ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE PUBLICATION

# JOURNAL OF TECHNOLOGY

Revue Scientifique de l'ENP 1987 N°4

OPU

*1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)*

## * E D I T O R I A L *

### RESEARCH OR TEACHING AND RESEARCH ?

The rationnal utilization of technical and scientific talent in developping economies asks for an optimal allocation of trained human ressources among production, training or research activities,with different constraints and ratios depending on the particular domain.
This optimization problem is further complicated by the scarcity of human ressources, and thus necessarely requires an necessary hierarchy among the objectives.

It is of particular interest to the area of higher education in technology. Given the extremely rapid development of engineering curricula in engineering schools and universities, there exists a large deficit in national teaching staff which must be met by foreign cooperation for many more years.

The size of this deficit,with its financial implications, will depend on the teaching load required from professors and assistants, as well as on the number of potential teachers employed at full time research duties and other non teaching positions in all sectors considered.

What is the best distribution to be made of the ressources? Should we developp intensively applied research, or can it wait for research and development talent to emerge from production activities? What then would be the research contribution of university teaching staff?

These seem pertinent questions to be asked the answers of which are not obvious.

The Director

M. AIT-ALI, Prof

# SUR LES CONDITIONS D'APPROXIMATION D'UN SYSTEME G/G/1 PAR UN SYSTEME M/G/1.

D. AISSANI
Laboratoire de Modélisation Stochastique
I.N.E.S. de Béjaia (Algérie).

الملخص: في هذه المقالة نبحث عن v-الاستقرار القوي من التوزيع الثابت لسلسلة ماركوف المحتواة في منهج رتل الانتظار M/G/1 بعد اضطراب تجاعدي وصول المطلوبات ( و هذا بالنسبة الي نواظم معينة)

Résumé: Soient M/G/1 et G/G/1, deux systèmes de files d'attente ayant respectivement pour distribution des entrées E(t) (exponentielle) et G(t) (quelconque). La proximité des systèmes considérés est caractérisée par la distance de variation $W^*(G,E)=\int_0^\infty \varphi^*(t)|G-E|(dt)$, où $\varphi^*(t)$ représente la fonction poids et $|a|$ désigne la variation de la mesure a. Dans cet article, on montre que, si: -La charge du système M/G/1 est inférieure à 1, -La distribution de la durée de service vérifie la condition de Cramer et si la fonction poids ne "croit pas trop rapidement", Alors, la chaine de Markov incluse dans le système M/G/1 est fortement v-stable (par rap- -port à une famille de norme).

Abstract: Let M/G/1 and G/G/1 two queueing systems having exponential (arbitrary) arrival-time distribution E(t) ( G(t) ), respectively. The proximity of the systems considered, is characterized by the distance of the variation $W^*(G,E)=\int_0^\infty \varphi^*(t)|G-E|(dt)$, where $\varphi^*(t)$ represents the weight function and $|a|$ is the variation of the measure a . In this article, we show that if:
-The utilization factor of the M/G/1 system is less than unity, -The service-time distribution verifies the Cramer condition, and the weight function does not " increase rapidly", then, the imbedded Markov chain in the M/G/1 system is strongly v-stable (with respect to a family of norms).

Le but de ce travail est de trouver les conditions pour lesquelles il sera possible d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires d'un système de files d'attente G/G/1 par les caractéristiques correspondantes d'un système M/G/1. Ceci revient à étudier la v-stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaine de Markov incluse dans un système M/G/1 aprés perturbation du flot des arrivées( par rapport à certaines normes). Pour cela, le système perturbé, de type G/G/1 est tel que , le flot des arrivées est proche du flot poissonien, alors que les durées de service sont les mêmes que pour le système M/G/1.

Remarquons que la distribution stationnaire de la lo--ngueur de la file dans un système G/G/1 est une fonct--ionnelle suffisament complexe des paramètres du système alors que cette même distribution se calcule exactement pour un système M/G/1.La démonstration du résultat de l'article est basée sur l'approche opérationnelle de la théorie de stabilité exposée dans [Aïssani(1)] .

Signalons que les conditions sont formulées en ter--me de variables aléatoires initiales caractérisants le système étudié,ce qui fait que les résultats sont commodes pour les applications pratiques.Le contenu des différentes sections est le suivant:Paragraphe1,opéra--teurs de transition des chaines de Markov incluses; Paragraphe2,critère de stabilité forte;Paragraphe3, Théorème de v-stabilité forte.Dans la suite,toute in--tégrale sans précision du domaine d'intégration signi--fie que l'on intègre de zéro à l'infini.

1.Considérons un système de files d'attente G/G/1 de distribution de la durée de service F et de distributi--on des intervalles entre les arrivées des demandes G. On suppose la capacité de la file infinie et la disci--pline de service FIFO.Notons $T_n$,le moment d'arrivée de la n-ieme demande,$\theta_n$-le moment de sortie de la n--ieme demande et $\gamma_n$-le temps jusqu'à l'arrivée de la demande suivante aprés $\theta_n$. $\nu_n = \nu(\theta_n+0)$ désignera le nombre de demandes dans le système aprés $\theta_n$.Il est ai-

-sé de voir que la suite double $X_n=(\nu_n,\gamma_n)$ forme une chaine de Markov [voir Aïssani(2)], [5], d'opérateur de transition $Q=\|Q_{ij}\|_{i,j=0}^{\infty}$,

$$Q_{ij}(x,dy)=\begin{cases} q_j(dy) & \text{si } i=0 \\ q_{j-i}(x,dy) & \text{si } i\geq 1, j\geq i \\ P(x,dy) & \text{si } j=i-1, i\geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

où
$$q_j(dy)=\int P(T_j\leq u<T_{j+1},\ T_{j+1}-u\in dy)dF(u)$$

et
$$q_j(x,dy)=\int_x^{\infty} dF(u)P(T_j\leq u-x<T_{j+1}, T_{j+1}-(u-x)\in dy)$$

Considérons en même temps, un système de files d'attente M/G/1, de flot poissonien des arrivées d'intensité $\lambda$ et ayant la même distribution de la durée de service que le système G/G/1. L'opérateur de transition $\bar{Q}=\|\bar{Q}_{ij}(x,dy)\|_{i,j=0}^{\infty}$ de la chaine de Markov correspondante $\bar{X}_n$ dans le système M/G/1 a la forme (1), où

$$\begin{aligned} \bar{q}_j(dy) &= p_j E(dy) \\ \bar{q}_k(x,dy) &= p_k(x)E(dy) \end{aligned} \quad (2)$$

avec
$$p_j=\int \exp(-\lambda u).\frac{(\lambda u)^j}{j!}\,dF(u)$$

et
$$p_k(x)=\int_x^{\infty}\exp(-\lambda(u-x)).\left[\frac{\lambda(u-x)}{k!}\right]^k dF(u) \quad (3)$$

Si $\bar{\nu}_n$ désigne le nombre de demandes dans le système aprés sortie de la n-ieme demande et $\pi_k$, la distribution ergodique de probabilité des états de la chaine, alors

$$\pi_k=\lim_{n\to\infty}P(\bar{\nu}_n=k)\quad,\ k=0,1,\ldots$$

Remarquons que la résolution de la question d'exist- -tence des limites $\pi_k$ pour des chaines de Markov à es- -pace des états dénombrables nous conduit à vérifier la condition de positivité de cette chaine irréductible. On peut montrer que cette chaine est positive si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. C'est la condition d'existence de la distribution ergodique de la chaine de Markov incluse.Par conséquent, les probabilités $\pi_k$ vérifient le système d'équations algébriques:

$$\pi_k = \sum_{i=o}^{k} p_i \pi_{k-i+1} + p_k \pi_o, k=0,1,\ldots \quad (4)$$

où $p_k$ a été définie dans (3).La solution unique de (4) est donnée par la fonction génératrice

$$\Pi(Z) = \frac{\hat{f}(\lambda Z-\lambda)(Z-1)(1-\rho)}{Z - \hat{f}(\lambda Z-\lambda)} \quad (5)$$

où $\Pi(Z) = \sum_{k=o}^{\infty} \pi_k Z^k$ , $|Z| < 1$ et

$$\hat{f}(\lambda Z-\lambda) = \int \exp[(\lambda Z-\lambda)u] \, dF(u) \quad (6)$$

C'est la formule de Pollatchek-Khintchine.Elle permet de calculer la distribution stationnaire de la longueur de la file d'attente dans un système M/G/1 [voir (2)] , Malheureusement,pour les systèmes G/G/1,de telles for- -mules exactes ne sont pas connues.C'est pourquoi ,en général,on est amené à utiliser des méthodes de facto- -risation complexes [2] .Cependant,si l'on suppose que le système G/G/1 est proche du système M/G/1,on pourra alors utiliser la formule (5) ,en estimant auparavant l'erreur d'approximation correspondante.Supposons que le flot des arrivées du système G/G/1 soit proche du flot poissonien.Pour caractériser cette proximité,on utilise une distance de variation

$W^*(G,E)=\int \varphi^*(t)|G-E|(dt)$, de fonction poids $\varphi^*(t)$,telle que: a) $\varphi^*(t)$ est non décroissante, b) $\varphi^*(t+s)\leq \varphi^*(t).\varphi^*(s)\quad \forall\ t,s\in \mathbb{R}^+$, c) $\varphi^*(0)=1$.Ici, $|a|$ désigne la variation de la mesure a. .De plus,on utilisera la notation suivante $E^*=\int \varphi^*(t)E(dt)$ (7)

..Soit $\mathcal{M}=\{\mu_j(dy)\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$.L'opérateur de transition $P_{ij}(x,dy)$ donne une application linéaire $P_{ij}:\mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ ,dont la valeur au point $\mu\in\mathcal{M}$ est égale à

$$(\mu P)_k(dy)=\sum_{i\geq 0}\int \mu_i(dx)P_{ik}(x,dy)$$

Notons également $\eta$ l'espace des fonctions mesurables, bornées sur $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$.Le symbole Pf,pour $f\in\eta$ désignera la fonction

$$(Pf)(k,x)=\sum_{i\geq 0}\int f(i,y)P_{ki}(x,dy) \tag{8}$$

D'autre part,l'action de la mesure $\mu$ sur la fonction f sera notée $\mu f$.On introduit une classe spéciale de norme sur $\mathcal{M}$ ,$\|\mu\|_V=\sum_{j\geq 0} V(j,y)|\mu_j(dy)|$ ,où $V(n,t)$ est une fonction finie(pas nécéssairement bornée),différente de zéro sur $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$.Cette norme induit dans $\eta$ ,la norme $\|f\|_V = \sup_{k\geq o} \sup_{x\geq o} \frac{|f(k,x)|}{V(k,x)}$

On considère enfin, dans la classe de tous les opérate-urs linéaires, l'espace $\mathcal{B}$ des opérateurs linéaires bornés, de norme $\|Q\|_V = \sup_{k\geq o} \sup_{x\geq o} \frac{1}{V(k,x)} \sum_{j\geq o} \int V(j,y)\,|Q_{ij}(x,dy)|$

Définition: [1]

Une chaine de Markov X, d'opérateur de transition P et de mesure invariante $\pi$ est dite fortement stable par rapport à $\|.\|_V$, si $\|P\|_V < \infty$, chaque noyau de transition Q sur l'espace $[\mathbb{N}\times R^+, \mathcal{B}(\mathbb{N}\times R^+)]$ d'un certain voisinage $\{Q : \|Q-P\| \leq \varepsilon\}$ admet une mesure invariante unique $\nu = \nu(Q)$ et s'il existe une constante $C=C(P)$ telle que

$$\|\nu - \pi\|_V \leq C\,\|Q-P\|_V$$

D'aprés le théorème 2 [Kartashov(3)], pour rechercher la v-stabilité forte de la chaine $X_n$, il est suffisant de trouver une mesure $\alpha$ et une fonction h sur $\mathbb{N}\times R^+$, te-lles que D) $\|\bar{Q}\|_V < \infty$ ; A) l'opérateur $T_{ij}(x,dy) = \bar{Q}_{ij}(x,dy) - h_i(x)\alpha_j(dy)$ soit non négatif;
$B_1$) Il existe $\rho < 1$ telle que $(TV)(k,x) \leq \rho\, V(k,x)$ $\forall$ pour tout $(k,x) \in \mathbb{N}\times R^+$.

3. Nous allons appliquer le théorème2 [3], pour

$V(n,t) = \beta^n[e^{-\alpha t} + c^{-1}\varphi^*(t)]$ (9),

$h_i(x) = \delta_{io} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=o \\ 0 & \text{si } i>o \end{cases}$, et $\alpha_j(dy) = \bar{q}_j(dy)$, où $\bar{q}_j(dy)$ a été définie dans (2).

Remarque: Dans [Aïssani(4)], on avait considéré une fonction $V(n,t) = \beta^n\left[e^{ct} + be^{-\delta t}\right]$

Lemme 1:

Soit $\bar{Q}$ l'opérateur de transition de la chaine $X_n$ dans un système M/G/1 et $h_i(x)=\delta_{io}$, $\alpha_j(dy)=\bar{q}_j(dy)$, Alors, l'opérateur $T=\left\| T_{ij}(x,dy)\right\|_{i,j=o}^{\infty}$ est non négatif.

En effet, on voit aisement que,

$T_{ij}(x,dy)= \bar{Q}_{ij}(x,dy)$ si $i>o$ et

$T_{ij}(x,dy) = 0$ si $i=o$, d'où l'affirmation du lemme.

Lemme 2:

Soit $\bar{Q}$ l'opérateur de transition de la chaine $X_n$ dans un système M/G/1, alors,

$$(TV)(k,x)\leq \beta^k\left[e^{-\alpha x}.\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)\left[\frac{1}{\beta}+c^{-1}E^*\right]+\frac{1}{\beta}c^{-1}\varphi^*(x)\right]$$

où $\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)$, $E^*$, $V(k,x)$ ont été définis dans (6), (7), (9).

Démonstration:

De (8), on déduit que,

$$(TV)(k,x)= \sum_{j\geq o}\int V(j,y)T_{kj}(x,dy) \text{ si } k\neq 0 \text{ et } (TV)(0,x)=0.$$

Par conséquent,

$$(TV)(k,x)= \int_o^x V(k-1,y)P(x,dy)+\sum_{j\geq o} p_j(x)\int V(k+j,y)E(dy)$$

$$\leq \beta^{k-1}\int_o^x dF(u)\left[\int_o^x e^{-\alpha y}P(x-u\in dy)+\int_o^x c^{-1}\varphi^*(y).\right.$$

$$\left. .P(x-u\in dy) +\sum_{j\geq o}\beta^j p_j(x)\beta^k\left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}+c^{-1}E^*\right]\right]$$

En remarquant que, $\sum_{j\geq o}\beta^j p_j(x)=\int_x^{\infty} e^{\lambda(u-x)(\beta-1)}dF(u)$, On obtient directement

$$(TV)(k,x) \leq \beta^{k-1}\left[e^{-\alpha x}\, E(\, e^{\alpha\xi}\ ,\xi < x) + c^{-1}\varphi^{*}(x)\right] +$$
$$+\beta^{k}\left[\frac{1}{\beta}\, E(\, e^{\alpha\xi}\ ,\xi \geq x) + c^{-1}E^{*}.e^{-\alpha x}E(e^{\alpha\xi})\right],$$

ce qui achève la démonstration. ■

<u>Lemme 3</u>:

Supposons que dans un système M/G/1, la condition d'er--godicité géométrique suivante soit vérifiée:

$$\text{a) } \lambda E\xi < 1. \qquad \text{b) } \exists\ a>0\ :\ E(e^{a\xi}) = \int e^{au}dF(u) < \infty \qquad (10)$$

Alors, il existe $\beta > 1$ tel que $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)/\beta < 1$.

<u>Démonstration</u>:

Considérons la fonction $\psi(\beta) = \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)/\beta = \frac{1}{\beta}\int e^{\lambda(\beta-1)u}dFu)$

pour $\beta = 1$, $\psi(1) = \hat{f}(0) = 1$. pour $1 < \beta < a$, $\psi(\beta)$ est continue et différentiable. Calculons,

$$\psi'(\beta) = \left[\lambda\hat{f}'(\lambda\beta - \lambda) - \hat{f}(\lambda\beta-\lambda)\right]/\beta^{2}.$$

Pour $\beta = 1$, $\psi'(1) = \lambda\hat{f}'(0) - \hat{f}(0)$, où $\hat{f}'(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\int e^{\alpha u}dF(u)\right)$

D'ici découle directement que $\hat{f}'(0) = E\xi$. La démonstra--tion du lemme s'achève en utilisant la condition (10,a) ■

A présent définissons $\beta_0 = \sup(\beta : \hat{f}(\lambda\beta - \lambda) < \beta)$.

Comme nous l'avons prouvé précédement, $\beta_0 > 1$. On peut voir aisement que $\beta_0 < \infty$, si la distribution F n'est pas dégénérée. D'autre part, de la convexité de la fon--ction $\hat{f}(\lambda\beta - \lambda)$ découle ,

$\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)<\beta$ pour tout $\beta\in(1,\beta_o)$ et

$\hat{f}(\lambda\beta_o-\lambda)\leq\beta_o$.

D'aprés le lemme 2,pour que la condition $B_1$) du **théorè-me** 2 [3] soit **vérifiée**,il est suffisant que,

$$\frac{\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)}{\beta}+c^{-1}E^{*}\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)\leq\rho\ .$$

Choisissons $\rho=\dfrac{\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)+\beta}{2\beta}$ .On remarque que pour tout $\beta$ tel que $1<\beta<\beta_o$ , $\rho<1$ conformement au choix de $\beta$ .Posons

$$c=\beta E^{*}/(1-\rho).$$

Sachant que $\hat{f}(\lambda\beta-\lambda)=\beta(2\rho-1)$ et en utilisant le lemme 2,on conclut que

$$(TV)(k,x)\leq\rho\,V(k,x)$$ pour $k>0$.De plus,il est clair que $(TV)(0,x)\leq\rho.V(0,x)$.

Lemme 4:

Soit $\bar{Q}$ l'opérateur de transition de la chaine $X_n$ dans un système M/G/1.Alors, $\|\bar{Q}\|_V<\infty$ .

La démonstration se fait aisement en remarquant que,

$$\|T\|_V\leq\rho<1,\ \text{où}\ T=\left\|T_{ij}(x,dy)\right\|_{i,j=o}^{\infty}$$

Les conditions du théorème2 [3] étant vérifiées,on peut donc énoncer le résultat suivant:

Théorème: Supposons que dans un système M/G/1, la condition d'ergodicité géométrique (2) soit vérifiée, $E^* < \infty$ et $\beta_0 = \sup\,(\beta : \hat{f}(\lambda\beta - \lambda) < \beta)$. Alors, pour tout $\beta$ tel que $1 < \beta < \beta_0$, la chaine de Markov $X_n$ est fortement v-stable pour une fonction $V(n,t) = \beta^n\left[e^{-\alpha t} + c^{-1}\varphi^*(t)\right]$

où, $$c = \frac{\beta E^*}{1-\rho} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \beta}{2\beta} < 1.$$

REFERENCES


1. Aïssani D. et Kartashov N.V, Ergodicité et stabilité des chaines de Markov par rapport à des opérateurs topologiques dans l'espace des noyaux de transition. Compte Rendu Acad. Sciences USSR, ser.A, Math-phys-tech. N°11 pp.3-5, 1983 (Langue Ukrainienne et R.)

2. Aïssani A et Aïssani D., Méthodes mathématiques d'analyse des phénomènes d'attente. /à paraitre/

3. Kartashov N.V, Stabilité forte des chaines de Markov Séminaire VNISSI, pp. 54-59, 1981 (Langue Russe)

4. Aïssani D. et Kartashov N.V Strong stability of an imbedded Markov chain in an M/G/1 system. J. Theory of Probab. and Math. Stat. Amer. Math. soc. N°29,

pp. 1-5,1984.

5. Saaty T.,Elements of queueing theory and applications Mc Graw Hill,N.Y,1961.

6. Rossberg H.J.,über die verteilung von wartezeiten, Mathematische nachrichten,1965,30,N°1/2,S.1-16

7. Franken P.,Ein stetigkeitssatz für verlustsysteme.- Operations-forschung und Math Stat,1970,11,S.1-23

8. Kennedy D.,The continuity of the single server queue J. of Appl. Prob.,1972,9,N°3.

9. Stoyan D.,A critical remark on a system approximation in queueing theory.-Math operations forsch und stat 1976,7 N°6,953 -956.

# * T A B L E   D E S   M A T I E R E S *