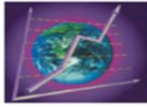


## APPEL À COMMUNICATIONS

13ème Conférence internationale de CIGI  
QUALITA  
(Édition conjointe du congrès international de génie  
industriel et de la conférence QUALITA)  
Le numérique et l'intelligence industrielle: défis  
et opportunités



Du 25 au 28 juin 2019  
École de technologie supérieure (ÉTS),  
Montréal, Québec, Canada



Organisée par le laboratoire de conception et contrôle des  
systèmes de production (C2SP)



## QUALITÉ DE L'ESTIMATEUR A NOYAU DANS L'APPROXIMATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

A. TOUAZI<sup>1</sup>, Z. BENOURET<sup>2</sup>, D. AISSANI<sup>2</sup> et S. ADJABI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université d'Alger1  
Alger centre 16000, Algérie  
touazi\_atik@hotmail.fr

<sup>2</sup>Unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)  
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algerie  
<http://www.lamos.org>

**RÉSUMÉ :** *L'objectif de ce travail est de prouver l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude d'un modèle de risque à une dimension lorsque la loi des montants de réclamation ou la loi des inter-sinistres sont générale et inconnue. Dans ce cas, on fait appel à la méthode du noyau pour estimer la fonction densité de la distribution considérée. Par la suite, en utilisant l'approche simulation, nous évaluons numériquement la borne de stabilité forte (erreur d'approximation) entre les probabilités de ruine des deux modèles de risque idéal et perturbé.*

**MOTS-CLÉS :** stabilité forte, probabilité de ruine, estimation non paramétrique, approximation.

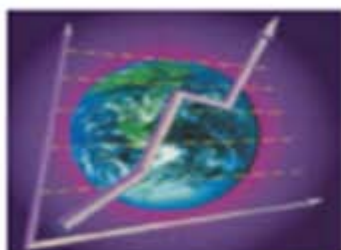


# APPEL À COMMUNICATIONS

13<sup>ème</sup> Conférence internationale de CIGI  
QUALITA

*(Édition conjointe du congrès international de génie  
industriel et de la conférence QUALITA)*

*Le numérique et l'intelligence industrielle: défis  
et opportunités*



*Du 25 au 28 juin 2019  
École de technologie supérieure (ÉTS),  
Montréal, Québec, Canada*



Organisée par le laboratoire de conception et contrôle des  
systèmes de production (C2SP)





# QUALITÉ DE L'ESTIMATEUR A NOYAU DANS L'APPROXIMATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

A. TOUAZI<sup>1</sup>, Z. BENOURET<sup>2</sup>, D. AISSANI<sup>2</sup> et S. ADJABI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université d'Alger1  
Alger centre 16000, Algérie  
touazi\_atik@hotmail.fr

<sup>2</sup>Unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)  
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algerie  
<http://www.lamos.org>

**RÉSUMÉ :** *L'objectif de ce travail est de prouver l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude d'un modèle de risque à une dimension lorsque la loi des montants de réclamation ou la loi des inter-sinistres sont générale et inconnue. Dans ce cas, on fait appel à la méthode du noyau pour estimer la fonction densité de la distribution considérée. Par la suite, en utilisant l'approche simulation, nous évaluons numériquement la borne de stabilité forte (erreur d'approximation) entre les probabilités de ruine des deux modèles de risque idéal et perturbé.*

**MOTS-CLÉS :** stabilité forte, probabilité de ruine, estimation non paramétrique, approximation.

## 1 INTRODUCTION

Pour une étude théorique, différentes lois de probabilité peuvent servir à modéliser le nombre et le montant des réclamations. Réellement, la détermination de ces lois de probabilités ne peut être obtenue qu'à partir d'un échantillon d'observations. Deux types de perturbation peuvent être considérées dans l'analyse de stabilité forte. La première est due aux données aberrantes qui peuvent avoir de multiples causes. Un appareil de mesure peut avoir un défaut de fonctionnement ce qui mène à une erreur dans la transmission ou dans la retranscription des données. Il peut y avoir eu un changement dans les procédures, un comportement frauduleux ou tout simplement une erreur humaine. Un échantillon peut aussi avoir été contaminé par des individus n'appartenant pas à la population étudiée. La deuxième perturbation est due aux erreurs résultants de l'utilisation des techniques d'estimation fonctionnelle pour la détermination des lois de probabilités des paramètres gouvernants le modèle.

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom de la méthode des opérateurs, élaborée par (Aissani et Kartashov, 1983) permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et quantitative de certains systèmes complexes. Elle permet d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. En utilisant cette méthode (Kalashnikov, 2000) a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine. Par la suite, plusieurs travaux ont été réalisés sur différents modèles : le modèle de risque avec investissement (Rusaityte, 2001); les modèles de risque semi-markovien sans investissement

(Enikeeva et al, 2001) et le modèle de risque classique à deux dimensions (Benouaret et Aissani, 2010).

Depuis les travaux de (Rosenblatt, 1956) et (Parzen, 1962), la méthode du noyau a rencontré beaucoup de succès auprès des spécialistes de l'estimation non paramétrique de la fonction de densité. Les noyaux symétriques (dit aussi classiques) sont employés pour estimer des fonctions de densité à supports non bornés. Cependant, l'orsque on veut estimer des densités à support borné au moins d'un côté, l'estimateur à noyau classique devient non consistant, à cause du problème des effets du bord dû à l'utilisation d'un noyau qui assigne un poids en dehors du support. Une simple technique pour corriger les effets de bord des fonctions densité à support  $[0, +\infty[$  est l'image miroir, ajustement considéré par (Schuster, 1985) et utilisé par (Baraiche and Aissani, 2008) et (Baraiche and Aissani, 2010). Une autre solution pour remédier à cette difficulté est de remplacer le noyau symétrique par un noyau asymétrique, qui n'assigne pas un poids en dehors du support de la densité que l'on veut estimer.

La notion d'un noyau associé  $K_{x,h}$  de cible  $x$  et du paramètre de lissage  $h$  a été introduite par (Kokonendji et al, 2007) et (Senga Kiessé, 2008) dans le cas discret, et étendue récemment par (Kokonendji and Libengué, 2011) et (Libengué, 2013) pour le cas continu. Les noyaux associés continus englobent les noyaux continus symétriques et asymétriques.

L'objectif de ce travail est d'appliquer la méthode du noyau pour estimer numériquement la déviation des probabilités de ruine entre le modèle idéal et le mod-

èle perturbé quand la loi des inter-sinistres ou la loi des montants de réclamation sont générales et inconnues. Nous considérons deux cas de perturbation de paramètres: perturbation des inter-sinistres et perturbation des montants de réclamation. Nous nous intéressons dans chaque cas à l'évaluation de l'erreur d'approximation (borne de stabilité forte) des probabilités de ruine entre le modèle idéal et le modèle perturbé.

## 2 PERTURBATION DES MONTANTS DE RÉCLAMATION

### 2.1 Description des modèles

#### Modèle idéal

On considère comme modèle idéal, le modèle de risque Cramér-Lundberg qui est décrit par son vecteur paramètre  $a = (c, E_\lambda, F_Z)$  et son processus de risque  $R = \{R_n\}_{n \geq 0}$  qui est donné par la récurrence suivante:

$$R_{n+1} = R_n + c\theta_n - Z_{n+1}, \quad R_0 = u, \quad (1)$$

Où  $u \geq 0$  est la réserve initiale,  $c > 0$  est le taux de prime constant.  $\{\theta_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées (i.i.d) où  $\theta_n$  est la durée de temps entre la  $(n+1)^{\text{ème}}$  et la  $n^{\text{ème}}$  réclamation, de fonction de distribution exponentiel  $E_\lambda$  de paramètre  $\lambda$ .

$\{Z_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de variable aléatoire i.i.d. où  $Z_n$  est le montant du  $n^{\text{ème}}$  sinistre, de fonction de distribution  $F_Z$  et de moyenne  $\mu$  finie.

Le processus inverse  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  associé au modèle considéré est de la forme suivante:

$$V_{n+1} = (V_n - c\theta_n + Z_{n+1})_+, \quad V_0 = 0, \quad (2)$$

On peut retrouver l'aspect général pour construire le processus  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  dans [Asmussen and Albrecher (2010)].

Suivant la forme recursive de la chaîne  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  donnée par l'équation (2),  $V_{n+1}$  ne dépend que de  $V_n$ ,  $\theta_n$  et  $Z_n$ . D'où,  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène à espace d'états continu. En fonction de la chaîne  $\{V_n\}_{n \geq 0}$ , la probabilité de ruine  $\Psi(u)$  s'écrit comme suit:

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V_n > u). \quad (3)$$

#### Modèle perturbé

Considérons le modèle de risque Cramère-lundberg perturbé (réel) qui est également décrit par son vecteur paramètre  $a = (c', E_{\lambda'}, F_{Z'})$  et son processus de risque  $R' = \{R'_n\}_{n \geq 0}$  donné par la récurrence

suivante:

$$R'_{n+1} = R'_n + c'\theta'_n - Z'_{n+1}, \quad R'_0 = u, \quad (4)$$

Où  $\{\theta'_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de variable aléatoire i.i.d de même fonction de distribution exponentiel  $E_{\lambda'}$ . Son processus inverse  $\{V'_n\}_{n \geq 0}$  associé est de la forme suivante:

$$V'_{n+1} = (V'_n - c'\theta'_n + Z'_{n+1})_+, \quad V'_0 = 0, \quad (5)$$

Donc sa probabilité de ruine  $\Psi'(u)$  s'écrit:

$$\Psi'(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V'_n > u). \quad (6)$$

### 2.2 v-Stabilité forte

Le modèle de risque défini par le processus (1) est fortement stable par rapport à la fonction poids  $v(x) = e^{\epsilon x}, x \geq 0$  [cf. Kalashnikov (2000)]. Dans cette partie, nous utilisons l'aspect quantitatif de la méthode de stabilité forte afin d'estimer l'erreur d'approximation du modèle de risque défini par le processus (1) par le modèle défini par le processus (4).

Pour une entrée  $a$  donnée, on suppose que la condition suivante est vérifiée:

$$\exists \epsilon \text{ tel que } Ee^{\epsilon(Z - c\theta)} = \rho(\epsilon) \in ]0, 1[. \quad (7)$$

Sous cette hypothèse et pour  $v(u) = e^{\epsilon u}$ , L'estimation de la déviation entre les noyaux de transition, obtenue par (Kalashnikov (2000)) est donnée par la formule suivante:

$$\|P - P'\|_v \leq 2 \mathbb{E} e^{\epsilon Z} \ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c} + \|F_Z - F_{Z'}\|_v. \quad (8)$$

Sous la condition suivante qui représente le domaine de perturbation des paramètres:

$$u(a, a') \leq (1 - \rho)^2, \quad (9)$$

où

$$u(a, a') = 2 \mathbb{E} e^{\epsilon Z} \ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c} + \|F_Z - F_{Z'}\|_v. \quad (10)$$

nous avons l'inégalité de stabilité suivante:

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{u(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - u(a, a'))} \quad (11)$$

où  $\rho(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z - c\theta))$ .

Notons par  $\Gamma$  la borne supérieure donnée par l'inégalité de stabilité forte (11),

$$\Gamma = \frac{\mu(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - \mu(a, a'))} \quad (12)$$

### 2.3 Application numérique

Dans cette section, nous présentons l'algorithme (1) permettant d'approximer la probabilité de ruine du modèle idéal par la probabilité de ruine du modèle perturbé. Les étapes de cet algorithme est basée sur la vérification des conditions du critère de stabilité forte ainsi que la positivité du chargement de sécurité afin d'éviter la ruine certaine.

---

#### Algorithm 1 Approximation du modèle Cramère-Lundberg

---

1. Introduire le taux de prime  $c$  qui est le même dans les deux modèles, idéal et perturbé;
2. Introduire la fonction densité  $f_Z$  de la loi des montants de réclamation du modèle idéal;
3. Introduire le taux d'arrivé des sinistres  $\lambda$  supposé aussi le même dans les deux modèles;
4. Vérifier la positivité du chargement de sécurité:

- Si oui aller à 5;
- Sinon retourner à 3;

5. Appliqué une perturbation sur la fonction densité  $f_Z$  pour obtenir la fonction densité  $f_{Z'}$  de la loi des montants de réclamation du modèle perturbé;

6. Déterminer le domaine de  $\epsilon$  tel que:  
 $0 < E(\exp(\epsilon(Z - c\theta))) = \rho < 1$  et  $u(a, a') = \|F_Z - F_{Z'}\|_v \leq (1 - \rho)^2$ ;

7. Déterminer l'erreur d'approximation  $\Gamma = \frac{u(a, a')}{(1 - \rho) \left( (1 - \rho)^2 - u(a, a') \right)}$ .

---

#### Présentation graphique du modèle idéal et les modèles perturbés

Afin de pouvoir appliquer l'algorithme ??, nous considérons les paramètres suivants:

- Le taux d'arrivée des sinistres  $\lambda = 0.09$  et le taux de prime  $c = 10$  sont les mêmes dans les deux modèles.
- La loi des inter-sinistres, supposée exponentielle est la même aussi dans les deux modèles avec  $f_\theta = e_\lambda$ .
- La fonction densité de la loi générale  $F_Z = Pareto(\alpha = 1.5, \beta = 1)$  des montants de réclamation dans le modèle idéal est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq \beta; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Les lois des montants de réclamation dans le modèle perturbé sont:  $f_1 = Pareto(1.5, 1.01)$ ,

$$f_2 = Pareto(1.5, 1.04), f_3 = Pareto(1.5, 1.07), f_4 = Pareto(1.5, 1.1).$$

La courbe de la fonction densité  $f$  du modèle idéal et les courbes  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  du modèle perturbé sont présentées dans la figure1.

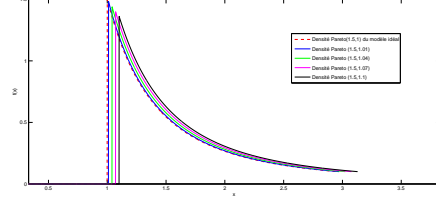


Figure 1: Densité du modèle idéal  $f(Pareto(1.5, 1))$  et les densités du modèle perturbé.

	$\epsilon$	$\rho(\epsilon)$	$u(a, a')$	Erreur $\Gamma$
Densité <i>Pareto</i> (1.5, 1.01)	0.00021	0.8241	0.0309	14621
	0.01	0.4938	0.0314	0.2762
	0.05	0.1864	0.0337	0.0659
	<b>0.1</b>	<b>0.1171</b>	<b>0.0371</b>	<b>0.0566</b>
	0.2	0.0893	0.0478	0.0671
	0.46011	0.4278	0.3272	3426.7
Densité <i>Pareto</i> (1.5, 1.04)	0.004013	0.6598	0.1157	4566.7
	0.01	0.4938	0.1169	1.6578
	0.05	0.1864	0.1256	0.2879
	<b>0.1</b>	<b>0.1171</b>	<b>0.1389</b>	<b>0.2456</b>
	0.2	0.0893	0.1809	0.3064
	0.395087	0.2168	0.6134	104020
Densité <i>Pareto</i> (1.5, 1.07)	0.007310	0.5578	0.1955	72059
	0.01	0.4938	0.1964	6.4923
	0.05	0.1864	0.2115	0.5770
	<b>0.1</b>	<b>0.1171</b>	<b>0.2344</b>	<b>0.4870</b>
	0.2	0.0893	0.3076	0.6471
	0.35272	0.1529	0.7174	8841.5
Densité <i>Pareto</i> (1.5, 1.1)	0.010695	0.4795	0.2709	38753
	0.015	0.4058	0.2731	5.7448
	0.05	0.1864	0.2918	0.9690
	<b>0.1</b>	<b>0.1171</b>	<b>0.3243</b>	<b>0.8066</b>
	0.2	0.0893	0.4282	1.1720
	0.317197	0.1219	0.7710	511810

Tableau 1: Borne de stabilité forte par rapport à la variation de  $\epsilon$  avec les différentes perturbations de la loi de  $Pareto(1.5, 1)$

#### Variation de la borne en fonction du paramètre de la norme $\epsilon$

En fonction des différentes perturbations de la fonction densité de la loi des montants de réclamation et en fonction du paramètre de la norme  $\| \cdot \|_v$ , on liste dans le tableau 1:  $\rho(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z - c\theta))$ , la borne

de déviation des noyaux de transition  $u(a, a')$  et la borne de déviation des probabilités de ruine  $\Gamma$ .

D'après le tableau 1, on remarque que:

- Le domaine de variation du paramètre de la norme  $\epsilon$  dépend de la perturbation faite sur la fonction densité de la loi des montants de réclamation. C'est-à-dire, de plus en plus qu'on se rapproche de la fonction densité du modèle idéal, le domaine de  $\epsilon$  s'élargit. Nous avons avec la première perturbation ( $f_1$  *Pareto*(1.5, 1.01)) l'intervalle le plus large par rapport aux autres perturbations ( $\epsilon \in [0.00021, 0.046011]$ ). Inversement, de plus en plus qu'on s'éloigne de la fonction densité du modèle idéal le domaine de  $\epsilon$  se rétrécit. C'est la cas avec la fonction densité  $f_3$  *Pareto*(1.5, 1.1) où  $\epsilon \in [0.010695, 0.317197]$ .
- Pour  $\epsilon = 0.1$ , nous avons la borne de déviation de la probabilité de ruine la plus petite avec toute les perturbations considérées.
- En augmentant la perturbation, la borne minimale qui correspond dans notre cas à  $\epsilon = 0.1$  devient de plus en plus importante. Ce qui est dû à l'éloignement entre les deux modèles.

### 3 PERTURBATION DES INTER-SINISTRES

On s'intéresse à l'application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des probabilités de ruine dans le modèle de risque Sparre Andersen (loi des inter-sinistres et des montants de réclamation sont générale). L'approche simulation sera utilisée afin d'évaluer numériquement la borne de stabilité forte des probabilités de ruine lors d'approximation du modèle de risque Lundberg (loi exponentielle des inter-sinistres et loi générale des montants de réclamation) par le modèle de risque Sparre Andersen.

#### 3.1 Approximation du modèle de risque Sparre Andersen par le modèle de Cramér-Lundberg

Pour une entrée  $a$  donnée, on suppose que la condition suivante est vérifiée:

$$\exists \epsilon \text{ tel que } E e^{(\epsilon(Z - c\theta))} = \rho(\epsilon) < 1. \quad (13)$$

Sous cette hypothèse et pour  $v(u) = e^{\epsilon u}$ , la déviation entre les noyaux de transition, obtenue par (Enikeeva et al, 2001) est donnée par la formule suivante:

$$\|P - P'\|_v \leq E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - F_Z\|_v. \quad (14)$$

Sous la condition suivante qui représente le domaine de perturbation des paramètres:

$$u(a, a') \leq (1 - \rho)^2, \quad (15)$$

où

$$u(a, a') = E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - F_\theta\|_v. \quad (16)$$

nous avons l'inégalité de stabilité suivante:

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{u(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - u(a, a'))} = \Gamma \quad (17)$$

#### Cas particulier

Lorsque la loi des montants de réclamation dans le modèle Cramér-Lundberg est exponentiel de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , alors:

$$\rho(\epsilon) = \frac{\lambda}{(1 - \epsilon\mu)(\lambda + \epsilon c)} \quad (18)$$

et

$$u(a, a') = \frac{1}{1 - \epsilon\mu} \int e^{\epsilon x} |f_{\frac{\lambda}{c}} - f_{c\theta}|(x) dx. \quad (19)$$

### 3.2 Simulation

Nous allons appliquer les différents estimateurs ci dessus pour évaluer numériquement la distance de variation  $u(a, a')$  définie dans (16) et l'erreur  $\Gamma$  définie dans (17) entre les deux modèles considérés.

**Démarche à suivre** nous développons un algorithme de simulation qui contient les étapes suivantes:

- Générer un n-échantillon de fonction de répartition  $G_\theta$  des inter-sinistres supposé inconnue dans le modèle Sparre Andersen;
- Estimer la densité  $g_\theta$  par  $\hat{g}_h$  en utilisant le noyau GAM et BS;
- Introduire le montant moyen de réclamation  $\mu$  et le taux de prime  $c$ ;
- Déterminer le taux moyen d'arrivée des sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg  $\lambda \leftarrow \int_0^\infty x \hat{g}_h(x)$ ;
- Vérifier si  $c > \lambda\mu$ , sinon la ruine est certaine;
- Déterminer le domaine de  $\epsilon$  tel que:  
 $E(\exp(\epsilon(Z - c\theta))) = \rho < 1$  et  
 $u(a, a') = E e^{\epsilon Z} \|E_\lambda - G_Z\|_v \leq (1 - \rho)^2$ ;
- Déterminer l'erreur d'approximation  $\Gamma = \frac{u(a, a')}{(1 - \rho) ((1 - \rho)^2 - u(a, a'))}$ .



## Moyens utilisés

Pour arriver à exécuter les étapes de simulation données ci dessus nous avons utilisé les moyens suivants:

1. La programmation est faite en utilisant le logiciel MATLAB R2014a.
2. Utilisation de la fonction "Rand" de l'environnement MATLAB R2014a pour la génération des nombres aléatoires.
3. Utilisation du critère  $ISE = \int \{\hat{g}(x) - g(x)\}^2$  pour comparer la performance des estimateurs à noyau

## 3.3 Exemple numérique

### Exemple1

Dans cette exemple, nous considérons:

- Le montant moyen de réclamation  $\mu = 0.1$  et le taux de prime  $c = 1$  sont les mêmes dans les deux modèles.
- La loi des montants de réclamation, supposée exponentielle est la même aussi dans les deux modèles avec  $g_Z = e_{\frac{1}{\mu}}$ .
- La fonction densité de la loi générale  $G_{\theta'} = Gamma(\alpha = 0.95, \beta = 2)$  des inter-sinistres dans le modèle Sparr Andersen est donnée par:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{if } x \geq 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- La loi des inter-sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg est exponentielle  $e_{\lambda_1}$  où  $\lambda_1 = \frac{1}{\int x g_1(x) dx}$ .

La courbe de la fonction densité  $g_1$  et la courbe de la fonction densité  $e_{\lambda_1}$  sont présentées dans la figure2.

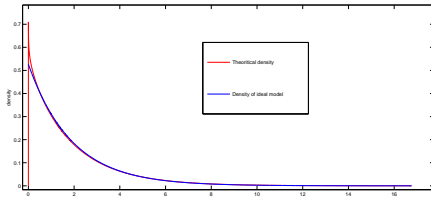


Figure 2: Densité  $g_1 Gamma(0.95, 2)$ , et densité  $e_{\lambda_1}$

Dans la figure2, on remarque que les densités des deux modèles sont très proche et puisque les autres paramètres sont les mêmes, nous pouvons conclure que les deux modèles considérés sont très proches.

En générant un échantillon issu de la loi  $Gamma(\alpha = 0.95, \beta = 2)$  de taille 200, nous utilisons les estimateurs à noyau GAM, GAM1 et BS donnés respectivement par  $\hat{g}_1^{GAM}(x)$  ( $h = 0.07$ ),  $\hat{g}_1^{GAM1}(x)$  ( $h = 0.07$ ) and  $\hat{g}_1^{BS}(x)$  ( $h = 0.01$ ) pour estimer la densité théorique  $g_1(x)$ . Pour ces estimateurs, nous prenons la taille de l'échantillon  $n = 200$  et le nombre de simulation  $R = 100$ .

### Exemple2

Dans cet exemple, nous allons donner les valeurs suivantes aux paramètres des deux modèles:

- Le montant moyen de réclamation  $\mu = 0.2$  et le taux de prime  $c = 10$  sont les mêmes dans les deux modèles.
- La loi des montants de réclamation, supposée exponentielle est la même aussi dans les deux modèles avec  $g_Z = e_{\frac{1}{\mu}}$ .
- La fonction densité de la loi générale  $G_{\theta'}$  des inter-sinistres dans le modèle Sparr Andersen est  $g_2 \rightsquigarrow Gamma(\alpha = 1.8, \beta = 2)$ .
- La loi des inter-sinistres dans le modèle Cramér-Lundberg est exponentielle avec  $g_{2\theta} = e_{\lambda_2}$  où  $\lambda_2 = \frac{1}{\int x g_2(x) dx}$ .

La courbe de la fonction densité  $g_2$  et la courbe de la fonction densité  $e_{\lambda_2}$  sont présentées dans la figure3.

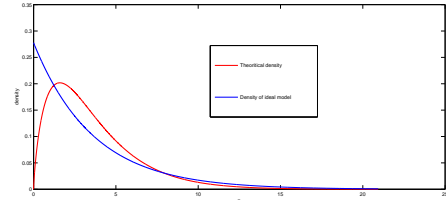


Figure 3: Densité  $g_2(Gamma(1.8, 2))$ , et densité  $e_{\lambda_2}$

Dans la figure3, on remarque que les densités des deux modèles sont éloignées. Ce qui veut dire que les deux modèles sont moins proche par rapport au premier exemple.

En suivant la même démarche présentée dans l'exemple précédent, on génère un échantillon issu de la loi  $Gamma(\alpha = 1.8, \beta = 2)$  de taille 200, nous utilisons les estimateurs à noyau GAM, GAM1 et BS donnés respectivement par  $\hat{g}_2^{GAM}(x)$  ( $h = 0.07$ ),  $\hat{g}_2^{GAM1}(x)$  ( $h = 0.07$ ) and  $\hat{g}_2^{BS}(x)$  ( $h = 0.01$ ) pour estimer la densité théorique  $g_2(x)$ .

## Qualité de l'estimateur à noyau comparée à la borne de stabilité

l'évolution de l'erreur  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon$  avec la densité théorique  $g_1(\text{Gamma}(0.95, 2))$  et la densité théorique  $g_2(\text{Gamma}(1.8, 2))$  sont présentés dans la Figure 4.

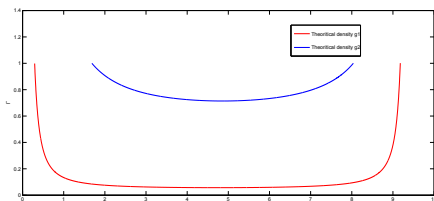


Figure 4: Erreur  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon$  avec la densité théorique  $g_1$  et avec la densité théorique  $g_2$ .

Figure 5 (respectivement Figure 6) décrivent l'évolution de l'erreur  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon$  avec la densité théorique  $g_1(\text{Gamma}(0.95, 2))$  (respectivement  $g_2(\text{Gamma}(1.8, 2))$ ) et avec les densités estimées.

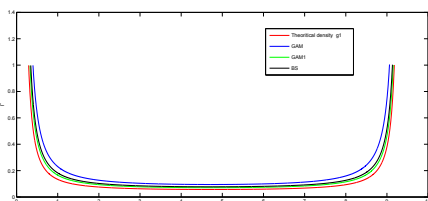


Figure 5: Erreur  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon$  avec la densité théorique  $g_1$  et avec ses différents estimateurs.

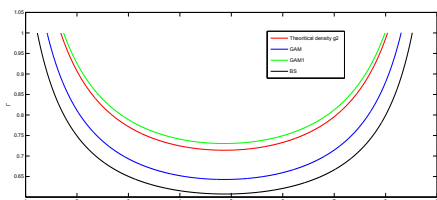


Figure 6: Erreur  $\Gamma$  en fonction de  $\epsilon$  avec la densité théorique  $g_2$  et avec ses différents estimateurs.

**Discussion.** On note, d'après la figure 4 que:

- L'erreur, étant importante au début, décroît pour les valeurs de  $\epsilon$  se trouvant au voisinage de la borne inférieure. Elle croît rapidement dans le voisinage de la borne supérieure. Ceci s'explique par le fait que l'on est à la frontière de la stabilité (région critique).
- L'erreur évolue d'une manière raisonnable entre les deux bornes inférieure et supérieure (région favorable). Néanmoins, il est intéressant de considérer l'erreur minimale

- Le domaine de la région favorable avec la densité théorique  $g_1(\text{Gamma}(0.95, 2))$  est plus grand que celui avec la densité théorique  $g_2(\text{Gamma}(1.8, 2))$ .

On liste dans le tableau 2 la distance de variation  $u(a, a')$  et l'erreur d'approximation  $\Gamma$  sur les probabilités de ruine pour les différents estimateurs et avec les deux densités théoriques  $g_1$  et  $g_2$ .

	Field of $\epsilon$	$u(a, a')$	ISE	$\min\{\Gamma\}_\epsilon$
$g_1$	]0,9.4726[	0.0396	0	0.0570
$\hat{g}_1^{GAM}$	]0,9.4608[	0.0636	0.00079	0.0948
$\hat{g}_1^{GAM1}$	]0,9.4804[	0.0548	<b>0.0005</b>	<b>0.0707</b>
$\hat{g}_1^{BS}$	]0,9.4791[	0.0636	0.001	0.0775
$g_2$	]0,9.7218[	0.3937	0	0.7141
$\hat{g}_2^{GAM}$	]0,7.200[	0.3616	0.00026	0.6429
$\hat{g}_2^{GAM1}$	]0,9.7272[	0.3950	<b>0.00011</b>	0.7305
$\hat{g}_2^{BS}$	]0,6.353927[	0.3587	0.00017	<b>0.6074</b>

Tableau 2: Borne de stabilité forte des probabilités de ruine avec la loi *Gamma* des inter-sinistres.

D'après le tableau 2, nous constatons que:

- L'erreur d'approximation des probabilités de ruine entre les modèles de risque Sparre Andersen et Cramér-Lundberg est obtenue avec les densités théoriques et les densités estimées.
- Avec la densité théorique  $g_1$  et en terme de ISE, l'estimateur de la densité avec le noyau GAM1 est meilleur que l'estimateur de la densité avec le noyau GAM et BS. De plus, la borne de stabilité forte des probabilités de ruine en utilisant l'estimateur avec GAM1 est plus proche à la borne de stabilité obtenue en utilisant la densité théorique  $g_1$ .
- Avec la densité théorique  $g_2$  et en terme de ISE, l'estimateur de la densité avec le noyau GAM1 est meilleur que l'estimateur de la densité avec le noyau GAM et BS. Par contre, la borne de stabilité des probabilités de ruine la plus petite (même avec la loi théorique) est donnée par l'estimateur à noyau BS.

## 4 CONCLUSION

Les résultats de la simulation présentés dans ce travail montrent, d'une part, l'intérêt de l'application de la méthode du noyau et de stabilité forte dans l'étude de proximité entre les probabilités de ruine du modèle de risque idéal et du modèle de risque perturbé. D'autre part, ces résultats mettent en évidence l'importance de la borne de stabilité forte des probabilités de ruine et le degré de perturbation commise dans le choix du meilleur estimateur de la fonction densité.

## REFERENCES

- Aissani, D. and N. V. Kartashov, 1983. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr*, Ser. A11, p. 3-5.
- Asmussen, S. and H. Albrecher, 2010. *Ruin probabilities*, Word Scientific.
- Bareche, A. and D. Aissani, 2008. Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queuing system. *Operations Research Letters*, 36(5), p. 535-538.
- Bareche, A. and D. Aissani, 2010. Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of G/G/1 and G/M/1 queuing systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, p. 1296-1304.
- Benouaret, Z. and D. Aissani, 2010. Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, p. 83-93.
- Chen, SX., 2000. Gamma kernel estimators for density functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52, p. 471-480.
- Enikeeva, F., V. Kalashnikov and D. Rusaityte, 2001. Continuity estimates for ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, p. 18-39.
- Jin, X. and J. Kawczak, 2003. Birnbaum-Saunders and lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data. *Annals of Economics and Finance*, 4, p. 103-124.
- Kalashnikov, V., 2000. *The stability concept for stochastic risk models*. Working Paper Nr 166, Laboratory of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen.
- Kartashov, N. V., 1996. *Strong stable Markov chains*. VSP, Utrecht.
- Kokonendji, C. C., T. Senga Kiessé and S. S. Zocchi, 2007. Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Nonparametric Statistics*, 19, p. 241-257.
- Kokonendji, C. C. and F. G. Libengué 2011. Méthode des noyaux associés continus et estimation de densité. *Journées de Statistique de la SFdS*, Tunis, Tunisi.
- Libengué, F. G., 2013. *Méthodes non paramétriques des noyaux associés mixtes et applications*. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, France, Université de Ougadougou, Burkina-Faso.
- Parzen, E., 1962. On estimation of a probability density function and mod. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, p. 1065-1076.
- Rosenblatt, M., 1956. Remarks in some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27, p. 832-837.
- Rusaityte, D., 2001. *Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments*, Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen, Working Paper Nr. 178.
- Schuster, E. F., 1985. Incorporating support constraints into nonparametric estimation of densities. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 14, p. 1123-1136.
- Senga Kiessé, T., 2008. *Approche non-paramétrique par noyaux associés des données de dénombrement*. Thèse de Doctorat, Université de Pau, France.



# QUALITÉ DE L'ESTIMATEUR A NOYAU DANS L'APPROXIMATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

A. TOUAZI<sup>1</sup>, Z. BENOURET<sup>2</sup>, D. AISSANT<sup>2</sup> et S. ADJABI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université d'Alger1  
Alger centre 16000, Algérie  
*touazi\_atik@hotmail.fr*

<sup>2</sup>Unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)  
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algerie  
<http://www.lamos.org>

**RÉSUMÉ :** *L'objectif de ce travail est de prouver l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude d'un modèle de risque à une dimension lorsque la loi des montants de réclamation ou la loi des inter-sinistres sont générale et inconnue. Dans ce cas, on fait appel à la méthode du noyau pour estimer la fonction densité de la distribution considérée. Par la suite, en utilisant l'approche simulation, nous évaluons numériquement la borne de stabilité forte (erreur d'approximation) entre les probabilités de ruine des deux modèles de risque idéal et perturbé.*

**MOTS-CLÉS :** stabilité forte, probabilité de ruine, estimation non paramétrique, approximation.

