МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УДК 519.21

АЙССАНИ ДЖАМИЛЬ

ОЦЕНКА СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ $M/G/1$

КИЕВ 1982

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача оценки устойчивости стационарного распределения величины очереди в системе $M/G/1$ при возмущениях входного потока.

При этом возмущенная система типа $G/G/1$ такова, что ее входной поток близок к пуассоновскому, а времена обслуживания такие же, как и в невозмущенной системе $M/G/1$.

Отметим, что в системе $G/G/1$ стационарное распределение величины очереди является достаточно сложным функционалом от параметров системы, в то время как в системе $M/G/1$ это распределение вычисляется явно.

Поэтому наряду с исследованием факта устойчивости [1] представляют интерес точные неравенства для возмущенного стационарного распределения величины очереди.

Такие неравенства получены в статье.

Доказательства этих неравенств основаны на результатах [2] о сильной устойчивости цепей Маркова.

Для применения [2] в работе вводится специальный класс операторных норм (§ 1), доказывается сильная устойчивость в смысле [2] рассматриваемой цепи Маркова по отношению к этим нормам (§ 3), в (§ 4) приведены основные результаты статьи и их следствия.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим систему массового обслуживания $G/G/1$ с функцией распределения времени обслуживания F, функцией распределения интервала между поступлениями требований G, неограниченной очередью и дисциплиной обслуживания в порядке поступления.

Обозначим через

T_n - момент прихода n-ого требования,

θ_n - момент ухода n-ого требования,

γ_n - время до прихода очередного требования после момента θ_n,

ν_n - число требований в системе в момент θ_n,

$\tau_n = T_n - T_{n-1}$.

Независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения G. Легко видеть, что двумерная последовательность $X_n = (\nu_n, \gamma_n)$ образует цепь Маркова с переходным оператором

$$\varphi_{ij}(x, dy) = \begin{cases} q_j(dy) & \text{когда } i = 0 \\ q_{j-i}(x, dy) & \text{когда } i \geq 1, j \geq i \\ P(x, dy) & \text{когда } j = i-1, i \geq 1 \end{cases} \qquad (I.I)$$

где

$$q_j(dy) = \int P(T_j \leq u < T_{j+1}, T_{j+1} - u \in dy)\, dF(u)$$

и

$$q_j(x, dy) = \int_x^\infty dF(u) P(T_j \leq u < T_{j+1}, T_{j+1} - (u - x) \in dy)$$

Одновременно рассмотрим систему массового обслуживания $M/G/1$, с пуассоновским входящим потоком интенсивности λ и такими же временами обслуживания, что и в системе $G/G/1$. Обозначим E - показательное распределение с параметром λ.

Символами $\bar{\Theta}_n$, $\bar{T}_n$, $\bar{\delta}_n$, $\bar{\nu}_n$, $\bar{\tau}_n$ будем обозначать соответственно величины для цепи $\bar{X}_n$ в системе $M/G/1$.

Легко видеть, что переходный оператор $\bar{\varphi}_{ij}(x, dy)$ в системе $M/G/1$ имеет вид (I.I), где

$$\bar{q}_j(dy) = p_j E(dy)$$

и (I.2)

$$\bar{q}_k(x, dy) = p_k(x) E(dy)$$

$$p_j = \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} dF(u)$$

$$p_k(x) = \int_x^\infty e^{-\lambda(u-x)} \frac{[\lambda(u-x)]^k}{k!} dF(u) \qquad (I.3)$$

Предположим, что система $G/G/1$ близка к системе $M/G/1$ (т.е. входной поток системы $G/G/1$ близок к пуассоновскому). Для характеризации этой близости используем расстояние по вариации $\upsilon_\varepsilon(G, E)$ с весовой функцией $\varphi_\varepsilon(t)$. Выберем и зафиксируем произвольную функцию $\varphi_\varepsilon(t)$, такую, что:

а) $\varphi_\varepsilon(t)$ не убывает,

б) $\varphi_\varepsilon(t+s) \le \varphi_\varepsilon(t) \cdot \varphi_\varepsilon(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}^+$ (I.4)

в) $\varphi_\varepsilon(0) = 1$.

Обозначим через $\upsilon_\varepsilon(G, E) = \int \varphi_\varepsilon(t) |G - E|(dt)$ расстояние по вариации между функциями распределения G и E с весом $\varphi_\varepsilon(t)$. Обозначим также

$$G_\varepsilon = \int \varphi_\varepsilon(t) G(dt)$$

$$E_\varepsilon = \int \varphi_\varepsilon(t) E(dt) \qquad (I.5)$$

$$\upsilon_0 = \int |G - E|(dt)$$

где G – мера и $|\alpha|$ – вариация меры α.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mu_j(dy)\}$ означает пространство конечных мер на $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$. Переходный оператор $P_{ij}(x, dy)$ задает линейное отображение $P_{ij}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, значение которого в точке $\mu \in \mathcal{M}$ равно

$$(\mu P)_k(dy) = \sum_i \int \mu_i(dx) P_{ik}(x, dy) \qquad (I.6)$$

Обозначим также η - пространство измеримых ограниченных функций на $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$. Символом Pf для $f \in \eta$ будем обозначать функцию

$$(Pf)(k, x) = \sum_i \int f(i, y) P_{ki}(x, dy) \qquad (I.7)$$

Действие меры $\mu \in \mathcal{M}$ на функцию $f \in \eta$ обозначим μf. Для исследования сильной устойчивости цепи X_n ведем в $\mathcal{M}$ специальный класс норм. Пусть $V(n, t)$ - конечная (не обязательно ограниченная) отделенная от нуля функция на $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$. Определим

$$\|\mu\|_V = \sum_j \int V(j, y) |\mu_j(dy)| \qquad (I.8)$$

Эта норма индуцирует в η норму

$$\|f\|_V = \sup_k \sup_x \frac{|f(k, x)|}{V(k, x)} \qquad (I.9)$$

Выделим из класса всех линейных операторов пространство $\mathcal{B}$ линейных ограниченных операторов с нормой

$$\|Q\|_V = \sup_k \sup_x \frac{1}{V(k, x)} \sum_j \int V(j, y) |Q_{ij}(x, dy)| \qquad (I.10)$$

Для нормы, построенной по функции $V(n,t)=\beta^n \varphi_\varepsilon(t)$, введем обозначения $\|\cdot\|_{\beta,\varepsilon}$. При этом

$$\|\mu\|_{\beta,\varepsilon}=\sum_n \beta^n \int \varphi_\varepsilon(t)\,|\mu_n|(dt) \tag{I.II}$$

Напомним следующее определение ([2]):

Цепь Маркова с переходным оператором P и с инвариантной мерой π называется сильно устойчивой по отношению к норме $\|\cdot\|_V$, если $\|P\|_V<\infty$ каждый переходный оператор Q на пространстве $[\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+)]$ из некоторой окрестности $\{Q:\|Q-P\|_V\leq\varepsilon\}$ имеет единственную инвариантную меру $\nu=\nu(Q)$ и существует постоянная $C=C(P)$ такая, что $\|\pi-\nu\|_V\leq C\|P-Q\|_V$.

§ 2. СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПИ МАРКОВА $\bar X_n=(\bar\nu_n,\bar\gamma_n)$.

В работе [2] показано, что для сильной V-устойчивости цепи X_n достаточно, чтобы [теорема 2, [2]] нашлись мера α и функция h на $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$ такие, что:

а) оператор $T_{ij}(x,dy)=\bar Q_{ij}(x,dy)-h_i(x)\alpha_j(dy)$ был неотрицательным,

б) существовало $\rho<1$ такое, что

$$(TV)(k,x)\leq\rho V(k,x) \tag{2.I}$$

для всех $(k,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$

Докажем, что цепь Маркова $\bar X_n=(\bar\nu_n,\bar\gamma_n)$ сильно V-устойчива для функции

$$V(k,x)=\beta^k\left[e^{-\alpha x}+c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right] \tag{2.2}$$

Для проверки а) положим

$$h_i(x) = \delta_{i0} = \begin{cases} 1 & \text{когда } i=0 \\ 0 & \text{когда } i\neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha_j(dy) = \bar{q}_j(dy)$$

где $\bar{q}_j(dy)$ определены в (I.2). В этом случае

$$T_{ij}(x,dy) = \bar{Q}_{ij}(x,dy) - \delta_{i0}\alpha_j(dy)$$

$$= \bar{Q}_{ij}(x,dy) - \delta_{i0}\bar{q}_j(dy),$$

то есть

$$T_{ij}(x,dy) = \bar{Q}_{ij}(x,dy) \qquad \text{при } i>0$$

и

$$T_{ij}(x,dy) = 0 \qquad \text{при } i=0$$

и из определения $\bar{Q}_{ij}$ (I.I) видно, что $T_{ij}(x,dy) \geqslant 0$.

б) Из (I.7) заключаем, что

$$(TV)(k,x) = \sum_j \int V(j,y)\,T_{kj}(x,dy) \qquad \text{при } k\neq 0$$

и $(TV)(0,x)=0$. Для проверки условия б) оценим при $k>0$

$$(TV)(k,x) = \int_0^x V(k-1,y)P(x,dy) + \sum_{j\geqslant 0} p_j(x)\int_0^\infty V(k+j,y)E(dy)$$

$$\leqslant \beta^{k-1}\int_0^x dF(u)\Big[\int_0^x e^{-\alpha y}P(x-u\in dy) +$$

$$\int_0^x c^{-1}\varphi_\varepsilon(y)P(x-u\in dy) + \sum_{j\geqslant 0} p_j(x)\beta^j\beta^k\Big[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} + c^{-1}E_\varepsilon\Big]\Big]$$

Заметим, что

$$\sum_{j\geq 0} \beta^j p_j(x) = \int_x^{\infty} e^{\lambda(u-x)(\beta-1)}\, dF(u)$$

Учитывая это равенство, получаем

$$(TV)(k,x) \leq \beta^{k-1}\left[e^{-\alpha x} M\left(e^{\alpha\xi}, \xi < x\right) + c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right] +$$

$$\beta^k\left[\frac{1}{\beta} M\left(e^{\alpha\xi}, \xi \geq x\right) + c^{-1} E_\varepsilon e^{-\alpha x} M e^{\alpha\xi}\right]$$

$$\leq \beta^k\left[\frac{1}{\beta} e^{-\alpha x}\hat{f}(\lambda\beta-\lambda) + e^{-\alpha x} c^{-1} E_\varepsilon \hat{f}(\lambda\beta-\lambda) + \frac{1}{\beta} c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right] \qquad (2.3)$$

где $\hat{f}(\lambda\beta-\lambda) = M e^{(\lambda\beta-\lambda)\xi}$ (2.4)

Наконец, мы получаем неравенство

$$(TV)(k,x) \leq \beta^k\left[e^{-\alpha x}\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)\left[\frac{1}{\beta} + c^{-1}E_\varepsilon\right] + \frac{1}{\beta} c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right] \qquad (2.5)$$

Предположим, что в системе $M/G/1$ выполнены следующие условия:

1) $\lambda M\xi < 1$

2) существует $a>0$: $M e^{a\xi} = \int_0^{\infty} e^{au}\, dF(u) < \infty$ (2.6)

Из (2.6) непосредственно следует, что существует $\beta > 1$ такое, что $\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/\beta < 1$. Действительно, рассмотрим функцию

$$\varphi(\beta) = \frac{\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)}{\beta} = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)u}\,dF(u)$$

при $\beta = 1$ $\varphi(1) = \hat{f}(0) = 1$. При $1 < \beta < a$, $\varphi(\beta)$ непрерывна и дифференцируема. Вычислим

$$\varphi'(\beta) = \frac{\lambda\hat{f}'(\lambda\beta-\lambda) - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)}{\beta^2}$$

При $\beta = 1$ мы получаем $\varphi'(1) = \lambda\hat{f}'(0) - \hat{f}(0)$, где

$$\hat{f}'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{\alpha u}\,dF(u) = \int_0^\infty u e^{\alpha u}\,dF(u)$$

Отсюда непосредственно следует, что $\hat{f}'(0) = M\xi$. Но мы предположили в (2.6), что $\lambda M\xi < 1$, т.е.

$$\varphi'(1) = \lambda M\xi - 1 < 0$$

Это значит, что существует $\beta > 1$ такое, что

$$\varphi(\beta) = \frac{\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)}{\beta} < 1$$

Определим теперь

$$\beta_0 = \sup(\beta : \hat{f}(\lambda\beta-\lambda) < \beta) \tag{2.8}$$

Как доказано выше $\beta_0 > 1$. Легко видеть, что $\beta_0 < \infty$, если распределение F невырождено. Кроме того, из выпуклости $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)$ следует, что

$$\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) < \beta \quad \text{для всех } \beta \in (1, \beta_0)$$

и $\hat{f}(\lambda\beta_0 - \lambda) \leq \beta_0$ (2.9)

Для выполнения (2.I), очевидно, достаточно проверить неравенство

$$\frac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)}{\beta} + c^{-1} E_\varepsilon \hat{f}(\lambda\beta - \lambda) \leq \rho \tag{2.I0}$$

Выберем

$$\rho = \frac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \beta}{2\beta} \tag{2.II}$$

Заметим, что при каждом $1 < \beta < \beta_0$, $\rho < 1$ в соответствии с выбором β. Положим

$$C = \frac{\beta E_\varepsilon}{1 - \rho} \tag{2.I2}$$

Заметим, что $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) = \beta(2\rho - 1)$ (2.I3)

Учитывая (2.I0) и (2.I3), из (2.4) заключаем, что $(TV)(k, x) \leq \rho V(k, x)$ при $k > 0$. Ясно, что $(TV)(0, x) \leq \rho V(0, x)$. Применяя теорему 2 [2], убеждаемся в справедливости такого утверждения.

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть в системе $M/G/1$ выполнены условия (2.6), $E_\varepsilon < \infty$ и постоянная $\beta_0 > 1$ определена в (2.8). Тогда для каждого $1 < \beta < \beta_0$ цепь Маркова X_n в

системе сильно V-устойчива для функции

$$V(n,t) = \beta^n \left[e^{\alpha t} + c^{-1} \varphi_\varepsilon(t) \right]$$

где

$$c = \frac{\beta E_\varepsilon}{1-\rho} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \beta}{2\beta} < 1.$$

§ 3. ОЦЕНКИ НОРМЫ $\|\bar{\varphi} - \varphi\|_{\beta,\varepsilon}$.

Для доказательства точных неравенств на основании [2] приведем оценки нормы уклонения оператора φ от оператора $\bar{\varphi}$.

Теорема 3.I. Для каждого $1 < \beta < \beta_0$, каждого G такого, что $G_\varepsilon < \infty$ и всех распределений G таких, что $v_0 = v_0(G, E) \le \beta_0 - \beta/\beta_0^2$ справедливо неравенство

$$\|\bar{\varphi} - \varphi\|_{\beta,\varepsilon} \le v_\varepsilon (1+\beta) + v_0 G_\varepsilon (1 + \lambda\beta) \frac{\beta_0^4}{(\beta_0 - \beta)^2}$$

где $v_\varepsilon = v_\varepsilon(G, E)$ и $v_0 = v_0(G, E)$ определены в (I.5).

Доказательство. В соответствии с (I.I0)

$$\|\bar{\varphi} - \varphi\|_{\beta,\varepsilon} = \sup_k \sup_x \beta^{-k} \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_j \int \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \left| \bar{\varphi}_{kj}(x,dy) - \varphi_{kj}(x,dy) \right| \quad (3.I)$$

Для оценки правой части (3.I) оценим сначала выражение под знаком первого супремума при $k=0$, а затем при $k>0$ и выберем наибольшую из этих оценок. Обозначим через

$$\begin{aligned} \Psi_k(x,A) &= P(T_k \le x < T_{k+1},\ T_{k+1}-x \in A) \\ \bar{\Psi}_k(x,A) &= P(\bar{T}_k \le x < \bar{T}_{k+1},\ \bar{T}_{k+1}-x \in A) \\ \text{и} \qquad \Delta_k(x,A) &= \Psi_k(x,A) - \bar{\Psi}_k(x,A) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что функции из (I.I) равны:

$$q_j(dy) = \int \Psi_j(u,dy)\,dF(u)$$

$$q_j(x,dy) = \int_x^\infty \Psi_j(u-x,dy)\,dF(u)$$

Выражение под знаком супремума при $k=0$ в соответствии с (I.2) равно

$$\sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_j \int \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \int_0^\infty |\Delta_j(u,dy)|\,dF(u) \right\}$$

$$\le \sum_j \int \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \int_0^\infty |\Delta_j(u,dy)|\,dF(u) \Big\} \tag{3.3}$$

так как $\varphi_\varepsilon(x) \ge 1$

и при $k \ne 0$

$$\sup_x \beta^{-k} \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \Big[\int \beta^{k-1} \varphi_\varepsilon(y) |P(x,dy) - P(x,dy)| +$$

$$\sum_{j=k}^\infty \int \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \left| \bar{q}_{j-k}(x,dy) - q_{j-k}(x,dy) \right| \Big]$$

$$= \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \int \sum_{j\geq 0} \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \left| \int_x^\infty \overline{\Psi}_j(u-x, dy) - \Psi_j(u-x, dy)\, F(du) \right| \right\}$$

$$\leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_{j\geq 0} \beta^j \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x^\infty dF(u) \left| \Delta_j(u-x, dy) \right| \right\} \tag{3.4}$$

Так как выражение под знаком супремума в (3.4) при $x=0$ совпадает с (3.3), то (3.4) не меньше чем (3.3). Следовательно, справедлива оценка:

$$\| \overline{\varphi} - \varphi \|_{\beta,\varepsilon} \leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_j \int \beta^j \varphi_\varepsilon(y) \int_0^\infty \left| \Delta_j(u-x, dy) \right| dF(u) \right\} \tag{3.5}$$

Для того, чтобы оценить $\| \overline{\varphi} - \varphi \|_{\beta,\varepsilon}$, надо вычислить сначала $\Delta_j(x, A)$. Нетрудно показать, что

$$\Psi_j(x, A) = \int_0^x dG(s)\, \Psi_{j-1}(x-s, A) \tag{3.6}$$

Докажем, что справедливо тождество

$$\Delta_j(x, A) = \sum_{i=0}^{j-1} \Psi_0 * G^{*i} * (G-E) * E^{*j-i-1} + \Delta_0 * E^{*j} \tag{3.7}$$

Действительно, применяя (3.6) к Ψ_j и $\overline{\Psi}_j$, получаем

$$\Delta_j(x, A) = \int_0^x dG(s)\, \Psi_{j-1}(x-s, A) - \int_0^x dE(s)\, \overline{\Psi}_{j-1}(x-s, A)$$

$$= \int_0^x [dG(s) - dE(s)]\, \Psi_{j-1}(x-s, A) - \int_0^x dE(s) [\Psi_{j-1} - \overline{\Psi}_{j-1}](x-s, A)$$

$$= \int_0^x \Psi_{j-1}(x-s, A)\, d(G-E)(s) + \int_0^x \Delta_{j-1}(x-s, A)\, dE(s)$$

$$= \Psi_{j-1} * (G-E)(x) + \Delta_{j-1} * E(x) \tag{3.8}$$

Мы заметим, что в соответствии с (3.6)

$$\Psi_j = \Psi_{j-1} * G = \Psi_0 * G^{*j} \tag{3.9}$$

С другой стороны

$$\Delta_{j-1} * E = \Psi_{j-2} * (G-E) * E + \Delta_{j-2} * E^{*2} \tag{3.10}$$

Из (3.8), (3.9) и (3.10) непосредственно следует (3.7). Применяя (3.7) в (3.5)получаем

$$\| \bar{\varphi} - \varphi \|_{\beta,\varepsilon} \le \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_{j \ge 0} \beta^j \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x^\infty dF(u) \sum_{i=0}^{j-1} \Psi_i * |G-E| * E^{*j-i-1} \right\}$$

$$+ \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_{j \ge 0} \beta^j \int \varphi_\varepsilon(y) \left| \int_x^\infty dF(u)\, \Delta_0 * E^{*j} \right| \right\} \tag{3.11}$$

Обозначим A_1 первое слагаемое в правой части (3.10), в A_2 второе слагаемое. Оценим слагаемые A_1 , A_2 в отдельности. Рассмотрим сначала слагаемое A_2 . Поскольку

$$\Delta_0 * E^{*j} = \int_0^x \Delta_0(x-s, A)\, E^{*j}(ds)$$

и

$$\Delta_0(x, A) = P(\tau - x \in A) - P(\bar{\tau} - x \in A) = \int 1_{\{t-x \in A\}} \left[G(dt) - E(dt) \right]$$

получаем неравенство

$$A_2 \le \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \sum_{j \ge 0} \beta^j \int \varphi_\varepsilon(y) \int (G-E)(dt) \int_0^{u-x} 1_{\{t+s-u+x \in dy\}}\, dE^{*j}(s) \right\}$$

$$\le \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \int |G-E|(dt) \int_x^\infty dF(u) \sum_{j\ge 0} \beta^j \int_0^{u-x} dE^{*j}(s)\, \varphi_\varepsilon(t+s+x-u) \right.$$

Из (I.4) следует, что

$$\varphi_\varepsilon(x) \ge 1$$

и (3.I2)

$\varphi_\varepsilon(t+s+x-u) \le \varphi_\varepsilon(t)$ поскольку $t+s+x-u>0$

Отсюда

$$A_2 \le \int \varphi_\varepsilon(t)|G-E|(dt) \sup_x \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} \Big[\sum_{j\ge 0} \beta^j E^{*j}(ds)\Big]$$

Положим $E_\beta(ds) = \sum_{j\ge 0} \beta^j E^{*j}(ds)$ и докажем, что

$$E_\beta(ds) = \delta_0(ds) + \lambda\beta e^{\lambda(\beta-1)s} ds \quad \text{где } \delta_0(ds) = E^{*0}(ds) .$$

Действительно

$$\sum_{j\ge 0} \beta^j E^{*j}(ds) = E^{*0}(ds) + \sum_{j\ge 1} \beta^j e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{j-1}}{(j-1)!} \lambda \cdot ds$$

$$= E^{*0}(ds) + \lambda\beta e^{-\lambda s} e^{\lambda\beta s} ds$$

Учитывая это равенство и определение V_ε в (I.5), получаем

$$A_2 \le V_\varepsilon \sup_x \left\{ \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} \left[\lambda\beta e^{\lambda(\beta-1)s} ds + \delta_0(ds) \right] \right\}$$

$$\le V_\varepsilon \sup_x \left\{ \int_x^\infty dF(u) \frac{\beta}{\beta-1} \left[e^{\lambda(\beta-1)u} - 1 \right] + 1 \right\}$$

$$\leq V_\varepsilon \left[\frac{\beta}{\beta-1} \left[\hat{f}(\lambda(\beta-\lambda)) - 1 \right] + 1 \right]$$

$$\leq V_\varepsilon \left[\frac{\beta}{\beta-1} (\beta-1) + 1 \right] = V_\varepsilon (1+\beta) \tag{3.13}$$

где использовано неравенство (2.9) справедливо для всех $1<\beta<\beta_0$. Оценим теперь A_1. Из (3.10)

$$A_1 \leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \beta \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x^\infty dF(u) \times \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^\infty \beta^i \sum_{j=i+1}^\infty \beta^{j-i-1} \, \Psi_0 * G^{*i} * |G-E| * E^{*j-i-1} \right\}$$

Обозначим через $G_\beta(ds)$ меру $\sum_{i\geq 0} \beta^i G^{*i}(ds)$

Тогда

$$A_1 \leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \beta \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x dF(u) \, \Psi_0 * |G-E| * G_\beta * E_\beta(u-x, dy) \right\}$$

$$\leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \beta \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} \Psi_0(u-x-t, dy) \left[|G-E| * G_\beta * E_\beta \right](dt) \right\}$$

$$\leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \beta \int \varphi_\varepsilon(y) \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} 1_{\{s-(u-x-t)\in dy\}} G(ds) \left[|G-E| * G_\beta * E_\beta \right](dt) \right\}$$

$$\leq \sup_x \left\{ \frac{1}{\varphi_\varepsilon(x)} \beta \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} \left[|G-E| * G_\beta * E_\beta \right](dt) \int_{u-x-t}^\infty G(ds) \varphi_\varepsilon(s+x+t-u) \right\}$$

Из (3.I2) непосредственно следует, что

$$A_1 \leq \beta \int_x^\infty dF(u) \int_0^{u-x} [|G-E| * E_\beta * G_\beta](dt)\ G_\varepsilon$$

где G_ε определены в (I.5). По определению свертки

$$A_1 \leq \beta G_\varepsilon \int_x^\infty dF(u) \int_0^u |G-E|([0,u-t]) E_\beta * G_\beta(dt)$$

$$\leq \beta G_\varepsilon V_0 \int_0^\infty dF(u) \int_0^u E_\beta * G_\beta(dt)$$

где V_0 определено в (I.5). Докажем теперь, что

$$\int_0^\infty dF(u) \int_0^u E_\beta * G_\beta(dt) \leq (1+\lambda\beta) \frac{\beta_0^3}{(\beta_0-\beta)^2} \tag{3.I4}$$

для всех распределений G таких, что

$$V_0 = V_0(G,E) \leq \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0^2}$$

Действительно

$$\int_0^\infty dF(u) \int_0^u E_\beta * G_\beta(dt) = \int_0^\infty dF(u) \int_0^u E_\beta(ds) \int_s^u G_\beta(dt-s)$$

$$= \int_0^\infty dF(u) \int_0^u \left[1 + \lambda\beta \int_0^u e^{\lambda(\beta-1)(u-s)} ds\right] G_\beta(ds)$$

$$= \int_0^\infty dF(u) \int_0^u G_\beta(ds) + \int_0^\infty dF(u)\, \lambda\beta \int_0^u e^{\lambda(\beta-1)(u-s)} G_\beta(ds) \tag{3.I5}$$

Обозначим B_1 – первое слагаемое в правой части (3.I5), а B_2 – второе слагаемое. Рассмотрим сначала слагаемое B_1.

$$B_1 \leq B_1' = \int_0^\infty e^{\alpha_0 u} dF(u) \int_0^u e^{-\alpha_0 \xi} G_\beta(ds)$$

поскольку $e^{\alpha_0(u-s)} \geq 1$ при $u \geq s$, где $\alpha_0 = \lambda\beta_0 - \lambda$

Положим $g(u) = \int_0^u e^{-\alpha_0 s} G_\beta(ds)$. Нетрудно доказать, что

$$g(u) = \sum_{j \geq 0} M^{*j}([0,u]) \quad \text{где} \quad M(ds) = \beta e^{-\alpha_0 s} G(ds)$$

Поэтому

$$\int g(ds) = \sum_{j \geq 0} \int M^{*j}(ds) = \sum_{j \geq 0} \left[\int M(ds) \right]^j$$

где

$$\int M(ds) = \int \beta e^{-\alpha_0 s} G(ds) = \beta \cdot \hat{g}(-\alpha_0)$$

Предположим, что $\beta \hat{g}(-\alpha_0) < 1$ (3.I6)

Тогда

$$M(R_+) = \beta \hat{g}(-\alpha_0) < 1 \quad \text{и} \quad g(+\infty) = (1 - M(R_+))^{-1} < \infty$$

То есть $g(u) \leq g(+\infty) = 1/1 - \beta \hat{g}(-\alpha_0)$ для всех u .

С другой стороны

$$\hat{g}(-\alpha_0) = \int_0^\infty e^{-\alpha_0 s} G(ds) = \int_0^\infty e^{(\lambda - \lambda\beta_0)s} E(ds) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{(\lambda - \lambda\beta_0)s} |G - E|(ds) \leq \frac{1}{\beta_0} + V_0$$

(3.I7)

Здесь использовано неравенство $e^{\lambda(1-\beta_0)s} < 1$ при $s > 0$, $\beta_0 > 1$. Из условия $V_0 \leq \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0^2}$ и (3.I7) получаем

$$\hat{g}(-\alpha_0) \leq \frac{1}{\beta_0} + \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0^2}$$

Отсюда

$$g(u) \leq \sum_{n \geq 0} \left[\beta \, \hat{g}(-\alpha_0) \right]^n \leq \sum_{n \geq 0} \beta^n \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0^2} \right)^n$$

Следовательно

$$B_1' \leq \int_0^\infty e^{\alpha_0 u} dF(u) \cdot g(u) \leq \frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2} \qquad (3.18)$$

где использовано опять неравенство (2.9).

Оценим теперь B_2. Нетрудно заметить, что

$$B_2 \leq \lambda \beta \int_0^\infty e^{\alpha_0 u} dF(u) \int_0^u e^{-\alpha_0 s} G_\beta(ds)$$

$$= \lambda \beta B_1'$$

$$\leq \lambda \beta \cdot \frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2} \qquad (3.19)$$

Как следует из (3.18). Из (3.18) и (3.19) приходим к неравенству (3.14). Учитывая это неравенство, получаем

$$A_1 \leq \beta G_\varepsilon V_0 \left[\frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2} + \lambda \beta \frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2} \right]$$

То есть

$$A_1 \leq V_0 G_\varepsilon \frac{1}{(\beta_0 - \beta)^2} \beta_0^4 (1 + \lambda \beta) \qquad (3.20)$$

Из (3.13) и (3.20) непосредственно следует, что

$$\|\bar{\varphi}-\varphi\|_{\beta,\varepsilon} \leq V_\varepsilon(1+\beta) + V_0 G_\varepsilon(1+\lambda\beta)\frac{\beta_0^4}{(\beta_0-\beta)^2},$$

для всех распределений G таких, что

$$V_0 = V_0(G,E) \leq \frac{\beta_0-\beta}{\beta_0^2},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Легко видеть, что норма $\|\cdot\|_{\beta,\varepsilon}$ (для которой получены оценки § 3) и норма $\|\cdot\|_V$ (по отношению к которой сильно V-устойчива цепь $\bar{X}_n$) эквивалентны. Приведем оценку этой эквивалентности.

<u>Лемма 4.1.</u> Для всех $1<\beta<\beta_0$ и $\varepsilon>0$ таких, что $E_\varepsilon<\infty$, справедливо неравенство

$$\|\bar{\varphi}-\varphi\|_V \leq \left(1+\frac{\beta E_\varepsilon}{1-\varsigma}\right)\|\bar{\varphi}-\varphi\|_{\beta,\varepsilon}$$

где $\|\cdot\|_V$ построена по функции $V(n,t)=\beta^n\left[e^{-\alpha t}+c^{-1}\varphi_\varepsilon(t)\right]$ а постоянные ς и c заданы в (2.11) и (2.12).

<u>Доказательство</u>. Положим $\bar{V}(k,x)=\beta^k\varphi_\varepsilon(x)$ и заметим, что $c^{-1}\bar{V}\leq V\leq(c^{-1}+1)\bar{V}$. Для всех ограниченных операторов $B\in\mathcal{B}$

$$\|B\|_V = \sup\left(\|Bf\|_V, \|f\|_V \leqslant 1\right) = \sup_f \frac{\|Bf\|_V}{\|f\|_V},$$

где $\|f\|_V = \sup f(k,x)/V(k,x)$. Легко видеть, что для всех $f \in \eta$ $\|f\|_{\beta,\varepsilon} \leqslant (\bar{c}+1)\|f\|_V$ и $\|f\|_V \leqslant c\|f\|_{\beta,\varepsilon}$

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{c}{c+1}\|f\|_{\beta,\varepsilon} \leqslant \|f\|_V \leqslant c\|f\|_{\beta,\varepsilon}$$

Поэтому

$$\|B\|_V \leqslant \sup_f \frac{c\|Bf\|_{\beta,\varepsilon}}{\frac{c}{c+1}\|f\|_{\beta,\varepsilon}} = (c+1)\|B\|_{\beta,\varepsilon}$$

Учитывая равенство (2.I2), получаем

$$\|B\|_V \leqslant \left(1+\frac{\beta E_\varepsilon}{1-\rho}\right)\|B\|_{\beta,\varepsilon}$$

Положим (4.I)

$$c_3 = 1+\frac{\beta E_\varepsilon}{1-\rho}$$

То есть $\|B\|_V \leqslant c_3\|B\|_{\beta,\varepsilon}$, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы использовать теорему § 4 [2], оценим $\|\pi\|_V$ и $c_0' = \left(1+\|1\|_V \cdot \|\pi\|_V\right)$. Здесь $\pi = \pi_k(A)$ является инвариантной мерой оператора $\bar{\varphi}$. Оценим сначала $\|\pi\|_V$. По определению

$$\pi_k(A) = \int_0^\infty \sum_i \pi_i(dy)\, \bar{\varphi}_{ik}(y,A)$$

для всех (k,A). То есть

$$\pi_k(A) = \sum_{i=0}^{k} \int_0^\infty \pi_i(dx) P_{k-i+1} E(A) + \int \pi_{k+1}(dx) P(x,A), \quad k \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Из условий эргодичности (2.6) вытекает, что система (4.I) имеет единственное решение в классе вероятностных распределений. Докажем, что это решение имеет вид:

$$\pi_k(A) = \pi_k E(A) \qquad k \geq 0 \tag{4.3}$$

Для этого подберем такие π_k, чтобы выполнялись равенства (4.I)

$$\pi_k E(A) = \sum_{i=0}^{k} \pi_i p_{k-i+1} E(A) + \pi_{k+1} \int E(dx) P(x, A), \quad k \geq 0$$

Заметим, что

$$\int E(dx) P(x, A) = \int e^{-\lambda u} dF(u) \int \lambda e^{-\lambda z} 1_{\{z \in A\}} dz = \hat{f}(-\lambda) E(A)$$

где $\hat{f}(-\lambda) = \int e^{-\lambda u} dF(u) = p_0$

Поэтому (4.I) эквивалентно

$$\pi_k(A) = \left[\sum_{i=0}^{k} \pi_i p_{k-i+1} + \pi_{k+1} \hat{f}(-\lambda) \right] E(A), \qquad k \geq 0$$

Для выполнения этих равенств необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi_k = \pi_0 p_k + \sum_{i=1}^{k} \pi_i p_{k+1-i} + p_0 \pi_{k+1} \tag{4.4}$$

Система (4.4) является системой уравнений для стационарного распределения величины очереди в системе $M/G/1$. Это распределение при выполнении условия (4.3) однозначно находится из (4.4). Введем производящую функцию $\Pi(z) = \sum_k \pi_k z^k$ где $|z| \leq 1$. Эта функция задается формулой Поляка-Хинчина [3 - стр.69]

$$\Pi(z) = \frac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)(z-1)(1-\lambda m)}{z - \hat{f}(\lambda z - \lambda)} \qquad \text{где } m = M\xi \tag{4.5}$$

Следовательно, единственное решение (4.4) задается производящей функцией $\Pi(z)$, которая определяется формулой (4.5). Заметим, что

$$\|\pi\|_v = \sum_{k\geq 0}\int \beta^k\left(e^{-\alpha x}+c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right)\pi_k(dx)$$

$$= \sum_{k\geq 0}\beta^k\pi_k\int\left[e^{-\alpha x}+c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right]E(dx) = \Pi(\beta)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}+c^{-1}E_\varepsilon\right]$$

В соответствии с (4.5)

$$\Pi(\beta) = \beta(\beta-1)(1-\lambda m)/\beta-2\beta(1-\rho)$$

где использовано равенство $\beta-\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)=2\beta(1-\rho)$.

Поскольку $\lambda/\lambda+\alpha = 1/\beta$, отсюда получаем оценку

$$\|\pi\|_v \leq C_2 \text{ где } C_2 = \frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)}{(1-\rho)\beta} \qquad (4.6)$$

Далее заметим, что

$$\|1\|_v = \sup_k \sup_x 1/\beta^k\left[e^{-\alpha x}+c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\right] \leq C$$

Поэтому $C_0' = 1+\|\pi\|_v\|1\|_v \leq C_0$ где

$$C_0 = 1+\frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)E_\varepsilon}{(1-\rho)^2} \qquad (4.7)$$

В следствии 2 теоремы 3 [2] получены оценки для нормы $\|\bar{\pi}-\nu\|_v$ в предположении, что норма возмущения оператора Q удовлетворяет неравенству

$$\|\bar{Q}-Q\|_v < \frac{1-\rho}{C_0'}$$

Потребуем, чтобы $\|\bar{Q}-Q\|_v \leq 1-\rho/2C_0$ (4.8)

Для выполнения этого неравенства по теореме (3.1) достаточно, чтобы

$$\left[V_\varepsilon(1+\beta)+V_0 G_\varepsilon(1+\lambda\beta)\frac{\beta_0^4}{(\beta_0-\beta)^2}\right]\left(1+\frac{\beta E_\varepsilon}{1-\rho}\right) \leq \frac{1-\rho}{2C_0}$$

и $\quad V_0 \leq \dfrac{\beta_0-\beta}{\beta_0^2}$

Положим $\quad c_1 = G_\varepsilon(1+\lambda\beta)\dfrac{\beta_0^4}{(\beta_0-\beta)^2}$ (4.9)

Значит для выполнения (4.8) достаточно потребовать, чтобы

$$\left[V_\varepsilon(1+\beta)+V_0 c_1\right]C_3 \le V_\varepsilon(1+\beta+c_1)C_3 \le \frac{1-\rho}{2C_0}$$

и

$$V_0 \le \beta_0-\beta/\beta_0^2 .$$

То есть (4.8) выполнено, если

$$V_\varepsilon(G,E) \le \frac{1-\rho}{2c_0c_3}(1+\beta+c_1)^{-1}, \quad V_0(G,E) \le \frac{\beta_0-\beta}{\beta_0^2} \tag{4.10}$$

Теорема 4.I. Пусть в системе $M/G/1$ выполнены условия эргодичности (2.6). Тогда в системе $G/G/1$ с распределением G входного потока для всех $1<\beta<\beta_0$, $\varepsilon>0$ и G таких, что выполнены неравенства (4.I0), справедлива оценка

$$\|\pi-\nu\|_v \le 2\left[(1+\beta)V_\varepsilon + c_1V_0\right]C_0C_2C_3 \tag{4.11}$$

где C_3, C_0, C_2, c_1 определены в (4.I), (4.7), (4.6) и (4.9).

Доказательство. Используя следствие 2 теоремы 3 [2] и учитывая неравенство $\|\bar\varphi-\varphi\|_v \le c_3\|\bar\varphi-\varphi\|_{\beta,\varepsilon}$.
То есть $\|\bar\varphi-\varphi\|_v \le c_3\left[V_\varepsilon(1+\beta)+V_0c_1\right]$ и
неравенство $C_0' \le C_0$, получаем

$$\|\pi-\nu\|_v \le 2c_0c_2c_3\left[V_\varepsilon(1+\beta)+V_0c_1\right]\left(1-\rho-c_0\|\bar\varphi-\varphi\|_v\right)^{-1}$$

Как показано выше, при выполнении (4.I0) справедлива оценка

$$\|\bar{\varphi}-\varphi\|_V \leq 1-\rho/2c_0,$$

то есть

$$\|\pi-\nu\|_V \leq 2c_0c_2c_3\left[V_\varepsilon(1+\beta)+V_0c_1\right]$$

что и требовалось доказать.

Приведем несколько следствий теоремы 4.I.

Следствие I. Пусть выполнены условия теоремы 4.I. Положим $\pi_k=\pi_k(R)$ и $\nu_k=\nu_k(R)$. Для каждого $1<\beta<\beta_0$ и каждого распределения G такого, что

$$V_\varepsilon=V_\varepsilon(G,E)\leq\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2M\xi^2}{4K_1K_0} \qquad 4.12$$

справедливо неравенство

$$\sum_k\int\beta^k\varphi_\varepsilon(x)|\pi_k-\nu_k|(dx)\leq\frac{2^6\beta_0^{10}}{(\beta_0-\beta)^7(\beta-1)^5}K_1K_2V_\varepsilon \qquad 4.13.$$

где $K_1=1+\beta_0+(1+\lambda\beta_0)\beta_0^2G_\varepsilon$ 4.14

$$K_2=\frac{(1-\lambda m)\beta_0E_\varepsilon}{\lambda^2M\xi^2}+\frac{4\beta_0(1-\lambda m)E_\varepsilon^2}{(\lambda^2M\xi^2)^2}+\frac{2^5(1-\lambda m)^2E_\varepsilon^2(1+4E_\varepsilon)}{(\lambda^2M\xi^2)^3} \qquad 4.15.$$

и

$$K_0=\beta_0+\frac{2^2\beta_0}{\lambda^2M\xi^2}E_\varepsilon+\frac{2^5(1-\lambda m)E_\varepsilon}{(\lambda^2M\xi^2)^2}+\frac{2^7(1-\lambda m)E_\varepsilon^2}{(\lambda^2M\xi^2)^3} \qquad 4.16$$

Доказательство: Очевидно, что при каждом ε

$$\sum_K \int \beta^K \varphi_\varepsilon(x) |\pi_K - \nu_K|(dx) \le c \sum_K \int \beta^K [e^{-\alpha x} + c^{-1} \varphi_\varepsilon(x)] |\pi_K - \nu_K|(dx)$$

$$\le c \sum_K \int V(K, x) |\pi_K - \nu_K|(dx)$$

$$= c \| \pi - \nu \|_V$$

$$\le 2 c c_0 c_2 c_3 [c_1 V_0 + (1+\beta) V_\varepsilon]$$

$$\le 2 c c_0 c_2 c_3 (1 + \beta + c_1) V_\varepsilon \qquad 4.17$$

Оценим сначала выражение $1 + \beta + c_1$

$$1 + \beta + c_1 = 1 + \beta + (1 + \lambda\beta) \frac{\beta_0^4}{(\beta_0 - \beta)^2} G_\varepsilon$$

$$= \frac{1}{(\beta_0 - \beta)^2} \left[(1+\beta)(\beta_0 - \beta)^2 + (1 + \lambda\beta) \beta_0^4 G_\varepsilon \right]$$

$$\le \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2} \left[1 + \beta_0 + (1 + \lambda\beta_0) \beta_0^2 \right]$$

Выберем K_1 в соответствии с 4.14 ,отсюда получаем

$$1 + \beta + c_1 \le \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta)^2} K_1 . \qquad 4.18$$

Оценим теперь $c c_0 c_2 c_3$,учитывая 2.12, 4.7, 4.6, и 4.1.

$$C_0 C C_2 C_3 = \frac{\beta E_\varepsilon}{1-\rho} \cdot \frac{(1-\rho)^2 + (1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)E_\varepsilon}{(1-\rho)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-\rho+\beta E_\varepsilon}{1-\rho} \cdot \frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)}{(1-\rho)\beta} \qquad 4.19$$

Докажем, что $1-\rho \geq \frac{\lambda^2 M\xi^2}{2} \cdot \frac{(\beta_0-\beta)(\beta-1)}{2\beta}$ 4.20

Действительно, по определению ρ 2.II

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda) = 2\beta(1-\rho)$$

Отсюда 4.2I

$$1-\rho = \beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/2\beta$$

Вычислим

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/\beta-1 = 1 + \frac{1-\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)}{\beta-1}$$

$$= 1 - \frac{\lambda[\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)-1]}{\alpha}$$

где $\alpha = \lambda\beta - \lambda$

$$= 1 - \lambda\int_0^\infty \frac{e^{\alpha u}-1}{\alpha}\, dF(u)$$

С другой стороны мы заметим, что

$$\lambda\int \frac{e^{\alpha_0 u}-1}{\alpha_0}\, dF(u) = \lambda\left[\frac{1}{\alpha_0}\left[\hat{f}(\alpha_0)-1\right]\right]$$

где $\hat{f}(\alpha_0) = \hat{f}(\lambda\beta_0-\lambda) \leq \beta_0$.

То есть

$$\lambda \int \frac{e^{\alpha_0 u}-1}{\alpha_0} dF(u) \leq \frac{\lambda(\beta_0-1)}{\lambda(\beta_0-1)} = 1$$

Учитывая это неравенство, получаем

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/_{\beta-1} \geq \lambda \int_0^\infty \frac{e^{\alpha_0 u}-1}{\alpha_0} dF(u) - \lambda \int_0^\infty \frac{e^{\alpha u}-1}{\alpha} dF(u)$$

$$= \lambda \int_0^\infty dF(u) \int_0^u e^{\alpha s}\left[e^{(\alpha_0-\alpha)s} - 1\right] ds$$

Мы здесь заметим, что $e^{(\alpha_0-\alpha)s} - 1 \geq (\alpha_0-\alpha)s$, поскольку $s \geq 0$, $\alpha_0 \geq \alpha$. Тогда

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/_{\beta-1} \geq \lambda \int_0^\infty dF(u) \int_0^u e^{\alpha s}(\alpha_0-\alpha) s\, ds$$

$$\geq \lambda(\alpha_0-\alpha) \int_0^\infty dF(u) \int_0^u e^{\alpha s} ds$$

Используя неравенство $e^{\alpha s} \geq 1$, получаем

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/_{\beta-1} \geq \frac{\lambda^2 M\xi^2}{2}(\beta_0-\beta)$$

То есть при любом $1 < \beta < \beta_0$ справедливо неравенство

$$\beta - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda) \geq \frac{\lambda^2 M\xi^2}{2}(\beta_0-\beta)(\beta-1) \qquad 4.22$$

Подставив 4.22 в 4.2I , получаем неравенство 4.20 , учитывая 4.20 и 4.I8 получаем

$$CC_0C_2C_3 \le \frac{4\beta_0^2 E_\varepsilon}{(\beta_0-\beta)(\beta-1)\lambda^2 M\xi^2}\cdot\frac{\beta_0}{(\beta_0-\beta)(\beta-1)}\cdot\frac{2^3(1-\lambda m)}{\lambda^2 M\xi^2}$$

$$\cdot\frac{\beta_0^3\left[\lambda^2 M\xi^2\beta_0 + 2^5(1-\lambda m)E_\varepsilon\right]}{(\beta_0-\beta)^2(\beta-1)^2(\lambda^2 M\xi^2)^2}\cdot\frac{\beta_0^2\left[\lambda^2 M\xi^2 + 4E_\varepsilon\right]}{(\beta_0-\beta)(\beta-1)\lambda^2 M\xi^2}$$

$$\le \frac{2^5\beta_0^8}{(\beta_0-\beta)^5(\beta-1)^5}\left[\frac{(1-\lambda m)E_\varepsilon\beta_0}{\lambda^2 M\xi^2} + \frac{4\beta_0(1-\lambda m)E_\varepsilon^2}{(\lambda^2 M\xi^2)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{2^5(1-\lambda m)^2 E_\varepsilon^2(1+4E_\varepsilon)}{(\lambda^2 M\xi^2)^3}\right]$$

$$\le \frac{2^5\beta_0^8}{(\beta_0-\beta)^5(\beta-1)^5}K_2 .$$

где K_2 определно в 4.I5 . Учитывая неравенства 4.I8 и 4.23 получаем 4.I3 . Это неравенство справедливо при выполнении условия 4.I0 . То есть при

$$V_\varepsilon \le \min\left(\frac{1-s}{2c_0c_3}(1+\beta+c_1)^{-1},\ \beta_0-\beta/\beta_0^2\right)$$

Оценим теперь выражение $1-s/2c_0c_3(1+\beta+c_1)$. Для этого оценим сначала c_0c_3

$$c_0c_3=\frac{1-s+\beta E_\varepsilon}{1-s}\cdot\frac{(1-s)^2+(1-\lambda m)(\beta-1)(2-s)E_\varepsilon}{(1-s)^2}$$

используя 4.20 ,получаем

$$c_0c_3\le\frac{\lambda^2M\xi^2\beta_0^2+4\beta_0^2E_\varepsilon}{\lambda^2M\xi^2(\beta_0-\beta)(\beta-1)}\cdot\frac{\beta_0^4(\lambda^2M\xi^2)^2+2^5\beta_0^3(1-\lambda m)E_\varepsilon}{(\lambda^2M\xi^2)^2(\beta_0-\beta)^2(\beta-1)^2}$$

$$\le\frac{\beta_0^5}{(\beta_0-\beta)^3(\beta-1)^3}\left[\beta_0+\frac{4\beta_0E_\varepsilon}{\lambda^2M\xi^2}+\frac{2^5(1-\lambda m)E_\varepsilon}{(\lambda^2M\xi^2)^2}+\frac{2^7(1-\lambda m)E_\varepsilon^2}{(\lambda^2M\xi^2)^3}\right]$$

Выбираем K_0 в соответствии с 4.I6 . Тогда

$$c_0c_3\le\frac{\beta_0^5}{(\beta_0-\beta)^3(\beta-1)^3}K_0$$

. Используя это неравенство и 4.I8 , получаем

$$\frac{1-s}{2c_0c_3}(1+\beta+c_1)^{-1}\le\frac{\dfrac{\lambda^2M\xi^2}{2}\cdot\dfrac{(\beta_0-\beta)(\beta-1)}{2\beta}}{\dfrac{\beta_0^5}{(\beta_0-\beta)^3(\beta-1)^3}\cdot\dfrac{\beta_0^2}{(\beta_0-\beta)^2}K_0K_1}$$

То есть

$$\le\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2M\xi^2}{2^2K_0K_1}$$

Докажем теперь, что

$$\min\left\{\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2 M\xi^2}{2^2 K_0 K_1},\ \frac{\beta_0-\beta}{\beta_0^2}\right\}=\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2 M\xi^2}{2^2 K_0 K_1}$$

Действительно

$$\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2 M\xi^2}{2^2 K_0 K_1}\leq\frac{\beta_0-\beta}{\beta_0^2}\cdot\frac{\beta_0^5\,\beta_0^4}{\beta_0^5}\cdot\frac{1}{2^2 K_0 K_1}$$

Это неравенство справедливо, если

$$\frac{\beta_0^4}{2^2 K_0 K_1}\leq 1 \qquad 4.24$$

Легко видеть, что $K_1\geq\beta_0^3 K_1''$ где $K_1''>1$ и $K_0\geq\beta_0 K_0''$ – где $K_0''>1$. Отсюда непосредственно следует 4.24 . Это значит, что 4.I0 эквивалентно 4.I2.

<u>Следствие 2.</u> Пусть выполнены условия теоремы 4.I . Для каждого $1<\beta<\beta_0$ и каждого распределения G такого, что

$$V_\varepsilon(G,E)\leq\frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2 M\xi^2}{4K_1K_0}$$

справедливо неравенство

$$\int_0^\infty\varphi_\varepsilon(x)\,|W(dx)-E(dx)|\leq\frac{2^6\beta_0^{10}}{(\beta_0-\beta)^7(\beta-1)^5}K_1K_2V_\varepsilon$$

где K_1 , K_2 , K_0 определены в 4.I4 , 4.I5 , 4.I6 .

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int_0^\infty \varphi_\varepsilon(x)\,|W(dx) - E(dx)| \leq \int \varphi_\varepsilon(x)\,\Big|\sum_k \pi_k(dx) - \sum_k \nu_k(dx)\Big|$$

$$\leq c\int c^{-1}\varphi_\varepsilon(x)\sum_k |\pi_k - \nu_k|\,(dx) \leq c\sum_k \int V(k,x)\,|\pi_k - \nu_k|\,(dx)$$

$$\leq 2cc_0c_2c_3\left[(1+\beta)V_\varepsilon + c_1 V_0\right]$$

$$\leq 2cc_0c_2c_3(1+\beta+c_1)\,V_\varepsilon$$

Учитывая неравенства 4.23 и 4.I8 получаем нужное неравенство. Неравенство 4.I3 справедливо для всех $\varepsilon \geq 0$ и в частности когда $\varepsilon = 0$, 4.I3 принимает вид:

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 4.I .Положим $\pi_k = \pi_k(R)$ и $\nu_k = \nu_k(R)$. Для каждого $1 < \beta < \beta_0$ и каждого распределения G такого, что

$$V_0 = V_0(G,E) \leq \frac{(\beta_0-\beta)^6(\beta-1)^4}{\beta_0^7}\cdot\frac{\lambda^2 M\xi^2}{K_1' K_0'}$$

справедлива оценка

$$\sum_k{}' \beta^k |\pi_k - \nu_k|\,(dx) \leq \frac{2^5\beta_0^{10}}{(\beta_0-\beta)^7(\beta-1)^5}\,K_1' K_2' V_0$$

где постоянные K_1' , K_2' , K_0' вычисляются по формулам 4.I4 4.I5 , 4.I6 при $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем методом прочных функций. М, "Наука", 1978.

2. Карташов Н.В. Сильно устойчивые цепи Маркова. - В сб."Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара", Изд-во ВНИИСИ, М., 1981, .

3. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее применения. М., "Советское радио", 1965.

Печатается в соответствии с решением ученого совета механико-математического факультета Киевского Ордена Ленина Государственного университета им Т.Г.Шевченко от 9 ноября 1981 года.

В печать от 12.7.82

Тир. 1 Цена 2 руб. 72 коп. Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403