ISSN 0201-8446

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

СЕРИЯ А

*

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

11

1983

Адрес редакции: 252001 Киев 1, ул. Героев революции, 4
тел. 29 75 98 — ответственный секретарь,
29 46 31 — редакторы

1983 ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР № 11
СЕРИЯ А. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

УДК 519.21

Дж. АЙССАНИ, Н. В. КАРТАШОВ

ЭРГОДИЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ПО ОТНОШЕНИЮ К ОПЕРАТОРНЫМ ТОПОЛОГИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕХОДНЫХ ЯДЕР

(Представлено академиком АН УССР В. С. Королюком)

Пусть $X=(X_t,\ t\geqslant 0)$ — однородная цепь Маркова со значениями в измеримом пространстве $(E,\mathfrak{E})$, заданная регулярным переходным ядром $P(x,A)$, $x\in E$, $A\in\mathfrak{E}$. Предположим, что σ-алгебра $\mathfrak{E}$ счетно-порождена, а цепь X имеет единственную вероятностную инвариантную меру π.

Обозначим $m\mathfrak{E}$ пространство конечных мер на $\mathfrak{E}$, $f\mathfrak{E}$ — пространство измеримых функций на E, $m\mathfrak{E}^+$ и $f\mathfrak{E}^+$ конусы неотрицательных элементов из $m\mathfrak{E}$ и $f\mathfrak{E}$. Переходное ядро Q задает линейное отображение $Q: m\mathfrak{E}\to m\mathfrak{E}$, действие которого на $\mu\in m\mathfrak{E}$ равно $\mu Q(\cdot)=\int\mu(dx)\,Q(x,\cdot)$. Для $\mu\in m\mathfrak{E}$, $f\in f\mathfrak{E}$ символом μf будем обозначать интеграл $\int\mu(dx)\,f(x)$, $f\odot\mu$ переходное ядро вида $f(x)\,\mu(A)$, $x\in E$, $A\in\mathfrak{E}$. Произведение PQ переходных ядер P, Q есть ядро $\int P(\cdot,dy)\,Q(y,\cdot)$.

Пусть пространство $m\mathfrak{E}$ снабжено некоторой нормой $\|\cdot\|$, которая выделяет из $m\mathfrak{E}$ банахово пространство $\mathfrak{m}=\{\mu\in m\mathfrak{E}:\|\mu\|<\infty\}$. Поставим в соответствие каждому переходному ядру Q на $(E,\mathfrak{E})$ линейный оператор $Q:\mu\to\mu Q$ на $\mathfrak{m}$ с индуцированной нормой

$$\|Q\|=\sup(\|\mu Q\|,\ \|\mu\|\leqslant 1).$$

При этом стохастическому ядру P отвечает линейный положительный оператор P на конусе $\mathfrak{m}^+=m\mathfrak{E}^+\cap\mathfrak{m}$.

Предположим, что норма $\|\cdot\|$ согласована со структурой порядка на $\mathfrak{m}$ и равномерной топологией в $m\mathfrak{E}$:

a) $\|\mu_1\|\leqslant\|\mu_1+\mu_2\|$ при $\mu_i\in\mathfrak{m}^+$,
в) $\|\mu_1\|\leqslant\|\mu_1-\mu_2\|$ при $\mu_i\in\mathfrak{m}^+$ и $\mu_1\perp\mu_2$,
c) $|\mu|(E)\leqslant k\|\mu\|$ при $\mu\in\mathfrak{m}$,

где $|\mu|$ — вариация меры μ, а k — некоторая постоянная.

Условиям a), в), c) удовлетворяют, например, нормы вида $\|\mu\|_v=\int v(x)\,|\mu|(dx)$, где v — произвольная измеримая функция, отделенная снизу от нуля (не обязательно ограниченная), а также нормы $\|\mu\|_{q,\varphi}=\left(\int|\mu'_\varphi|^q\,d\varphi\right)^{1/q}$ при $\mu\ll\varphi$ и $\|\mu\|_{q,\varphi}=\infty$ в остальных случаях, где μ'_φ — производная μ по φ, $q\geqslant 1$, а φ — конечная положительная мера.

Предположим также, что линейный оператор $P:\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ ограничен: (d) $\|P\|<\infty$. Обозначим $\Pi=1\odot\pi$ стационарный проектор ядра P, где $1\in f\mathfrak{E}$ функция, тождественно равная единице, I — единичный оператор в $\mathfrak{m}$ и рассмотрим чезаровские средние $P^{(t)}=t^{-1}\sum_{s=0}^{t-1}P^s$.

Определение 1. Цепь X равномерно эргодична по отношению к норме $\|\cdot\|$, если она имеет единственную вероятностную инвариантную меру π и $\|P^{(t)}-\Pi\|\to 0$ при $t\to\infty$.

Для случая, когда $\|\mu\|=|\mu|(E)$, равномерно эргодические цепи изучались в [1] (сильно положительно возвратные цепи), [2, гл. 5], [3, гл. 6] (цепи с квазикомпактным переходным ядром). Приведенные в [4, 5] примеры показывают, что широкий класс цепей Маркова (типа случайных блужданий) не обладает свойством сильной положительной возвратности, однако эти цепи равномерно эргодичны при подходящем выборе нормы $\|\cdot\|$.

Теорема 1. Цепь X равномерно эргодична по отношению к норме $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда оператор $I-P+\Pi$ ограниченно обратим: $\|(I-P+\Pi)^{-1}\|<\infty$. Это условие эквивалентно изолированности единицы в спектре оператора $P:\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$.

В условиях теоремы 1 операторы P^+, вообще говоря, не обязаны сходиться, так как цепь X может быть периодической. В связи с этим определим период $d(X)$ цепи X равенством

$$d(X)=\sup_t \dim\{\mu\in\mathfrak{m}:\mu=\mu P^t\}.$$

В случае, когда $d(X)=1$, назовем цепь X апериодической.

Теорема 2. Пусть цепь X равномерно эргодична по отношению к норме $\|\cdot\|$.

Тогда она имеет конечный период $d=d(X)$, и пространство E допускает разбиение $E=\bigcup_{i=0}^d E_i$, $E_i\in\mathfrak{E}$, $E_i\cap E_j=\varnothing$ при $i\neq j$ такое, что при каждом $1\leqslant i\leqslant d$ сужение P_i ядра P^d на пространство $(E_i, E_i\cap\mathfrak{E})$ является стохастическим переходным ядром, которое отвечает апериодической равномерно эргодической цепи Маркова на E_i по отношению к норме $\|\mu(\cdot)\|_i=$ $=\|\mu(E_i\cap\cdot)\|$, а множество E_0 несущественно: $\pi(E_0)=0$ и $\|\mu P^{(t)}\|_0\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно на множестве $\{\mu\in\mathfrak{m}:\|\mu\|\leqslant 1\}$.

Учитывая теорему 2, ограничимся изучением апериодического случая. Определим следующий показатель эргодичности цепи X:

$$\Lambda_t(P)=\sup(\|\mu P^t\|,\ \|\mu\|\leqslant 1,\ \mu(E)=0\}.$$

Теорема 3. Возвратная по Харрису цепь Маркова X равномерно эргодична в норме $\|\cdot\|$ и апериодична тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий:

1) $\Lambda_t(P)<1$ при некотором $t\geqslant 1$,
2) $\Lambda_t(P)\to 0$ при $t\to\infty$,
3) найдется компактный оператор K такой, что $\|P^t-K\|<1$ при некотором $t\geqslant 1$ и $d(X)=1$,
4) $\|P^t-\Pi\|\to 0$ при $t\to\infty$,
5) $\|P^t-\Pi\|=O(\rho^t)$ при $t\to\infty$ для некоторого $0<\rho<1$.

Определение 2. Цепь X сильно устойчива по отношению к норме $\|\cdot\|$, если каждое стохастическое ядро Q в некоторой окрестности $\{Q:\|Q-P\|<\varepsilon\}$ имеет единственную инвариантную вероятностную меру ν и $\|\nu-\pi\|\to 0$ при $\|Q-P\|\to 0$.

Теорема 4. Сильная устойчивость цепи X по отношению к норме $\|\cdot\|$ эквивалентна ее равномерной эргодичности в этой же норме. При этом для каждого ядра Q с инвариантной мерой ν

$$\|\nu-\pi\|=O(\|Q-P\|)\text{ и }\sup_t\|Q^t-P^t\|=O(\|Q-P\|)\text{ при }\|Q-P\|\to 0.$$

Теорема 5. Свойство равномерной эргодичности цепи X по отношению к норме $\|\cdot\|$ сохраняется при малых в этой норме возмущениях ядра P.

Для доказательства равномерной эргодичности и оценки скорости сходимости в теоремах 2 и 4 можно использовать следующий критерий.

Теорема 6. Возвратная по Харрису цепь Маркова X равномерно эргодична по отношению к норме $\|\cdot\|$ и апериодична тогда и только тогда, когда для некоторых $n\geqslant 1$, $\alpha\in m\ \mathscr{E}^+$, $h\in f\ \mathscr{E}^+$ выполнены условия:

(A) $\pi h>0$, $\alpha 1>0$, $\alpha h>0$,
(B) ядро $T=P^n-h\circ\alpha$ неотрицательно,
(C) $\|T^m\|<1$ при некотором $m\geqslant 1$.

Более того, условие (C) следует из равномерной эргодичности и апериодичности X при любых n, α, h, удовлетворяющих (A), (B).

Замечание 1. При $\|\mu\| = |\mu|(E)$ условия теоремы эквивалентны условию Деблина квазикомпактности ядра P [2].

Замечание 2. Для введенного выше класса норм $\|\cdot\|_v$ условие (C) теоремы эквивалентно условию $(Cv)\, T^m v(x) \leqslant \rho v(x)$ для всех $x \in E$ и некоторых $\rho < 1, m$. Поэтому выбор подходящей нормы $\|\cdot\|_v$ сводится к отысканию ρ-эксцессивной функции v. Методы построения таких функций для различных классов цепей Маркова приведены в [3, 4].

Приведем в качестве примера

Следствие. Пусть $E = Z_+$, неприводимая цепь X задается матрицей $P = (p_{ij})$, а норма $\|\cdot\|_v$ строится по функции $v_i = v^i$, где $v \geqslant 1$ — некоторый параметр. Предположим, что $\sup_i \sum p_{ij} v^{j-i} < \infty$ для некоторого $v > 1$ и $\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \Sigma_j (j - i)\, p_{ij} < 0$.

Тогда цепь X равномерно эргодична по отношению к одной из норм $\|\cdot\|_v$ с $v > 1$. В частности, блуждание Бернулли на Z_+ с $p_{i,i+1} = p < q = p_{i,i-1}$ равномерно эргодично по отношению к $\|\cdot\|_v$ при всех $1 < v < q/p$ и не является таковым при $v = 1$ (то есть не является сильно положительно возвратным).

SUMMARY. Properties of uniform ergodicity and strong stability of general Markov's chains are introduced and investigated in the communication. These properties are defined with respect to the given norms in the space of measures and consist in a uniform convergence (uniform stability) of the n-step transition kernels in the induced operator topology.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1976.— 184 с.
2. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.—310 с.
3. *Revuz D.* Markov chains.— Amsterdam: North-Holland Elsevier, 1975.— 336 p.
4. *Карташов Н. В.* Сильно устойчивые цепи Маркова.— В кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара. М.: Всесоюзн. научно-исслед. ин-т системных исследований, 1981, с. 54—59.
5. *Карташов Н. В.* Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления.— Киев, 1977.— 17 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики АН УССР; № 77—24).

Киевский
государственный университет

Поступило
10.02.83

УДК 519.9

С. В. ДЬЯЧКОВСКИЙ

ОПЕРАТОРНЫЕ АНАЛОГИ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

(Представлено академиком АН УССР В. С. Королюком)

Пусть A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ — ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Предположим также, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k = A_\varepsilon$ сходится в операторной норме.

В работе исследуются пределы вида

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon^{\left[\frac{t}{\alpha_\varepsilon}\right]} = S(t; \alpha, \mathfrak{A}), \tag{1}$$

где $t > 0$, α_ε — некоторая положительная функция, стремящаяся к нулю вместе с ε, $\left[\frac{t}{\alpha_\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\frac{t}{\alpha_\varepsilon}$.

11

1983

НОЯБРЬ

Основан в 1939 г.
На русском языке
выходит с 1975 г.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Серия А. Физико-математические и технические науки

Ежемесячный научный журнал Президиума АН УССР

Киев Наукова думка

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

Физика

Кибернетика и вычислительная техника

Энергетика

Материаловедение

Журнал выходит на украинском и русском языках

Редакторы *Н. Т. Варченко, Л. Г. Дончевская, В. Ф. Кошик, Л. М. Литвинова*

Художественный редактор *Т. М. Немеровская*

Технический редактор *О. В. Дивуля*

Корректор *Н. Г. Тараскина*

Сдано в набор 16.09.83. Подп. в печ. 26.10.83. Формат 70×108/16. Выс. печ. Усл. печ. л. 7,7. Усл. кр.-отт. 8,2. Уч.-изд. л. 7,7. Тираж 735 экз. Заказ 3-705.

Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В «Докладах Академии наук Украинской ССР» помещаются краткие сообщения об имеющих характер новизны результатах исследований в области естественных и технических наук.

Публикация в «Докладах АН УССР» не препятствует опубликованию расширенного варианта в других периодических изданиях.

1. Для публикации сообщения в журнале необходимо мотивированное представление академика АН УССР или АН СССР, а также письмо-рекомендация из организации. Без представления публикуются статьи академиков и членов-корреспондентов АН СССР, АН УССР и академий наук союзных республик.

2. «Доклады АН УССР» помещают не более 3 статей одного автора в год. Этот лимит не распространяется на академиков и членов-корреспондентов АН СССР, АН УССР и академиков академий наук союзных республик, статьи которых печатаются без ограничения.

Сообщения готовятся на русском и украинском языках.

3. Текст и графический материал подаются в двух экземплярах (как для русского, так и украинского вариантов).

Объем сообщений — не более 6 машинописных страниц. Сюда входят: текст, таблицы, список литературы (до 15 источников) и рисунки (не более 4, включая *«а»*, *«б»* и т. д.).

К сообщению прилагается реферат (4 экз. на русском языке объемом не более 2/3 стр.) и резюме (2 экз. на русском языке и 2 — на английском).

4. В начале сообщения следует указать рубрику, под которой оно должно быть опубликовано, а также индекс по Универсальной десятичной классификации; в конце сообщения указывается полное название организации, в которой выполнено исследование, почтовый адрес и номер телефона.

Каждый экземпляр сообщения должен быть подписан авторами.

5. Корректуры статей авторам, как правило, не посылаются.

6. Редакция выдает авторам бесплатно 20 оттисков сообщения.

7. В случае исправления статьи по замечаниям рецензента датой представления считается день получения редакцией окончательного текста.

8. Текст сообщения печатается в соответствии с ГОСТ 7.3—72 на белой бумаге через два интервала на одной стороне листа стандартного размера, с полями слева (3 см) и справа (1 см). Рукописные вставки и вклейки не разрешаются.

Сообщения, напечатанные нестандартным шрифтом, не принимаются.

9. Следует избегать повторения одних и тех же данных в таблицах, графиках и тексте. Ввиду краткости сообщений, выводы помещаются в необходимых случаях.

При описании методики исследования следует ограничиться оригинальной ее частью; при поэлементном анализе — приводить лишь усредненные данные.

10. Математические и химические формулы, символы должны быть четко вписаны и размечены (греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, готические — синим; нижние и верхние индексы и степени отмечаются простым карандашом дугами снизу и сверху соответственно).

Во избежание путаницы следует обозначать: а) большие и малые буквы греческого и латинского алфавитов, имеющие сходное написание: C, c; K, к; P, p; O, o; S, s; U, u; V, v; W, w; X, x; Y, y; Ψ, ψ; Θ, θ; Π, π; б) Буквы I (i) и J (йот); укр. букву І и римскую единицу; арабскую 1 и штрих в индексах; латинские l (эль) и «е»; в) буквы русского алфавита, используемые в индексах, подчеркнуть карандашом квадратной скобкой снизу; г) буквы рукописных шрифтов — вынести на поле.

Математические символы типа sin, sh, lm, Re, ind, ker, dim, max, exp, log, (0) ноль, а также названия химических элементов отчеркивать карандашом квадратной скобкой снизу (например, $\underbrace{\mathrm{Re}}$, $\underbrace{\log}\ 1=\underbrace{0}$).

Векторные величины обозначаются: а) буквами латинского алфавита, подчеркнутыми снизу ($\underline{H}$) либо со стрелкой сверху ($\vec{F}$); б) буквами греческого алфавита с черточкой сверху ($\bar{\sigma}$).

Слово «теорема» подчеркивается сплошной линией, слова типа «лемма», «вывод», «определение», «примечание» — штриховой.

11. Литература, оформленная в соответствии с ГОСТ 7.1—76, приводится общим списком в порядке упоминаний на отдельной странице; ссылки в тексте указываются цифрами в квадратных скобках (например, [4]).

Порядок оформления: для монографий — фамилия и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год, количество страниц; для статей в журналах и периодических сборниках — фамилия и инициалы автора, полное название статьи, стандартно сокращенное название журнала или сборника, серия, год издания, том, номер выпуска, страницы, на которых помещена статья.

12. Ссылка на неопубликованные работы не разрешается.

«НАУКОВА ДУМКА»

Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 11, 1—88