 20(1/2), 1–16.

Stoyan, D. (1977). Ein stetigkeitssatz für einlinige Wartemodelle der Bedienungstheorie. *Math. Operationsforsch. Stat.*, 3(2), 103–111.

Stoyan, D. (1984). Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models. Wiley, New York.

Zolotariev, V.M. (1975). On the continuity of stochastic sequences generated by recurrence procedures. *Theor. Probab. Appl.*, 20(4), 834–847.

Liste des auteurs

Djamil AÏSSANI
Unité de recherche LaMOS
Université de Béjaïa
Algérie

Attahiru Sule ALFA
Université du Manitoba
Winnipeg
Canada
Université de Pretoria
Afrique du Sud

Vladimir ANISIMOV
Amgen Inc.
Londres
Royaume-Uni

Onno BOXMA
Université technologique d'Eindhoven
Pays-Bas

Fabrice GUILLEMIN
Orange Labs
Lannion

Dimitri KOROLIOUK
Institut des télécommunications et de l'espace d'information global
Académie nationale des sciences d'Ukraine
Kiev
Ukraine

Vladimir S. KOROLIUK†
Institut de mathématiques
Académie nationale des sciences d'Ukraine
Kiev
Ukraine

Igor Nikolaevich KOVALENKO†
V.M. Glushkov Institut de cybernétique
Académie nationale des sciences d'Ukraine
Kiev
Ukraine

Lucas VAN KREVELD
Institut Korteweg-de Vries
Université d'Amsterdam
Pays-Bas

Igor KUZNETSOV
Université technique nationale d'Ukraine
« Igor Sikorsky Institut Polytechnique de Kiev »
Ukraine

Nickolay KUZNETSOV
V.M. Glushkov Institut de cybernétique
Académie nationale des sciences d'Ukraine
Kiev
Ukraine

Anna KVACH
Université d'État de Tomsk
Russie

Eugene LEBEDEV
Université nationale Taras Shevchenko
Kiev
Ukraine

Ouiza LEKADIR
Unité de recherche LaMOS
Université de Béjaïa
Algérie

Nikolaos LIMNIOS
Université de technologie de Compiègne

Hanna LIVINSKA
Université nationale Taras Shevchenko
Kiev
Ukraine

Anatoly NAZAROV
Université d'État de Tomsk
Russie

Boualem RABTA
Unité de recherche LaMOS
Université de Béjaïa
Algérie

Marie-Ange REMICHE
Université de Namur
Belgique

Bruno SERICOLA
Inria Rennes – Bretagne Atlantique

János SZTRIK
Université de Debrecen
Hongrie

George YIN
Université d'État de Wayne
Detroit
États-Unis

Hanqin ZHANG
School of Business
Université nationale de Singapour
Singapour

Qing ZHANG
Université de Géorgie
Athens
États-Unis

Table des matières

Avant-propos

Vladimir ANISIMOV[1] et Nikolaos LIMNIOS[2]
[1] *Amgen Inc., Londres, Royaume-Uni*
[2] *Université de technologie de Compiègne, France*

Issue des travaux pionniers d'Erlang (1909) sur l'analyse des modèles pour la communication téléphonique, la théorie des files d'attente est un vaste domaine scientifique à l'évolution très rapide. Elle se développe aujourd'hui selon différents axes, notamment l'analyse théorique des modèles de files d'attente et des réseaux de structure complexe utilisant des modèles mathématiques sophistiqués et divers types de processus stochastiques. Elle couvre ainsi des domaines d'application très larges comme les réseaux informatiques et de télécommunications, l'ingénierie du trafic, les télécommunications mobiles, etc.

L'objectif de cet ouvrage en deux volumes est de refléter l'état actuel des connaissances scientifiques du domaine et d'étudier certaines orientations contemporaines de l'analyse des modèles et des réseaux de files d'attente, ainsi que leurs applications.

Le premier volume se compose de 10 chapitres rédigés par des experts de renommée mondiale. Ces chapitres couvrent un large éventail de résultats théoriques et asymptotiques pour différents types de modèles de files d'attente, et proposent diverses applications.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude de certains problèmes théoriques pour les modèles de files d'attente non classiques, y compris l'analyse des files d'attente dont les temps d'arrivée et de service sont interdépendants.

Théorie des files d'attente 1,
coordonné par Vladimir ANISIMOV et Nikolaos LIMNIOS.

Le chapitre 2 traite de l'analyse de certaines caractéristiques des files d'attente fluides, en considérant les périodes chargées, l'analyse de la congestion et la probabilité de perte.

Certaines tendances contemporaines dans l'analyse asymptotique des files d'attente sont reflétées dans les chapitres 3, 7 et 10.

Le chapitre 3 traite des résultats sur l'approximation de la moyenne et de la diffusion des systèmes et réseaux de files d'attente de Markov avec un paramètre de série ε. Il présente des applications à certains modèles de files d'attente dépendant de l'état de Markov et à d'autres types de modèles, en particulier les problème du réparateur, de la superposition des processus de Markov et des systèmes de files d'attente de types semi-markoviens.

On examine au chapitre 7 les limites de diffusion et les limites gaussiennes pour les réseaux de files d'attente multicanaux avec un flux d'entrée général dépendant du temps et dans des conditions de trafic dense, avec des applications au service markovien et aux réseaux dont les entrées sont de type semi-markoviennes ou de type renouvellement.

Le chapitre 10 est consacré à l'analyse asymptotique des files d'attente variant dans le temps à l'aide du principe des grandes déviations pour les chaînes de Markov non homogènes à deux échelles temporelles, comprenant l'analyse du processus de longueur des files d'attente et certaines caractérisations de la qualité et de l'efficacité du système.

L'analyse des modèles de files d'attente dites avec rappel est étudiée dans les chapitres 4 et 8.

Le chapitre 4 examine deux modèles qui apportent quelques modifications au système de files d'attente avec rappel de type « premier entré, premier sorti » introduit par Laszlo Lakatos.

Le chapitre 8 passe en revue les résultats récents concernant les systèmes de files d'attente avec rappel à ressource finie à serveur unique avec pannes aléatoires, réparations et collisions des clients.

Le chapitre 5 analyse le comportement transitoire des modèles de files d'attente à serveurs infinis avec un processus d'arrivée mixte et des temps de service de Cox, ainsi que la file d'attente à serveurs infinis modulée par un processus de Markov avec temps de service général.

Le chapitre 6 traite des applications des méthodes de simulation rapide utilisées dans la théorie des files d’attente pour résoudre certains problèmes combinatoires de grande dimension dans le cas où les autres approches échoueraient.

Une étude sur l’analyse d’une méthode de stabilité forte et ses applications aux systèmes et réseaux de files d’attente ainsi que certaines perspectives sont examinées au chapitre 9.

Le second volume sera consacré à d’autres axes contemporains de l’analyse des modèles de files d’attente.

Ces deux ouvrages complémentaires seront utiles aux étudiants des cycles supérieurs, aux doctorants, aux enseignants-chercheurs ainsi qu’aux chercheurs et aux développeurs qui travaillent dans le domaine de la modélisation mathématique et stochastique ou qui s’intéressent aux applications possibles au sein de différents domaines : réseaux informatiques et de communication, sciences et génie dans les départements de mathématiques et mathématiques appliquées, statistiques ou recherche opérationnelle dans les universités et dans divers centres de recherche et centres appliqués.

Dédicace à Igor Nikolaevich Kovalenko, décédé peu après la rédaction de cet ouvrage

Notre très cher collègue Igor Nikolaevich Kovalenko nous a quittés le 19 octobre 2019, après une lutte difficile contre les maladies cardiaques.

Disciple et associé de Boris Gnedenko et Vladimir Koroliuk, Igor Kovalenko était un mathématicien ukrainien éminent dans le domaine de la théorie des probabilités et de ses applications pratiques. Il est devenu célèbre dans le monde entier pour son ouvrage *Introduction to Queuing Theory*, co-écrit avec Gnedenko. Il a fondé une école scientifique de la théorie de la fiabilité, de la théorie des files d’attente et de la cryptographie, reconnue en Ukraine et dans le monde entier.

Igor Kovalenko est né le 16 mars 1935 à Kiev, en Ukraine. Après avoir obtenu son diplôme de la Faculté de mécanique et de mathématiques de l’Université de Kiev Taras Shevchenko, il a travaillé au Centre de calcul de l’Académie des sciences d’Ukraine. De 1962 à 1971, Kovalenko a travaillé à Moscou, où il a dirigé un laboratoire à l’Institut d’ingénierie électronique de Moscou, et avec d’autres disciples de Gnedenko, a été le chef du séminaire sur la théorie des files d’attente à l’université d’État de Moscou. De nombreux scientifiques éminents de l’ex-Union soviétique et de pays étrangers ont participé à ce séminaire.

Sur la base du modèle de processus de Markov linéaire par morceaux qu'il a développé, Kovalenko a construit un modèle mathématique d'un système de défense complexe de fiabilité et a développé des algorithmes numériques pour sa mise en œuvre sur la base de la méthode d'un petit paramètre.

En 1964, Igor Kovalenko est devenu docteur en sciences techniques. Il a formulé le principe des défaillances monotones qui, tout en conservant une grande précision, simplifie considérablement les calculs de fiabilité du système. En 1970, Kovalenko a reçu le diplôme de docteur en physique et mathématiques pour une autre thèse sur la théorie probabiliste des systèmes d'équations booléennes aléatoires. Être docteur deux fois est une pratique très rare dans le monde scientifique.

De retour à Kiev en 1971, le professeur Kovalenko a fondé et dirigé le Département des méthodes mathématiques de la théorie de la fiabilité des systèmes complexes à l'Institut V.M. Glushkov de cybernétique. Deux domaines de recherche ont constitué le courant dominant des études : les méthodes analytiques et statistiques combinées approximatives d'analyse de fiabilité, et la cryptographie théorique et appliquée, les systèmes et les méthodes de protection des données. Sous sa direction, la première norme nationale dans le domaine de la sécurité de l'information cryptographique a été élaborée en Ukraine.

Auteur de 25 monographies et de plus de 200 articles, M. Kovalenko a été élu académicien de l'Académie nationale des sciences d'Ukraine en 1978 (membre correspondant depuis 1972). Gestionnaire compétent, homme honnête et sincère, il travaillait avec acharnement. Grâce à ses qualités humaines, son expérience professionnelle et ses connaissances, il était très respecté de ses collègues.

Igor Kovalenko a laissé de nombreux disciples, parmi eux beaucoup sont professeurs et professeurs associés. Tous conservent en mémoire les jours inoubliables passés à embrasser la science et la créativité indépendante, sous la direction d'un grand scientifique et enseignant, des heures de communication directe avec une personne de grande érudition et de haute culture.

Théorie des files d'attente 1 présente la recherche de pointe actuelle et les pratiques établies dans le domaine des systèmes et réseaux de files d'attente.

Il expose l'analyse des files d'attente avec des temps d'arrivée et de service interdépendants, les caractéristiques des files d'attente fluides, certaines modifications du système de files d'attente avec rappels ainsi que les files d'attente avec rappels de source finie avec des défaillances aléatoires, des réparations et des collisions de clients.

Cet ouvrage présente également l'analyse du comportement transitoire des modèles de file d'attente à serveur infini avec un processus d'arrivée mixte, l'analyse de la stabilité forte des systèmes et des réseaux en file d'attente, de même que l'application de méthodes de simulation rapide pour résoudre des problèmes combinatoires de grande dimension.

Les coordonnateurs

Vladimir Anisimov est professeur en statistiques appliquées et travaille au Center for Design and Analysis d'Amgen Inc. à Londres, au Royaume-Uni.

Nikolaos Limnios est professeur des universités en mathématiques appliquées à l'Université de technologie de Compiègne.

iSTE editions

9 781789 480016