

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira de Bejaïa  
Faculté des Science exactes  
Département de Physique

Réf : .....



Mémoire de Fin de Cycle  
En vue de l'obtention du diplôme  
**MASTER**

Option : Dynamique des fluides et énergétique

**Thème**

**Etude de la stabilité de la convection de  
Rayleigh Bénard entre deux plaques  
parallèles.**

Présenté par : **Abouchi Hanane**

Soutenu le : **Lundi 08 Juillet 2019** devant le jury d'examen :

KASRI	Yazid	Professeur	Président
BOUCHARA	Lydia	MCB	Examinatrice
HAMEDI	Messaoud	Docteur	Invité
MEZIANI	Bachir	Professeur	Directeur Mémoire

**Année universitaire : 2018 / 2019**

# Remerciements

Tous d'abord je remercie le bon dieu qui ma donné la santé et le courage pour accomplir ce travail.

J'aimerai exprimer mes sincères remerciements et appréciations a mon père, Abouchi Madjid qui a été toujours avec moi dans ma vie, en m'encourageant de passer tous les obstacles et m'inspirant d'archiver mes rêves et ne jamais se contenter de moins.

J'aimerai aussi étendre mes sincères remerciements et appréciations à mon encadreur Mr Meziani pour ces guides continues, connaissances profondes, suggestions valables, critique constructive et grande compétences d'éditions durant l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements aussi élargis pour mes membres de jury Mm Bouchara, Mr Kasri et Mr Hamdi et aussi pour mes chères amis et collègues de départements de physique de l'université d'Abderrahmane Mira pour leur aide et support.

# *Dédicaces*

C'est avec une très grande émotion que je dédie ce modeste travail à mes parents, mes frères(Hamza, Housseem) , ma sœur Selma, ma famille maternelle et paternelle et mes chères amis que leur amour, soutien, encouragement et prières m'ont rendu capable de compléter ce travail et archiver mes ambitions.

## Tables des matières

Dédicaces

Remerciement

Table des matières

Liste des figures

Liste des abréviations et symbole

Introduction Générale

CHAPITRE I: Introduction aux instabilités de Rayleigh Bénard

I introduction

I.1 Dynamique des fluides 1

I.2 Transfert Thermique 1

I.3 Modes de transfert de chaleur 1

I.3.1 Conduction 1

I.3.2 Rayonnement 2

I.3.3 Convection 3

I.3.3.1 Convection naturelle 3

I.3.3.2 Convection forcée 3

I.3.3.3 Convection mixte 4

I.3.3.4 La convection de Rayleigh – Bénard 4

I.4 Nombre Adimensionnelles 6

I.4.1 Nombre de Prandtl 6

I.4.2 Nombre de Grashof 7

I.4.3 Nombre de Rayleigh 7

I.4.4 Nombre de Nusselt 7

I.4.5 Nombre de Peclet 8

I.4.5.1 Nombre de Peclet Thermique	8
I.4.5.2 Nombre de Peclet Massique	8
I.4.6 Nombre de Schmidt	8
I.4.7 Nombre de Richardson	8
I.4.8 Nombre de Reynolds	8
I.5-Approximation de Boussinesque	8
I.6 - Conclusion	9
<b>CHAPITRE II : Formulation Mathématique</b>	<b>10</b>
II. Positon de problème	10
II.1 Introduction	10
II.2 Equations générales régissant l'évolution d'un fluide incompressible	10
II.2.1 fluide incompressible	10
II.2.2Equation de conservation de masse	10
II.2 .3Equation de conservation de mouvement	11
II.2.4Equation d'énergie	11
II.3Approximation de Boussinesque	12
II.4 Equations de perturbations	12
II.4.1 introduction	12
II.4.2Equations de Navier-Stockes	12
II.4.3Equation d'énergie	13
II.5 Formulation du problème	14
II.5.1 Introduction	14
II.5.2 Equations du problème	14
II.5.3 conditions aux limites	14
II.6 Equations adimensionnelles	15
II.6.1 Introduction	15

II.6.2 variables et équations adimensionnelles	15
II.7 Analyse de la stabilité bidimensionnelle	16
II.7.1 Stabilité linéaire : méthode des modes normaux	15
II.7.2 Elimination de la pression dans les équations	16
II.7.3 Linéarisation	17
II.7.4 Fonction du courant	17
II.7.5 Problèmes aux valeurs propres	18
II.7.6 Solution du problème aux valeurs propres	19
II.8 Conclusion	21
CHAPITRE III : Résultats Numériques et Discussion	22
III.1 introduction	22
III.2 Analyse des résultats	22
III.3 Conclusion	24
CHAPITRE IV : Conclusion Générale	25
Liste des graphes	26
Références Bibliographiques	27
Résumé	

## Listes des figures :

<b>Page</b>	<b>Titre</b>
<b>2</b>	<b>Figure 1 : schéma du transfert de chaleur conductif [2]</b>
<b>2</b>	<b>Figure 2 : Schéma du transfert de chaleur radiatif [2]</b>
<b>3</b>	<b>Figure 3 : Schéma du transfert de chaleur convectif [2]</b>
<b>4</b>	<b>Figure 4 : Convection de Rayleigh-Bénard [3]</b>
<b>5</b>	<b>Figure 5 : Mécanisme physique de l'instabilité thermique de Rayleigh-Bénard : fluide confiné entre deux plans rigides espacés d'une distance <math>d</math>, chauffé par le bas et refroidi par le haut. [3]</b>
<b>6</b>	<p style="text-align: center;"><b>Figure 6</b></p> <p style="text-align: center;">(a) En haut : Photographie de rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard dans un « sirop » (glycérol). En bas : les flèches montrent le sens de rotation inversé de chacun des deux rouleaux successifs. Les lignes noires désignent les lignes de courant et la ligne verte désigne la ligne isotherme moyenne.</p> <p style="text-align: center;">(b) Vue du haut des rouleaux thermo convectifs dans l'Argon.</p> <p style="text-align: center;">(c) Vue du haut des motifs de convection du <math>Co_2</math>, évolution des rouleaux vers des formes plus complexes [3]</p>
<b>14</b>	<b>Figure 7 : Domine du problème [12]</b>

## LISTE DES ABREVIATIONS ET SYMBOLES

### Les nombres adimensionnels :

Gr : Nombre de Grashof

Ra : Nombre de Rayleigh

Re : Nombre de Reynolds

Ri : Nombre de Richardson

Nu : Nombre de Nusselt

Pe : Nombre de Peclet

Pr : Nombre de Prandtl

<b>Symbole</b>	<b>Définition</b>	<b>Unité</b>
$C_p$	Capacité thermique isobare	( J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
$C_v$	Capacité thermique isochore	( J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
$e$	Densité d'énergie thermique	
$G$	l'accélération de la pesanteur	m/s <sup>2</sup>
$H$	hauteur caractéristique	m
$h$	Coefficient d'échange superficiel	(w/m <sup>2</sup> .k)
$K$	Vecteur d'onde	
$L_c$	Longueur caractéristique	M
$P$	Pression	(Pa)
$Q$	Flux thermique	J.s <sup>-1</sup>
$q$	constante	
$t$	Temps	S
$T$	Température	°K
$\Delta T$	Différence de température	°K
$T_p$	Température de la paroi	°K
$T_f$	température du fluide	°K
$U$	Vitesse du fluide	m/s

## Liste des abréviations et symboles

---

<b>Symbole</b>	<b>Définition</b>	<b>Unité</b>
$\nu$	viscosité cinématique	$(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \text{m}^2/\text{s})$
$\mu$	Viscosité dynamique	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\alpha$ :	Diffusivité thermique	$\text{m}^2/\text{s}$
$\beta$	Coefficient de dilatation thermique	$(\text{K}^{-1})$
$\tau_{ij}$	Tenseur de contraintes	
$\varepsilon_{ij}$	Tenseur des déformations	
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzman	
$\lambda$	Conductivité thermique	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$\rho$	Masse volumique	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\varphi$	Taux de dissipation par viscosité	
$\partial$	Dérivée partielle	
$\nabla$	Opérateur nabla	

:

:

## *Introduction générale*

La convection de Rayleigh-Bénard. La convection de Rayleigh Bénard est un type d'écoulement qui est causé par des différences de densités due à un gradient de température. La convection de Rayleigh Bénard se produit dans un volume de fluide qui est chauffé par-dessous. Dans le cas étudié dans ce mémoire, le fluide est conservé entre deux plaques parallèles portées à des températures différentes. La plaque inférieure est portée à une température chaude et la plaque supérieure est portée à une température froide. Le fluide au contact de la plaque chauffée sera porté à une température chaude et sa densité diminue, ce qui lui permet de remonter vers les couches supérieures sous l'effet de la poussée d'Archimède. La gravité va mettre le fluide le plus froid et lourd à la paroi supérieure mais ça s'est opposé par les forces visqueuses dans le fluide C'est l'équilibre entre ces deux forces qui déterminera si la convection se déroule ou pas. Si le gradient de température ainsi que le gradient de densité sont largement suffisant la force gravitationnelle va dominer et l'instabilité se déroule. C'est la limite des instabilités et les modèles d'écoulement qui se produisent qui sont étudiés dans ce mémoire.

# Chapitre I

## Introduction aux instabilités de Rayleigh Bénard

### I-INTRODUCTION :

#### I.1-Dynamique des fluides :

La dynamique des fluides (hydrodynamique) est l'étude des mouvements des fluides qu'ils soient liquides ou gazeux. Elle fait partie de la mécanique des fluides avec l'hydrostatique (statique des fluides). La résolution d'un problème de dynamique des fluides nécessite le calcul des diverses inconnues qui gouvernent l'état des fluides, par exemple la vitesse, la pression et la température en fonction de l'espace et du temps.

Les équations qui étudient les fluides sont les équations de Navier Stokes. Ces équations régissent uniquement les fluides Newtoniens et elles ne sont pas valables pour tous les fluides tels que le sang, le cristal liquide etc. [1]

#### I.2 -Transfert Thermique :

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique se propose de décrire quantitativement dans l'espace et le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final [2].

#### I.3 -Modes de transfert de chaleur :

##### I.3.1-conduction :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres [3].

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{Q} = -\lambda S \overrightarrow{grad}(T) \quad (I.1)$$

Ou sous forme algébrique :

$$Q = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I.2)$$

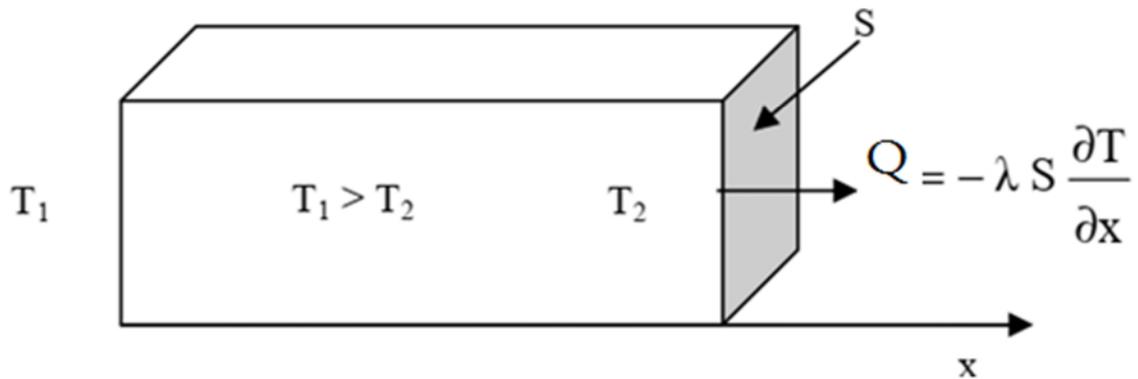
avec :

**Q** : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

**λ** : Conductivité thermique du milieu (W m-1 °C-1)

**x** : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

**S** : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m2)

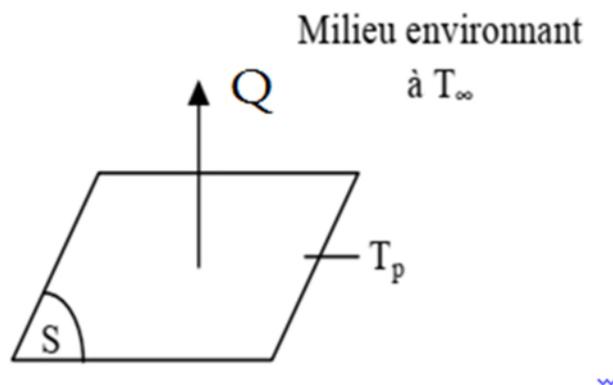


**Figure 1 :** Schéma du transfert de chaleur conductif [2].

**I.3.2-Rayonnement :**

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). On prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$Q = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4) \tag{I.3}$$



**Figure 2 :** Schéma du transfert de chaleur radiatif [2]

**Avec**

$Q$  : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

$\sigma$  : Constante de Stefan ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ )

$\epsilon_p$  : Facteur d'émission de la surface

$T_p$  : Température de la surface (K)

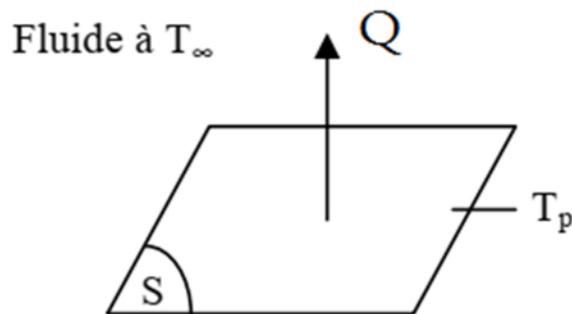
$T_{\infty}$ : Température du milieu environnant la surface (K)

$S$ : Aire de la surface ( $m^2$ )

### I.3.3- Convection :

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$Q = hS(T_p - T_{\infty}) \quad (I.4)$$



**Figure 3** : Schéma du transfert de chaleur convectif [2]

Avec :

$Q$ : Flux de chaleur transmit par convection (W)

$h$ : Coefficient de transfert de chaleur par convection ( $W m^{-2}C^{-1}$ )

$T_2$ : Température de surface du solide ( $^{\circ}C$ )

$T_{\infty}$ : Température du fluide loin de la surface du solide( $^{\circ}C$ )

$S$ : Aire de la surface de contact solide/fluide ( $m^2$ )

#### I.3.3.1 Convection naturelle :

Lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensives telles que la température, la concentration ou la tension superficielle.

#### I.3.3.2 Convection forcée :

La convection forcée est provoquée par un procédé mécanique (pompe, turbine, ventilateur) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle.

**I.3.3.3-Convection mixte :**

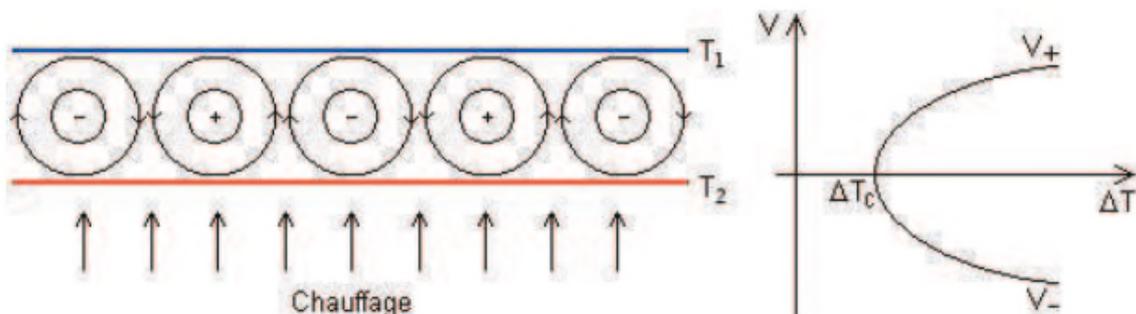
La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (Convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont considérées séparément, du même ordre de grandeur.

**I.3.3.4-La convection de Rayleigh – Bénard :**

La convection de Rayleigh-Bénard est un type de convection naturelle qui se produit dans une couche horizontale plane de fluide chauffée par dessous, dans laquelle le fluide développe un motif régulier de cellules de convection dite cellules de Bénard . La convection de Rayleigh – Bénard est l'un des phénomènes de convection les plus étudiés en raison de son accessibilité analytique et expérimentale.

Le phénomène de Rayleigh-Bénard correspond à l'état instable dans lequel se trouve une couche de fluide dilatable, couche confinée entre deux plans rigides horizontaux, d'épaisseur  $d$  et soumise à un écart de température  $\Delta T$ . La structure du fluide est encore stable et au repos, si cet écart dépasse une valeur critique  $T_c$ , la structure devient instable et des mouvements naissent à l'intérieur du fluide. Ces mouvements augmentent l'échange de la chaleur bien au-delà de l'échange thermique par simple conduction. C'est-à-dire qu'à la conduction vient s'ajouter un flux thermique convectif : les particules du fluide en mouvement transportent de la chaleur en l'évacuant autour d'elles vers d'autres particules plus froides, puis vers l'extérieur du fluide. L'exemple le plus simple de ce phénomène est celui de l'eau que l'on fait bouillir dans une casserole sur une plaque chauffante : au voisinage de celle-ci, le fluide se réchauffe, devient plus léger et se met à monter sous l'effet des forces d'Archimède, tandis qu'à la surface, au contact de l'air, il se refroidit, devient plus lourd et se met à descendre.

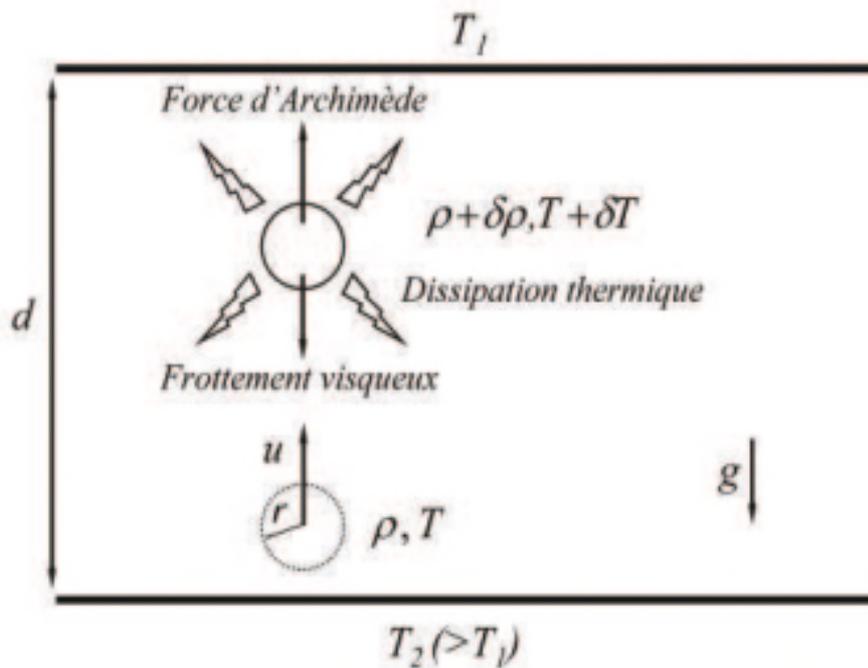
Les instabilités de Rayleigh-Bénard sont contrôlées par une concurrence entre plusieurs forces ; la poussée d'Archimède (la force motrice), la dissipation de quantité de mouvement (le terme visqueux) et la diffusivité thermique. Ces deux dernières représentent les forces de freinage [4].



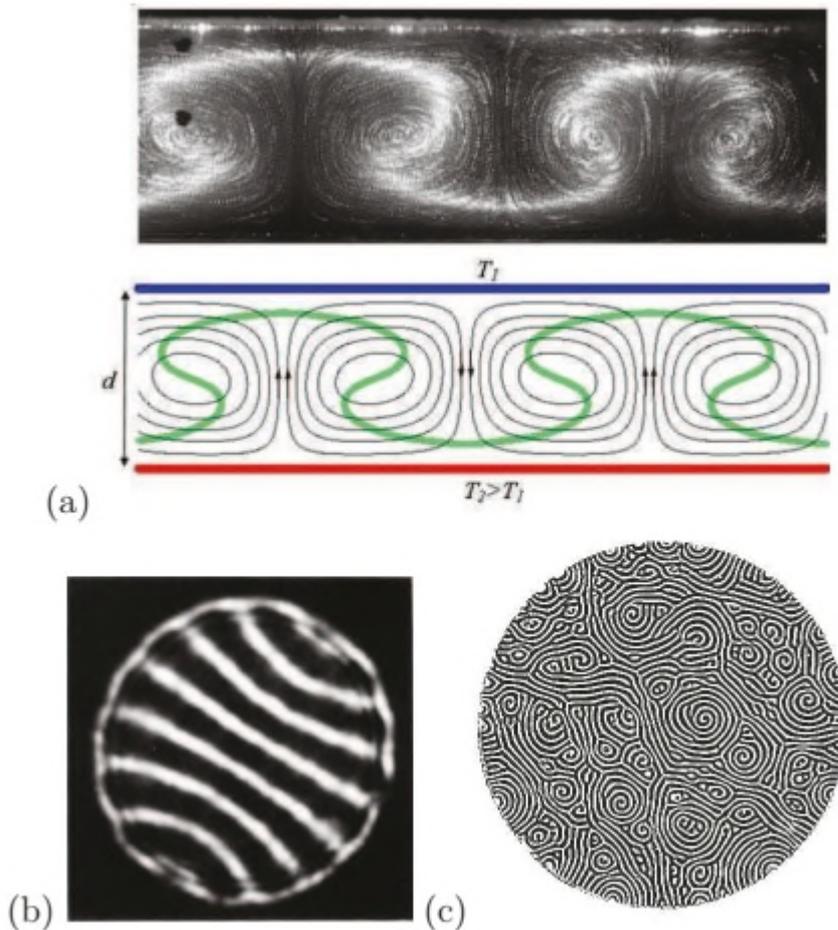
**Figure 4 : Convection de Rayleigh-Bénard [3]**

La présence d'un gradient thermique dans le fluide induit un gradient de densité. Des particules se refroidissent au contact de la plaque froide, deviennent plus denses et ont donc

tendance à descendre. D'autres particules deviennent moins denses au contact de la plaque chaude, elles se dilatent et ont donc tendance à monter. C'est cette différence de densité qui fait naître la poussée d'Archimède au sein du fluide, poussée qui croît avec l'augmentation de l'écart de température entre le haut et le bas du fluide. Le système est en équilibre mécanique, et le transfert thermique reste purement conductif tant que la poussée d'Archimède n'arrive pas à vaincre les forces de freinages qui sont le frottement visqueux et la dissipation thermique (Voir Figure 5). [3]



**Figure 5 :** Mécanisme physique de l'instabilité thermique de Rayleigh-Bénard : fluide confiné entre deux plans rigides espacés d'une distance  $d$ , chauffé par le bas et refroidi par le haut.[3]



**Figure 6 :**

(a) En haut : Photographie de rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard dans un « sirop » (glycérol).

En bas : les flèches montrent le sens de rotation inversé de chacun des deux rouleaux successifs. Les lignes noires désignent les lignes de courant et la ligne verte désigne la ligne isotherme moyenne.

(b) Vue du haut des rouleaux thermo convectifs dans l'Argon.

(c) Vue du haut des motifs de convection du  $CO_2$ , évolution des rouleaux vers des formes plus complexes [3]

#### **I.4 : Nombre Adimensionnelles :**

Les nombres sans dimension sont obtenus par le rapport de grandeurs ayant une même dimension. Ainsi la densité d'une substance, étant le rapport de la masse volumique de cette substance sur la masse volumique de l'eau, est un nombre sans dimension.

Ils sont d'un usage très courant dans la description des phénomènes thermiques ou

hydrauliques. Le plus emblématique d'entre eux est sans doute le nombre de Reynolds. Ils sont utilisés pour caractériser un état physique indépendamment de la taille de l'espace sur lequel il est observé. Ceci est particulièrement utile pour extrapoler les observations faites sur maquettes.

Les nombres sans dimension ne doivent pas être confondus avec des constantes.

Etant sans dimension, ils sont par conséquent aussi sans unité, ce qui fait que leur valeur reste inchangée quel que soit le système d'unité utilisé. Attention cependant il est important que numérateur et dénominateur de l'expression du nombre sans dimension soient dans le même système d'unité. [12]

**I.4.1 : Nombre de Prandtl :** Il exprime le rapport entre la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\alpha$  du fluide. Il caractérise l'importance relative des effets visqueux et thermiques et ne dépend que des propriétés du fluide.[4]

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

**1.4.2 : Nombre de Grashof :**

Le nombre de Grashof (Gr) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof, ingénieur allemand.[5]

On définit le nombre de Grashof de la manière suivante :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T\rho^2 L_c^3}{\mu^2}$$

**I.4.3 : Nombre de Rayleigh :** Il exprime le ratio des forces de poussée par les effets visqueux et de diffusion thermique. Il caractérise la vigueur de la convection naturelle en prenant en compte les propriétés du fluide.[6]

$$RaL = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu\alpha} = GrL \cdot Pr$$

D'où

$\Delta T$  : Est le gradient de température,

$\beta$  : Coefficient de dilatation thermique,

$g$  : La gravitation,  $h$  la distance entre les deux plaques,

$\nu$  : La viscosité thermique,

$\alpha$  : Est la diffusivité thermique.

$$Nu = \frac{\phi_{reel}}{\phi_{conduction}} = \frac{\left[-\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0}}{(T_+ - T_\infty)/L} = \frac{h_c L}{\lambda}$$

#### I.4.4 Nombre de Peclet :

Le nombre de Péclet (  $Pe$  ) est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique et en transfert massique. Il représente le rapport du transfert par convection et du transport par diffusion (thermique ou massique). Il est équivalent au produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl dans le cas du transfert thermique et au produit du nombre de Reynolds avec le nombre de Schmidt en transfert massique.[8]

##### I.4.4.1 Nombre de Peclet thermique :

$$Pe_{ther} = \frac{L_c v}{\alpha} = \frac{L_c v C_p \rho}{\lambda} = \frac{L_c^2 C_p \rho}{\lambda t} = Re \cdot Pr$$

##### I.4.4.2 Nombre de Peclet massique :

$$Pe_m = \frac{L_c v}{D} = Re \cdot Sc$$

#### I.4.4 Nombre de Richardson :

Le nombre de Richardson ( $Ri$ ) est un nombre sans dimension utilisé notamment en thermodynamique qui a été développé par Lewis Fry Richardson, physicien et mathématicien anglais. Il s'agit du rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle de fluide et son énergie cinétique :  $Ri = \text{Énergie potentielle} / \text{Énergie cinétique}$ . [10]

On le définit par :

$$Ri = \frac{g \beta \Delta T L_c}{v^2}$$

#### I.4.5 Nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds ( $Re$ ) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes.

On le définit par :

$$Re = \frac{\rho V L}{\nu}$$

### **I.5-Approximation de Boussinesq :**

L'hypothèse de Boussinesq est généralement utilisée pour traiter un problème de convection naturelle et en simplifier la formulation. Ainsi, les variations de la masse volumique du fluide sont prises en compte uniquement dans le terme moteur des équations de Navier-Stokes donc dans le terme de poussée d'Archimède.[3]

### **I.6 - Conclusion :**

Dans ce chapitre on a défini quelques concepts comme la mécanique des fluides et on a cité aussi que cette dernière est basée sur trois équation fondamentales équation de continuité équations de Navier stocks et équations d'énergie ensuite on a défini les transferts de chaleur et son utilisation dans nombreux domaines tel que les échangeurs, la climatisation, le refroidissement, etc...

La convection se fait lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensives telles que la température, la concentration ou la tension superficielle.

elle se fait de trois manière : convection forcée , convection mixte et convection naturelle et dans ce mémoire on s'intéresse a cette dernière ,en particulier la convection de Rayleigh Bénard qui est un type de convection qui se produit dans une couche horizontale plane de fluide chauffée par dessous, dans laquelle le fluide développe un motif régulier de cellules de convection appelé cellules de Bénard .

Les équations de Navier stockes définissent le comportement de ces fluides et fait apparaitre les nombres adimensionnés tel que Nombre de Raleigh, Nombre de Grashof, nombre de Reynolds, nombre de Prandtl etc.... , et pour simplifier ces équations on utilise l'approximation de Boussinesq.

# Chapitre II : Instabilités de Rayleigh Bénard entre deux plaques parallèles en présence d'un gradient de température constant

## Position du problème :

La cavité aux parois horizontales différentiellement chauffées ou problème de Rayleigh-Bénard dans le cas où la paroi du bas est maintenue à une température plus chaude que celle du haut, fait également partie des phénomènes classiques observés en convection naturelle. Le système se présente alors sous la forme de deux plaques horizontales de longueur infinie et séparées d'une distance  $H$ . [12]

## II.1-Introduction :

La convection de Rayleigh Bénard est un type d'écoulement qui ne dépend que des différences de densité dues au gradient de température. La convection de Rayleigh-Bénard se produit dans un volume de fluide chauffé par le dessous. On s'intéresse dans ce problème au cas d'un fluide est maintenu entre deux plaques parallèles. La plaque inférieure est maintenue à une température chaude. Le fluide près de la plaque inférieure aura une température plus élevée et donc une densité inférieure à celle du reste du fluide. La gravité rendra le fluide plus froid est plus lourd au niveau de la plaque supérieure, Mais la force visqueuse dans le fluide s'y oppose. C'est l'équilibre entre ces deux forces qui détermine si une convection se produira ou non. Si le gradient de température et donc le gradient de densité est suffisamment grand pour que les forces gravitationnelles vont dominer et l'instabilité va se produire. C'est la limite de l'instabilité et l'écoulement qui se produit sera examiné dans cette étude par des méthodes analytiques et numériques.

## II.2-Equation générales régissant l'évolution d'un fluide incompressible :

### II.2.1 Fluide incompressible :

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe.  $\rho = cst$ . [12]

### II.2.2-Equation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ (II.1)}$$

Avec :

$\mathbf{u}$  : Le vecteur de vitesse.

$\rho$  : Masse volumique.

Pour un fluide incompressible,  $\rho = \text{constante}$  ce qui implique que :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

L'équation (II.1) s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ (II 2)}$$

### II.2.3-Equation de conservation de la quantité du mouvement :

La conservation de la quantité de mouvement désigne, dans un référentiel inertiel, l'absence de variation de la quantité de mouvement du centre d'inertie d'un système dans certaines situations physiques : on parle alors d'un système isolé. Exemple : dans un référentiel inertiel, et en l'absence de frottement, un système de corps soumis à aucune force extérieure mais entrant en collision les uns avec les autres.

Et pour obtenir l'équation de Navier stocks on utilise la deuxième loi de Newton :

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{ma} \quad (\text{II.3})$$

Et dans notre cas on obtient la l'équation des moments suivante :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t_j} \quad (\text{II.4})$$

avec

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{u} \text{grad.} u$$

$\tau_{ij}$ : Tenseur des contraintes :

- Contraintes visqueuses :  $\mu \Delta U$

- Contraintes normales de pression :  $-\nabla P$

- Pour un fluide incompressible

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P_i + \rho g + \mu \nabla^2 u \quad (\text{II.5})$$

**Avec** P : pression

$\mu$  : viscosité dynamique

#### II.2.4-Equation de conservation de l'énergie :

La conservation de l'énergie est un principe physique, selon lequel l'énergie totale d'un système isolé est invariante au cours du temps, et l'équation régissant la conservation de l'énergie est :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot q - \rho \nabla u + \varphi \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$\varphi$  : Taux de dissipation par viscosité

$e$  : D'énergie thermique

$q$  : Flux thermique

Pour un fluide incompressible :  $\varphi = 2\mu e_{ij} e_{ij}$

$\varepsilon_{ij}$ : Tenseur des déformations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

Les équations (II.2) (II.5) et (II.6) décrivent le comportement d'un écoulement ainsi que ses propriétés.

**II.3 Approximation de Boussinesq :**

L'approximation de Boussinesq a été proposée par Joseph Valentin Boussinesq (un physicien français 1842-1929) elle est utilisée dans le domaine de l'écoulement dirigé par la flottabilité (également appelé convection naturelle). Il ne tient pas compte des différences de densité ( $\rho = \text{constante}$ ) sauf là où elles apparaissent en termes multipliés par  $g$  l'accélération due à la gravité ; Et cela sera utilisé pour simplifier l'équation de Navier Stokes et ainsi l'équation d'énergie.[12]

**II-4-ETUDE DES PERTURBATIONS :**

**II-4.1-Introduction :**

Pour simplifier les équations on commence par décomposer la densité et la pression en un champ d'équilibre hydrostatique plus une perturbation

**II-4.2-Equation de Navier Stokes :**

On suppose que les variations de la densité dans le fluide sont faibles par rapport aux gradients des vitesses

On a

$$\nabla u = 0 \tag{II.7}$$

La pression et la densité sont décomposées à un champ d'équilibre hydrostatique plus une perturbation

$$P = P_0(y) + P'(x,t) \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x,t)$$

$P_0$  et  $\rho_0$  sont les champs de référence dans le cas hydrostatique  $U=0$

L'équation de Navier Stokes (II.3) donne :

$$\nabla P_0 = \rho_0 g \tag{II.8}$$

En appliquant l'approximation de Boussinesq et en introduisant les perturbations l'équation de Navier Stokes (II.3) devient :

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 U \tag{II.9}$$

Avec  $\nu = \mu / \rho_0$

- Pour des valeurs faibles de  $\frac{\rho'}{\rho_0}$

Donc  $\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{\partial U}{\partial t}$

De l'équation (II.7)

On a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 U \tag{II.10}$$

**II.4.3 Equation d'énergie :**

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla q - p\nabla u + \varphi \quad (\text{II.11})$$

Lorsque l'approximation de Boussinesq est valide, le taux de dissipation par viscosité  $\varphi$  est négligeable dans l'équation d'énergie. L'hypothèse qu'on a utilisé pour de faibles variations de densité n'est pas applicable dans l'équation d'énergie.

En multipliant l'équation de conservation de masse par P on obtient :

on a:

$$-p\nabla U = \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Et

$$\rho = \rho_0(1 + \beta(T-T_0)) \quad (\text{II.12})$$

On considère que les molécules dans le fluide n'interagissent pas entre eux, alors on peut utiliser l'approximation des gaz parfait  $P = \rho RT$  et  $R = c_p - c_v$

Avec :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

L'équation (II.11) s'écrit alors :

$$-p\nabla u \approx \frac{P}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{P}{T} \frac{DT}{Dt} = -\rho(c_p - c_v) \frac{DT}{Dt}$$

- Sachant que pour un gaz parfait :  $e = c_v T$

$$\text{Et } \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot q$$

- En utilisant la loi de fourrier

$$q = -\lambda \nabla T$$

Où

$\lambda$  est la conductivité thermique

L'équation finale de la chaleur devient :

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{II.13})$$

Et on a défini :

$$\text{La diffusivité thermique } \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

## II.5-Formulation du problème :

### II.5.-introduction :

On considère deux plaques parallèles infinies séparées d'une distance  $h$  (figure 7),

Les plaque de bas et de haut on des températures respectivement  $T_0$  et  $T_1$  avec  $T_0 > T_1$

Entre les deux plaques on a un fluide avec une densité  $\rho$ , viscosité cinématique  $\nu$

Diffusivité thermique  $\alpha$  et  $\beta$  le coefficient de dilatation avec  $\Omega$  le domaine de situation de fluide  $\Omega : 0 < y < h, -\infty < x, z < \infty$ .

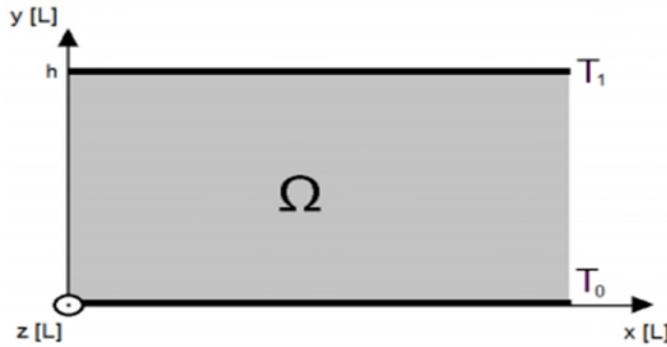


Figure 7 : Domine du problème [12]

### II.5.2-équation du problème :

Les équations qui gouvernent le problème sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{II.16})$$

Avec l'approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{II.17})$$

### II.5.3 Conditions aux limites :

Dans les conditions aux limites on considère que la température est constante sur la plaque inférieure et supérieure avec des conditions aux limites rigides.

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x,t)|_{y=0} = T_0 \quad -\infty < x \leq +\infty \quad t > 0 \quad T_0 > T_1 \\ T(x,t)|_{y=h} = T_1 \quad -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ U(x,t)|_{y=0} = U(x,t)|_{y=h} = 0 \quad -\infty < x \leq +\infty \quad t > 0 \end{array} \right.$$

On a comme condition initiale le fluide est au repos et la température est distribuée linéairement

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } t=0 \\ T(y,t)|_{t=0} = T_0 + \frac{y}{h} (T_1 - T_0) \\ U(x,t)|_{t=0} = 0 \end{array} \right\}$$

## II.6-EQUATIONS ADIMENSIONNELLES :

### II.6.1-Introduction :

Pour étudier le problème et trouver les nombres caractéristique (Pr, Ri...) ,on doit aussi introduire les nombre adimensionné , cette technique est utilisée car en mécanique des fluide on a des équation complexe (dérivée partielle, non-linéarité ...).

### II.6.2-Variabiles et Equations adimensionnelles :

On introduit les variables adimensionnées suivantes :

Ou

$$\tilde{p} = \frac{P}{U^2 \rho_0 \bar{k}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{T} = \frac{T-T_0}{T_0-T_n}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = t \frac{U}{h}$$

Si on pose

$$U_\alpha = \frac{\alpha}{h}$$

Les équations (II.14) et (II.15) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \frac{D\tilde{U}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}^2 \tilde{P} + Ra \tilde{T} + \tilde{\nabla}^2 U \\ \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Avec : } Ra = \frac{\beta \Delta T g h^3}{\alpha \nu}$$

On applique la même méthode pour les conditions aux limites et on obtient les conditions initiales adimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=0} = 0 \\ \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=1} = 1 \\ \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=0} = \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{y}=1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

## II.7-Analyse de la stabilité bidimensionnelle :

### II.7.1- Analyse de la stabilité linéaire méthode des modes normaux :

L'idée est d'introduire une perturbation infinitésimale aux équations de base et d'examiner comment l'amplitude croit ou décroît avec le temps. Sachant que la perturbation est faible, les équations peuvent être linéarisées pour faciliter l'analyse l'esprit de la méthode....

Dans la méthode des modes normales, la perturbation est supposée sinusoidale. la perturbation est donnée sous la forme  $f = \tilde{f}(y)e^{ikx+\sigma t}$

F est une perturbation arbitraire avec une amplitude complexe  $\tilde{f}$ , le nombre d'onde k dans la direction x est un taux de croissance, l'évolution dans le temps de la solution dépendra seulement du signe de la partie réelle de  $\sigma$  noté  $\sigma_r$ .

-si  $\sigma_r > 0$  la solution croit dans le temps, Solution instable

-  $\sigma_r < 0$  la solution décroît et la solution stable

-  $\sigma_r = 0$  stabilité marginale

La linéarité des équations permet d'exprimer toutes les perturbations possibles comme une superposition de ces perturbations.[12]

### II.7.2-Elimination de la pression dans les équations :

Nous n'avons pas d'information sur la distribution de la pression dans le fluide. On élimine alors le gradient de la pression dans l'équation (II.18)

Utilisant l'identité vectorielle :

$$U \cdot \nabla U = \nabla \left( \frac{U \cdot U}{2} \right) + \omega \times U,$$

Où

$$\omega = \nabla \times U: \text{vecteur vorticité}$$

L' quation (II.18) est r ecrite sous la forme :

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \left( \frac{U \cdot U}{2} \right) + \omega \times U \right] = -\nabla p + Ra T_{ey} + \nabla^2 U \quad (\text{II.20})$$

En prenant le rotationnel et sachant que  $\nabla \times (\nabla U) = 0$ , on obtient :

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times U) + \nabla \times (\omega \times U) \right] = \nabla \times Ra T_{ey} + \nabla^2 (\nabla \times U) \quad (\text{II.21})$$

Sachant que :

$$\nabla \times (\omega \times U) = U \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla U \text{ et } \omega = \nabla \times U$$

D'où

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\omega) + \nabla \times \omega - \omega \times U \right] = \nabla \times Ra T_{ey} + \nabla^2 \omega \quad (\text{II.22})$$

Dans le cas bidimensionnel, on a :

$$T = T(x, y, t) \text{ et } U = U_x(x, y, t)e_x + u_y(x, y, t)e_y$$

D'où

$$\omega = \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) e_z = \omega e_z$$

Sachant que :

$$\omega \cdot \nabla U = 0 \text{ et } \nabla X T e_y = \frac{\partial T}{\partial x} e_z$$

On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \nabla \omega \right] = Ra \frac{\partial T}{\partial x} + \nabla^2 \omega \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U \nabla T = \nabla^2 T \end{array} \right. \quad (\text{II.23})$$

### II.7.3 -Linéarisation :

On considère une distribution infinitésimale  $U'$ ,  $T'$  et  $\omega'$  à partir de l'état d'équilibre :

$$\tilde{U} = 0, \tilde{T} = \tilde{T}(y) \text{ Et } \tilde{\omega} = 0.$$

Le champ de température à l'équilibre  $\tilde{T}(y)$  est obtenu de (II.23) avec  $u=0$  et  $\omega = 0$ , ce qui donne :

$$\nabla^2 \tilde{T}(y) = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Sachant que  $T(0)=T_0 f(x)$ ,  $T(1) = T_0 g(x)$  , on aura :

$$\tilde{T}(y) = y \quad (\text{II.25})$$

En posant  $T = \tilde{T}(y) + T'$  ,  $u=u'$  et  $\omega = \omega'$  dans (II.22) et en faisant la linéarisation, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, les équations de perturbation sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \omega'}{\partial t} = Ra \frac{\partial T'}{\partial x} + \nabla^2 \omega' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + u \nabla T = \nabla^2 T' \end{array} \right. \quad (\text{II.26})$$

### II.7.4 : Fonction du courant

Nous avons trois inconnues ( $\omega'$ ,  $U'$  et  $T'$ ) pour trois équations (II.26).

L'équation de continuité  $\nabla u' = 0$  permet de réduire le nombre d'inconnues en introduisant la fonction du courant  $\Psi'$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U'_x = \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \\ U'_y = - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

Qui remplace dans l'équation de continuité

La vorticité s'écrit alors :  $w = -\nabla^2 \Psi$

Le système d'équations (II.25) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi' = -Ra \frac{\partial T'}{\partial x} + \nabla^2 (\nabla^2 \Psi') \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \nabla^2 T' \end{array} \right. \quad (\text{II.28})$$

Les Conditions aux limites sont transformées sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(0) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y}(1) = 0 \\ T'(0) = T'(1) = 0 \end{array} \right.$$

### II.7.5 : Problèmes aux valeurs propres

Les  quations (II.28) sont linéaires et les coefficients sont indépendants de x et t. On pose  $T'$  et  $\Psi'$  sous la forme :

$$\Psi' = \tilde{\Psi}(y) e^{ikx + \sigma t}$$

$$T' = \tilde{T}(y) e^{ikx + \sigma t}$$

$\tilde{\Psi}$  et  $\tilde{T}$  sont les amplitudes complexes de  $\Psi'$  et  $T'$ .

Le système d'équations (II.28) est r ecrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \sigma \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{\Psi} = -Ra ik \tilde{T} + \left[ \frac{d^2}{dy^2} - K^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \\ \sigma \tilde{T} - ik \tilde{\Psi} = \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{T} \end{array} \right. \quad (\text{II.29})$$

O   $\sigma$  et  $k$  sont réels.

On considère le cas limite  $\sigma = 0$ . Ce cas correspond aux équations :

$$\begin{cases} 0 = -Ra i k \tilde{T} + \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \\ -ik \tilde{\Psi} = \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{T} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

On extrait la fonction  $\tilde{T}$  de la première équation de (II.28) et on la remplace dans la deuxième

$$-ik \tilde{\Psi} = \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \frac{1}{Ra i k} \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi} \quad (\text{II.31})$$

Donc

$$k^2 \tilde{\Psi} = \frac{1}{Ra} \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^3 \Psi \quad (\text{II.32})$$

:

C'est un problème aux valeurs propres dont la fonction propre est  $\tilde{\Psi}$ .

Les valeurs propres pour un  $k$  donné dépendent de nombre de Rayleigh  $Ra$ .

Pour avoir la solution, les conditions aux limites sont transformées tel que :

$$T'(0) = T'(1) = 0 \tilde{T}(0) = \tilde{T}(1) = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{d\Psi}{dy}(0) = \frac{d\Psi}{dy}(1) = 0 \frac{d\tilde{\Psi}}{dy}(0) = \frac{d\tilde{\Psi}}{dy}(1) = 0 \quad (\text{II.34})$$

Les deux dernières conditions aux limites sont trouvées en considérant le système d'équation (II.30) et en utilisant l'équation (II.33), ce qui donne :

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \Psi(0) = \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right] \Psi(1) = 0 \quad (\text{II.35})$$

### II.7.6 : Solution du problème aux valeurs propres :

L'équation (II.32) est une EDO linéaire et homogène avec des coefficients constants.

On pose :

$$\tilde{\Psi}(y) = e^{qy} \text{ Avec : } q = \text{constante}$$

L'équation (32) s'écrit alors :

$$k^2 + \frac{1}{Ra} [q^2 - k^2]^3 = 0 \quad (\text{II.36})$$

Qui admet six (6) racines :

$$\left\{ \begin{array}{l} iq_0 = \pm ik(-1 + (\frac{Ra}{k^4})^{1/3})^{1/2} \\ q_1 = \pm k(1 + (\frac{Ra}{k^4})^{1/3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))^{1/2} \\ q_2 = \pm k(1 + (\frac{Ra}{k^4})^{1/3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))^{1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.37})$$

La solution est de la forme :

$$\tilde{\Psi}(y) = Ae^{yq_0} + Be^{-yq_0} + Ce^{yq_1} + De^{-yq_1} + Ee^{yq_2} + Fe^{-yq_2} \quad (\text{II.38})$$

Ou A B C D E et F sont des constantes

Les conditions aux limites (II.33) (II.34) impliquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}(0) = A + B + C + D + E + F = 0 \\ \tilde{\Psi}(1) = Ae^{q_0} + Be^{-q_0} + Ce^{q_1} + De^{-q_1} + Ee^{q_2} + Fe^{-q_2} = 0 \\ \tilde{\Psi}'(0) = Aq_0 - Bq_0 + Cq_1 - Dq_1 + Eq_2 - Fq_2 = 0 \\ \tilde{\Psi}'(1) = Aq_0e^{q_0} - Bq_0e^{-q_0} + Cq_1e^{q_1} - Dq_1e^{-q_1} + Eq_2e^{q_2} - Fq_2e^{-q_2} = 0 \\ \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi}(0) = (q_0^2 - k^2)^2 A - (q_0^2 - k^2)^2 B - (q_1^2 - k^2)^2 C - (q_1^2 - k^2)^2 D - (q_2^2 - k^2)^2 E - (q_2^2 - k^2)^2 F = 0 \\ (q_0^2 - k^2)^2 \left[ \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right]^2 \tilde{\Psi}(1) \\ = (q_0^2 - k^2)^2 Ae^{-q_0} - (q_0^2 - k^2)^2 Be^{-q_0} - (q_1^2 - k^2)^2 Ce^{-q_1} \\ - (q_1^2 - k^2)^2 De^{-q_1} - (q_2^2 - k^2)^2 Ee^{-q_2} - (q_2^2 - k^2)^2 Fe^{-q_2} = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions non triviales de ces systèmes d'équation, le système s'écrit sous la forme matricielle

$Mb=0$

Où :

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & e^{q_0} & q_0 & q_0 e^{q_0} & (q_0^2 - k^2)^2 & (q_0^2 - k^2)^2 e^{q_0} \\ 1 & e^{-q_0} & -q_0 & -q_0 e^{-q_0} & (q_0^2 - k^2)^2 & (q_0^2 - k^2)^2 e^{-q_0} \\ 1 & e^{q_1} & q_1 & q_1 e^{q_1} & (q_1^2 - k^2)^2 & (q_1^2 - k^2)^2 e^{q_1} \\ 1 & e^{-q_1} & -q_1 & -q_1 e^{-q_1} & (q_1^2 - k^2)^2 & (q_1^2 - k^2)^2 e^{-q_1} \\ 1 & e^{q_2} & q_2 & q_2 e^{q_2} & (q_2^2 - k^2)^2 & (q_2^2 - k^2)^2 e^{q_2} \\ 1 & e^{-q_2} & -q_2 & -q_2 e^{-q_2} & (q_2^2 - k^2)^2 & (q_2^2 - k^2)^2 e^{-q_2} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix}$$

On cherche  $\det(M)=0$  pour une somme de valeurs de  $k$

Lorsque  $k$  est fixe  $M$  dépend uniquement de  $Ra$

$$\text{Det}(M(Ra))|_{k=0}$$

### II.8 Conclusion :

Dans ce chapitre on a déterminé les équations gouvernant l'écoulement d'un fluide équation de conservation de masse, équation de Navier-Stokes, équation d'énergie et on les a simplifiées en introduisant les hypothèses suivantes : fluide incompressible, régime permanent, approximation de Boussinesq et puis on a perturbé l'état de base et on a réécrit les équations aux perturbations après on a adimensionné les variables ( $U, T, P, x,$ ) et on a posé que le système est bidimensionnel après on a éliminé la pression afin que le problème soit linéaire puis on cherche des solutions du problème sous forme de modes normaux.

# Chapitre III :

## Résultat numérique et discussion

### III.1-Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons développé les équations qui régissent les instabilités de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles en présence d'un gradient de température constant. Après élimination de la variable pression, nous avons introduit la fonction vorticité et la fonction du courant. Le système d'équations final est constitué de deux équations différentielles ordinaires dont la température et la fonction du courant sont couplées. Ce système d'équations complété avec les conditions aux limites s'écrit sous forme d'un système algébrique linéaire homogène. L'application des méthodes mathématiques destinées aux calculs des valeurs et vecteurs propres, nous ont permis d'avoir les courbes de stabilité marginale.

Les valeurs propres de nos systèmes sont fonction du nombre d'onde  $k$  et du nombre de Rayleigh  $Ra$ . Ce dernier est relié au gradient de température entre les deux plaques ainsi qu'à la distance qui sépare ces dernières.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les résultats obtenus numériquement.

### III.2-Analyse des Résultats :

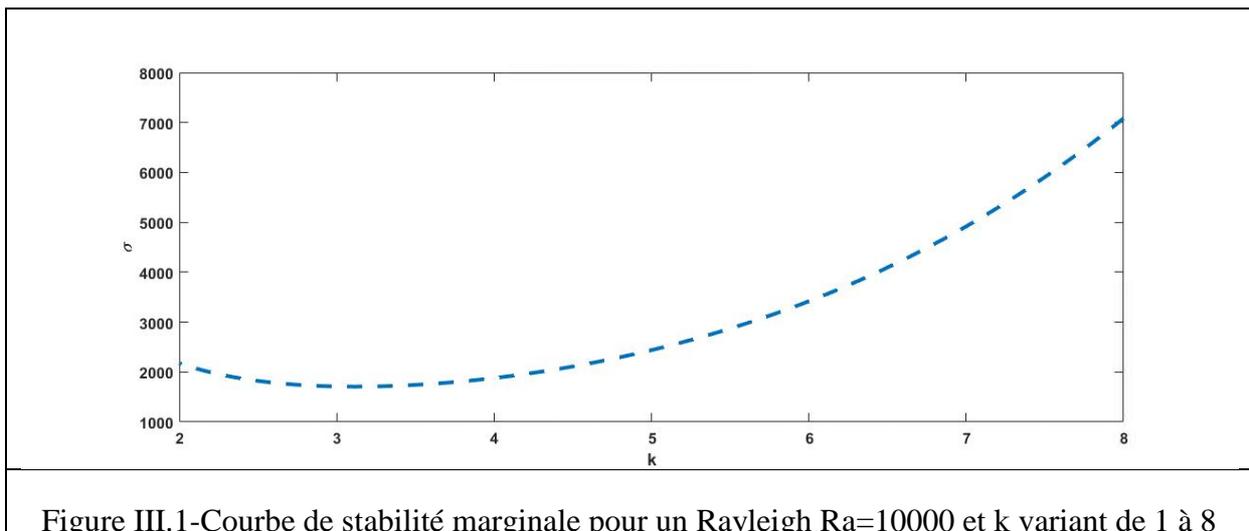


Figure III.1-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh  $Ra=10000$  et  $k$  variant de 1 à 8

Dans la figure III.1 on remarque la valeur minimale de  $\sigma$  dans la limite de stabilité est  $\sigma=17020$  et  $k$  variant de 1 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tous les  $K$  avec  $\sigma < 17020$

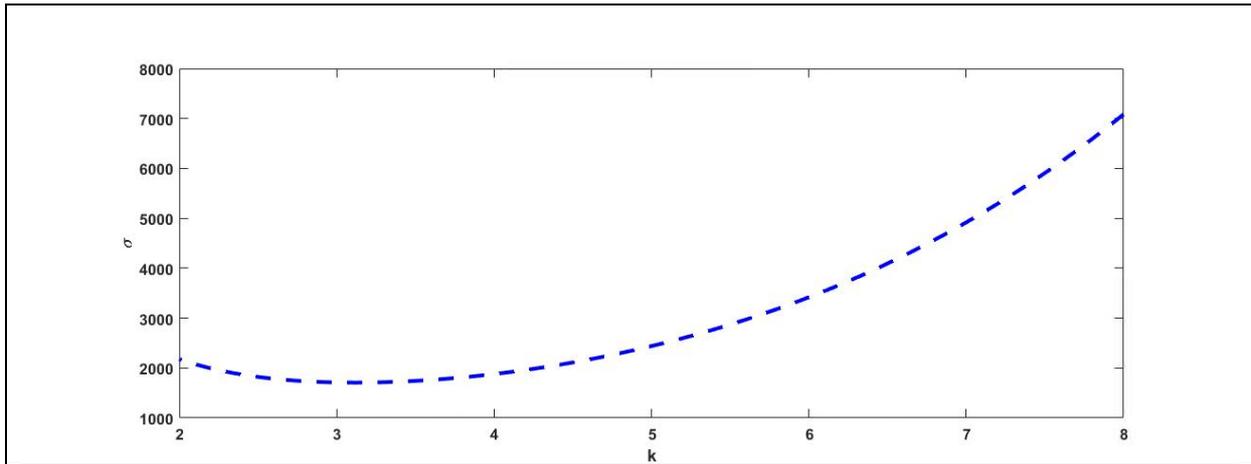


Figure III.2-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh  $Ra=15000$  et  $k$  variant de 1 à 8

Dans la figure III.2 on remarque que la zone de stabilité reste quasi constante, la valeur minimale de  $\sigma$  dans la limite de stabilité est  $\sigma = 17020$  et  $k$  de 1 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tous les  $K$  avec  $\sigma < 17020$

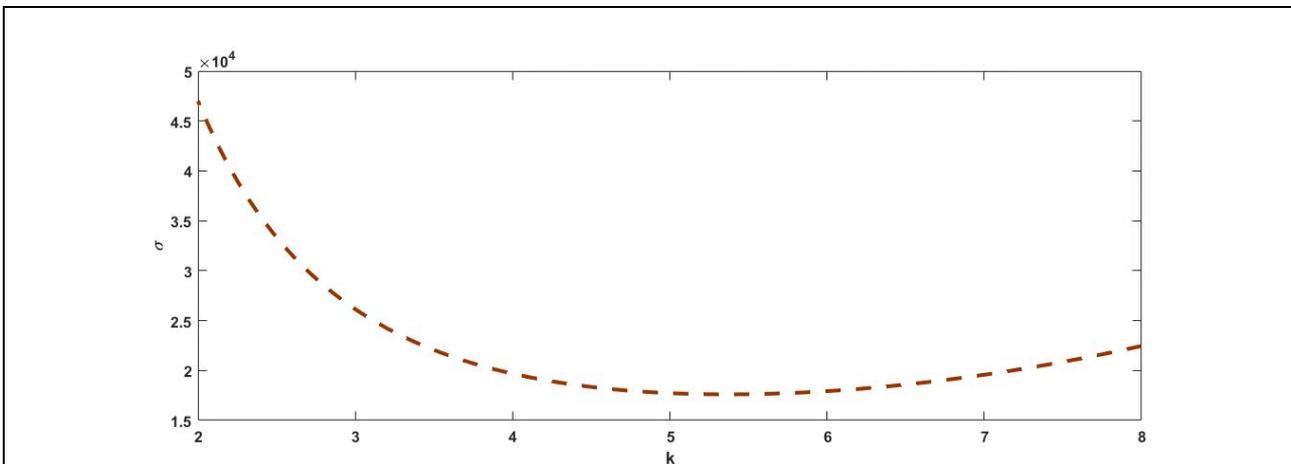


Figure III.3-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh  $Ra=20000$  et  $k$  variant de 1 à 8

Dans la figure III.3 on remarque la valeur minimale de  $\sigma$  dans la limite de stabilité est  $\sigma = 20000$  et  $k$  variant de 1 à 8. Dans ce cas la zone de stabilité se réduit.

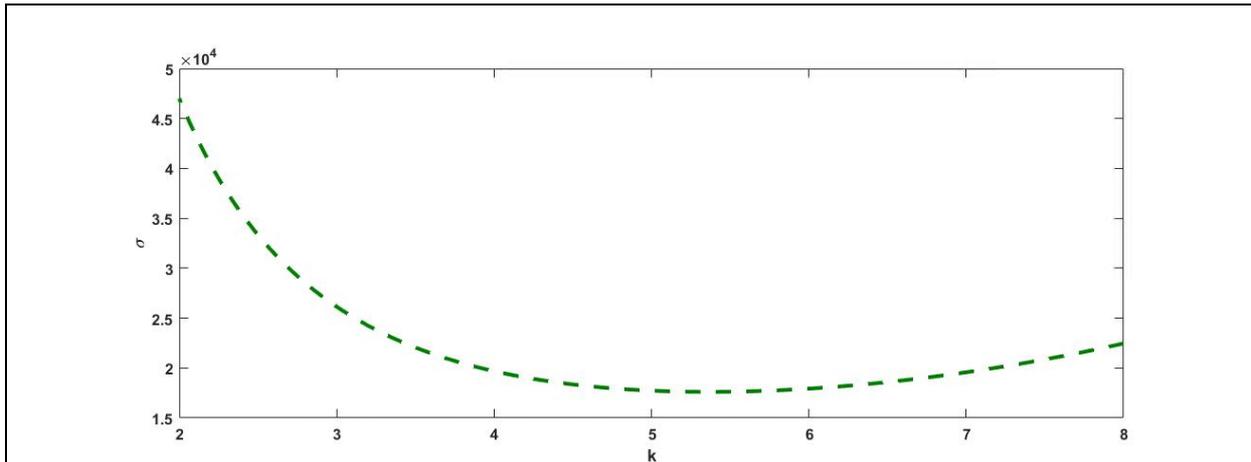


Figure III.4-Courbe de stabilité marginale pour un Rayleigh  $Ra=25000$  et  $k$  variant de 1 à 8

Dans la figure III.4 les zones de stabilité restent similaires à celles trouvées dans le cas de  $\sigma = 20000$

**Conclusion :**

Le comportement d'un fluide en générale dans le concept de Rayleigh Bénard est seulement gouverné par le nombre adimensionnel Rayleigh. Dans le cas de deux plaques plane différenciellement chauffée (gradient de température verticale), l'instabilité est indépendante des conditions aux limites imposées au champ de base (vitesse-température). Dans notre étude, le fait d'imposer des conditions aux limites dépendante de la variable transversale n'influent pas sur les instabilités développées. Ces instabilités dépendent essentiellement du nombre de Rayleigh. Ce dernier est lié à la différence de températures imposées aux frontières inférieure et supérieure. La zone stable se réduit lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh pour des nombres d'ondes élevés. Ceci implique une croissance d'instabilité pour des grands nombres d'ondes, ce qui est vérifié expérimentalement.

## Conclusion générale :

Dans ce travail, on s'est intéressé à la convection naturelle et en particulier la convection de Rayleigh Bénard. Et pour étudier cette dernière d'une façon numérique il existe des équations qui gouvernent l'écoulement, l'équation de continuité l'équation de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Ces équations seront simplifiées en utilisant certaines hypothèses (régime permanent, fluide incompressible et approximation de Boussinesq)

Une fois que l'état de base est défini, une perturbation doit être rajoutée afin de réécrire un nouveau système d'équations aux perturbations, puis linéariser le système en éliminant la pression et le produit de deux perturbations, introduire la fonction de vorticité et fonction du courant, enfin chercher les solutions sous forme de mode normaux.

On a un système algébrique, linéaire et homogène, afin de calculer les valeurs et les vecteurs propres on utilise des méthodes numériques afin d'avoir les courbes de stabilité marginale.

Et à la fin on a conclu que l'écoulement dépend du nombre de Rayleigh.

## Liste des graphes

<b>page</b>	<b>graphe</b>
<b>23</b>	Dans la figure III.1 on remarque la valeur minimale de Rayleigh dans la limite de stabilité est $Ra=17020$ et $k$ variant de 2 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tout les $K$ avec $Ra < 17020$
<b>23</b>	Dans la figure III.2 on remarque la valeur minimale de Rayleigh dans la limite de stabilité est $Ra=17020$ et $k$ de 1 à 8 variant de 2 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tout les $K$ avec $Ra < 17020$
<b>24</b>	Dans la figure III.3 on remarque la valeur minimale de Rayleigh dans la limite de stabilité est $Ra=20000$ et $k$ de 1 à 8 variant de 2 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tout les $K$ avec $Ra < 20000$
<b>24</b>	Dans la figure III.4 on remarque la valeur minimale de Rayleigh dans la limite de stabilité est $Ra= 17020$ et $k$ de 2 à 8 variant de 1 à 8. Cela veut dire qu'on aura un écoulement stable pour tout les $K$ avec $Ra < 17020$

### Références Bibliographiques :

- [1] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique\\_des\\_fluides](https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_des_fluides)
- [12]- :<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:571135/FULLTEXT01.pdf>
- [2]-Transfer thermique 1
- [3] Abdelali 2012
- [4] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_prandtl](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_prandtl)
- [5] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Grashof](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Grashof)
- [6] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Rayleigh](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Rayleigh)
- [7] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Nusselt](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Nusselt)
- [8] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Peclet](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Peclet)
- [9] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Schmidt](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Schmidt)
- [10] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Richardson](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Richardson)
- [11] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_de\\_Reynolds](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Reynolds)
- [12]- :<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:571135/FULLTEXT01.pdf>
- [13] <http://processs.free.fr/Pages/VersionMobile.php?page=3001>
- [14]- <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00240502/document> en 1 jan 1901
- [15]-le magazine philosophique et le journal des sciences de Londres, Edimbourg et Dublin sixième série 1916

# *Résumé*

Ce mémoire considère la convection de Rayleigh Bénard , c'est-à-dire l'écoulement entre deux large plaques parallèles où la plaque en dessous est chauffée. La variation de la densité due aux variations de la température donne naissance à un écoulement généré par la flottabilité. Ce mouvement est opposé par les forces visqueuses dans le fluide. L'équilibre entre ces forces détermine la nature de l'écoulement stable ou instable et le but de ce mémoire est de trouver une condition donnant cette limite ainsi qu'analyser d'autres aspect de l'écoulement.

L'analyse commence par les équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible et l'équation d'énergie dont l'approximation de Boussinesque est appliquée. En utilisant la linéarisation on obtient une condition de stabilité et uniquement avec un paramètre adimensionnel , appelé nombre de Rayleigh, pour un nombre d'onde  $k$ . ce résultat est confirmé pour être précis après une comparaison avec une simulation numérique .plus loin non linéaire bidimensionnel simulation est aussi performé pour analyser différente aspect de l'écoulement pour de différente valeur de nombre de Rayleigh .

# *Abstract*

This report considers Rayleigh-Bénard convection, i.e. the flow between two large parallel plates where the lower one is heated. The change in density due to temperature variations gives rise to a flow generated by buoyancy. This motion is opposed by the viscous forces in the fluid. The balance between these forces determines whether the flow is stable or not and the goal of this report is to find a condition giving this limit as well as analyzing other aspects of the flow. The starting point of the analysis is the incompressible Navier Stokes equations and the thermal energy equation upon which the Boussinesq approximation is applied. Using linear stability analysis a condition for the stability is obtained depending solely on a nondimensional parameter, called the Rayleigh number, for a given wavenumber  $k$ . This result is confirmed to be accurate after comparison with numerical simulations using a spectral technique. Further non-linear two- and three-dimensional simulations are also performed to analyze different aspects of the flow for various values of the Rayleigh number.