

**UNIVERSITÉ D'ORAN**

**CAHIERS MATHÉMATIQUES**

**Fascicule N° 1 Année 1988**

Département de Mathématiques

Université d'Oran

B.P. 1524 ORAN - ALGÉRIE

# CAHIERS MATHÉMATIQUES

## COMITE DE REDACTION

RABAH Rabah, Responsable de la publication

BEBBOUCHI Rachid

BELHAMISSI Badredine

KHERIEF Khamsa

SARI Tewfik

## COMITE TECHNIQUE

BAGHDADI Lamia, Secrétariat

HEBBAR Omar, Réalisation

OULD ALI Othmane, Diffusion

La correspondance doit être adressée au responsable de la publication  
ou à la secrétaire de la rédaction.

PERTURBATION DES OPERATEURS DE TRANSITION POUR L'ETUDE  
 DE LA STABILITE DES CHAINES DE MARKOV.

D. AISSANI

Laboratoire de Modélisation Stochastique  
 I.N.E.S de Béjaïa.

§.1. Introduction: La notion de stabilité des systèmes complexes est dans un certain sens analogue à la propriété bien connue de dépendance continue des solutions des équations différentielles par rapport aux données initiales ( ou bien à d'autres paramètres ). Il existe plusieurs définitions de cette notion, caractérisant les particularités individuelles des systèmes étudiés ( voir [2], [6] ). Ainsi, Kalashnikov V.V a proposé la méthode des fonctions tests ( évolution de la deuxième méthode de Liapounov [4] ).

Dans cette communication, on illustre sur un exemple concret ( dont la relation avec le système dynamique correspondant est décrite, par exemple, dans [8] ), la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov ( qui décrivent l'évolution de certains systèmes [3] ), basée sur la méthode analytique de la théorie de perturbation.

Dans le §.2, nous exposons le critère de stabilité forte et rappelons certains résultats obtenus dans [5]. Les résultats de la communication sont exposés dans le §.3. Le théorème 2.4, démontré dans [9] est exposé à titre de comparaison.

§.2. Ergodicité et stabilité des chaînes de Markov:

Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable, où  $\mathcal{E}$  est une  $\sigma$ -algèbre dénombrablement engendrée.  $X = (X_t, t \geq 0)$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$ , donnée par un opérateur de transition régulier  $P(x, A)$ ,  $x \in E$ ,  $A \in \mathcal{E}$ . La mesure invariante unique  $\mathbb{P}$  du noyau  $P$  est finie,  $\mathbb{P}(E) = 1$ .

Notons  $m\mathcal{E}$  ( $m\mathcal{E}^+$ ), l'espace des mesures finies (non négatives) sur  $\mathcal{E}$ ;  $f\mathcal{E}$  ( $f\mathcal{E}^+$ ), l'espace des fonctions mesurables (non négatives) sur  $E$ . Le noyau de transition  $Q$  donne une application linéaire  $Q: m\mathcal{E} \longrightarrow m\mathcal{E}$ , dont l'action sur  $\mu \in m\mathcal{E}$  est égale à  $\mu Q(\cdot) = \int \mu(dx) \cdot Q(x, \cdot)$ .

Les notions et notations non introduites dans ce travail, le sont dans le sens ([1], [5], [3]). En particulier, les définitions de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte, ainsi que les expressions des symboles  $\mu f$ ,  $P, Q$  et  $P.f$  où  $f \in \mathcal{E}^+$  et  $P, Q \in \mathcal{B}$  (espace des opérateurs linéaires bornés). Notons  $\Pi = 1 \otimes \mathbb{1}$  le projecteur stationnaire de l'opérateur  $P$ , où  $1 \in \mathcal{E}$  est la fonction identiquement égale à 1° unité. Ici, "o" désigne le produit tensoriel d'une mesure et d'une fonction.

Soit  $v$ , une fonction finie (pas nécessairement bornée), positive sur  $E$ . Introduisons une classe spéciale de norme dans  $m\mathcal{E}$ , de type  $\|\mu\|_v = \int v(x) |\mu|(dx)$ , où  $|\mu|$  désigne la variation de la mesure  $\mu$ . On remarque que la norme correspondante dans  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\|Q\|_v = \sup \left[ (v(x))^{-1} \int_0^\infty |Q(x, dy)| v(y), x \in E \right]$$

Théorème 1.1: ([1], [9])

Pour la  $v$ -stabilité forte d'une chaîne de Markov  $X$ , il est nécessaire et suffisant d'imposer les conditions suivantes au noyau  $P$ :

D)  $\|P\|_v < \infty$

A) Le noyau  $T = P - h\alpha$  est non négatif,  $\alpha \in m\mathcal{E}^+$ ,  $h \in f\mathcal{E}^+$ , telles que

$$\|\alpha\|_v < +\infty, \quad \|h\|_v < +\infty$$

B) Il existe  $0 < \rho < 1$  et  $m \geq 1$  tels que  $T^m.v(x) \leq \rho.v(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Notons  $p_n = \alpha T^{n-1}.h$ ,  $n \geq 1$ . La suite  $\{p_n\}$  est une distribution de probabilité. D'autre part, considérons la condition suivante:

C)  $\text{PGCD} \{n \geq 1, p_n > 0\} = 1$ .

Théorème 1.2: [5]

Soit  $X$  une chaîne de Markov vérifiant les conditions D), A), B) et C). Alors, pour tout  $\lambda > 1$  tel que  $\rho \lambda < 1$ ,

$$\|P^t - \Pi\|_v \leq \rho^t + \frac{\|h\|_v \cdot \|\alpha\|_v}{(1 - \rho \lambda)^2} \cdot \lambda^{-t} \cdot \max\{\lambda, \Lambda(\lambda)\}$$

$\Lambda(\lambda) = \sup_t \lambda^t |\lambda(t) - \lambda|$ , où  $\lambda(t)$  est la solution de l'équation de renouvellement

$$\lambda(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(k) \cdot p_{n-k} = \delta_{0, n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\lambda(n) = 0, \quad n \leq 0$$

et  $\lambda = (\mathbb{1} h)(\alpha 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ , quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $\delta_{0, n}$  représentant la

symbole de Kronecker.

Remarque:  $\Lambda(\mathcal{U}) < \infty$ , pour tout  $\mathcal{U} > 1$  découle des conditions du théorème.

Théorème 1.3: ([B], p.16)

Supposons que la chaîne de Markov  $X$  vérifie les conditions  $D), A), B_1)$  et  $C)$ , et soit la chaîne de Markov  $Y$  ayant pour noyau de transition  $Q$  tel que  $\|Q - P\|_{\mathcal{V}} \leq 1 - \rho$ ,

Alors,

$$\sup_{t \geq 0} \|Q^t - P^t\|_{\mathcal{V}} \leq \left\{ \frac{\|h\|_{\mathcal{V}} \cdot \|\alpha\|_{\mathcal{V}}}{(1 - \rho - \xi)^2} \cdot \left( \frac{1}{1 - \rho} + \Lambda \cdot \frac{\|h\|_{\mathcal{V}} \cdot \|\alpha\|_{\mathcal{V}}}{(1 - \rho)^2} + \lambda \frac{\|h\|_{\mathcal{V}} \cdot \|\alpha\|_{\mathcal{V}}}{(1 - \rho)^3} \right) \right\} \|Q - P\|_{\mathcal{V}}$$

où  $\rho \geq \|T\|_{\mathcal{V}}$  et  $\Lambda = \sum_{n \geq 0} |\lambda(n) - \lambda|$

§.3. Application à la chaîne  $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$ .

Soit  $(\xi_n, n \geq 0)$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, ayant pour fonction de répartition commune  $F$ . Construisons la chaîne de Markov  $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+, n \geq 0$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Posons pour  $x \in \mathbb{R}^+, h(x) = P(\xi_1 + x \leq 0)$   
 $\alpha(dy) = \delta_0(dy)$ , où  $\delta_0$  est la distribution concentrée en l'origine. On remarque que la chaîne de Markov  $X$  pour  $X_0 = 0$  à la forme

$$X_{n+1} = \max(0, \xi_{n+1}, \xi_{n+1} + \xi_n, \dots, \xi_{n+1} + \xi_n + \dots + \xi_1).$$

Considérons la distribution

$$P(x, A) = P(X_1 \in A / X_0 = x) = P\left[\left(x + \xi_1\right)^+ \in A\right].$$

On constate que  $P(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A) + h(x) \cdot \alpha(A)$

Définissons l'opérateur  $T(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A)$

L'égalité  $P = T + h\alpha$  est vérifiée, ainsi que la condition  $T \geq 0$ .

Lemme 2.1:

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(x, A) = P(0 < x + \xi_1, 0 < x + \xi_1 + \xi_2, \dots, 0 < x + \xi_1 + \dots + \xi_n \in A)$ .

La démonstration se fait par récurrence, en remarquant que

$$T^{n+1}(x, A) = \int P(0 < x + \xi_1, \dots, 0 < x + \xi_1 + \dots + \xi_n \in dy) \cdot P(0 < x + \xi_1 + \dots + \xi_{n+1} \in A / y = x + \xi_1 + \dots + \xi_n)$$

Choisissons à présent la fonction  $v = (\exp \delta x, x \in \mathbb{R}^+)$ . Alors,

$$Tv(x) = \int P(0 < x + \xi_1 \in dy) \cdot \exp \delta y = E \left[ \exp(\delta x + \delta \xi_1), x + \xi_1 > 0 \right]$$

$$\leq \mathbb{E}[\exp(\gamma \xi_1 + \gamma x)] = \rho(\gamma) \cdot v(x).$$

Ainsi, pour tout  $\gamma$  tel que  $\rho(\gamma) = \mathbb{E}[\exp \gamma \xi_1] < 1$ ,  $\mathbb{P}(x) \leq \rho(\gamma) \cdot v(x)$ .

Théorème 2.1: (voir [9], p.59)

Soit  $\mathbb{E} \xi_1 < 0$  et  $\forall \delta \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[\exp \delta \xi_1] < \infty$ , Alors  $\forall \gamma$  tel que  $\rho(\gamma) = \mathbb{E} \exp(\gamma \xi_1) < 1$  la chaîne de Markov  $X_n$  est fortement  $v$ -stable pour  $v = (\exp \gamma x, x \in \mathbb{R}^+)$ .

Considérons la distribution  $p_n = \alpha T^{n-1} h, n \geq 1$ .

Lemme 2.2:

Soit  $\tau = \inf (n: \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 0)$ , alors  $P(\tau = n) = p_n$ .

Démonstration:  $\alpha T^{n-1} h = T^{n-1}(0, \cdot) \cdot h = \int T^{n-1}(0, dy) \cdot h(y)$

$$= P(0 < \xi_1, 0 < \xi_1 + \xi_2, \dots, 0 < \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}, \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 0).$$

Introduisons à présent une classe spéciale de norme dans  $\mathcal{E}$ , de type

$$\| \mu \|_{\gamma} = \int_0^{\infty} \exp(\gamma x) |\mu| (dx).$$

On remarque que les normes correspondantes dans  $f\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  ont la forme

$$\| f \|_{\gamma} = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) |f(x)|$$

$$\| q \|_{\gamma} = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) \int_0^{\infty} q(x, dy) \exp(\gamma y).$$

$$C'est pourquoi  $\| P^{\dagger} - \Pi \|_{\gamma} = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) \int_0^{\infty} \exp(\gamma y) |P^{\dagger}(x, dy) - \mathcal{T}(dy)|$$$

où  $P^{\dagger}(x, dy) = P(X_1 \in dy / X_0 = x)$ .

Théorème 2.2:

Supposons vérifiées les conditions du théorème 2.1, alors, pour tout  $\gamma$  tel que  $\rho = \rho(\gamma) = \mathbb{E} \exp \gamma \xi_1 < 1$  et pour tout  $u > 1$  tel que  $\rho u < 1$ , on a

$$\| P^{\dagger} - \Pi \|_{\gamma} \leq \rho^{\dagger} + \frac{u^{-\dagger}}{(1 - \rho u)^2} \cdot \max \{ \mathcal{T}(\{0\}), \wedge(u) \}$$

où  $\mathcal{T}$  est la distribution stationnaire de la chaîne  $X_n$ .

Pour obtenir ce résultat, il suffit de remarquer que

$$\lambda = (\mathcal{T}h)(\alpha 1) = 1. \int \mathcal{T}(dx) \cdot P(x + \xi_1 \leq 0) = \mathcal{T}(\{0\}).$$

De même,  $\| h \|_{\gamma} = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) |h(x)| \leq 1$ ,

$$\| \cdot \|_Y = \int_0^{\infty} \exp(\delta x) | \xi_0 | (dx) = 1. \text{ d'où le résultat. } \blacksquare$$

Remarque 2.1: La grandeur  $\Lambda(u)$  peut être estimée exactement en utilisant les résultats ([4], chap. 4, §.7) et ([7], chap. 2).

Considérons à présent, la chaîne de Markov  $X$  ayant pour noyau de transition  $Q$  pour distribution  $G$ . Notons  $\mathfrak{P}_P$  et  $\mathfrak{P}_Q$  les distributions stationnaires correspondantes des noyaux  $P$  et  $Q$ . On remarque que

$$E = \| Q - P \|_Y = \sup_{x \geq 0} \exp(-\delta x) \int_0^{\infty} | Q - P | (x, dy) \cdot \exp(\delta y).$$

$$\sup_{t \geq 0} \| Q^t - P^t \|_Y = \sup_{t \geq 0} \sup_{x \geq 0} \exp(-\delta x) \int_0^{\infty} | Q^t(x, dy) - P^t(x, dy) | \cdot \exp(\delta y).$$

Théorème 2.3:

Dans les mêmes conditions que le théorème 2.1, et pour tout  $\delta$  tel que  $E \exp(\delta \xi_1) < 1$ ,

et tout  $u > 1$  tel que  $\rho^u < 1$ ,

$$\sup_{t \geq 0} \| Q^t - P^t \| \leq N^* \cdot \| Q - P \|_Y$$

$$N^* = \frac{1}{(1 - \rho - \varepsilon)^2} \cdot \left( \frac{1}{1 - \rho} + \frac{\Lambda(u)}{(u-1)(1-\rho)^2} + 2 \frac{\mathfrak{P}(\{0\})}{(1-\rho)^3} \right)$$

et tout  $G$  tel que  $0 \leq \mathcal{E}(F, G) < (1 - \rho)^2 / 2$ , où  $\mathcal{E} = \| Q - P \|_Y \leq \mathcal{E}(F, G)$ ,

$$\mathcal{E}(F, G) = \sup_{x \geq 0} \left[ \exp(-\delta x) | F(-x) - G(-x) | + \int_{-x}^{\infty} \exp(\delta y) | F - G | (dy) \right]$$

Dans la démonstration, pour estimer  $\Lambda_0$  dans le théorème 1.3, on utilise l'

égalité suivante:

$$\Lambda_0 \leq \Lambda(u) \cdot u \cdot (u-1)^{-1}, \text{ qui est vraie } \forall u > 1. \blacksquare$$

Théorème 2.4: [9]

Supposons vérifiées les conditions du théorème 2.1, alors pour tout  $\delta$  tel que

$\rho = \rho(\delta) < 1$ , on a

$$\int_{[0, \infty[} \exp(\delta x) | \mathfrak{P}_P - \mathfrak{P}_G | (dx) \leq \mathcal{E}(F, G) \cdot 2(1 - \rho)^{-1} \left[ (1 - \rho)^2 - 2 \mathcal{E}(F, G) \right]^{-1}$$

et tout  $G$ , tel que  $0 \leq \mathcal{E}(F, G) < (1 - \rho)^2 / 2$ .

## REFERENCES.

- [1]. Afssani B. and Kartashev N.V, Ergodicité et stabilité des chaînes de Markov par rapport à des opérateurs topologiques dans l'espace des noyaux de transition. Compte Rendu Acad. Sciences R.S.S.U, ser. A, math.-phys.-Tech., N°11, 1985, pp. 3-9
- [2]. Cesari L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Springer, 1959.
- [3]. Afssani B., Reflexion sur la théorie mathématique de stabilité, IARS N° 04-86, Dir. Rech. Scient., M.D.E, 1986, 59 p.
- [4]. Kalashnikov V.V, Analyse qualitative de comportement des systèmes complexes par la méthode des fonctions tests, Nauka, Moscou, 1978 (Russ)
- [5]. Afssani B., Ergodicité et stabilité des chaînes de Markov, C.R. Séminaire du Laboratoire de Statistique, Constantine, Avril 1985, 17 p.
- [6]. La Salle J. and Lefschetz S., Stability by Liapunov's direct method. Academic Press, 1961.
- [7]. Banach D., Estimations exactes de la vitesse de convergence pour des processus de régénération à temps discret. Acte. diss cand. phys-math. Nauk, Kiev, 1982, 12 p.
- [8]. Zakousile G.K, Sur les relations de certains systèmes dynamiques et systèmes de files d'attente, J. Theory of Proba. and math. Stat., American Mathematical Soc. N° 29, 1984, pp. 41-46.
- [9]. Kartashev N.V, Stabilité forte des chaînes de Markov, in "Problèmes de stabilité des modèles stochastiques", séminaire VIENNI, Moscou 1981, pp. 54-59 (Russ)

• • • • •

ACTES DE LA QUATRIEME RENCONTRE EN EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ORDINAIRES, UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HAOUARI

BOUMEDIENNE, ALGER, Octobre 1987.

RESPONSABLES DE L'EDITION DES ACTES:

BOULARAS Driss, USTHB , Alger

RABAH Rabah, Université d'Oran

SOMMAIRE

AIBOUDI M. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la localisation des cycles limites de l'équation: $\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$ .....	1
AISSANI D. Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de Markov .....	7
BOBO SEKE. Régionalisation et Van Der Pol épaissi.....	13
BOUCHERIF A. Etude géométrique d'un problème aux limites .....	33
BOULARAS D. Existence d'un centre isochrone dans les systèmes différentiels quadratiques plans.....	37
BOULARAS D., DEMMAD K. Sur les base de concomittants et invariants affines des systèmes différentiels.....	43
BOULARAS-BENDIB M. Méthode directe de Lyapunov dans les systèmes dynamiques non-autonomes.....	49
BULATOV V. Sur les solutions d'un système différentiel non-résoluble par rapport à la dérivée.....	53
KESSI A. Equations différentielles homogènes de quatrième degré sans points critiques mobiles.....	55
KOULIKOV A. Bifurcation d'Andronov-Hopf et systèmes d'équations aux dérivées partielles singulières de type parabolique.	57
LOUJNYKH V. Problèmes aux limites et des valeurs propres pour des équations différentielles ordinaires avec dégénérescence.	61
MAKHLOUF A. Etude d'un problème périodique de l'équation de KdV.....	67

SOMMAIRE (suite)

MAYESTER P. Stabilité des solutions des équations différentielles perturbées par impulsion stochastiques.....	71
MAWHIN J. Forced second order conservative systems with periodic nonlinearity.....	75
MOUKOSSEEV B. Sur un type de systèmes dynamiques linéaires.....	79
RABAH R. Note sur les systèmes implicites linéaires dans les espaces de Hilbert.....	85
RADJEF M.S. Sur l'existence d'un équilibre de Berge pour un jeu différentiel à n personnes.....	89
REBBANI F. Problèmes aux limites pour une équation différentielle opérationnelle d'ordre impair dans le rectangle.....	95
TSYMBAL V. Sur quelques problèmes avec petit paramètre.....	99