

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

KALI Faical

IFFOUZAR Athman

Thème

Contrôle d'écoulement de film liquide non newtonien sur un plan incliné

Soutenu le2020 devant le jury composé de:

Mr.	NAITBOUDA Faical	Président
Mr.	DJEMA Amar	Rapporteur
Mr.	ALLOUCHE Moussa	Examineur
Mr.	MOUHAMADI Tarek	Examineur

Année Universitaire **2019-2020**

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.

En second lieu, Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur Mr. DJEMA, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour avoir accepté de présider et d'examiner ce travail.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Le fruit de mon parcours d'étude ; ce modeste travail et dédié tout d'abord aux deux personnes qui m'ont fait venir dans ce monde et qui ont fait tout pour me procurer soutien, inspiration et motivation, c'est deux personnes qui m'ont jamais manqué d'amour ; mes parents à qui je suis plus que redevable, mon chère père et mère, à qui par ces mots simples, qui ne pourront jamais suffire, j'exprime respect et gratitude pour tout ce que j'ai accompli et ce que j'aspire accomplir à l'avenir.

A mes très chères frères et sœurs, qui m'ont fait apprécier la vie et comblé d'amour, à mon neveu Wassim qui nous a illuminé la maison dès sa naissance.

A mon très cher ami, frère et binôme, Athman, qui m'a accompagné tout long de l'élaboration de ce travail.

*A tous mes très chers amis ;
Fouad, Samou, Madin, Tarek, Djafer, Bylka, Saysen, Mouh, Dabi,
A.Elhak, Ghilas, Saado, Djimy, Kenzo, Behman, Amar, Fedo, Ahmed,
Elyes, Khaled, Syfax, Massi...*

FANAL.

Dédicaces

Je dédie cet événement marquant de ma vie à la mémoire de mon grand père bien aimé, j'espère que du monde qui est sein maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'un petit fils qui a toujours prié pour le salut de son âme, puisse Dieu le tout puissant, lai en sa sainte miséricorde !

A mes très chers parents, quoi que je fasse ou je dise, je ne saurai point vous remercier comme il se doit, votre affection et bienveillance me couvrent, me guident et votre présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

Mon cher ami est binôme KALI Faiçal , ce fut un énorme plaisir d'avoir fait ce bout de chemin ensemble malgré les moments durs tu as toujours été là, ton courage et ta volonté ont été remarquables je nous souhaite beaucoup de succès et de réussite dans la vie professionnelle

Mon ange gardien, toi que j'attendais depuis toujours et voila je t'ai enfin trouvé. Mon âme sœur, je tiens à te remercier d'avoir été là à tout instant, celle qui m'accompagnera à tout jamais dans les méandres de l'amour. Tu resteras à mes côtés quoi qu'il arrive, quoi qu'il advienne dans ma vie. Nesrine tu fais de moi l'homme le plus heureux.

ATHMAN .

Sommaire

Sommaire

Remerciements

Dédicaces

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles

Introduction générale..... 1

Etude Bibliographiques..... 3

Chapitre I : Formulation du problème

Introduction 6

I.1. Position du problème 11

I.1.1. Géométrie du problème..... 11

I.2. Équations de quantité de mouvement 12

I.2.1. L'équation conservation de la quantité du mouvement 14

I.2.2. Conditions aux limites 14

I.3. Écoulement de base (La solution stationnaire) 17

I.3.1. Solution de l'écoulement de base..... 18

I.4. Echelles caractéristiques et équations adimensionnées 19

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

Introduction 23

II.1. Équation de Navier- stokes à l'ordre un 23

II.1.1. Introduction des débits locaux 23

II.1.2. Elimination de la pression 24

II.2. Méthode des résidus pondérés 25

II.3. Construction d'un Modèle d'ordre un	25
II.4. Equation de Benney	28
Conclusion	29

Chapitre III : Analyse de stabilité linéaire

Introduction	30
III.1. Choix de control	30
III.2. Linéarisation des équations et Modes normaux	31
III.3. Courbes de stabilité neutre	33
Conclusion	45
Conclusion générale	46

Références bibliographiques

Résumé

Liste des figures

Liste des figures

<i>Figure 1</i> : Profils d'ondes obtenus par Kapitza et Kapitza en 1949 (interface eau-alcool)	4
<i>Figure 2</i> : train d'onde(Bennie 1957).....	5
<i>Figure 3</i> : Exemple de photographie d'ondes bidimensionnelles obtenue pour une solution d'eau-glycérine (82%) par Tailby et Portalski 1960	6
<i>Figure 4</i> : Traces d'ondes pour $R = 75$ pour les différentes épaisseurs du film liquide en fonction du temps. Stainthorp et Allen (1965).....	8
<i>Figure 5</i> : Vitesses d'ondes en fonction de la distance par rapport au distributeur pour l'eau. Stainthorp et Allen 1965	8
<i>Figure 6</i> : Variation de l'épaisseur du film le long de la conduite d'étude pour une solution d'eau-glycérine à $R = 37$. Portalski et Clegg (1972).....	10
<i>Figure I.1</i> Écoulement d'un film sur un plan incliné en présence d'actionneurs	11
<i>Figure I.2</i> l'influence de l'indice n sur la vitesse de profile de base	18
<i>Figure III.1</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).....	34
<i>Figure III.2</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 0.8$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu)	35
<i>Figure III.3</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1.47$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).....	36
<i>Figure III.4</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R)pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noir), $We = 5$ (courbe verte) , $We = 10$ (courbe bleu).....	37
<i>Figure III.5</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 0.8$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noir), $We = 5$ (courbe verte) , $We = 10$ (courbe bleu).....	38
<i>Figure III.6</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1.47$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noir), $We = 5$ (courbe verte) , $We = 10$ (courbe bleu).....	39
<i>Figure III.7</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 45^\circ$, $n = 1$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte) , $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu)....	40
<i>Figure III.8</i> : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = \cot 45^\circ$, $n = 0.8$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte) , $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu)	41

Liste des figures

Figure III.9 : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{0.6\}, Re = \{0.2..11\}, \beta = 45^\circ, n = 1.47, We = 1, \gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu) 42

Figure III.10 : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{0.6\}, Re\{0.2..11\}, \beta = 90^\circ, \gamma_0 = 0.1, We = 1, n = 0.8$ (courbe noir), $n = 1$ (courbe verte), $n = 1.47$ (courbe bleu) 43

Figure III.11 : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{0.6\}, Re\{0.2..11\}, \beta = 90^\circ, \gamma_0 = 0.4, We = 1, n = 0.8$ (courbe noir), $n = 1$ (courbe verte), $n = 1.47$ (courbe bleu). 44

Figure III.12 : diagramme de stabilité marginale dans le plan(α, R) pour $\alpha = \{2.6\}, Re = \{0.2..11\}, \beta = 90^\circ, n = 1, We = 1, \gamma_0 = 0$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.1$ (courbe rouge), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe vert), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu) 45

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Tableau 1.1. Récapitulation des résultats expérimentaux et comparaison avec la théorie (Binnie 1957)	5
Tableau II.1. Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance.. ..	13

Liste des symboles

Liste des symboles

NOTATIONS	SIGNIFICATION
\mathbf{D}	Tenseur des déformations
$div, grad$	Opérateurs divergence et gradient
\mathbf{g}	Accélération gravitationnelle
h_0	Epaisseur du film mince
\mathbf{I}_d	Tenseur identité
\tilde{K}	Courbure
L	Longueur d'onde
n	Indice du comportement non newtonien
\mathbf{n}	Vecteur normal
p	Pression
P_a	Pression atmosphérique
q	Débit local
Re	Nombre de Reynolds
\mathbf{t}	Vecteur tangent
u_m	Vitesse moyenne du film mince
$\mathbf{v} = (u, v)$	Vecteur vitesse
We	Nombre de Weber
α	Nombre d'onde
β	angle d'inclinaison
ϵ	Paramètre ondes longues
γ_0	Paramètre de contrôle
$\dot{\gamma}$	Second invariant du tenseur des déformations
ρ	Masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
μ	Viscosité dynamique
ω	Tenseur de contraintes visqueuses
ω_i	Pulsation
	Taux d'amplification

Introduction générale

Introduction générale

Introduction générale

On rencontre fréquemment, dans la nature ou dans de nombreux procédés industriels des films minces liquides s'écoulant sur une paroi inclinée ou verticale. Ces films sont souvent de nature complexe et de situations instables. On observe alors des déformations de la surface liquide.

Le cas qui va nous intéresser dans ce mémoire est celui de films liquides minces comportant une interface liquide/air. Les ondes qui y sont observées ont une échelle de longueur beaucoup plus grande que leur épaisseur. L'instabilité qui naît à faible nombre de Reynolds rend alors possible l'élimination de la plupart des variables internes de l'écoulement puisque celles-ci seront liées à l'évolution de la surface libre.

C'est dans ce cadre que cette étude se place, dans un régime où l'écoulement peut être décrit par un ensemble ou une équation unique aux dérivées partielles en temps et en espace de complexité réduite par rapport aux équations de Navier-Stokes. Dans la littérature scientifique, ils portent le nom de modèle.

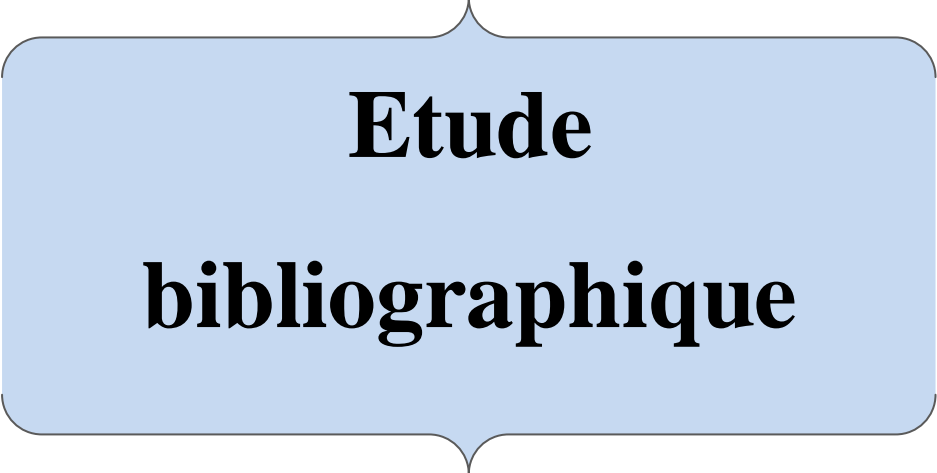
Ce travail se compose en trois parties.

Dans la première partie, nous décrirons l'écoulement d'un film mince d'un liquide non newtonien incompressible s'écoulant sur un plan incliné. Le liquide est injecté ou aspiré de la paroi à travers des actionneurs. Nous écrirons dans ce cadre le système d'équations qui nous permet d'étudier l'écoulement à surface libre. Ce système d'équations établi, il sera mis à l'échelle pour faire apparaître les nombres adimensionnels définissant l'écoulement, et à la formulation de problème et à la résolution de ce système d'équations en utilisant une approche d'ondes longues basée sur un développement asymptotique des inconnues du problème.

La deuxième partie sera consacrée à la construction de modèle à l'ordre Un, d'écoulant des équations Navier-Stokes et cela on utilisant l'approche des résidus pondérés sous l'hypothèse des grandes ondes.

Introduction générale

La dernière partie consiste à une étude de stabilité linéaire de l'interface vis-à-vis de perturbations infinitésimales, afin de tracer les courbes de stabilités marginales, grâce au logiciel Maple.



**Etude
bibliographique**

Etude bibliographique

Avant de présenter notre travail pertinents selon une classification basée sur des principes physiques, en relation avec les propriétés du film et celles du milieu qui l'entoure, il a été jugé utile de rappeler quelques travaux en mettant l'accent sur l'approche expérimentale adoptée.

- **Quelques travaux de référence sur la dynamique d'un film liquide :**

Les travaux pionniers de **Kapitza** et **Kapitza (1949)** concernent les ondes se développant à la surface d'un film liquide s'écoulant sur une plaque inclinée. A ce sujet les auteurs ont réalisé une série de photographies représentant une panoplie de plusieurs types d'ondes (ondes sinusoïdales avec des crêtes arrondies et des auges, des ondes solitaires de gouttes isolées, des trains d'ondes capillaires ...etc (figure 1.1).) qui peuvent être rythmiques ou tout au contraire irrégulières et imprévisibles (Figure 1). Ils ont noté l'existence d'ondes solitaires qui développent des pics secondaires loin de la source. Les auteurs ont défini un nombre portant leur nom, dépendant des propriétés physiques du fluide et non de l'écoulement, qui regroupe l'influence des effets inertielles, de la tension superficielle σ et de la viscosité ν . Le nombre de **Kapitza** γ expriment le rapport entre l'effet de la tension superficielle et celui de l'inertie et est défini comme suit [1] :

$$\gamma = \left(\frac{\sigma^3}{\nu^4 g \rho^3} \right)^{1/3}$$

Où : g est la gravitation et ρ la masse volumique du film liquide.

Dans le montage expérimental, réalisé par **Kapitza** et **Kapitza (1949)**, une excitation externe, en amont sous forme d'un écoulement périodique pulsé, a été imposée afin de compenser à la réduction de la zone de test. La technique d'embryoscopie a permis aux auteurs de capturer les profils du film liquide. Une lampe appropriée permettait d'éclairer le tube de façon tangentielle au film dont l'ombre se projetait sur une plaque de dimensions $18 \times 14 \text{ cm}$ faisant un angle θ avec les rayons incidents. L'ombre du film a été amplifiée N fois tel que « $N = 1/\sin\theta$ » dans le but de faciliter la prise des photos, un stroboscope a été utilisé afin de synchroniser les ondes avec l'éclairage. Les profils d'ondes obtenus pour

Etude bibliographique

l'alcool sont représentés par la figure 1.1.

Le nombre de Reynolds moyen Re fut compris $7.6 < Re < 23$, dans cette gamme les **Kapitza (1949)** ont constaté une apparition d'instabilités interfaciales pour une valeur critique $Re *$ définie comme suit [1],

$$Re * = 0.63 \gamma^{3/11}$$

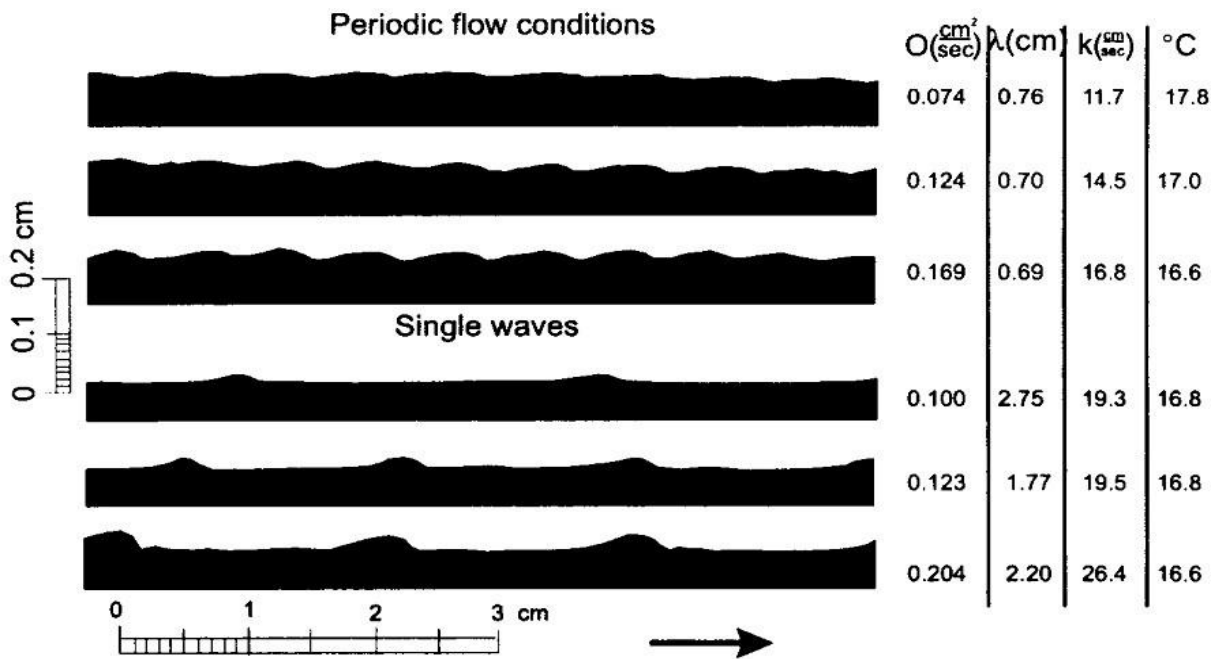


Figure 1.1 : Profils d'ondes obtenus par Kapitza et Kapitza en 1949 (interface eau-alcool).

O : Débit par unité de largeur (cm^2/s).

λ : Longueur d'onde (cm).

k : Vitesse des vague (cm/s).

Les auteurs ont remarqué (après plusieurs séries d'expériences à différentes fréquences et amplitudes en amont tel que : $\lambda = 0.85$ à 1 cm pour l'eau et 0.7 à 0.8 cm pour l'alcool) l'existence de deux principaux régimes ondulatoires stables :

- Régime à ondes périodiques : pour lequel les ondes avaient une forme presque sinusoïdale.
- Régime à ondes solitaires : dans ce cas des ondes éloignées l'une de l'autre prennent place.

Etude bibliographique

En 1957, **Binnie (1957)** a effectué un travail expérimental sur un montage constitué principalement d'un tube verticale en verre de 150 *cm* de longueur et 2.65 *cm* de diamètre pour un nombre de Reynolds variant entre 4 et 5 pour le cas d'instabilité naturelle (sans excitation externe) principalement dans le but de déterminer sa plus petite valeur Re^* à partir de laquelle l'instabilité apparaît. Ce travail a conduit vers un « $R^* = 4.4$ ». La figure 1.2 est une photographie d'un train d'ondes obtenues par **Binnie (1957)** [1].

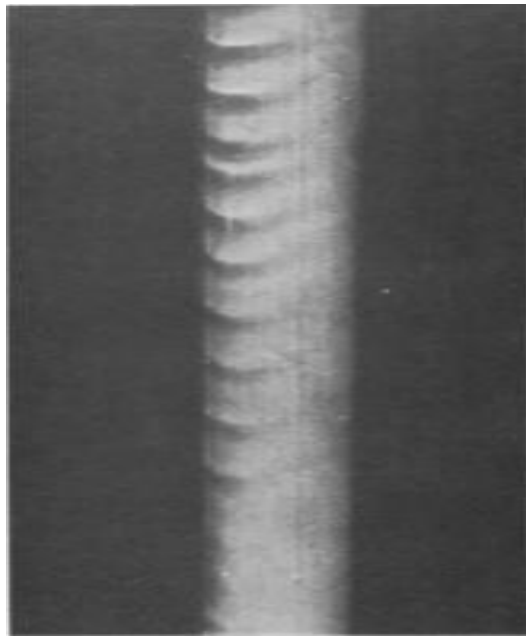


Figure 1.2 : Train d'onde (Binnie 1957).

Inclinaison	Vitesse de vague C (cm/s)	Vitesse moyenne U_0 (in/s)	C/U_0	Longueur d'onde observée (in)	Longueur d'onde théorique
2.75	15.84	8.38	1.89	2.92	3.6
2	18.71	10.84	1.73	2.92	2.84
1	24.96	14.42	1.73	2.81	2.64

Tableau 1.1 : Récapitulation des résultats expérimentaux et comparaison avec la théorie (Binnie 1957).

Etude bibliographique

Dans la même perspective, **Binnie (1959)** a poursuivi ses travaux sur la dynamique des films liquides en réalisant une autre étude en **1959** en améliorant son montage expérimental de 1957. Il a utilisé un tube en verre ayant une longueur de 490 cm et un diamètre de 0.84 cm avec la possibilité d'imposer une légère inclinaison, d'un angle θ , entre 1° et 2.75° . La valeur critique Re^* du nombre de Reynolds a été déterminée confirmant la valeur prédictive donnée par la théorie linéaire de la stabilité à savoir $Re^* = (5/6) \cot\theta$. Les vitesses en amont ont été aussi mesurées donnant des valeurs entre 2.6 à 2.8 de la vitesse moyenne en diminuant au fur et à mesure de la décroissance de θ . Les longueurs d'ondes observées à l'entrée de la conduite étaient 2.8 à 2.9 cm. Le tableau 1.1 récapitule les résultats obtenus comparés avec ceux prédits par théorie linéaire de stabilité[2].

En **1960**, un travail important a été réalisé par **Tailby et Portalski (1960)** sur l'écoulement d'un film liquide sur une plaque verticale en utilisant plusieurs fluides expérimentaux : l'eau, une solution eau-glycérine (27%, 37%, 45% et 82%), deux alcools : l'isopropyle et le méthyle sur une plaque de dimensions 213cm \times 53cm. L'étude portait sur le cas d'instabilités naturelles pour un nombre de Reynolds variant entre 1.2 et 3.4. La longueur d'onde λ à l'entrée dans le cas de l'eau était comprise entre 0.96 cm et 1.24 cm pour la gamme, du nombre de Reynolds, considérée [3]. Un exemple de photographie obtenue pour une solution d'eau-glycérine (82%) est représenté par la figure 1.3.

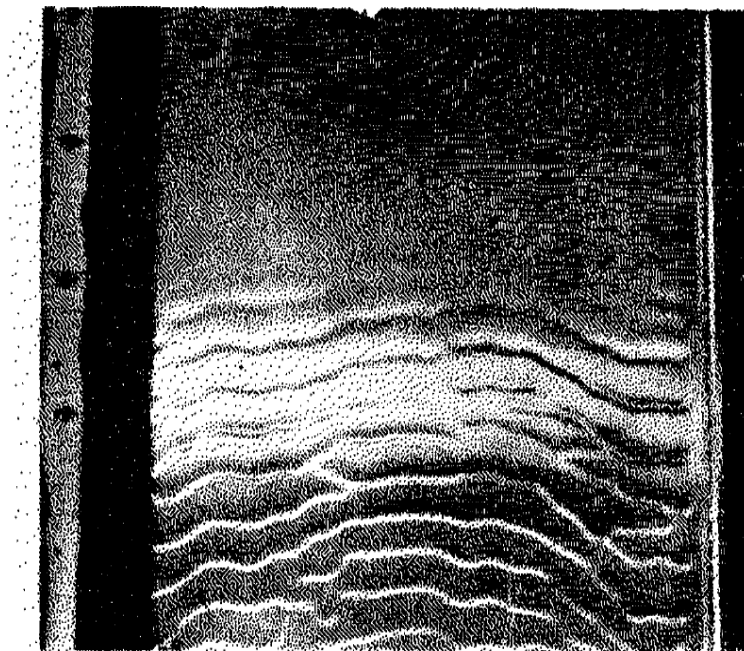


Figure 1.3 : Exemple de photographie d'ondes bidimensionnelles obtenue pour une solution d'eau-glycérine (82%) par Tailby et Portalski 1960.

Etude bibliographique

En **1962**, **Wilkes** et **Nedderman (1962)** ont effectué une étude expérimentale en utilisant un tube de 3 m de longueur et 2.5 cm de diamètre interne. Comparée aux expériences qui l'ont précédé, le tube utilisé dans ce travail était le plus long ce qui donnait une image plus complète de l'hydrodynamique de l'écoulement. D'autre part ce travail était une première dans le domaine car il présentait des mesures de profil de vitesse au sein d'un film ondulé. Les auteurs ont prélevé les profils de vitesse en utilisant une photographie stéréoscopique de petites bulles qui se déplaçaient avec le liquide. Ils ont pu en déduire que dans le cas d'un film ondulé le profil restait approximativement parabolique comme dans le cas d'un film plat avec une déviation maximale d'environ 20%. Les valeurs du nombre de Reynolds tournaient autour de Re^* dans le cas naturellement instable [4].

En **1964**, **Portalski (1964)** a repris le même montage expérimental qu'il a utilisé en **1960** avec une solution d'eau-glycérine (**71.5%**) pour un nombre de Reynolds variant entre 2.5 et 25 . Il a retrouvé que le profil de vitesse n'était pas beaucoup modifié comparativement à celui du film plat [5].

En **1965**, **Stainthorp** et **Allen (1965)** ont utilisé un tube vertical de 76 cm de long et 3.45 cm de diamètre interne en prenant, pour l'eau comme fluide expérimental, des nombre de Reynolds compris entre 4 et 45 , la valeur critique de ce dernier fut de $Re_* = 4.25$ (Ce résultat était en contradiction avec la prédiction par théorie linéaire de stabilité qui suggérait que Re_* s'annule pour le cas vertical). Les auteurs ont focalisé leurs travaux sur le cas d'instabilités naturelles sauf pour la partie durant laquelle ils ont déterminé Re^* où ils ont imposé des perturbations pour lesquelles la longueur d'onde λ près du distributeur d'eau variait entre 1 et 1.2 cm avec une moyenne de 1.3 cm . Ils n'ont détecté aucune onde pour un Reynolds inférieur à Re^* même s'ils ont remarqué la présence de quelques perturbation interraciales qui s'atténuaient entre 30 à 60 cm en aval de la perturbation. Les auteurs ont constaté que le profil, la longueur et la vitesse d'une onde variaient remarquablement en se déplaçant à l'aval. La figure 1.4 représente les traces d'ondes pour un Reynolds égale à 18.75 .

Les auteurs ont constaté une pentification des ondes le long du tube et une apparition de petites ondelettes secondaires au fur et à mesure qu'elles s'approchent de l'état solitaire. De plus ils ont remarqué que tous les états, à travers lesquels une onde passait, conduisaient vers le régime d'ondes solitaires. La distance séparant ces ondes est environ 8 fois plus grande et leur vitesse 2 fois plus grande que celles imposées en amont (voir la figure 1.5) [6].

Etude bibliographique

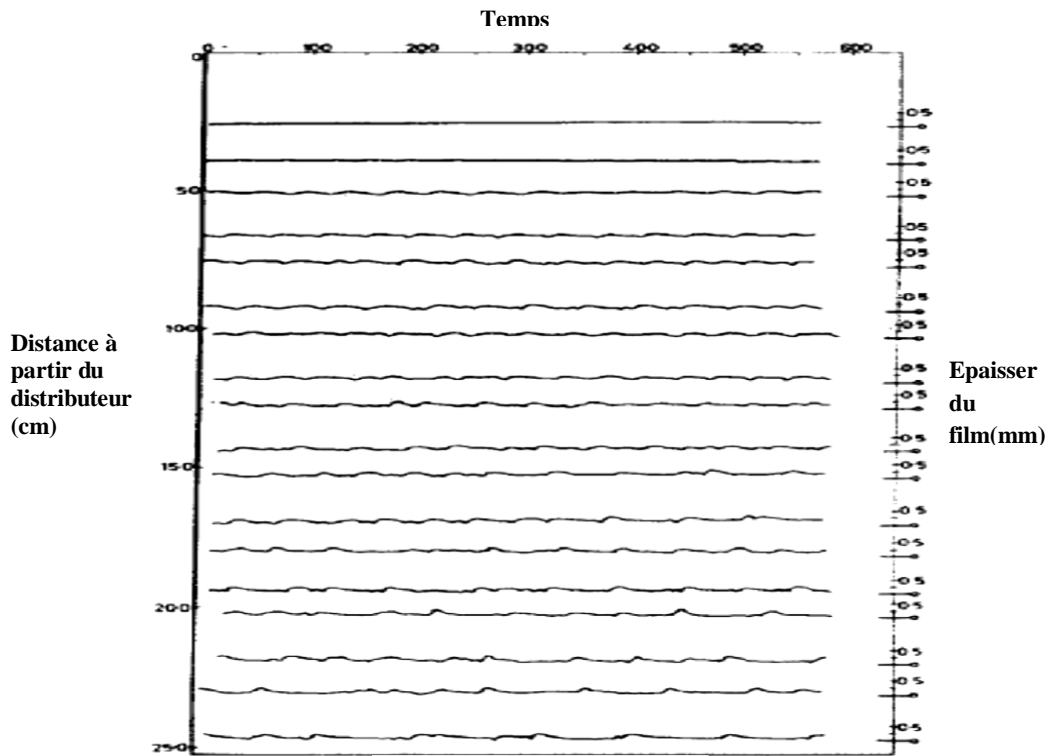


Figure 1.4 : Traces d'ondes pour $R = 75$ pour les différentes épaisseurs du film liquide en fonction du temps. Stainthorp et Allen (1965).

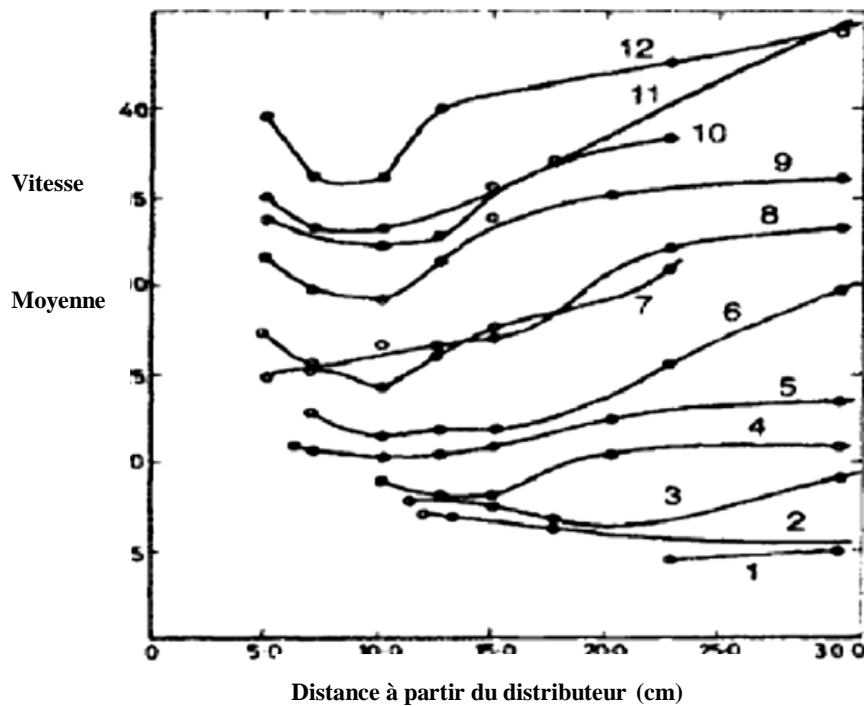


Figure 1.5 : Vitesses d'ondes en fonction de la distance par rapport au distributeur pour l'eau. Stainthorp et Allen 1965.

Etude bibliographique

En 1966, Jones et Whitaker (1966) ont étudié la dynamique des ondes naturelles lors de l'écoulement d'un film d'eau ayant un nombre de Reynolds compris entre 7.7 et 124 qui représentait la plus grande valeur jamais atteinte à cette époque. Ils ont trouvé que des ondes de 0.9 cm de longueur moyenne apparaissent pour $27 < Re < 33$. Parmi les résultats importants que l'on notera: les variations des longueurs et des vitesses d'onde en fonction du nombre de Reynolds à une distance de 2.5 à 5 cm du distributeur d'eau et les transitions entre l'état d'ondes stationnaires et celui des ondes solitaires pour une distance entre 30 à 60 cm du distributeur [7].

Nemet et Sher (1969) ont procédé à une étude expérimentale à l'aide de deux tubes l'un en verre et l'autre en cuivre qui avait respectivement les dimensions 44.8 et 69.4 cm de longueur et 1.85 et 2.02 cm de diamètre externe. Ils ont confirmé le fait que la longueur des ondes naturelles ne change pas de façon considérable avec le nombre de Reynolds au début de leur apparition et qu'elle est de l'ordre de 1 cm. D'autre part, les auteurs ont montré que la longueur et la vitesse des ondes augmentaient au fur et à mesure que ces dernières se propagent vers l'aval en créant une distance moyenne entre deux ondes solitaires successives d'environ $\lambda = 2.6 \text{ cm}$ [8].

Les expériences de Krantz et Goren (1970 et 1971) ont été réalisées sur une plaque en verre ayant les dimensions suivantes : 1.52 m de longueur, 19 cm de largeur et 3 mm d'épaisseur inclinée à 74.5° et 90° en utilisant des huiles blanches de Chevron No.5 et No.15 comme fluides expérimentaux. Les ondes étaient contrôlées par des vibrations en amont. La viscosité des fluides en question est élevée ce qui explique le fait que le nombre de Reynolds variait dans la gamme 0.13 – 1.3, $\gamma = 1.1 – 7.8$ et $\delta = 0.0066 – 0.07$ (les ondes s'excitent pour une épaisseur $\delta > \delta_* = 0.0456$!). Les amplitudes d'équilibre dépendaient du nombre de Reynolds et de la fréquence imposés. Ce dernier résultat coïncidait avec celui établi par la théorie linéaire de stabilité lors des travaux de Krantz et Owens (1973) [8].

En 1972, Portalski et Clegg (1972) ont fait un travail (concernant la transition des ondes vers l'état solitaire) qui peut être qualifié de remarquable. Ils ont utilisé trois différents fluides : l'eau et deux solutions d'eau-glycérine de 25% et 45% et ont fait varier le nombre de Reynolds entre 17.7 et 375 pour un cas naturellement instable. Ils ont prélevé des photographies de l'écoulement à l'aide d'une caméra qui leur a permis de capturer une grande partie du canal d'étude (30 cm), par la suite les images ont été traitées à l'aide d'un ordinateur.

Etude bibliographique

Un exemple de profile est représenté par la figure 1.6.

Ils ont montré que les instabilités interfaciales ont toujours existé mais avec de très faibles amplitudes et que leurs détections dépendent de la précision des appareils de mesure utilisés. La nouveauté est la détection d'une cassure soudaine de la forme des ondes en une position donnée le long de la conduite accompagnée par des formes très irrégulières puis les ondes se régularisaient graduellement jusqu'à atteindre un état d'ondes solitaires dans lequel l'amplitude s'amplifie et l'épaisseur moyenne du film devient plus petite que celle obtenue si le film était complètement plat [9].

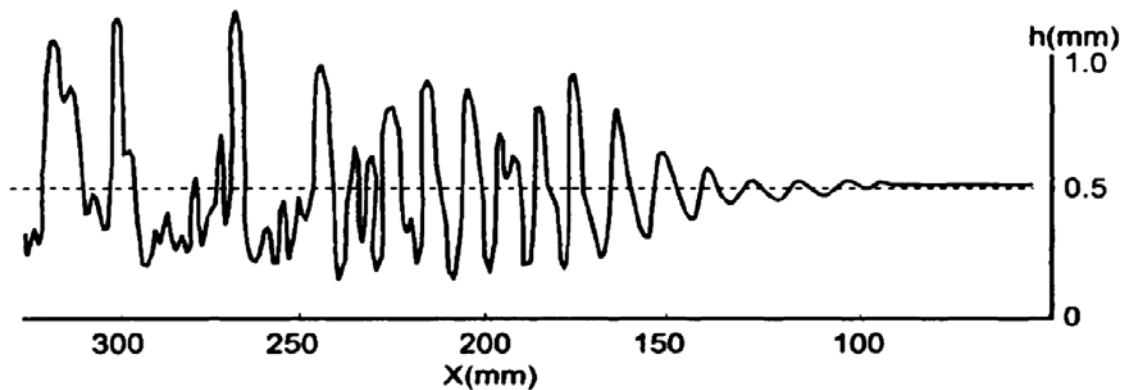


Figure 1.6 : Variation de l'épaisseur du film le long de la conduite d'étude pour une solution d'eau-glycérine à $R = 37$. Portalski et Clegg (1972).

CHAPITRE I :
Formulation du
problème

Chapitre I : Formulation du problème

Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons les équations régissant la dynamique d'un film liquide non newtonien. Nous allons introduire les équations de conservation (masse et quantité du mouvement) et les conditions aux limites associées. La mise sous forme adimensionnelle sera présentée à la fin du chapitre.

I.1. Position du problème :

Nous considérons un écoulement incompressible d'un film mince liquide non newtonien sous l'effet de la gravité le long d'une paroi inclinée d'un angle β . Le fluide peut être injecté ou aspiré de la paroi à travers des actionneurs. On suppose que l'écoulement est bidimensionnel. Un système de coordonnées cartésiennes (x, y) est adopté : l'axe des x selon le sens de l'écoulement, l'axe des y étant perpendiculaire au plan.

I.1.1. Géométrie du problème :

L'écoulement est représenté géométriquement sur la figure 1.

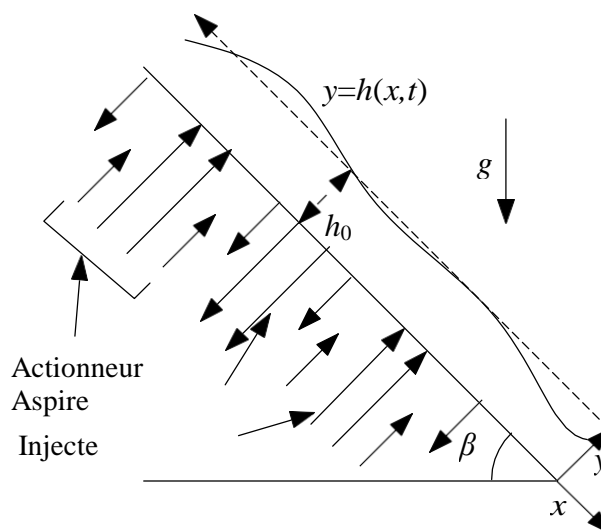


Figure I.1: Écoulement d'un film sur un plan incliné en présence d'actionneurs

Chapitre I : Formulation du problème

La pression de l'air est supposée constante, on la notera par p_a .

Le fluide peut être injecté ou aspiré de la paroi rigide sur laquelle il s'écoule à travers des actionneurs.

I.2. Equations de quantité de mouvement :

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (donc des gaz et la majeure partie des liquides). La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile.

Ces équations permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation de nombreux phénomènes [10].

Dans notre cas :

-Le film liquide occupe le domaine $\Omega = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+; 0 < y < h(x, t)\}$

-Le liquide est incompressible de densité ρ constante. Soit $\mathbf{v}(u, v)$ vecteur vitesse

L'équation de continuité est donnée par :

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Sa projection est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.2})$$

Le liquide considéré est non newtonien et se comporte en loi de puissance dont sa viscosité dynamique μ est donnée par

$$\mu = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (\text{I.3})$$

- Avec K sa consistance (en $Pa.s^n$), considéré constante et indépendante de la température et $\dot{\gamma}$ est le second invariant du tenseur des déformations, défini par:

$$\dot{\gamma} = 2Tr(D^2)$$

Chapitre I : Formulation du problème

Le tenseur des déformations est donné par

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, on note par η la quantité :

$$\eta = |\dot{\gamma}|^{n-1} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (I.4)$$

L'indice n est appelé indice d'écoulement, il indique le degré du comportement non Newtonien. Il est sans dimension et vaut 1 pour un fluide Newtonien et 0 pour un solide rigide, plus il s'éloigne de l'unité, plus les effets non newtonien sont importants.

En effet, $0 < n < 1$ correspond au comportement pseudo-plastique et $n > 1$ représente les dilatants (un comportement d'épaississement).

Dans le tableau ci-dessous, on donne quelques exemples de fluides en loi de puissance pour différentes valeur de n .

Fluides	N	$K(\text{gr} / (\text{cms}^{2-n}))$	$\rho(\text{gr}/\text{cm}^3)$	$\sigma(\text{N}/\text{m}^2)$
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	2	0.00004241	1.226	0.045
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	1.8	0.001428	1.238	0.045
Mélange de chaux et d'eau	1.47	2.510^{-7}	1.25	0.076
Mélange d'éthylène glycol, de glycérine et d'eau	1.37	0.04583	1.305	0.045
Mélange d'éthylène glycol et d'eau	1.18	0.007767	1.222	0.045
sang humain	0.9			
pétrole (en général)	0.8			
solution de napalm en kérosène	0.52	5.3510^{-3}	0.8	0.026

Tableau 2.1 : Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance

Chapitre I : Formulation du problème

I.2.1. Equation conservation de la quantité du mouvement :

L'équation de Navier-Stokes qui résulte de la conservation de la quantité du mouvement (la deuxième loi de Newton), qui découle directement du principe fondamental de la dynamique, est donnée par :

$$\rho(\partial t + \mathbf{v} \text{grad})\mathbf{v} = \text{div}\sigma + \rho \mathbf{g} \quad (\text{I.5})$$

σ étant le tenseur de contraintes de Cauchy:

$$\sigma = -P I_d + \tau$$

Où $\tau = 2\mu D$ est le tenseur de contraintes visqueuses et I_d est le tenseur identité.

La projection du système d'équations par rapport aux axes donne

Sur ox :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} \\ = \rho g \sin\beta + 2K \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Sur oy :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \\ = \rho g \cos\beta + K \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

I.2.2. Conditions aux limites :

Le film fluide étant supposé infini dans le sens de l'écoulement et dans la direction transversale, les seules conditions aux limites du problème sont celles à la paroi ($y = 0$) et à la surface libre du film ($y = h$) :

Chapitre I : Formulation du problème

En $y = 0$:

Le fluide s'écoule sur la paroi avec une condition d'adhérence (non glissement) et de non Perméabilité :

- **conditions de non glissement :**

$$u = 0 \quad (\text{I.8})$$

- **conditions de perméabilité imposée :**

$$v = F(x, t) \quad (\text{I.9})$$

En $y = h$

À la surface libre du film, deux conditions doivent être vérifiées :

- **condition cinématique :**

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) (h - y) = 0 \quad (\text{I.10})$$

- **condition de raccordement des contraintes :**

La condition de raccordement des contraintes traduit la continuité de la contrainte tangentielle et le saut de la contrainte normale. Ce dernier est dû à la tension superficielle.

Le cisaillement est nul pour l'air dans le cas d'un film à surface libre, d'où l'équation

$$(p_a - p + \sigma \mathbf{div} \mathbf{n}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Où :

Chapitre I : Formulation du problème

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Étant le vecteur normal unitaire extérieur à la surface libre.

On a:

$$\mathbf{div} \mathbf{n} = -\tilde{K}$$

Tel que

\tilde{K} Est la courbure de l'interface qui s'écrit :

$$\tilde{K} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

La projection de la condition (II.11) par rapport à la normal nous donne la condition normale suivante :

$$pa - p + \tau \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.12})$$

C'est-à-dire

$$pa - p + \frac{\tau K \eta}{1 + h_x^2} \left(u_x h_x^2 + \frac{1}{2} (u_y + v_x) + \frac{1}{2} (u_y + v_x) h_x^2 - v_y \right) = 0 \quad (\text{I.13})$$

La projection selon le vecteur tangent, $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix}$, donne lieu au condition

tangentielle suivante :

$$\tau \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (\text{I.14})$$

C'est-à-dire

$$\eta (v_y h_x - u_x h_x) = 0 \quad (\text{I.15})$$

I.3. Écoulement de base (La solution stationnaire) :

Dans des conditions d'écoulement stationnaire:

Le film liquide subit un écoulement parallèle (la surface libre $h = h_0 = \text{constante}$),

C'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.16})$$

Pas de variation par rapport à t et x .

On a (I.1), (I.11) deviennent :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin\beta + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{I.18})$$

$$\rho \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \cos\beta + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{I.19})$$

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$v = 0 \quad \text{en } y = h_0 \quad (\text{I.21})$$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = h_0 \quad (\text{I.22})$$

$$pa - p + 2K\eta \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = h_0 \quad (\text{I.23})$$

Avec $\eta = \left\{ \left(\frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \right\}^{(n-1)/2}$

On a (I.17), (I.20), (I.21), nous donne $v = 0$, alors l'équation (I.22) et (I.23) devient :

$$\rho g \sin\beta + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{I.24})$$

Chapitre I : Formulation du problème

Et

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \cos\beta \quad (\text{I.25})$$

I.3.1. Solution de l'écoulement de base :

La résolution du système (I.24), (I.25) nous donne la solution de base[8] suivante :

$$u_b = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin\beta}{K} \right)^{1/n} [h_0^{1+1/n} - (h_0 - y)^{1+1/n}] \quad (\text{I.26})$$

$$v_b = 0 \quad (\text{I.27})$$

$$p_b = P_a + \rho g \cot\beta (h_0 - y) \quad (\text{I.28})$$

Où h_0 désigne l'épaisseur du film.

Cette solution stationnaire simple est appelée solution de Nusselt[9]. Elle est sous forme d'une fonction puissance qui devient parabolique quand le fluide est newtonien ($n = 1$). La figure (I.1), indique l'influence de l'indice n sur le profil de vitesse avec une hauteur ($h_0 = 1\text{cm}$) et des propriétés physiques correspondant aux valeurs données dans le tableau 1.

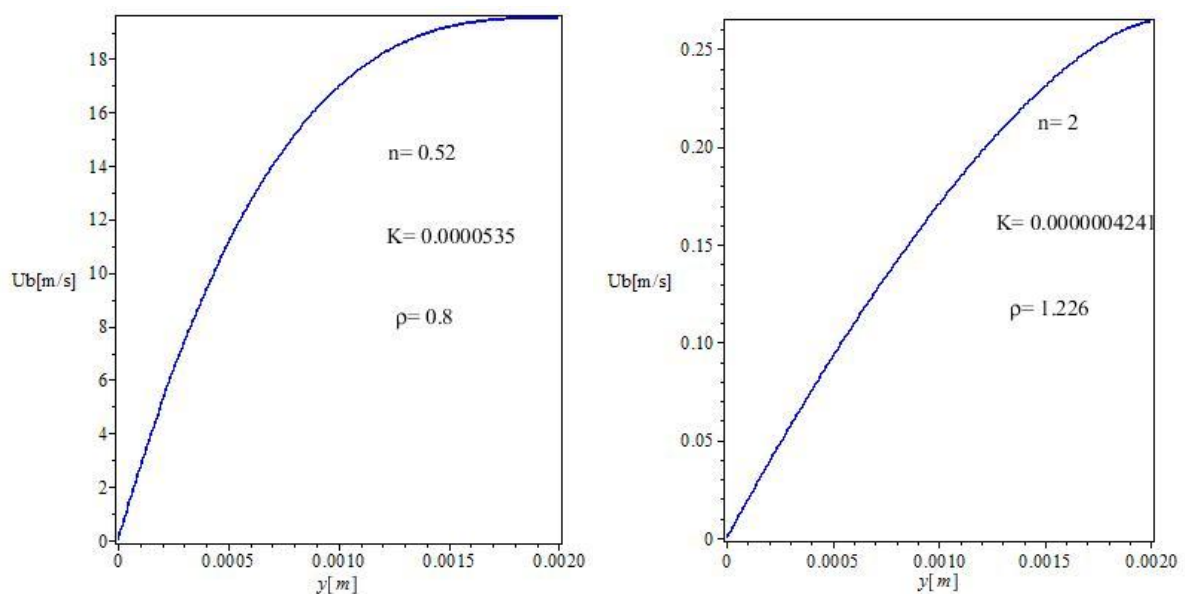


Figure I.2 : l'influence de l'indice n sur la vitesse de profile de base.

I.4. Echelles caractéristiques et équations adimensionnées :

La solution Nusselt précédente donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement :

$$Q_0 = \int_0^{h_0} U_b(y) dy = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} h_0^{2+1/n}$$

Cela nous permet de définir une vitesse moyennée, On choisie comme vitesse caractéristique la vitesse moyennée :

$$u_m = \frac{Q_0}{h_0}$$

$$u_m = \frac{Q_0}{h_0} = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} h_0^{1+1/n}$$

On fait alors intervenir deux échelles d'espace: la longueur d'onde typique l_0 , pour les directions longitudinale, et la hauteur $h_0 = \epsilon l_0$ pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre ϵ vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes. Une séparation entre l'échelle de variations suivant l'épaisseur du film y et les échelles de variations en temps t et en espace x , est imposée. Ainsi, les échelles caractéristiques sont $l_0, h_0, h_0/u_m$, et $K u_m^n / \epsilon h_0^n$ pour x et y , le temps t et la pression p , respectivement. A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$\hat{x} = x/l_0, \hat{y} = y/h_0, \hat{u} = u/u_m, \hat{v} = v/\epsilon u_m, \hat{t} = t u_m / l_0, \hat{P} = \epsilon P h_0^n / K u_m^n$$

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent (en omettant le symbole " $\hat{}$ ") :

Chapitre I : Formulation du problème

$$u_x + v_y = 0 \quad (\text{I.29})$$

$$R\epsilon[u_t + uu_x + vv_y + P_x] = G + 2\epsilon^2[\eta u_x]_x + [\eta(u_y + \epsilon^2 v_x)]_y \quad (\text{I.30})$$

$$R\epsilon^3[v_t + uv_x + vv_y + P_y] = -GB + 2\epsilon^2[\eta v_y]_y + \epsilon^2[\eta(u_y + \epsilon^2 v_x)]_x \quad (\text{I.31})$$

Tel que la viscosité est donnée par

$$\eta = \left\{ 2\epsilon^2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + \epsilon^2 v_x)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (\text{I.32})$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

• $y = 0$

$$u = 0, v = f(x, t) \quad (\text{I.33})$$

Où

$$f(x, t) = \frac{f(x, t)}{\epsilon u_m}$$

• $y = h(x, t)$

$$v = h_t + u h_x \quad (\text{I.34})$$

$$\eta[2\epsilon^2 h_x(v_y - u_x) + (1 - \epsilon^2 h_x^2)(u_y + \epsilon^2 v_x)] = 0 \quad (\text{I.35})$$

$$P - \frac{2\eta}{(1 + h_x^2)} \{ \epsilon^3 h_x^2 u_x - \epsilon h_x(u_y + \epsilon^2 v_x) + \epsilon v_y \} = - \frac{Wh_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \quad (\text{I.36})$$

Avec $G = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ traduisant l'effet de gravité.

Le groupe de nombres adimensionnels qui apparaissent sont :

* $R = \rho h_0^n u_m^{2-n} / K$ le nombre de Reynolds, mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans l'écoulement.

Chapitre I : Formulation du problème

Ce nombre sans dimension (nombre de Reynolds), est utilisé en mécanique des fluides pour caractériser un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent). Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes.

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent. L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (Inférieures à 1), dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine du micro-fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite. Cette dernière concentre les effets visqueux qui peuvent y être modélisés sous une forme simplifiée.

A partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré. Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence [11].

*le nombre de tension superficielle $W = \epsilon^2 RWe$, qui est une autre formulation du nombre de Weber $We = \sigma / \rho_0 u_m^2 h_0$ qui est le nombre de Weber. Comparant les effets de la tension Superficielle σ / h_0 et les effets d'inertie ρu_m^2 .

Le nombre de Weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluide à l'interface d'un système. Il correspond au rapport des forces d'inertie et de la tension superficielle.

Le nombre porte le nom de MORTIZ WEBER ingénieur en dynamique des fluides allemand [12].

* Le petit paramètre : ϵ appelé paramètre ondes longues.

Chapitre I : Formulation du problème

* $B = \cos \beta$, rapport de la composante de l'accélération gravitationnelle normale au film et de sa composante dans le sens de l'écoulement.

Remarque : l'écoulement de base sans dimension est donné alors par :

$$u_b = \frac{2n+1}{n+1} [1 - (1-y)^{1+1/n}], v_b = 0, p_b = P_a + G \cot \beta (1-y).$$

CHAPITRE II :
Solution approchée
aux résidus pondérés

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

Introduction :

Ce chapitre est consacré à la recherche d'un modèle à deux équations d'évolutions en h et q . Cette dernière est basée sur l'approximation en grande longueur d'ondes combinée avec la méthode des résidus pondérés. Notre but est d'étudier les instabilités pour des petits nombres de Reynolds et au voisinage de la criticité, pour cela notre étude se limite à une solution cohérente à l'ordre un.

II.1. Équation de Navier-Stokes à l'ordre un :

Système à l'ordre un par rapport à ϵ s'écrit:

$$u_x + v_y = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$Re[u_t + uu_x + vv_y + P_x] = G + (\eta u_y)_y \quad (\text{II.2})$$

$$P_y = -\epsilon GB \quad (\text{II.3})$$

Les conditions aux limites correspondantes sont

En $y = 0$

$$u = 0, \quad v = f(x, t) \quad (\text{II.4})$$

En $y = h(x, t)$

$$v = h_t + uh_x \quad (\text{II.5})$$

$$P = -2\eta v_y - \epsilon W h_{xx} \quad (\text{II.6})$$

$$\eta u_y = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.1.1. Introduction de débit local :

On définit le débit local dans la direction de l'écoulement avec,

$$q = \int_0^h u \, dy$$

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

En intégrant l'équation de continuité (II.1) par rapport à y sur l'intervalle $[0, h]$, on aura

$$\int_0^h (u_x + v_y) dy = \int_0^h u_x dy + v(h) - v(0)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\int_0^h u dy \right) - u(h)h_x + v(h) - v(0) = 0$$

En utilisant la condition cinématique à la surface libre (II.5) et la condition à la paroi (II.4), l'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante

$$h_t + q_x = f(x, t) \quad (\text{II.8})$$

II.1.2. Elimination de la pression:

En vertu de la condition (II.6) et en intégrant l'équation (II.3) entre y et h , l'expression de la pression s'écrit :

$$p(x, y, t) = -\epsilon W h_{xx} + 2\eta u_x + \epsilon G \cot \beta (h - y)$$

En remplaçant cette expression dans (II.2), on aboutit à l'élimination de la pression du problème initial :

$$Re[u_t + uu_x + vu_y] = G + (Wh_{xxx} - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y \quad (\text{II.9})$$

Donc le système bidimensionnel à l'ordre un s'écrit :

$$u_x + v_y = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$Re[u_t + uu_x + vu_y] = G + (Wh_{xxx} - G \cot \beta h_x) + (\eta u_y)_y \quad (\text{II.11})$$

Avec les conditions aux limites

En $y = 0$

$$u = 0, \quad v = f(x, t) \quad (\text{II.12})$$

En $y = h(x, t)$

$$\eta u_y = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$q_x + h_t = f(x, t) \quad (\text{II.14})$$

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

II.2. Méthode des résidus pondérés :

$$u(x, y, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + \dots + \epsilon^M u_M^* + 0(\epsilon^M) = \sum_{i=0}^{i=M} \epsilon^i u_i^* + 0(\epsilon^M) \quad (\text{II.15})$$

Où u_i^* est la solution de notre problème au i^{me} ordre.

Comme dans le cas newtonien [13] [14], il a été vérifié que la solution de notre problème au i^{me} Ordre s'écrit sous la forme [15] [16],

$$u_i^*(x, y, t) = \sum_{m=0}^{M_i} a_m(x, t) f_m(Z) \quad (\text{II.16})$$

Avec $\{f_m, m = 0..M_i\}$ est la famille génératrice du i^{me} espace de solution où M_i entier fini (C'est-à-dire, l'espace de solution à tout ordre est de dimension fini suivant la direction normale y), $Z = 1 - y/h(x, z, t)$ est une coordonnée réduite de la variable normale y et $a_m(x, z, t)$ sont des Amplitudes à déterminer.

II.3. Construction d'un Modèle d'ordre un :

Jusqu'à l'ordre $0(\epsilon)$, l'expression de u est donnée par :

$$u(x, y, t) = u_0^* + u_1^* + 0(\epsilon) \quad (\text{II.17})$$

Où u_1^* est la correction au premier ordre du terme principal u_0^* (d'ordre zéro).

Afin de construire le modèle aux résidus pondérés à l'ordre un, premièrement on cherche la base de l'espace des solutions d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (II.16) dans le système (II.10) et (II.11), et en collectant ordre par ordre, l'ordre zéro est donné par

$$\left(\eta u_{0y}^* \right) + G = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$u_0^*(0) = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$u_{0y}^*(h) = 0 \quad (\text{II.20})$$

L'intégration de l'équation (II.18), permet de retrouver la famille génératrice $\{1, Z^{1/n}, Z^{1+1/n}\}$ de l'espace de solution d'ordre zéro. Donc u_0^* est de la forme

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

$$u_0^* = a_0(x, t) + a_1(x, t)Z^{1/n} + a_2(x, t)Z^{1+1/n}$$

En utilisant les conditions aux limites (II.19) et (II.20) on aura les relations entre les coefficients a_0, a_1 et a_2 suivantes :

$$a_0(x, t) + a_1(x, t) + a_2(x, t) = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$a_0(x, t) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Donc :

$$u_0^* = a_0(x, t)(1 - Z^{1+1/n})$$

D'où la base de l'espace des solutions est réduite à une seule fonction $f_0(Z) = 1 - Z^{1+1/n}$. Par suite, le profil de vitesse est donné par :

$$u = a_0(x, t) f_0(Z) \epsilon u_1^* \quad (\text{II.23})$$

Du moment que le débit local q apparaît dans l'équation (II.14) comme variable principale de la même façon que l'épaisseur du film, on peut prendre, alors, le couple (h, q) comme inconnue de notre modèle. Donc, on transforme le coefficient a_0 en fonction de q et on réécrit l'équation (II.23) comme suit:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (\text{II.24})$$

Où,

$$u_0 = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f_0(Z) \quad (\text{II.25})$$

Et,

$$u_1 = u_1^* - \left(\frac{2n+1}{n+1} \int_0^1 u_1^* dY \right) f_0(Z)$$

Notons que u_0 et u_1 sont tels que :

$$\int_0^h u_0 dy = q \quad \text{et} \quad \int_0^h u_1 dy = 0 \quad (\text{II.26})$$

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

En multipliant l'équation de couche limite (II.11) par une fonction poids, notée F , et en intégrant entre 0 et h , on obtient :

$$\int_0^h F(y) \left\{ (\eta u_y)_y + G + \epsilon W h_{xxx} - R \epsilon (u_{0t} + u_0 u_{0x} + u_0 u_{0y}) - \epsilon G \cot \beta h_x \right\} dy = 0$$

On remarque que le terme visqueux est le seul où la correction doit être tenue en compte. Pour pouvoir simplifier la correction d'ordre un dans, deux intégrations par parties sont nécessaires. Ce qui donne :

$$\int_0^h F(y) (\eta u_y)_y = [u_y^n F]_0^h - [(u_0 + n \epsilon u_1) u_{0y}^{n-1} F_y]_0^h + \int_0^h (u_0 + n \epsilon u_1) (u_{0y}^{n-1} F_y)_y dy \quad (\text{II.27})$$

Ceci est obtenu en utilisant l'équation (II.16) et le développement $u_y^n = u_{0y}^{n-1} (u_{0y} + n \epsilon u_{1y})$. À présent, on peut montrer que la correction u_1 peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction adéquate F , telle que

$$F|_{y=0} = 0 \quad u_{0y}^{n-1} F_y|_{y=h} = 0 \quad (u_{0y}^{n-1} F_y)_y = -c(x, t) \quad (\text{II.28})$$

Où $c(x, t)$ est une fonction indépendante de y qui sera précisée ultérieurement. Avec les relations (II.26), le membre de droite de l'équation (II.27) se réduit à $-qc$. De la seconde et de la troisième condition dans (II.28), on obtient, d'après l'expression de u_0

$$\frac{n+1}{n} G^{1-1/n} \frac{q^{n-1}}{h^{2n}} F(y) = c f_{0y} \quad (\text{II.29})$$

Cette équation est satisfaite avec $c = \frac{n+1}{n} G^{1-1/n} \frac{q^{n-1}}{h^{2n}}$ et par conséquent $F = f_0$.

Remarque 1. En utilisant l'équation de continuité, on peut calculer facilement v_0 , qui est donné par la formule suivante :

$$\int_0^y (u_{0x} + v_{0y}) dy = 0 \Rightarrow v_0 = f(x, t) - \int_0^y u_{0x} dy$$

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

Ainsi, avec (II.27), prend la forme finale :

$$\begin{aligned} \frac{q^n}{h^{2n}} - h \left\{ 1 - \epsilon \left(\frac{W}{G} h_{xxx} - \cot \beta h_x \right) \right\} \\ + 2\epsilon \frac{Re}{G} \frac{2n+1}{3n+2} \left\{ q_t + \frac{11n+6}{4n+3} \frac{qq_x}{h} - 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{h^2} h_x \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Ajoutée à l'équation (II.14), l'équation (II.30) complète notre modèle au premier ordre pour les deux inconnues h et q . On constate que dans le cas $n = 1$, pour un fluide newtonien, on retombe sur le modèle obtenu par Ruyer-Quil et Manneville [14, 17].

II.4. Equation de Benney :

À présent, on valide notre modèle au voisinage de la criticalité par l'équation type Benney, qui est exacte au point critique,

$$q = q_0 + \epsilon q_1 \quad (\text{II.31})$$

En injectant cette expression de q dans l'équation du modèle (II.30), on résout ordre par ordre, on obtient :

$$q_0 = h^{2+1/n} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{1}{n} h^{2+1/n} \left(\frac{Re}{G(3n+2)} \left(2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2 h^{1+\frac{2}{n}} h_x + \frac{n(8n+13)}{4n+3} h^{\frac{1}{n}} \right) \right. \\ \left. - \cot \beta h_x + \frac{W}{G} h_{xxx} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Une fois remplacée dans l'équation cinématique (II.14) on obtient l'équation de type Benney, la même que celle établie par Miladinova et al [18] :

Chapitre II : Solution approchée aux résidus pondérés

$$h_t + \left(h^{2+1/n} + \varepsilon \left(\frac{1}{n} h^{2+1/n} \left(\frac{Re}{G(3n+2)} \left(2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2 h^{1+\frac{2}{n}} h_x + \frac{n(8n+13)}{4n+3} h^{\frac{1}{n}} \right) - \cot \beta h_x + \frac{W}{G} h_{xxx} \right) \right) \right)_x = 0 \quad (\text{II.34})$$

Conclusion :

Dans ce chapitre on a mis en évidence un modèle d'ordre un et un modèle de type développement de benney, basés sur les équations de Navier-Stokes combinée avec la technique des résidus pondérés, permettant de d'écrire la dynamique non linéaire d'un écoulement de film mince d'un fluide en lois de puissance sur un plan incliné. Ces modèles dérivés tiennent compte de la plupart des effets physiques importants.

Modèle d'ordre un :
$h_t + q_x = f(x, t)$
$q_t = \left\{ 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{h^2} h_x - \frac{11n+6}{4n+3} \frac{qq_x}{h} - \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{h} f \right\} - \frac{G}{2Re} \frac{3n+2}{2n+1} \left\{ \frac{q^n}{h^{2n}} - h \left(1 - \left(\frac{W}{G} h_{xxx} - \cot \beta h_x \right) \right) \right\}$
Equation de type Benney:
$h_t + \left(h^{2+1/n} + \varepsilon \left(\frac{1}{n} h^{2+1/n} \left(\frac{Re}{G(3n+2)} \left(2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^2 h^{1+\frac{2}{n}} h_x + \frac{n(8n+13)}{4n+3} h^{\frac{1}{n}} \right) - \cot \beta h_x + \frac{W}{G} h_{xxx} \right) \right) \right)_x = 0$

CHAPITRE III :
Analyse de stabilité
linéaire

Introduction :

Notre travail dans ce chapitre consiste à perturber le modèle à une équation qui a été développé dans le chapitre précédent. Nous écrirons cette équation sous forme linéaire afin d'établir la relation de dispersion des petites perturbations. L'effet du contrôle sur la stabilité du film sera analysé par la suite à travers le tracé de courbes de stabilité neutre (marginale). Son influence sur le taux d'amplification des perturbations sera également analysée.

L'objectif de ce chapitre est de caractériser sur la base du modèle élaboré, l'instabilité temporelle, qui détecte la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de base et donne aussi le seuil d'instabilité en fonction des paramètres du problème.

III.1. Choix de control :

Notre choix d'un contrôle est inspiré du travail de Thompson et al [19].

L'objectif de ce travail est l'application d'injection et d'aspiration comme mécanisme de contrôle linéaire par rapport à la hauteur de l'interface. En considérant le cas de contrôle vers l'état uniforme de Nusselt, basé uniquement sur les observations de h . Pour y parvenir, on suppose que

$$f(x, t) = -\gamma_0(h(x, t) - 1) \quad (\text{III.1})$$

Où γ_0 est une constante réelle à déterminer, appelée paramètre de contrôle.

γ_0 est une constante réelle à choisir; dans la plupart des cas, on constate que l'état uniforme devient de plus en plus stable pour les grands γ_0 positifs. Notez que si $h = 1$ partout, alors les contrôles ont une magnitude nulle.

III.2. Linéarisation des équations et Modes normaux :

Les analyses de stabilité sont très courantes dans le domaine de l'instabilité hydrodynamique. Elles consistent à perturber un état de référence d'un système physique et à étudier l'évolution temporelle des perturbations grâce à une relation dite relation de dispersion. Deux comportements sont alors possibles, soit ces perturbations sont amorties dans le temps et l'état de référence est dit stable, soit elles s'amplifient et l'état de référence est alors instable [20]. Le but d'une étude de stabilité est donc d'examiner comment des instabilités peuvent apparaître pour éventuellement être suivies et même contrôlées.

Mathématiquement, perturber un état de référence revient à considérer que l'épaisseur du film est constituée d'une partie correspondant à cet état de référence, à laquelle s'ajoutent les perturbations :

$$h = 1 + H(x, t), \quad q = 1 + Q(x, t) \quad (\text{III.2})$$

Avec la solution de référence (de base) est donnée par

$$h = q = 1,$$

En injectant l'expression (III.2) dans les équations de notre modèle et en tenant compte que des termes linéaire, on obtient les équations linéaires suivantes

$$H_t + Q_x + \gamma_0 H = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$Q_t = \left\{ 3 \frac{2n+1}{4n+3} H_x - \frac{11n+6}{4n+3} Q_x + \frac{2n+1}{n+1} H \right\} - \frac{G}{2Re} \frac{3n+2}{2n+1} \left\{ nQ - (2n+1)H - \frac{W}{G} H_{xxx} + \cot\beta H_x \right\} \quad (\text{III.4})$$

On définit les modes normaux sous la forme

$$H = A_1 e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad Q = A_2 e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (\text{III.5})$$

où, A_1 et A_2 sont des amplitudes des perturbations initiales, $\alpha \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde,

$\omega = c\alpha \in \mathbb{C}$ est la fréquence, c étant la célérité complexe. Sa partie réelle représente la vitesse phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

Chapitre III : Stabilité linéaire

Dans les modèles 2-D Navier-Stokes [21],[22], Benney[7] et les modèles à résidus pondérés[14], cette solution est linéaire stable aux perturbations de toutes les longueurs d'onde si :

- Reynolds critique pour $n = 1, \gamma_0 = 0$,

$$Re < Rc \equiv \frac{5}{6} \cot \beta$$

- Reynolds critique pour $n = 1, \gamma_0 \neq 0$ est donné par la relation

$$\cot \beta = \frac{6}{245} Rc \left(\frac{21 Rc^2 \gamma_0^2 + 355 Rc \gamma_0 + 1225}{4 Rc^2 \gamma_0^2 + 20 Rc \gamma_0 + 25} \right)$$

En substituant ces perturbations (III.5) dans les équations (III.3) et (III.4), on obtient

$$d \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec

$$d_{11} = \gamma_0 - i\omega, \quad d_{12} = i\alpha,$$

$$d_{21} = \frac{1}{2} Re \gamma_0 - \frac{1(3n+2)(2Gn+1)}{2(2n+1)} + \left(-\frac{3i(2n+1)Re}{4n+3} + \frac{1i\beta(3n+2)}{2(2n+1)} \right) \alpha + \frac{1i(3n+2)We\alpha^3}{2(2n+1)G}$$

$$d_{22} = -iRe\omega + \frac{1nG(3n+2)}{2(2n+1)} + \frac{i(11n+6)Re\alpha}{4n+3}$$

Donc la relation de dispersion pour notre modèle, est donnée par

$$D(\alpha, \omega) = 0 \tag{III.3}$$

En physique théorique, une relation de dispersion est une relation entre la pulsation ω et le vecteur d'onde α d'une onde. Elle nous permettra après séparation des parties réelle et imaginaire de représenter les courbes de stabilité neutre et le taux d'amplification ω_i des perturbations en fonction du nombre d'onde α .

III.5. Courbes de stabilité neutre :

Dans cette partie, on supposera que α est réel et w complexe, nous pourrons ainsi suivre l'évolution temporelle des perturbations (ondes à l'interface). Des diagrammes de stabilité, obtenus en posant $w_i = 0$ dans la relation dispersion (III.3), seront représentés dans le plan (α, R) .

Un taux d'amplification w_i nul correspond à des perturbations neutres (ni amplifiées, ni amorties). Les courbes de stabilité marginale partagent donc le domaine d'étude en des zones stables et des zones instables :

- Si $w_i < 0$ la perturbation est amortie
- Si $w_i > 0$ la perturbation est amplifiée

Les figures suivantes représentent les courbes de stabilité marginale pour un nombre e Weber fixé à 1, pour une inclinaison de 90° et trois différents valeurs de paramètre du contrôle, $\gamma_0 = \{0.1, 0.2, 0.4\}$. Nous remarquons que l'écoulement sur un plan vertical et approximativement plus stable, lorsque le paramètre du contrôle augmente et l'indice du comportement non newtonien (n) diminue.

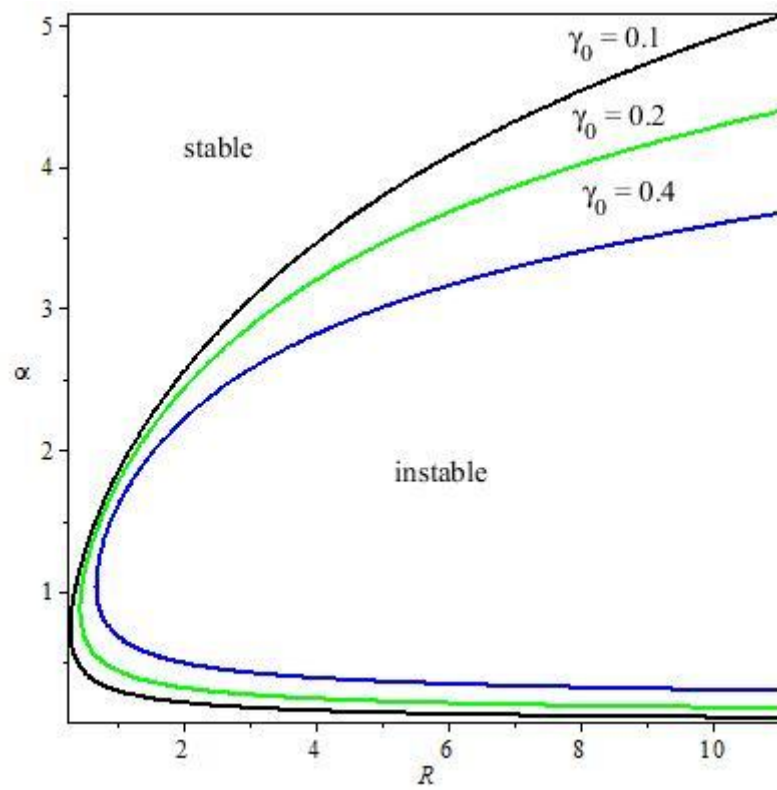


Figure III.1 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

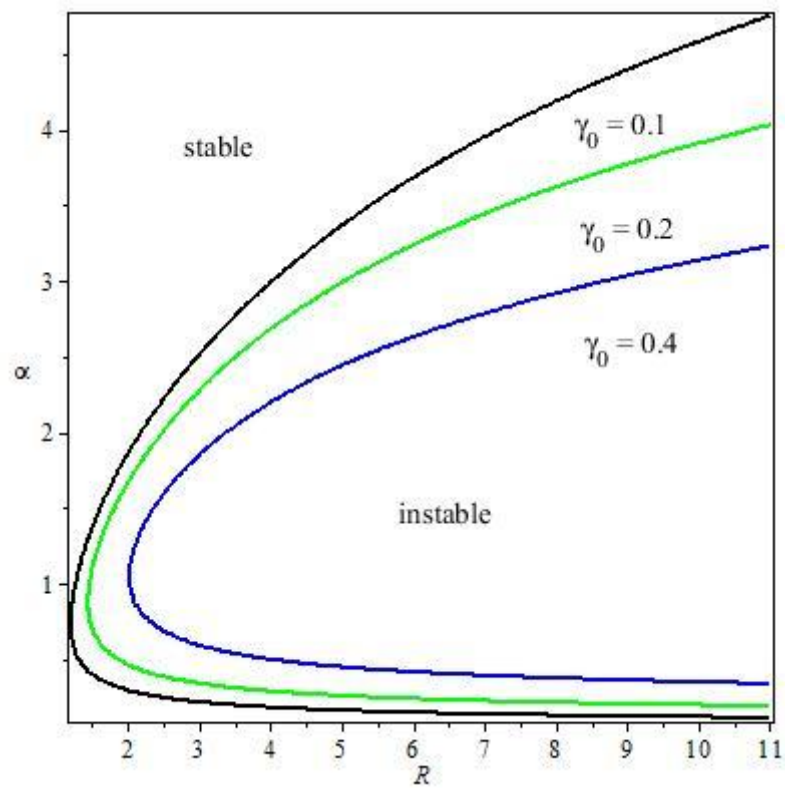


Figure III.2: diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90$, $n = 0.8$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

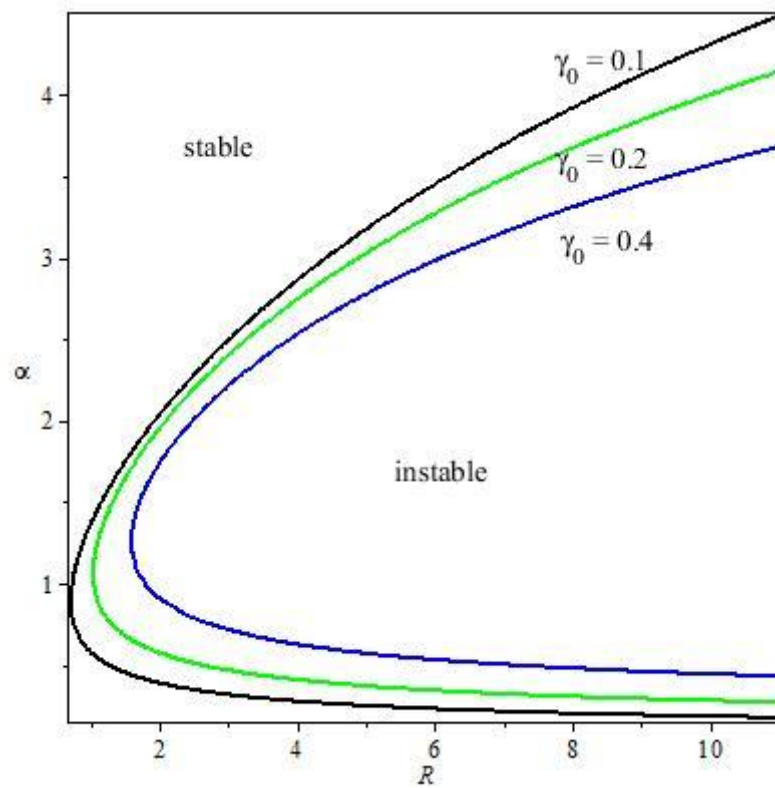


Figure III.3 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1.47$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noire), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

Chapitre III : Stabilité linéaire

Les figures suivantes représentent les courbes de stabilité marginale pour un nombre de paramètre de contrôle γ_0 fixé à 0.1, pour une inclinaison de 90° et trois différents valeurs de nombre de Weber, $We = \{1, 5, 10\}$. Nous remarquons que l'écoulement sur un plan vertical et approximativement plus stable, lorsque le nombre de Weber diminue et l'indice du comportement non newtonien (n) augmente.

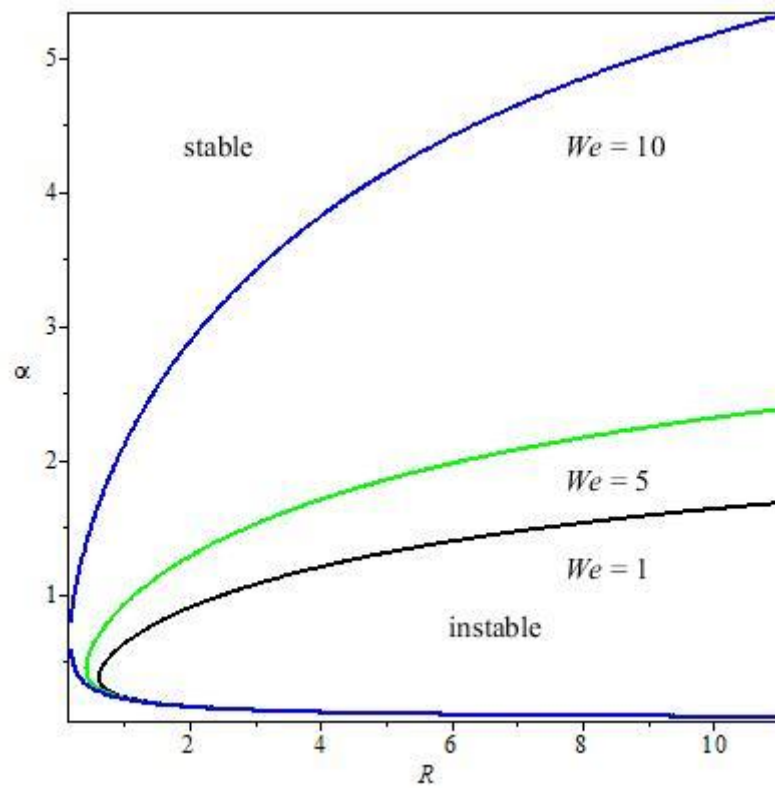


Figure III.4: diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noire), $We = 5$ (courbe verte), $We = 10$ (courbe bleue).

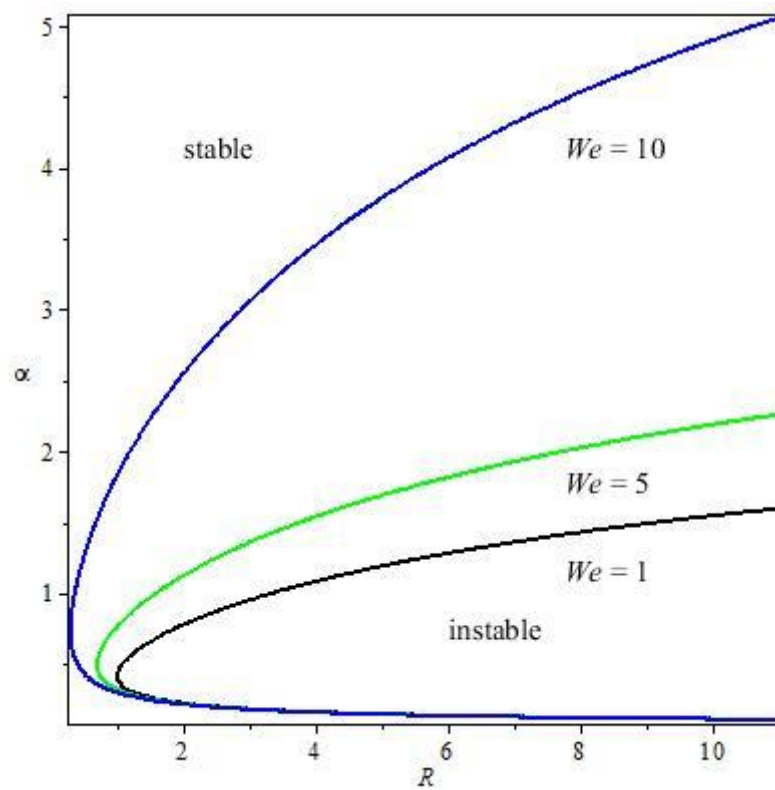


Figure III.5 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 0.8$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noire), $We = 5$ (courbe verte), $We = 10$ (courbe bleu).

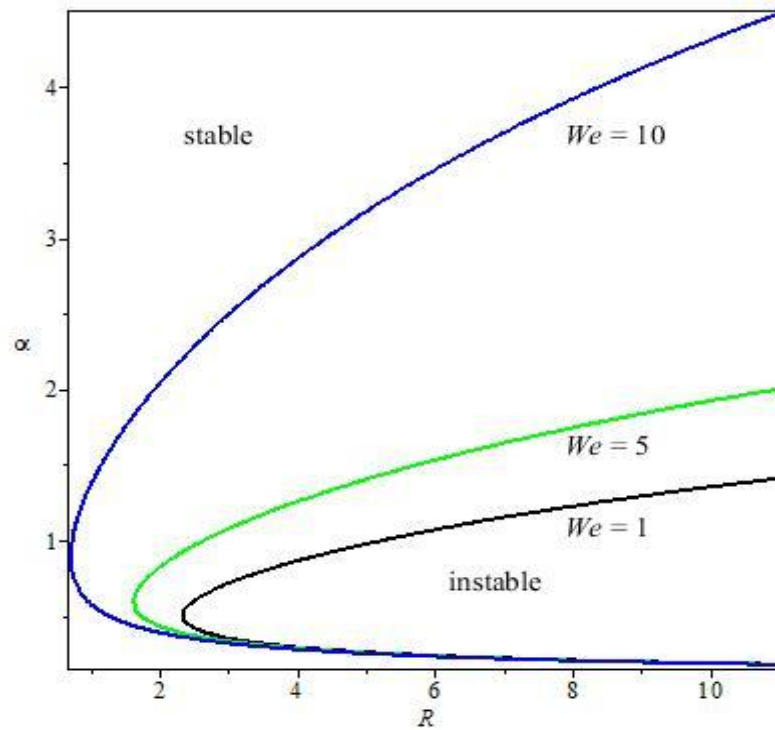


Figure III.6 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1.47$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$ (courbe noir), $We = 5$ (courbe verte), $We = 10$ (courbe bleu).

Les figures suivantes ont les mêmes caractéristiques de nombre adimensionnel que celles des figures (III.1, III.2, III.3), avec une inclinaison déferente $\beta = \cot 45^\circ$. Nous remarquons que l'écoulement est plus stable avec une inclinaison minimale.

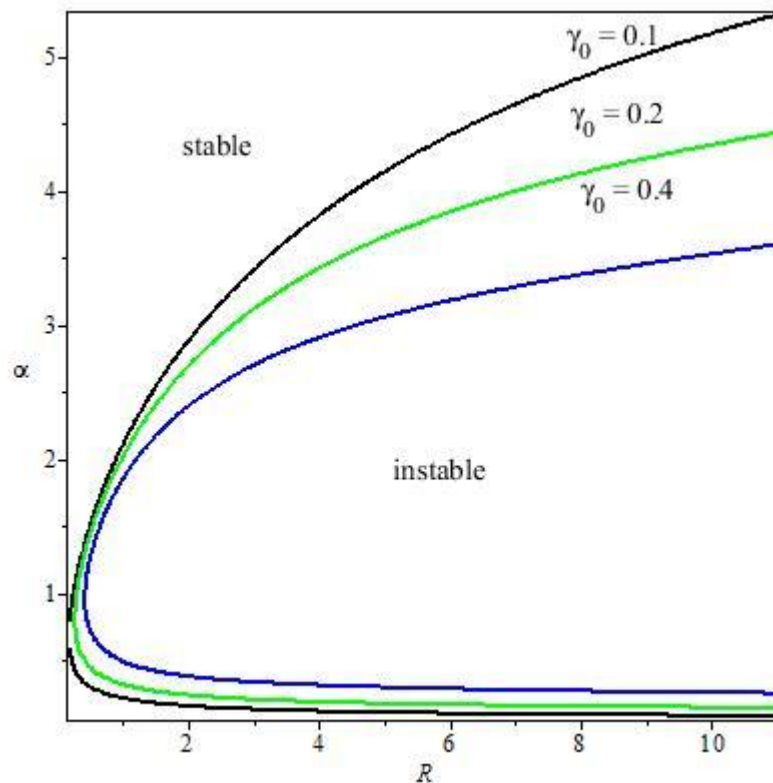


Figure III.7 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\beta = 45^\circ, n = 1, We = 1, \gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

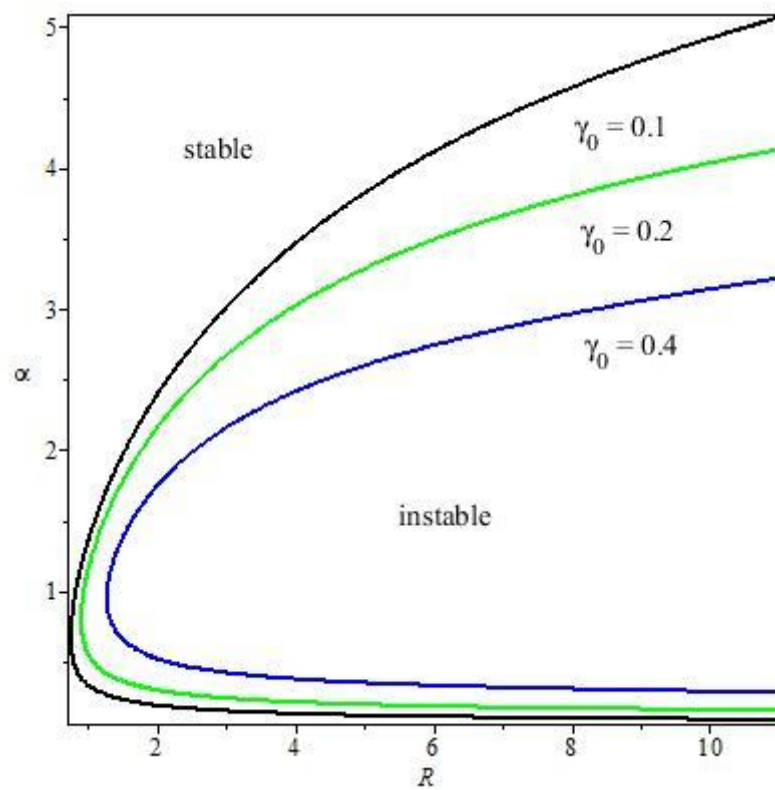


Figure III.8 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = \cot 45^\circ$, $n = 0.8$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

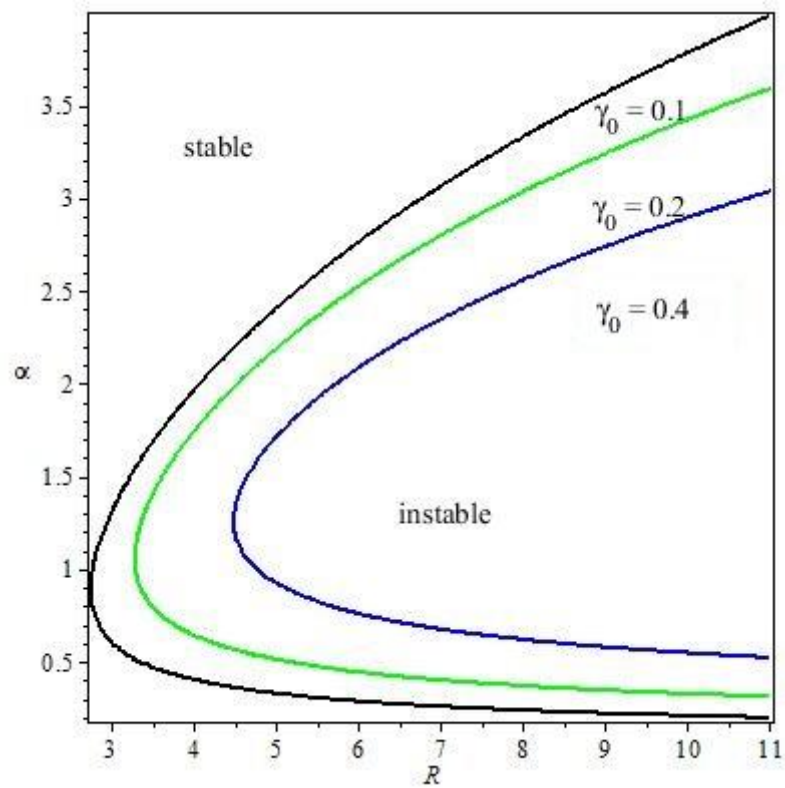


Figure III.9 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 45^\circ$, $n = 1.47$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0.1$ (courbe noire), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe verte), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

Chapitre III : Stabilité linéaire

Les deux figures suivantes représentent les courbes de stabilité marginale pour un nombre de Weber fixé à 1, pour une inclinaison de 90° et trois différentes valeurs de l'indice du comportement non newtonien $n = \{0.8, 1, 1.47\}$. Nous remarquons que l'écoulement sur un plan vertical est approximativement plus stable, lorsque le paramètre du contrôle γ_0 diminue et l'indice du comportement non newtonien (n) diminue.

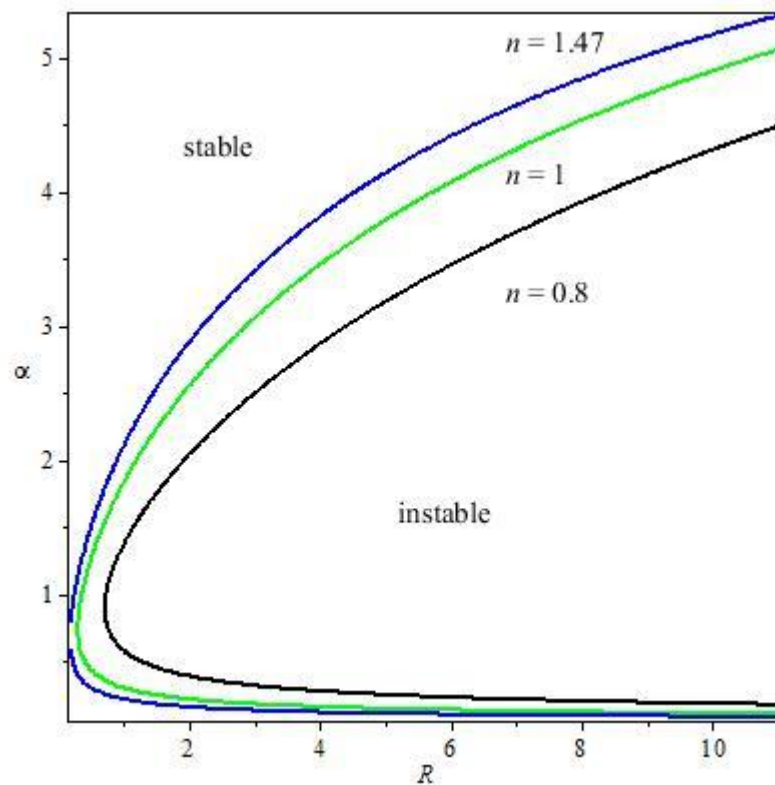


Figure III.10 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re\{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma_0 = 0.1$, $We = 1$, $n = 0.8$ (courbe noire), $n = 1$ (courbe verte), $n = 1.47$ (courbe bleue).

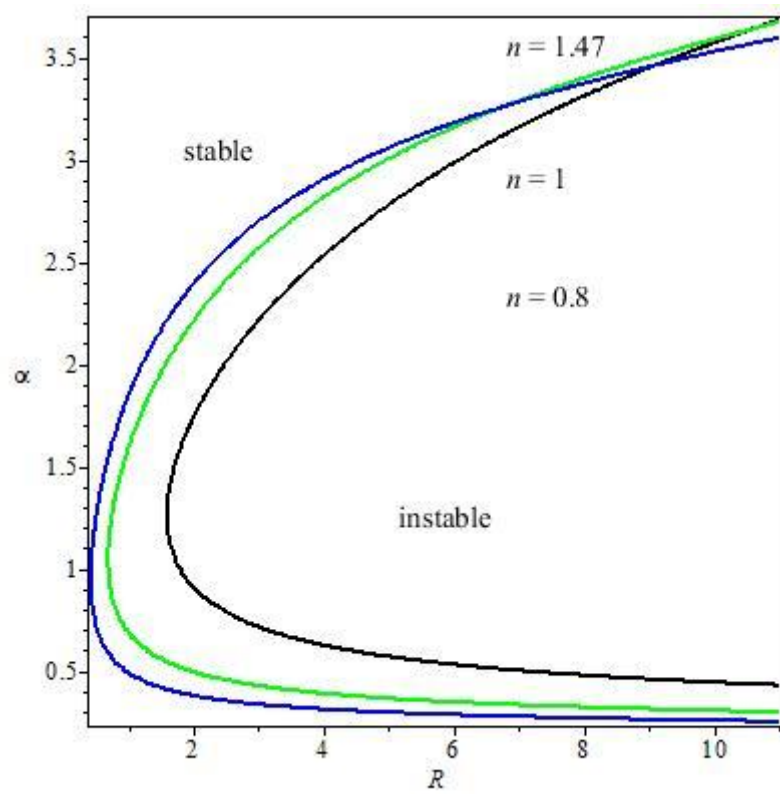


Figure III.11 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{0..6\}$, $Re\{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma_0 = 0.4$, $We = 1$, $n = 0.8$ (courbe noire), $n = 1$ (courbe verte), $n = 1.47$ (courbe bleu).

Chapitre III : Stabilité linéaire

La figure suivante a les mêmes caractéristiques de nombre adimensionnel que celles des figures (III.1, III.2, III.3), on rajoutons une courbe avec un choix de contrôle différent $\gamma_0 = 0$. Nous remarquons que à $\gamma_0 = 0$, il est primordial de mentionner que cette valeur désigne une zone à une instabilité maximale.

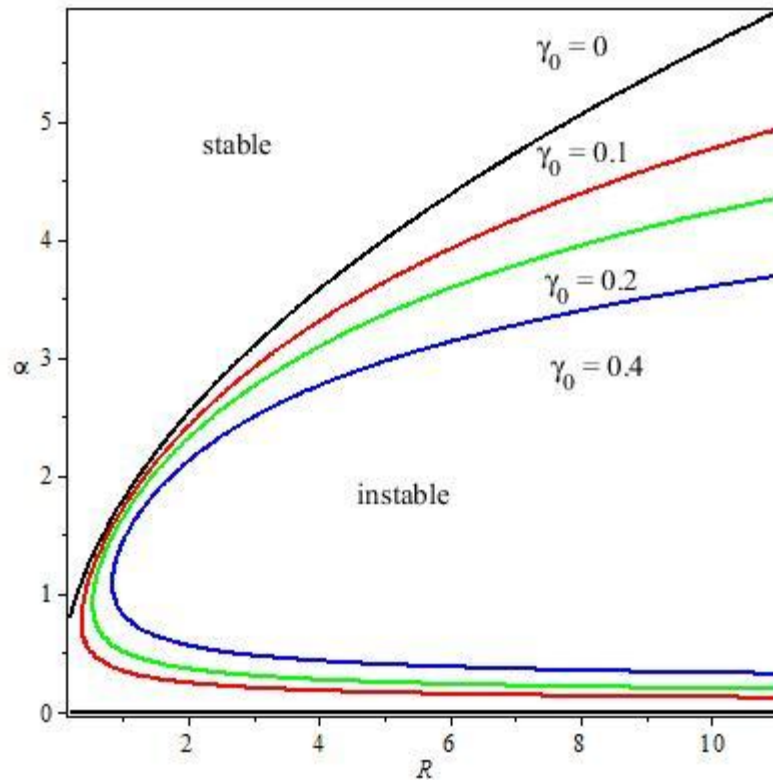


Figure III.12 : diagramme de stabilité marginale dans le plan (α, R) pour $\alpha = \{2..6\}$, $Re = \{0.2..11\}$, $\beta = 90^\circ$, $n = 1$, $We = 1$, $\gamma_0 = 0$ (courbe noir), $\gamma_0 = 0.1$ (courbe rouge), $\gamma_0 = 0.2$ (courbe vert), $\gamma_0 = 0.4$ (courbe bleu).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu asymptotiquement le problème linéaire dans le cas de grandes ondes ce qui nous a permis de donner explicitement le seuil d'instabilité de l'écoulement, à travers les courbes de stabilité marginale qui ont été réalisées grâce au logiciel Maple.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à la compréhension globale du problème de stabilité linéaire du film liquide non-newtonien, s'écoulant par gravité le long d'un plan incliné en présence d'actionneurs. L'objectif principal de ce travail consiste à dériver des équations d'évolution qui régissent sur la dynamique non-linéaire du film.

La procédure de modalisation se base sur le développement asymptotique justifié par la théorie des grandes ondes et l'approche des résidus pondérés.

Cette démarche nous a permis de :

- Etablir les équations de mouvement et écrire les conditions aux limites d'un écoulement incompressible visqueux à une surface libre.
- Comprendre la notion d'adimensionnalisation d'un système d'équations.
- Résoudre le système d'équations en utilisant une approche ondes longues similaire à celle développée par Benney pour un écoulement d'un fluide non-newtonien visqueux.
- Tracer des courbes du profil de vitesse de base.
- Construction d'un modèle d'ordre un, de deux équations d'évolutions en h et q , ainsi d'un modèle d'une seule équation dite type Benney.
- Tracer des courbes de stabilité marginale qui délimitent les zones de stabilité et d'instabilité de l'écoulement.

Nous constatons, que la stabilité ou l'instabilité d'un écoulement de film liquide non-newtonien, dépend de la variation des paramètres caractéristiques. Notons que :

- Une inclinaison minimale du plan, fait augmenter la zone de stabilité.
- Un paramètre de contrôle nul, nous donne une instabilité maximale.

Enfin, dans l'industrie ou la régularité de l'interface pour garantir un produit fini de qualité, il est systématiquement important de prendre en évidence l'effet stabilisant du contrôle.

Perspectives :

- Compléter l'étude pour le cas d'un contrôle non homogène.
- Étudier le faiblement non linéaire en utilisant le modèle d'ordre un.

Conclusion générale

- Déterminer le modèle à l'ordre deux afin d'étudier la dynamique non linéaire de l'écoulement.
- Etudier d'autres types de contrôle.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1]- P.L. Kapitza and S.P. Kapitza. Wave flow of thin liquid layers. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 19 :105–120,1949.

[2]- D. J. Benney, “Long waves on liquid films,” J. Math. Phys.45,150–155(1966).

[3]- tailby, S,R. and portalski, S.,(1960) “The hydrodynamics of folwingon vertical liquids films surfaceee” ,trans. Instn. Chem. Engrs. , 38, 324-330.

[4]- wilkes, J.O. and Nedderman, P . (1962) “ The measurement of velocities in thin films of liquud” , Chem. Eng. Sci., 17 ,177-187.

[5]- protalsky, S., velocities in film flow of liquids on vertical plates”,Chem. Eng. Sci.,19, 575-582 (1964).

[6]- stainthorp, F.P., Allen, J.M. (1965) The development of ripples on the inside of a liquid film moving inside a vertical tube. Trans. Inst. Chem. Eng.43, 85-91.

[7]- Jones, L.O. and Whitaker S., (1966) “ Expirmanta studyof falling liquidfilms”, AICHE Journal,12, 525-529.

[8]- Nemet, I., Sher, v. (1969) “hydrodynamics of thin liquid films flowing down a vertical plane” ,Chin. Acad. Sci. Hung., 60, 103 -121./ Karntz, W.B.,S.L: (1971)stability of thin liquid films flowing downa plane.Ind. Eng. Chem. Res. 10, 91-101.

[9]- protalsky, S. and Clegg, AJ.,”An experimental study of falling liquid films”,chem. Eng.Sci., 27,1257 265 (1972).

[10]- Claude Louis Marie Naveir,Mémoire de l’académie Royale des Sciences ,paris,vol.1823 <https://fr.m.wikipedia.org> .

[11]-Peter Smith Stevens (trad.J.Matricon,D.Morello),les formes dans la nature « science ouveret »1976 , <https://fr.m.wikipedia.org>.

Références bibliographiques

- [12]-(de) 'Mortiz Weber', Wikipedia, 22 septembre 2015, <https://fr.m.wikipedia.org>.
- [13]-V.Y. Shkadov. Wave conditions in the flow of thin layer of a viscous liquid under the action of gravity. *Azv.Akad.Nauk SSSRMekh.Zhidk.Gaza1*, pages 43.51, 1967.
- [14]-C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur.Phys.J.B*, 15:357.369, 2000.
- [15]-A. Djema M. Amaouche and L. Bourdache. A modified shkadox's model for thin film flow of a power law fluid over an inclined surface. *C.R.Mecanique*, 337:48.52, 2009.
- [16]-M. Amaouche A. Djema and H. Ait Abderrahmane. Film flow for power-law fluids : Modelling and linear stability. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 34 :70.84, 2012.
- [17]-C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted residual approximations. *Phys.Fluids*, 14 :170.183, 2002.
- [18]-B.S. Dandapat and A. Mukhopadhyay. Waves on the surface of a falling power-law fluid film. *Int.J.Non-linearMech.*, 38:21.38, 2003.
- [19]-D. Tseluiko, M. G. Blyth, D. T. Papageorgiou, and J.-M. Vanden-Broeck, "Electrified viscous thin film flow over topography," *J. Fluid Mech.* 597, 449–475 (2008).
- [20]-R. Gharraei, M. Hemayatkhah, S. B. Islami, and E. Esmaeilzadeh, "An experimental investigation on the developing wavy falling film in the presence of electrohydrodynamic conduction phenomenon," *Exp. Therm. Fluid Sci.* 60, 35–44 (2015).
- [21]-T. B. Benjamin, "Wave formation in laminar flow down an inclined plane," *J. Fluid Mech.* 2, 554–573 (1957).
- [22]-C.-S. Yih, "Stability of liquid flow down an inclined plane," *Phys. Fluids* 6, 321–334 (1963).

Résumé

L'écoulement d'un film liquide non-newtonien le long d'un plan incliné est un prototype d'écoulement ouvert avec surface libre, caractérisé par la présence d'ondes solitaires et d'une suite bien définie d'instabilités secondaires conduisant au chaos spatio-temporel.

L'objectif de ce mémoire est de développer un modèle mathématique permettant une description à la fois qualitative et quantitative des instabilités secondaires bidimensionnelle du film.

La démarche suivie combine une méthode aux résidus pondérés sous l'hypothèse des grandes ondes, dans la direction normale au film à un développement en gradients, ceci afin d'éliminer les degrés de liberté esclaves de l'épaisseur h du film.

Mots clés : Ecoulement ; Instabilité ; Fluides non-Newtoniens ; Film ; Modèle.

Abstract

The flow of a non-Newtonian liquid film along an inclined plane is a prototype of open flow with free surface, characterized by the presence of solitary waves and a well-defined sequence of secondary instabilities leading to space-time chaos.

The objective of this thesis is to develop a model allowing a both qualitative and quantitative description of two-dimensional secondary instabilities of the film.

The approach used combines a weight residue method under the hypothesis of large waves, in the direction normal to the film, with gradient development, in order to eliminate the slave degrees of freedom of the film thickness h .

Keywords: Flow; Instability; Non-Newtonian Fluids; Film; Model