UNIVERSITÉ D'ORAN

CAHIERS MATHÉMATIQUES

Fascicule N° 2 Année 1987

Département de Mathématiques
Université d'Oran
B.P. 1524 ORAN - ALGÉRIE

CAHIERS MATHEMATIQUES
Fasc. 2, 1987

ESTIMATION QUANTITATIVE DE LA NORME DE DEVIATION DE L'OPERATEUR DE TRANSITION D'UN SYSTEME M/G/1.

D. AISSANI

Laboratoire de Modélisation Stochastique

I.N.E.S de Béjaia (Algérie).

__ABSTRACT:__ In this article,we obtain an estimate of the proximity of the transition kernel of the (non Markovian) process of the number of customers in the G/G/1 queueing system at the time of completion of the n-th service with respect to the same transition kernel of the imbedded Markov chain in an M/G/1 system.For this,we suppose that the inputs of the two systems are "sufficiently close" to each other and the distributions of service time coïncide.

An exact computation of the constants has been done.

Reçu en juin 1987

1.Soit Q (respectivement $\bar{Q}$) le noyau de transition du processus "nombre de demandes et du temps jusqu'à l'arrivée de la demande suivante" dans un système de files d'attente G/G/1 (respectivement M/G/1).Dans un précédent article [1] ,on a trouvé les conditions pour lesquelles il sera possible d'approximer les caractéristiques d'un système G/G/1 par les caractéristiques corespondantes d'un système M/G/1.Dans ce texte,on obtient l'estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur Q par rapport à $\bar{Q}$ .En plus de son intérêt intrinsèque,ce résultat pourra être utilisé (par exemple dans [5]) pour démontrer des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

2.__Préliminaires et résultat:__

Considérons un système de files d'attente G/G/1 (FIFO , ∞),de distribution de la durée de service F et de distribution des intervalles entre les arrivées des demandes G. Notons T_n le moment d'arrivée de la n-ième demande et τ_n le temps entre les arrivées des demandes T_n et T_{n+1} . L'expression de l'opérateur de transition

$Q = \| Q_{ij}(x,dy) \|_{i,j=0}^{\infty}$ (voir [1]) est :

$$Q_{ij}(x,dy) = \begin{cases} q_j(dy) & \text{si} \quad i=0 \\ q_{j-i}(x,dy) & \text{si} \quad i \geq 1 \ , \ j \geq i \\ P(x,dy) & \text{si} \quad j=i-1 \ , \ i \geq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

où,
$$q_j(dy) = \int_0^{\infty} P(T_j \leq u < T_{j+1} \ , \ T_{j+1} - u \in dy) \, dF(u) \ ,$$

$$q_j(x,dy) = \int_x^{\infty} P(T_j \leq u-x < T_{j+1} \ , \ T_{j+1} - (u-x) \in dy) dF(u).$$

On considère en même temps un système de files d'attente M/G/1, de flot des arrivées poissonien d'intensité λ et ayant les mêmes durées de service que le système G/G/1. On notera par $\bar{E}$ la distribution exponentielle de paramètre λ, alors que $\bar{T}_n$ représente le moment d'arrivée de la n-ième demande. L'expression de l'opérateur de transition $\bar{Q}$ de la chaine de Markov incluse est donnée par la formule (1) [1] .

Supposons que le flot des arrivées du système G/G/1 soit proche du flot poissonien. Pour caractériser cette proximité, utilisons une distance de variation,

$$W^{x}(G,\bar{E}) = \int \varphi^{x}(t) \, | G - \bar{E} | (dt), \qquad (2)$$

où $\varphi^{x}(t)$ est une fonction poids et $|a|$ désigne la variation de la mesure a . Choisissons une fonction quelconque $\varphi^{x}(t)$ telle que:

a) $\varphi^{x}(t)$ soit non décroissante ;

b) $\varphi^{x}(t+s) \leq \varphi^{x}(t) . \varphi^{x}(s)$ pour tout $s,t \in \mathbb{R}^{+}$;

c) $\varphi^{x}(0) = 1$.

Notons également $G^{x} = \int \varphi^{x}(t) . G(dt)$ et

$$W_o = \int_0 |G - \bar{E}|(dt) \qquad (3)$$

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j(dy)\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$. Le noyau de transition $P_{kj}(x,dy)$ donne une application lineaire $P_{kj} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, dont la valeur au point $\mu \in \mathcal{M}$ est égale à

$$(\mu P)_k(dy) = \sum_{j\geq 0}\int_0^\infty \mu_j(dx).P_{jk}(x,dy) \ .$$

Notons η l'espace des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$, Si $f\in\eta$, le symbole P désignera la fonction :

$$(Pf)(k,x) = \sum_{i\geq 0}\int_0^\infty f(i,y).P_{ki}(x,dy).$$

Introduisons à présent une classe spéciale de normes. Définissons:

$$\|\mu\|_\beta = \sum_{n\geq 0}\beta^n\int\varphi^x(t)|\mu_n|(dt)$$

Remarque 1: Par analogie, dans [1], une telle norme aurait été construite pour une fonction $V(n,t) = \beta^n.\varphi^x(t)$.

Cette norme induit dans la classe des opérateurs linéaires, l'espace $\mathcal{B}$ des opérateurs linéaires bornés, de norme,

$$\|Q\|_\beta = \sup_{k\geq 0}\sup_{x\geq 0}\beta^{-k}.\frac{1}{\varphi^x(t)}\sum_{j\geq 0}\int_0^\infty \beta^j.\varphi^x(y).|Q_{kj}(x,dy)| \ . \qquad (4)$$

Pour les notions et notations non définies dans ce travail, il faut se référer à [1]. De plus, toute intégrale sans précision du domaine d'intégration se fera dans $\mathbb{R}^+$. Notons

$$\beta_o = \sup(\beta : \hat{f}(\lambda\beta-\lambda) < \beta) \ , \qquad (5)$$

où

$$\hat{f}(\lambda\beta-\lambda) = E\, e^{\lambda(\beta-1)\xi} = \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)u}.dF(u) \ . \qquad (6)$$

Théorème:

Soit Q (respectivement $\bar{Q}$) le noyau de transition de la chaine incluse du système G/G/1 (resp. M/G/1) et pour tout β, $1<\beta<\beta_o$, pour tout G telle que $G^x < \infty$ et $W_o \leq (\beta_o-\beta)/\beta_o^2$, on a :

$$\|\bar{Q} - Q\|_\beta \leq W^x(1+\beta) + W_o.G^x(1+\lambda\beta).\frac{\beta_o^4}{(\beta_o-\beta)^2}$$

3. **Résultats intermédiaires:**

Introduisons les notations suivantes,

$$\Psi_k(x,A) = P(\,T_k \leq x < T_{k+1}\ ,\quad T_{k+1} - x \in A),$$
$$\bar\Psi_k(x,A) = P(\,\bar T_k \leq x < \bar T_{k+1}\ ,\quad \bar T_{k+1} - x \in A), \tag{7}$$

et $\Delta_k(x,A) = \Psi_k(x,A) - \bar\Psi_k(x,A)$.

Remarquons que les fonctions introduites dans (1) s'écrivent

$$q_j(dy) = \int \Psi_j(u,dy)\, dF(u) \quad ,$$
$$q_j(x,dy) = \int_x^{\infty} \Psi_j(u-x,dy)\, dF(u) \quad . \tag{8}$$

Lemme 1:

Soient Q et $\bar Q$ les noyaux de transition des chaines incluses des systèmes G/G/1 et M/G/1 ; alors

$$\Delta_j(x,A) = \sum_{i=0}^{j-1} \Psi_0 * G^{*i} * (G - \bar E) * \bar E^{*j-i-1} + \Delta_0 * \bar E^{*j},$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

Preuve: Du fait que les $\{\tau_n\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, il est aisé de voir que :

$$\Psi_j(x,A) = \int_0^x dG(s)\, \Psi_{j-1}(x-s,A) \quad , \tag{9}$$

donc $$\Delta_j(x,A) = \int_0^x dG(s)\, \Psi_{j-1}(x-s,A) - \int_0^x d\bar E(s)\, \bar\Psi_{j-1}(x-s,A) .$$

En ajoutant et en retranchant $\int_0^x \Psi_{j-1}(x-s,A)\, d\bar E(s)$, on obtient :

$$\Delta_j(x,A) = \Psi_{j-1} * (G - \bar E)(x) + \Delta_{j-1} * \bar E(x) .$$

De (9), on constate que : $\Psi_j = \Psi_{j-1} * G = \Psi_0 * G^{*j-1}$.

D'autre part,

$$\Delta_{j-1} * \bar E = \Psi_{j-2} * (G - \bar E) * \bar E + \Delta_{j-2} * \bar E^{*2}, \tag{10}$$

d'où découle le résultat du lemme. ■

Notons $E_{\beta}(ds)$ la famille $\sum_{j\geq 0} \beta^j \bar{E}^{*j}(ds)$.

Lemme 2:

Soit $\bar{Q}$ le noyau de transition de la chaine de Markov incluse du système M/G/1. Alors, pour tout β tel que $1<\beta<\beta_0$,

$$E_{\beta}(ds) = \delta_0(ds) + \lambda\beta\, e^{\lambda(\beta-1)s}.ds \quad ,$$

où $\delta_0(ds) = \bar{E}^{*0}(ds)$.

En effet: $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \beta^j \bar{E}^{*j}(ds) = \bar{E}^{*0}(ds) + \sum_{j\geq 1} \beta^j . e^{-\lambda s} . \frac{(\lambda s)^{j-1}}{(j-1)!} . \lambda\, ds$,

d'où le résultat. ■

A présent, posons $$A_2 = \sup_{x\geq 0}\left\{ \frac{1}{\varphi^x(x)} \sum_{j\geq 0} \beta^j \int \varphi^x(y) \left| \int_x^{\infty} dF(u)\ \Delta_0 * \bar{E}^{*j} \right| \right\} , \qquad (11)$$

Lemme 3:

Soient $\bar{Q}$ et Q les opérateurs de transition des chaines incluses des systèmes M/G/1 et G/G/1. Alors, pour tout β tel que $1<\beta<\beta_0$, on a

$$A_2 \leq W^x(1+\beta)$$

Preuve:

Du fait que $\Delta_0 * \bar{E}^{*j} = \int_0^x \Delta_0(x-s,A).\bar{E}^{*j}(ds)$ et que :

$$\Delta_0(x,A) = P(\tau - x \in A) - P(\bar{\tau} - x \in A) = \int 1_{\{t-x\in A\}} \left[G(dt) - \bar{E}(dt)\right] ,$$

on en déduit que

$$A_2 \leq \sup_{x\geq 0}\left\{ \frac{1}{\varphi^x(x)} \sum_{j\geq 0} \beta^j \int \varphi^x(y) \int (G-\bar{E})(dt) \int_0^{u-x} 1_{\{t+s+x-u \,\in\, dy\}}\ d\bar{E}^{*j}(s) \right\}$$

$$\leq \sup_{x\geq 0}\left\{ \frac{1}{\varphi^x(x)} \int |G-\bar{E}|(dt) \int_x^{\infty} dF(u) \sum_{j\geq 0} \beta^j \int_0^{u-x} d\bar{E}^{*j}(s).\, \varphi^x(t+s+x-u) \right\} ,$$

$t+s+x-u$ étant positif et $s+x-u$ négatif, on a :

$$\varphi^x(t+s+x-u) \leq \varphi^x(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi^x(x) \geq 1 . \qquad (12)$$

Par conséquent: $$A_2 \leq \int \varphi^x(t)|G - \bar{E}|(dt).\sup_{x\geq 0} \int_x^{\infty} dF(u) \int_0^{u-x} \left[\sum_{j\geq 0} \beta^j \bar{E}^{*j}(ds)\right].$$

De (2),(5),(6) et en utilisant le lemme 2, on obtient le résultat. ■

Introduisons la famille de mesures $G_{\beta}(ds) = \sum_{i\geq 0} \beta^i . G^{*i}(ds)$ (13)

et posons: $g(u) = \int_0^u e^{-\alpha_0 s}.G_{\beta}(ds)$, où $\alpha_0 = \lambda\beta_0 - \lambda$.

<u>Lemme 4</u>: Dans les conditions du théorème:

$$g(u) \leq \sum_{n\geq 0} \beta^n \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0^2} \right)^n .$$

<u>Preuve</u>: Il est aisé de voir que :

$$g(u) = \sum_{j\geq 0} M^{*j}([0,u]) \qquad \text{où} \quad M(ds) = \beta.e^{-\alpha_0 s}.G(ds)$$

par conséquent : $$\int g(ds) = \sum_{j\geq 0} \int M^{*j}(ds) = \sum_{j\geq 0} \left[\int M(ds)\right]^j$$

où $\int M(ds) = \beta.\hat{g}(-\alpha_0)$. Supposons que $\beta\hat{g}(-\alpha_0) < 1$. Alors,

$$M(R_+) = \beta\hat{g}(-\alpha_0) < 1 \quad \text{et} \quad g(+\infty) = (1 - M(R_+))^{-1} < \infty,$$

c'est-à-dire que $g(u) \leq g(+\infty) = 1/\left[1 - \beta\hat{g}(-\alpha_0)\right]$ pour tout u.

En ajoutant et en retranchant $\int e^{-\alpha_0 s}.\bar{E}(ds)$ dans l'expression de $\hat{g}(-\alpha_0)$ et en utilisant l'inégalité $e^{\lambda(1-\beta_0)s} < 1 \quad \forall\ s>0$, $(\beta_0 > 1)$, on obtient

$$\hat{g}(-\alpha_0) \leq \frac{1}{\beta_0} + W_0 .$$

D'ici et de la condition sur W_0 , on conclut que :

$$\hat{g}(-\alpha_0) \leq \frac{1}{\beta_0} + (\beta_0 - \beta)/\beta_0^2 ,$$

ce qui achève la démonstration. ■

<u>Lemme 5</u>: Dans les conditions du théorème :

$$\int dF(u) \int_0^u G_{\beta}(ds) \leq \frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2} \qquad \text{et} \qquad \int dF(u) \lambda\beta \int_0^u e^{\lambda(\beta-1)(u-s)}.G_{\beta}(ds) \leq \lambda\beta D$$

où G_β est définie dans (13) et $D = \beta_0^3 / (\beta_0 - \beta)^2$.

Preuve:

a. Du fait que $e^{\alpha_0(u-s)} \geqslant 1$ pour $u \geqslant s$, on obtient

$$\int dF(u) \int_0^u G_\beta(ds) \leq \int e^{\alpha_0 u}.dF(u) \int_0^u e^{-\alpha_0 s}.G_\beta(ds) .$$

De la convexité de $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)$, on déduit que $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) \leq \beta$, $\forall \beta \in [1, \beta_0)$

et $\hat{f}(\lambda\beta_0 - \lambda) \leq \beta_0$. La première affirmation du lemme 5 est preuvée d'aprés le lemme 4 .

b. D'autre part, :

$$\int dF(u) \lambda\beta \int_0^u e^{\lambda(\beta-1)(u-s)}.G_\beta(ds) \leq \lambda\beta \int e^{\alpha_0 u}\, dF(u) \int_0^u e^{-\alpha_0 s}.G_\beta(ds)$$, la deuxième affirmation du lemme 5 est prouvé d'aprés a). ■

Lemme 6: Dans les conditions du théorème,

$$\int dF(u) \int_0^u E_\beta * G_\beta(dt) \leq (1 + \lambda\beta). \frac{\beta_0^3}{(\beta_0 - \beta)^2}$$

En effet, $\int dF(u) \int_0^u E_\beta * G_\beta(dt) = \int dF(u) \int_0^u E_\beta(ds) \int_s^u G_\beta(dt - s) =$

$$= \int dF(u) \int_0^u \left[1 + \lambda\beta \int_0^u e^{\lambda(\beta-1)(u-s)}.ds\right] G_\beta(dt)$$, d'où le résultat. ■

Notons par A_1 l'expression,

$$A_1 = \sup_{x \geqslant 0} \left\{ \frac{1}{\varphi^x(x)} \sum_{j \geqslant 0} \beta^j \int \varphi^x(y) \int_x^\infty dF(u) \sum_{i=0}^{j-1} \mathcal{Y}_i * |G - \bar{E}| * \bar{E}^{*j-i-1} \right\} . \tag{14}$$

Lemme 7: Dans les conditions du théorème,

$$A_1 \leq W_0 .G^x. \frac{\beta_0^4}{(\beta_0 - \beta)^2} (1 + \lambda\beta)$$

où G^x a été défini dans (3).

Preuve: De (10),

$$A_1 \leq \sup_{x\geq o}\left\{\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\beta\int\varphi^x(y)\int_x^{\infty} dF(u)\cdot\sum_{i=o}^{\infty}\beta^i\sum_{j=i+1}^{\infty}\beta^{j-i-1}\cdot 4_o * G^{*i} *|G-\bar{E}|* \bar{E}^{*j-i-1}\right\}$$

$$\leq \sup_{x\geq o}\left\{\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\beta\int\varphi^x(y)\int_x^{\infty} dF(u)\, 4_o *|G-\bar{E}|* G_\beta * E_\beta(u-x,dy)\right\}.$$

Aprés transformation,on obtient

$$A_1 \leq \sup_{x\geq o}\left\{\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\beta\int_x^{\infty} dF(u)\int_0^{u-x}\left[|G-\bar{E}|* G_\beta * E_\beta\right](dt)\int_{u-x-t}^{\infty} G(ds)\cdot\varphi^x(s+x+t-u)\right\}.$$

De (12),on obtient directement que

$$A_1 \leq \beta\int_x^{\infty} dF(u)\int_0^{u-x}\left[|G-\bar{E}|* E_\beta * G_\beta\right](dt)\cdot G^x .$$

En utilisant le lemme 6,on trouve le résultat cherché. ■

4. Démonstration du théorème: D'aprés (4)

$$\|\bar{Q}-Q\|_\beta = \sup_{k\geq o}\sup_{x\geq o}\beta^{-k}\cdot\frac{1}{\varphi^x(x)}\sum_{j\geq o}\int\beta^j\cdot\varphi^x(y)\left|\bar{Q}_{kj}(x,dy)-Q_{kj}(x,dy)\right| . \qquad (15)$$

Pour estimer la partie droite de (15),on considerera tout d'abord l'expression sous le signe du premier suprémum pour k=o,ensuite pour le cas k>o et l'on choisira la plus grande de ces estimations.D'aprés (7) et (8),l'expression (15) pour k=o sera égale à,

$$\sup_{x\geq o}\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\sum_{j\geq o}\int\beta^j\varphi^x(y)\int|\Delta_j(u,dy)|\,dF(u) \leq \sum_{j\geq o}\int\beta^j\varphi^x(y)\int|\Delta_j(u,dy)|\,dF(u) . \quad (16)$$

D'autre part, pour k ≠ o , on obtient

$$\sup_{x\geq o}\beta^{-k}\cdot\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\left[\int\beta^{k-1}\cdot\varphi^x(y)\left|P(x,dy)-P(x,dy)\right|+\sum_{j=k}^{\infty}\int\beta^j\cdot\varphi^x(y)\left|\bar{q}_{j-k}(x,dy)-q_{j-k}(x,dy)\right|\right]$$

$$\leq \sup_{x\geq o}\left\{\frac{1}{\varphi^x(x)}\cdot\int\sum_{j\geq o}\beta^j\varphi^x(y)\left|\int_x^{\infty}\bar{4}_j(u-x,dy)-4_j(u-x,dy)\,dF(u)\right|\right\}.$$

Pour x=o, cette derniére expression coincide avec l'expression (16),alors elle n'est pas inférieure à (16). Par conséquent, on a

$$\| \bar{Q} - Q \|_{\beta} \leq \sup_{x \geq 0} \frac{1}{\varphi^x(x)} \sum_{j \geq 0} \int \beta^j \varphi^x(y) \int |\Delta_j(u-x, dy)| \, dF(u) .$$

En utilisant le lemme 1, on obtient une estimation où figure les expressions A_1 et A_2 définies dans (11) et (14) . donc , d'aprés les lemmes 3 et 7 , le théorème est démontré. ■

REFERENCES

[1] . Afssani D., Sur les conditions d'approximation d'un système G/G/1 par un système M/G/1 , Journal of Technology N°4, 1987, pp. 96–107.

[2] . Cox D. and Smith V., Renewal theory , London, 1962.

[3] . Afssani D., Estimation de la stabilité forte dans un système M/G/1., Moscow VINITI N° 4119–82 RJ. Matematika IB 83, 1982 (Langue Russe).

[4] . Afssani D., Estimation de la norme de déviation des noyaux de transition des chaines incluses des systèmes M/G/1 et G/G/1, C.R Séminaire du dept de Proba. Inst. Math. U.S.T.H.B, mars 1987.

[5] . Afssani D., Estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité des chaines de Markov quelconques. Preprint I.N.E.S Béjaïa (à paraitre).

[6] . Kleinrock L., Queueing systems, J. Wiley and Sons , 1975.

CAHIERS MATHEMATIQUES DE L'UNIVERSITE D'ORAN,
Fascicule 2, 1987

S O M M A I R E

Pages

CAHIERS MATHÉMATIQUES

Fascicule N°2 Année 1987

INSTRUCTIONS AUX AUTEURS

Les "CAHIERS MATHEMATIQUES" de l'Université d'Oran sont édités par l'Unité de Recherche de Mathématiques. Ils publient des travaux originaux dans tous les domaines des mathématiques.
Le Comité de Rédaction donne son avis sur les articles à publier, néanmoins, seule la responsabilité des auteurs est engagée.
Les articles sont soumis en 3 exemplaires et prêts à être tirés. Le texte doit être inséré dans un cadre 18x25, en double interligne .
La première page doit comporter le titre, les noms des auteurs , leur adresse professionnelle et un résumé en anglais de 10 lignes.
La rédaction met à la disposition des auteurs un guide-type pour la préparation de leur publication.

Les auteurs recevront 50 exemplaires de tirés-à-part.

Adresse de la Rédaction

"CAHIERS MATHEMATIQUES", Département de Mathématiques, Université d'Oran
B.P.1524 Oran, Algérie.