

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA-BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER
En Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique

Thème
LA CALIBRATION LINEAIRE

Présenté par :

M^{elle} Yahiaoui Wassila

M^{elle} Mebarki Silia

Soutenu le 01/10/2020 devant le jury suivant :

Président	Mr F. BOUHMILA	M.C.A	U.A.M Béjaïa
Examinatrice	Mme S. TAS	Professeur	U.A.M Béjaïa
Promotrice	Mme H. BECHIR	M.C.A	U.A.M Béjaïa

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude envers notre encadreur : Mme H. BECHIR pour son soutien et la confiance qu'elle nous a accordées, en nous proposant ce sujet et pour son aide. En nous écoutant patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et de l'avancement de notre travail, elle nous a permis de synthétiser, comprendre et expliquer un grand nombre de questions.

Nos remerciements sont aussi adressés à Mme S. TAS et Mr F. BOUHMILA qui nous font l'honneur de juger notre travail.

Merci à nos parents et à nos frères et sœurs pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, de nous avoir appris à penser et de nous avoir encouragées sans cesse pour aller plus loin, sans oublier tous ceux qui ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loin.

Merci à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques en particulier.

DEDICACE

Yahiaoui Wassila

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs, qui m'ont soutenue durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et mes soeurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

DEDICACE

Mebarki Silia

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs, qui m'ont soutenue durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes chers soeurs et frères :Kahina, Thiziri, Massiva, Takfarinas, Aziz, Farok.

Mes chers cousines : Sihem et Hakima.

Ma cher amie : Sara Maouchi.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous les étudiants de ma promo et mes amies.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Problèmes mal posés	4
1.1 Préliminaires	4
1.2 Problèmes mal posés	6
1.3 Exemples de problèmes mal posés	7
1.4 Méthode de régularisation	9
1.4.1 Méthode de Tikhonov	10
1.4.2 La méthode de Landweber	10
1.4.3 Méthode de Morozov	11
1.4.4 La méthode de décomposition en valeurs singulières	11
2 Calibration lineaire	15
2.1 Motivation pratique	15
2.1.1 Neurosciences	15
2.1.2 La pharmacologie	16
2.1.3 La transmission de signal	16
2.1.4 La Chimométrie	16
2.2 L'énoncé de problème	17
2.3 Estimation de l'opérateur et de deuxième membre	18
2.3.1 Construction de l'estimateur	18
2.3.2 Estimation de x	26
2.4 Corollaire 1	32
2.5 Corollaire 2	33
2.6 Corollaire 3	33
3 Exemple numérique	35
Conclusion	41

INTRODUCTION

La calibration, également appelée régression inverse. Est un problème classique qui apparaît souvent dans une configuration de régression.

D'une manière générale, la calibration est un processus pour lequel l'instrument de mesure à étalonner est comparé à un autre de référence plus précis. Aujourd'hui, dans le monde concurrentiel, le service (les entreprises industrielles,...) doit répondre de façon efficace aux besoins de ses usagers et clients, c'est pour cela que la calibration est importante.

L'étalon de référence n'est pas forcément un instrument, mais il peut être un produit chimique, masse et pièce mécanique, ou un étalon physique, liquide ou gazeux ; et des erreurs sont introduites dans toutes les mesures.

Voici un exemple que nous rencontrons dans la vie quotidienne :

Exemple :

Lorsque vous conduisez votre voiture, sur le compteur de vitesse, 120 Km/h est affiché, ensuite un policier vous arrête parce que la limite de vitesse ne doit pas dépasser 100km/h. L'agent vous donne un billet qui montre que vous conduisez à 123km/h calculée par le radar. Ainsi ; votre compteur de vitesse a une erreur de 3km/h, donc la calibration est essentielle pour assurer la qualité des produits finis.

Résoudre un problème de calibration linéaire revient à résoudre un problème inverse mal posé linéaire $Tx = Y$; où T est un opérateur compact, donc d'inverse non continu. D'après le mathématicien français J.Hadamard un problème est dit mal posé si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée :

- L'existence,
- L'unicité,

- La stabilité de la solution.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la calibration linéaire. Notre intérêt porte sur les travaux de Cuevas et al.

Dans le premier chapitre nous présenterons les principaux concepts des problèmes inverses mal posés et certaines méthodes de régularisations, en développant la méthode de la décomposition en valeur singulière illustrée par un exemple. Cet intérêt pour les problèmes mal posés est dû au fait que la calibration finit par y aboutir.

Dans le second chapitre nous décrirons quelques domaines, pour lesquels l'approche stochastique joue un rôle très important dans certaines situations pratiques; ensuite nous nous intéresserons principalement à estimer la solution de l'équation $Tx = Y$, car Y n'est connue qu'approximativement. Donc l'estimation se fait en deux étapes :

La première consiste à estimer T , dont un opérateur sous Jacent \widehat{T}_N est construit.

Ensuite, dans la deuxième étape l'intérêt se porte sur l'équation $\widehat{T}_N x = \overline{Y}_n$ pour pouvoir estimer la solution approchée x , où \overline{Y}_n est une valeur approchée particulière de Y , puis des inégalités exponentielles de type Bernstein Frechet sont établies.

Nous acheverons ce chapitre en contruisant un intervalle de confiance pour la solution exacte.

Enfin le troisième et le dernier chapitre présentera un exemple numérique qui vérifie la validité de l'approche.

Nous terminerons ce travail par une conclusion.

CHAPITRE 1

PROBLEMES MAL POSES

1.1 Préliminaires

Un problème inverse est l'opposé d'un problème direct, pour lequel nous cherchons une solution exacte ou approchée à partir des paramètres connus.

Les problèmes inverses interviennent dans plusieurs domaines et nous pouvons citer parmi eux :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X),
- la chimie (détermination des constantes de réaction),
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identifications des perméabilités hydrauliques),
- le traitement d'image (restauration d'images floues),
- La mécanique .

Selon Nashed[12] ; trois catégories de méthodes de résolution des problèmes inverses se présentent :

- Les méthodes extraites de l'analyse mathématique et de la théorie des fonctions, elles transforment un problème mal posé en un problème bien posé, donc pour décrire les variables et leurs topologies, nous agissons sur les espaces utilisés.
- La réalisation des problèmes mal posés due initialement à Tikhonov[15], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solutions, donc le problème initial (mal posé) doit être remplacé par un problème approché bien posé.
- Les méthodes d'inversions stochastiques, développées par Tarantola[14], dans lesquelles toutes les variables sont supposées aléatoires (mesurables), nous permet de représenter les incertitudes.

Nombreuses sont les causes d'incertitudes de problèmes inverses ; on cite :

- L'origine des données est expérimentale, donc les erreurs sont collectées en nombre fini, même si le modèle mathématique les décrit en terme de fonctions.
- Des interpolations effectuées d'un modèle continu, à cause de la discrétisation du modèle mathématique.
- Le modèle lui même repose sur l'idéalisation d'une situation physique et d'hypothèses simplificatrices.

En raison de cette sensibilité des problèmes inverses, nous ne cherchons plus la solution exacte, mais plutôt une solution approchée.

Le problème direct consiste à calculer la réponse Y du système $Tx = Y$ à partir de la donnée x . Au sens de Hadamard une minorité de cas de problèmes directs sont mal posés.

Si le problème est relatif à un phénomène physique, une condition nécessaire devrait se réaliser, elle s'agit de la continuité de la solution par rapport aux données.

Les problèmes mal posés ont longtemps été ignorés dans la physique mathématique.

En terme mathématique ; résoudre un problème inverse souvent conduit pratiquement à la résolution d'une équation linéaire dont la linéarité est exprimée par une matrice étant obtenue par discrétisation d'un opérateur intégral.

Les problèmes inverses se répartissent en deux catégories : problèmes inverses bien posés, problèmes inverses mal posés.

Les deux grands groupes des problèmes inverses sont :

Problèmes linéaires :

Ils se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret.

Le recours à l'analyse fonctionnelle et à l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et des algorithmes efficaces.

Ainsi, nous citons quelques exemples qui présentent ces problèmes : échographie, traitement d'image,... qui se ramènent à la résolution d'une équation de première espèce.

Problèmes non linéaires :

Ils peuvent se diviser en deux catégories selon que le paramètre que l'on cherche à estimer : un vecteur ou une fonction. Ces problèmes sont plus difficiles et il existe moins de résultats généraux.

L'étude des problèmes inverses est ardue du fait de la possibilité d'avoir plusieurs solutions, pour cela nous ajoutons certaines conditions pour assurer l'unicité de la solution, nous réservons généralement le qualitatif d'inversion aux problèmes d'inversions mal posés.

1.2 Problèmes mal posés

La notion d'un problème mathématique mal posé est apparue dans la discussion du mathématicien français J.Hadamard[7] dans son livre Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equation en 1902. En 1932 il a introduit le premier problème mal posé, il s'agissait de la construction de la solution d'un problème de Cauchy à partir de la condition initiale.

Selon ce mathématicien, un problème est dit bien posé, si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

- La solution existe : (ie $\forall Y \in K$; il existe une solution $x \in H$ telle que : $Tx = Y$),
- La solution est unique : T doit être injectif (ie $\forall x_1, x_2 \in H : Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$),
- la stabilité de la solution : (une petite perturbation sur Y peut mener à des solutions complètement différentes).

La non réalisation de l'une de ces propriétés définit un problème mal posé. Plusieurs mathématiciens ont oeuvré pour développer la théorie et les méthodes de résolutions des problèmes mal posés, parmi eux J.Hadamard[7], TiKhonov[15]...

La solution existe, unique et stable c'est à dire elle dépend continûment des données initiales (l'opérateur inverse de T doit être continu), la non existence d'une solution se pose lorsque l'opérateur T n'est pas surjectif dans K et la non unicité si T n'est pas injectif, mais ça reste des difficultés rectifiables.

C'est la stabilité de la solution, qui pose un souci car une légère perturbation sur la donnée Y peut mener à des solutions x radicalement différentes.

Définition :

Un opérateur linéaire continu T , d'un espace de Hilbert H dans un autre espace de Hilbert K , est une application linéaire continue de H dans K , c'est-à-dire elle vérifie :

- $\forall u \in H; Tu \in K$,
- $\forall (u, v) \in H \times H; \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$
- $\exists M > 0; \forall u \in H, \|Tu\|_K = M\|u\|_H$

La plus petite valeur de M représente la norme de l'opérateur T , qui s'écrit sous la forme :

$$\|T\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Tu\|_K}{\|u\|_H}$$

Définition :

Soient H et K deux espaces de Hilbert. Un problème inverse s'exprime sous la forme :

$$Tx = Y \tag{1.1}$$

où $T : H \rightarrow K$ est un opérateur linéaire.

1.3 Exemples de problèmes mal posés

Exemple 1 : "Equation intégrale de première espèce"

Un exemple classique de problème mal posé, est la dérivation d'une fonction $g \in L^2[a, b]$ connue approximativement.

Soit

$$K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow L^2([a, b]) \times L^2([c, d])$$

une fonction.

Nous considérons l'équation intégrale de première espèce associée à $K(x, y)$ et à la donnée g ,

$$\int_c^d K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (1.2)$$

Il s'agit d'une intégrale dite de Fredholm que l'on trouve, lorsqu'on s'intéresse au problème inverse de la diffusion de chaleur.

Supposons que $K(x, y)$ est continûment dérivable par rapport à x sur $[a, b]$, et donc (1.2) l'est quelque soit $f \in L^2([c, d])$;

Donc

Si g n'est pas dérivable sur $[c, d]$, l'équation (1.2) ne possède aucune solution.

Maintenant, supposons que l'équation (1.2) possède une unique solution.

Nous considérons une petite perturbation de la forme :

$$f^*(t) = f(t) + A \sin(\omega t)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f - f^*\|_{L^2([c, d])}^2 &= \|A \sin(\omega t)\|_{L^2([c, d])}^2 \\ &= \int_c^d A^2 \sin^2(\omega t) dt \end{aligned}$$

On a :

$$\sin^2(\omega t) = \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f - f^*\|_{L^2([c, d])} &= A^2 \int_c^d \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{A^2}{2} \left[d - c - \frac{(\sin(2\omega d) - \sin(2\omega c))}{2\omega} \right] \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{\omega d \rightarrow 0} d \frac{\sin(2\omega d) - \sin(2\omega c)}{2\omega d} = 0$$

D'autre part

$$\|Kf - Kf^*\|_{L^2([c, d])}^2 = \|g - g^*\|_{L^2([c, d])}^2 \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \|Kf - Kf^*\|_{L^2([c,d])}^2 &= \int_a^b \left\{ \int_c^d A \sin(\omega t) dt \right\}^2 ds \\ &= \frac{A^2}{\omega^2} [\cos(\omega c) - \cos(\omega d)]^2 (b - a) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|Kf - Kf^*\|_{L^2([c,d])}^2 = 0$$

Pour ω suffisamment grand, la norme (1.3) est petite quelque soit la valeur de T (fixée au départ), ce qui veut dire qu'on peut trouver une perturbation de norme finie et arbitraire de la solution qui induit une perturbation aussi petite que l'on veut sur la donnée g .

Cela signifie que lorsque la solution de (1.2) existe, elle ne dépend pas continûment du second membre g , donc une petite erreur sur g peut mener à une grande erreur sur la forme de la fonction inconnue.

D'où le problème (1.2) est mal posé :

- Il n'admet pas de solution,
- Il admet une unique solution non nécessairement stable.

Exemple 2 : "Problème mal conditionné"

Soit le système linéaire (S) défini par :

$$Tx = Y$$

Où $T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^4$ (vecteur colonne)

Tel que :

$$T = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

et

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T est inversible, alors

$$x = T^{-1}Y$$

D'où

$$x = \begin{pmatrix} -84 \\ 139 \\ -34 \\ 20 \end{pmatrix}$$

est la solution du système (S).

$$T^* = T + \Delta I = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10.1 \end{bmatrix}$$

Y est toujours le même.

T^* est inversible ; alors il vient que :

$$x^* = \begin{pmatrix} -74 \\ 122.333 \\ -29 \\ 16.6667 \end{pmatrix}$$

est la solution du système linéaire : $T^*x = Y$.

Nous remarquons qu'une petite perturbation sur les coefficients de la matrice T mène à deux solutions totalement différentes. Donc ce problème est mal posé, car la matrice T est mal conditionnée.

Remarques :

Une matrice T est dite mal conditionnée si :

$$Cond_p(T) = \|T\|_p \|T^{-1}\|_p \gg 1$$

$Cond_p(T)$ est appelé conditionnement du système (S) suivant la norme p utilisée.

Le système (S) peut être perturbé ; trois cas sont distingués :

- T est perturbé ; b est exact,
- T est exact ; b est perturbé,
- T et b sont perturbés.

1.4 Méthode de régularisation

Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé, de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité.

Le but de ces méthodes est de trouver le signal (ou la fonction) x en utilisant la donnée Y . Ceci n'est pas toujours possible car la valeur exacte de Y n'est qu'une mesure approximative.

Ainsi, on cherche réellement la solution d'une équation qui s'écrit sous la forme $Y = Tx + e$, où e représente le bruit (erreur) qui soit la plus proche de l'équation $Y = Tx$; c'est à dire que plus l'erreur est petite, plus la solution estimée est proche de la solution exacte.

Nous abordons dans cette partie, le principe de quelques méthodes de régularisation les plus courantes, nous citons la méthode de Tikhonov, la méthode de Morozov... ; au sens où l'opérateur linéaire T n'est pas continûment inversible, il existe deux types de méthodes de régularisation.

Méthodes directes :

Comme la méthode des moindres carrés, méthode de Tikhonov, méthode de Lavrentiev, méthode de quasi-réversibilité et la méthode de la décomposition en valeur singulière.

Méthodes itératives :

Nous citons la méthode de Landweber et la procédure semi itérative.

Remarque :

Soit l'opérateur $Tx = Y$, où T est un opérateur linéaire compact. Un tel problème est toujours mal posé, car un opérateur compact n'est pas continûment inversible en dimension infinie.

Définition :

Soient H et K deux espaces de Hilbert, l'opérateur linéaire $T : H \rightarrow K$ est dit compact, si l'image de tout sous ensemble borné de H est relativement compact dans K . Soit $\hat{y} \in K$ donnée, cherchons $\hat{x} \in H$ solution de $Tx = Y$.

1.4.1 Méthode de Tikhonov

(Voir Tikhonov[15])

C'est une méthode développée pour pouvoir estimer une gamme de fonctions, qui est connue aussi bien en statistiques qu'en analyse numérique.

Le principe de cette méthode est de résoudre le problème inverse mal posé $Tx = Y$ en choisissant x^α comme solution qui minimise le problème régularisé :

$$J_\alpha = \|Tx - Y\|_K^2 + \alpha \|x\|_H^2 \quad (1.4)$$

Où J_α est appelé la fonctionnelle de Tikhonov et α est le paramètre de régularisation.

Ce problème admet une unique solution x^α convergente vers la solution exacte \hat{x} lorsque α tend vers 0, et qui dépend continûment de Y ; Ce problème est donc bien posé.

Si α est choisi trop petit, J_α sera proche de $T\hat{x} = \hat{Y}$, donc le problème de départ et le problème régularisé seront proches, donc tous les deux seront mal posés.

Si α est trop grand le problème régularisé ne sert qu'à forcer x à être proche de \hat{x} , donc le choix optimal de α est délicat.

1.4.2 La méthode de Landweber

(voir Landweber[9])

Une méthode itérative est une méthode qui consiste à construire une suite de solutions approchées qui converge vers la solution désirée.

La situation est plus compliquée en présence de bruit dans le contexte des problèmes inverses ; car la suite construite par la méthode itérative ne converge pas vers une solution du problème de départ.

La méthode de Landweber a pour principale avantage de se prêter à une analyse simple. Cette méthode converge trop lentement pour être utilisable en pratique.

Landweber a proposé de réécrire l'équation $Tx = Y$ sous la forme :

$$x = (\mathbf{I} - aT^*T)x + aT^*Y$$

et pour a strictement positif, on a le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x^0 = 0 \\ x^m = (\mathbf{I} - aT^*T)x^{m-1} + aT^*Y; \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

où T^* est l'opérateur adjoint de T .

1.4.3 Méthode de Morozov

D'après Krisch, le principe de la méthode de Morozov, est basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

Le principe de décalage de Morozov est facile à étudier théoriquement parce qu'il peut être formulé sous forme de méthodes de régularisation linéaires.

On expose la plus classique "The discrepancy principal", c'est à dire principe de décalage Morozov.

Cette méthode consiste à chercher la solution de Tikhonov qui minimise la fonction (1.4), en ajoutant la contrainte :

$$\|Tx^{\alpha,\delta} - Y^\delta\| = \delta$$

telle que :

$$\alpha = \alpha(\delta) > 0$$

Le choix du paramètre α par la méthode de décalage garantit que l'erreur est δ et que α est très petit.

L'ordre de convergence $O(\sqrt{\delta})$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

1.4.4 La méthode de décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (singular value decomposition en anglais) est souvent abrégée SVD.

La décomposition a été initiée par Bel-Tramie, c'est l'une des approches utilisées pour étudier un problème inverse mal conditionné. Elle est devenue un outil numérique depuis la fin de 1960, lorsque G.Golub a montré comment la calculer de manière stable et efficace.

Remarque :

La SVD est une sorte de diagonalisation qui permet en particulier de résoudre les problèmes aux moindres carrés.

Nous énonçons le théorème dans le cas des matrices réelles :

Théorème :

Soit T une matrice de dimension $m \times n$, T peut être factorisée de la manière suivante :

$$T = USV^t$$

Avec :

U est une matrice carrée orthogonale de dimension $m \times m$:

$$U^tU = UU^t = \mathbf{I}_m; \quad U = (U_1, \dots, U_m)$$

V est aussi une matrice carrée orthogonale de dimension $n \times n$:

$$V^tV = VV^t = \mathbf{I}_n; \quad V = (V_1, \dots, V_n)$$

S est une matrice diagonale de dimension $m \times n$ qui contient des éléments diagonaux strictement positifs dites "valeurs singulières", $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > \sigma_r > 0$

$$S = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$S_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

Composante par composante ; l'identité matricielle $T = USV^t$ devient :

$$Tv_j = \sigma_j u_j \text{ et } T^t U_j = \sigma_j v_j \quad \text{pour } i=1, \dots, r$$

et

$$T^t U_j = 0 \quad \text{pour } j=r+1, \dots, \max(m, n)$$

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{\max(m,n)} = 0;$$

On a :

$$\|T\|_2 = \|USV^t\|_2 = \|S\|_2 = \max(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \sigma_1$$

$$\|T\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2} = \sqrt{\text{tr}(T^t T)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

La matrice $T = USV^t$ admet une inversion ; alors :

le système $Tx = Y$ devient $USV^t x = Y$

donc

$$SV^t x = U^{-1}Y$$

et on obtient le nouveau système $T'x = Y'$, où :

$$T' = SV^t \text{ et } Y' = U^{-1}Y$$

Calcul de la SVD :

Nous pouvons calculer la SVD de T de la façon suivante :

- Calculer T^tT
- Calculer une décomposition en éléments propres $T = USV^t$.

Exemple :

Soit

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Premier pas :

$$T^tT = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Les valeurs et les vecteurs propres associés à cette matrice sont :

$$\lambda_1=4;$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=16;$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=2; \quad \sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=4;$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U_1=\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)TV_1; \quad U_2=\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)TV_2;$$

Donc

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$T = USV^t.$$

Donc pour résoudre le système $Tx=Y$; on procède de la manière suivante :

$$Tx = Y$$

$$USV^tx = Y$$

$$SV^t x = U^{-1}Y \quad \text{car } U \text{ est inversible}$$

Avec :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$SV^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

D'où la solution obtenue est :

$$x = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 2

CALIBRATION LINEAIRE

Le but de ce chapitre :

Dans ce chapitre nous décrivons quelques domaines pour lesquels l'approche stochastique joue un rôle très important dans certaines situations pratiques ; et nous établissons des inégalités exponentielles de types Bernstein et Fréchet pour la probabilité de la distance entre la solution exacte et la solution approchée d'un opérateur linéaire inconnue avec un second membre exacte, par une méthode stochastique qui calcule une solution approchée pour un problème de calibration, ce qui nous permet d'obtenir la convergence presque complète pour la suite de solutions approchées, et enfin nous contruisons un intervalle de confiance pour la solution exacte.

2.1 Motivation pratique

L'approche de plan expérimental fixe est très important dans les situations pratiques, on trouve une entrée $x(t)$ qui produit une sortie aléatoire $Y(t)$.

On décrit quelques exemples concrets :

2.1.1 Neurosciences

Etude scientifique du système nerveux.

Il existe au moins deux méthodes importantes en neurosciences ; la première est la méthodologie ou encore pince de tension qui a été initialement proposée par Marmot et Colte en 1940 ; puis développée et appliquée par Hodgkin et Kuxley.

Dans cette technique potentielle l'entrée considérée est une membrane cellulaire et la sortie correspondante est le flux du courant. Ce flux du courant est la somme du courant ionique et le courant de capacité.

La deuxième méthode apparaît dans les expériences de réponses évoquées. Des ondes cérébrales obtenues comme réponse à un stimulus variable contrôlé.

2.1.2 La pharmacologie

C'est un domaine essentiel de l'enseignement médical différent de la pharmacie qui fabrique et dispense de médicament. Dans ce domaine l'analyse de régression se fait dans un plan fixe. Ici la variable contrôlée est la quantité administrée qui peut être constante (donc une analyse de régression classique) ou bien variable (c'est à dire la quantité change); ce qui conduira dans ce cas à une configuration de régression fonctionnelle dans un plan expérimental fixe.

par exemple; en cardiologie expérimentale (voir Garcia-Dorado et al[6]) il est très intéressant d'analyser l'effet d'augmentation des doses d'un médicament dans les cardiomyocytes de rats adultes fraîchement isolés.

2.1.3 La transmission de signal

Dans la littérature sur la transmission de signal, nous utilisons le modèle linéaire fonctionnel :

$$Y_{iN}(t) = (Tx)_{iN}(t) + e_{iN}(t)$$

Où la sortie $Y(t)$ est le résultat de la somme d'un effet de flou sur l'entrée $x(t)$ et un processus de bruit aléatoire $e(t)$ (C'est l'erreur commise) (voir cuevas et al [3]) qui sont continues. L'objectif est d'estimer l'entrée à partir des observations données par la sortie.

Exemples :

Imagerie acoustique :

Une variation des caractéristiques nominales du milieu perturbe l'onde incidente connue (présence d'obstacles et de fissures, hétérogénéité). Dans le cas où ces variations sont connues; des méthodes classiques se révèlent lors du calcul de la perturbation subi par l'onde incidente (le problème est direct).

Réciproquement; des données supplémentaires fournies par la mesure du signal perturbé nous permet d'examiner la reconstruction d'une variation inconnue des caractéristiques nominales.

Dans ce cas le problème est dit problème inverse.

Tomographie :

Les domaines d'applications de la tomographie sont vastes; on cite : la médecine, géologie, l'astrophysique (tomographie sismique, tomographie électrostatique ou électromagnétique, tomographie par rayon X...)

2.1.4 La Chimométrie

La chimométrie est une discipline très appliquée, qui permet d'améliorer le contrôle et l'optimisation des procédés, elle est fondée sur la construction d'un modèle mathématique.

Ce domaine offre un énorme potentiel d'applicabilité des outils de régression fonctionnelle.

Une forte colinéarité des données est souvent présente, elle est expliquée par l'existence d'une structure fonctionnelle sous-jacente cachée.

Le développement d'outils de régression fonctionnelle fixe produirait des modèles alternatifs pour les problèmes de chimométrie basés sur un point fonctionnel (plutôt qu'une dimension finie) de vue.

2.2 L'énoncé de problème

Dans la régression linéaire simple ; nous travaillons sur deux variables quantitatives linéairement liées : Y qui est supposée une variable aléatoire endogène exprimée en fonction d'une autre variable x supposée mesurable avec précision (ie sans erreur).

Le modèle de plan expérimental fixe étudié ici est sous la forme :

$$Y_{iN}(t) = (Tx_{iN})(t) + e_{iN}(t) \quad (2.1)$$

où

$$T : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b]) \\ x \rightarrow Tx$$

et

$$Tx(t) = \int_a^b \mathbf{K}(t, s)x(s)ds \quad (2.2)$$

$$\int_a^b \int_a^b \mathbf{K}^2(t, s)dsdt < \infty \quad (2.3)$$

La formulation de nombreux problèmes classiques issus de différents domaines des sciences appliquées est réduite à résoudre l'équation intégrale (2.2).

Remarques :

L'opérateur T est compact ; ce qui implique la non existence de l'opérateur inverse (Voir Brezis[1]).

(Parfois nous omettons l'indice N dans x_{iN} et Y_{iN}).

Si

$$\mathbf{K}(t, s) = \mathbf{K}(s, t) \quad (2.4)$$

alors T est dit auto adjoint

L'équation intégrale peut s'écrire sous forme abstraite :

$$Tx = Y \quad (2.5)$$

Telle que l'opérateur T satisfait l'hypothèse suivante :

(\mathbf{H}_1) : T est compact, auto adjoint, symétrique et les fonctions propres normalisées φ_i de T correspondantes aux valeurs propres $\lambda_i \neq 0$, forment une base orthonormée en $L^2([a, b])$.

$\langle ., . \rangle$ désignera le produits intérieur de $L^2([a, b])$ et $\|.\|$ est la norme associée.

Dénotons par Y_{ex} la valeur exacte inconnue du second membre de (2.5) et par $x_{ex} \in L^2([a, b])$ qui satisfaisaient :

$$Tx_{ex} = Y_{ex}$$

(dont l'existence et l'unicité sont vérifiés)

Dans certaines catégories de problèmes appliqués, nous trouvons une classe dans laquelle T n'est connue qu'en certains points et le deuxième membre n'est connu qu'approximativement. Donc pour traiter une telle situation nous considérons le cadre probabiliste.

Pour résoudre l'équation de l'opérateur intégral qui est un problème de calibration, nous procédons en deux étapes :

Dans la première étape, nous devons estimer l'opérateur T (d'après les résultats de Cuevas).

Ensuite l'estimation de la solution de l'équation (2.5) ; en se servant par l'estimation exhaustive de la moyenne empirique \bar{Y} donnée par la loi forte des grands nombres.

Ainsi ; le problème à résoudre est :

$$\widehat{T}_N x = \bar{Y} \tag{2.6}$$

L'opérateur \widehat{T}_N est non injectif (rang fini), ainsi (2.6) est un problème mal posé qu'on ne peut résoudre en utilisant les méthodes classiques (Tikhonov) et qui peuvent être abordées de deux manières différentes :

Une approche déterministe :

Dans cette approche $Tx = Y$ est l'équation qui nous intéresse, pour laquelle seule la sortie bruitée Y_e est disponible et aucune hypothèse ne sera considérée sur la suite T telle que :

$$\|Y_e - Y\| \leq e; \quad \text{avec} \quad e > 0$$

où La quantité e modélise le bruit présent Y_e .

Une approche stochastique :

L'approche stochastique qui consiste à remplacer le bruit par une variable aléatoire développée sur la base d'une observation empirique \bar{Y} qui n'est connue qu'approximativement.

2.3 Estimation de l'opérateur et de deuxième membre

2.3.1 Construction de l'estimateur

(Ces résultats sont basés sur les travaux de Cuevas et al).

Nous supposons premièrement que lors de l'exécution de N expériences ; nous obtenons des données fonctionnelles constituées des paires :

$$(x_{iN}(t), Y_{iN}(t)) \in L^2([a, b]) \times L^2([a, b]); \quad \forall \quad i = \overline{1, N}$$

Observées selon le modèle (2.1) :

$$Y_{iN}(t) = Ax_{iN}(t) + e_{iN}(t); \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Comme il est mentionné au début ; les variables x_{iN} sont connues indépendantes mesurables, et Y_{iN} est une variable aléatoire appelée réponse observée correspondante ; et les fonctions d'erreurs e_{iN} sont des processus aléatoires fonctionnelles indépendantes satisfaisant :

$$(\mathbf{E}_1) \quad \mathbb{E}\{e_{iN}(t)\} = 0 \quad \text{pour } i = \overline{1, N}$$

et

$$\mathbb{E}\|e_{iN}\|^2 = \sigma^2 < \infty$$

Il existe $c > 0$ tel que :

$$\mathbb{E}\|e_{iN}\|^p \leq \frac{p!}{2} \sigma^2 c^{p-2} \quad \forall p \geq 2$$

où

\mathbb{E} : représente l'espérance mathématique.

l'hypothèse de Cramer est vérifiée lorsque e_{iN} sont des trajectoires d'un processus gaussien. Nous souhaitons estimer l'opérateur T et pour cela nous définissons des estimateurs appropriés :

$$\widehat{T}_N(x_{1N}, \dots, x_{mN}; y_{1N}, \dots, y_{mN})$$

qui doivent converger vers T ; dont la norme dans l'espace appropriée est $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

Dans la configuration fonctionnelle ; nous devons estimer la projection de l'opérateur linéaire sous jacent T sur un nombre infini de directions orthogonales (Cuevas et al).

Nous supposons que pour chaque N ; l'ensemble des indices $\{1, \dots, N\}$ peut être partitionné en $m = m_N$, sous ensembles $J_{1N}, J_{2N}, \dots, J_{mN}$ avec $\text{card} J_{iN} = k_{iN}$ et $k_N = \min_{i=\overline{1, m}} k_{iN} \rightarrow \infty$, et $m = m_N \rightarrow \infty$, tel que pour $i = \overline{1, m}$:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{iN} = \frac{1}{k_{iN}} \sum_{j \in J_{iN}} x_{jN}$$

Définissons encore :

$$\bar{Y}_i = \bar{Y}_{iN} = \frac{1}{k_{iN}} \sum_{j \in J_{iN}} Y_{jN}$$

$$\bar{e}_i = \bar{e}_{iN} = \frac{1}{k_{iN}} \sum_{j \in J_{iN}} e_{jN}$$

Ces moyennes sont linéairement indépendantes ; et les espaces linéaires fermées :

$$H_N = \mathcal{L}(\bar{x}_{1N}, \dots, \bar{x}_{mN})$$

Sont vérifiées.

$$(\mathbf{D}_1) \quad H_N \subset H_{N+1}; \quad \mathcal{L}(\bigcup H_N) = L^2([a, b])$$

(\mathbf{D}_2) La plus petite valeur propre de la matrice Q constituée des éléments $\langle \bar{x}_{iN}, \bar{x}_{jN} \rangle$; $1 \leq i, j \leq m$ est limitée ci dessous par une constante $a_0 > 0$ quelque soit N.

L'hypothèse $\mathcal{L}(\bigcup H_N) = L^2([a, b])$ est nécessaire pour estimer l'opérateur T de manière cohérente ; si cette condition ne se vérifie pas nous pouvons seulement estimer la restriction de T sur un espace propre de $L^2([a, b])$.

(\mathbf{D}_2) est équivalente à la suivante :

(\mathbf{D}_{2a}) il existe une base orthonormée de H_N notée par :

$$\{\varphi_{1N}, \dots, \varphi_{mN}\}$$

telle que la matrice $B_N = (\beta)_{jk}^N$ associée au changement de base $\varphi_{jN} = \sum_k \beta_{jk}^N \bar{x}_{kN}$ satisfait :

$$\|B_N\| \leq a_0$$

Où a_0 est constante indépendante de N.

D'après les résultats de Cuevas, (\mathbf{D}_2) est satisfaite lorsque les fonctions x_{iN} sont concentrées sur les cônes dont les bords sont proches de ceux d'un système orthogonal.

Si $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ sont orthogonaux ; alors (\mathbf{D}_2) se réduit à (\mathbf{D}_{2b}) :

Il existe une constante a_0 indépendante de N telle que :

$$\min_{i=1, m} \|\bar{x}_{iN}\| \geq a_0; \quad \forall N \geq 1$$

Un modèle satisfaisant (\mathbf{D}_1) et (\mathbf{D}_2) est défini par Cuevas comme suit : Soit $\{v_1, v_2, \dots\}$ une base de $L^2([a, b])$.

Nous définissons $x_{1N} = v_1, \dots, x_{kN} = v_1, x_{(k+1)N} = v_2, x_{(k+2)N} = v_2, \dots, x_{2k} = v_2, \dots$

Où $N = km$ est un multiple de m et $k = k_N \rightarrow \infty$; $m = m_N$.

Il a proposé de prendre $k_i = k$ et $\bar{x}_{iN} = v_i$, où les normes $\|v_i\|$ sont positives.

Nous considérons : $\bar{Y}_i = T\bar{x}_i + \bar{e}_i$

Comme $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ sont linéairement indépendantes, nous pouvons choisir un système conjugué de fonctions x_1^*, \dots, x_m^* telle que :

$$\langle x_r^*, \bar{x}_i \rangle = \delta_{ir}$$

c'est-à-dire :

$$x_r^* = \sum_{j=1}^m (\varphi^{-1})_{rj} \bar{x}_j$$

où δ_{ir} est le symbole de kronecher.

Soit \widehat{T}_N l'opérateur linéaire associé au noyau $\widehat{\mathbf{K}}_N(s, t)$:

$$\widehat{T}_N x(t) = \int_a^b \widehat{\mathbf{K}}_N(s, t) x(s) ds$$

et

$$\widehat{\mathbf{K}}_N(s, t) = \sum_{i=\overline{1, m}} x_i^*(s) \overline{Y}_i(t)$$

Définition :

Soit $(T_N)_N$ une suite de variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que $(T_N)_{N \geq 1}$ converge presque complètement (p.c) si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|T_N\| > \epsilon\} < \infty$$

Théorème 1 :

Soit le modèle défini par : (2.1), (2.2), (2.3) ;
supposons que (\mathbf{E}_1) est vérifiée et :

- Les conditions (\mathbf{D}_1) et (\mathbf{D}_2) sont réalisées.
- $\min_{i=\overline{1, m}} \frac{k_i}{(m_N \log m_N)} \rightarrow \infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$

Alors

$\|\widehat{T}_N - T\| \rightarrow 0$ complètement quand $N \rightarrow \infty$ C'est-à-dire :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\widehat{T}_N - T\| > \eta\} < \infty; \quad \forall \eta > 0$$

Preuve :

D'abord supposons que la restriction de l'estimateur \widehat{T}_N de T qui interpôle les paires $(\bar{x}_i, \overline{Y}_i)$; $i = \overline{1, m_N}$ sur H_N^\perp est 0. (H_N^\perp est le sous espace fermé orthogonal à H_N),

Il est déjà supposé que $m = m_N$, $\bar{x}_{iN} = \bar{x}_i$.

Soit l'opérateur non observable :

$$T_N : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

défini par :

$$T_N(\bar{x}_i) = T(\bar{x}_i) = \widetilde{Y}_i \quad \text{pour } i = \overline{1, m}$$

Donc T_N est défini sur le sous espace $H_N = \mathcal{L}\{\bar{x}_{iN}, \dots, \bar{x}_{mN}\}$ pour $z \in \mathbb{H}_N^\perp$.

Nous mettons $T_N(z) = 0$; et nous avons :

$$\|\widehat{T}_N - T\| = \|\widehat{T}_N - T_N + T_N - T\| \leq \|\widehat{T}_N - T_N\| + \|T_N - T\| \quad (2.7)$$

Comme T est un opérateur compact entre les espaces de Hilbert alors :

$$\|T_N - T\| \rightarrow 0; \quad N \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Pour montrer la convergence de $\|\widehat{T}_N - T\|$ il suffit de la prouver pour $\|\widehat{T}_N - T_N\|$;

$$\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i \in \mathbb{H}_N$$

est défini.

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}_N - T_N\| &= \sup_{\|\mu\| \leq 1} \|(\widehat{T}_N - T_N)(\mu)\| \\ &= \sup_{\|\mu\| \leq 1} \|(\widehat{T}_N - T_N)\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_i\right)\| \\ &= \sup_{\|\mu\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i (\widehat{T}_N - T_N)(\bar{x}_i) \right\| \\ &\leq \sup_{\|\mu\| \leq 1} \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \|(\widehat{T}_N - T_N)(\bar{x}_i)\| \\ &\leq \sup_{\|\mu\| \leq 1} \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \end{aligned}$$

Car par hypothèse on a :

$$\begin{aligned} T_N(\bar{x}_i) &= \tilde{Y}_i \text{ et } \widehat{T}_N(x) = \bar{Y} \quad \forall x. \\ &\leq \max_{i=1, m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \sup_{\|\mu\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i| \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

l'inégalité de Cauchy Schwartz donne :

$$\leq \max_{i=1, m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \sup_{\|\mu\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^m (|\lambda_i|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^m (1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si la forme de la base canonique mentionnée dans **(D_{2a})** étant $\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$; il vient nécessairement :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leq 1 \quad (\text{lorsque } \|\mu\| \leq 1)$$

et

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \leq \|B\alpha\|^2 \quad (\text{puisque } \lambda = B\alpha)$$

Alors

$$\|\widehat{T}_N - T_N\| \leq \sqrt{m} \max_{i=1,m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\|_{a_0}$$

Soit $\eta > 0$; $\eta_1 = \frac{\eta}{a_0}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\|\widehat{T}_N - T_N\| > \eta\} &\leq \mathbb{P}\{\sqrt{m} \max_{i=1,m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\|_{a_0} > \eta\} \\ &= \mathbb{P}\{\sqrt{m} \max_{i=1,m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| > \frac{\eta}{a_0}\} \\ &= \mathbb{P}\{\max_{i=1,m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| > \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\max_{i=1,m} \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^m \mathbb{P}\{\|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\} \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$\|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| = \|\bar{e}_i\|$$

car

$$\tilde{Y}_i = T_N(\bar{x}_i) = T(\bar{x}_i) = \bar{Y}_i(t) - \bar{e}_i(t)$$

En remplaçant ceci dans l'inégalité ci dessus on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\|\widehat{T}_N - T_N\| > \eta\} &\leq 1 - \prod_{i=1}^m \mathbb{P}\{\|\bar{e}_i\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\} \\ \mathbb{P}\{\|\widehat{T}_N - T_N\| > \eta\} &= 1 - \prod_{i=1}^m \mathbb{P}\{\|\frac{1}{k_i} \sum_{j \in J_i} e_j\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

car

$$\bar{e}_i = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in J_i} e_j$$

Pour pouvoir compléter l'estimation rappelons la proposition de Yurinskii :

Proposition de Yurinskii[16] :

Soit e_i un élément aléatoire indépendant prenant des valeurs sur un espace de Hilbert K .
Sous les hypothèses (\mathbf{E}_1) et celle de Cramer :

$$\mathbb{E}\|e_i\|_K^p \leq \frac{p!}{2} \sigma_i^2 c^{p-2}; \quad \forall p \geq 2$$

$$\mathbf{B}_N^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

il vient que :

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^N e_i\right\|_K > xB_N\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{xc}{B_N}\right)^{-1}\right\}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de type Bernstein pour les variables aléatoires dans les espaces de Hilbert due à Yurinski (1976).

Revenons maintenant à l'inégalité (2.9). D'après les résultats de Cuevas et al(2002), pour un m qui soit plus grand que certain m_0 indépendant de i :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sum_{j \in J_i} \|e_j\| > \frac{k_i \eta_1}{\sqrt{m}}\right\} &\leq 2 \exp\left\{\frac{-c_1 k_i}{2m(1 + (1.62c_1 c \sqrt{m} \sigma))}\right\} \\ &\leq 2 \exp\left\{\frac{-c_2 k_i}{m}\right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes appropriées et c et σ sont définis dans (\mathbf{E}_1) .
A partir de (2.9) et (2.10); il vient que :

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{j \in J_i} e_j\right\| > \frac{k_i \eta_1}{\sqrt{m}}\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{j \in J_i} e_j\right\| \leq \frac{k_i \eta_1}{\sqrt{m}}\right\}$$

donc

$$1 - \mathbb{P}\left\{\frac{1}{k_i} \left\|\sum_{j \in J_i} e_j\right\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\right\} \leq 2 \exp\left\{\frac{-c_2 k_i}{m}\right\}$$

$$\mathbb{P}\left\{\|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\right\} \geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-c_2 k_i}{m}\right)$$

d'où

$$\prod_{i=1}^m \mathbb{P}\left\{\|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\| \leq \frac{\eta_1}{\sqrt{m}}\right\} \geq \left(1 - 2 \exp\left(\frac{-c_2 k_N}{m}\right)\right)^m$$

D'après Cuevas et al(2002) [page292] cette borne est de même ordre que :

$$\exp\left\{-m \exp\left(\frac{-c_2 k_N}{m}\right)\right\}$$

où $k_N = \min(k_1, \dots, k_m)$
D'autre part on a

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\hat{T}_N - T_N\| > \eta\} &\leq \sum_{N=1}^{\infty} \{1 - \{1 - 2 \exp\{\frac{-c_2 k_N}{m}\}\}\}^m \\ &\leq \sum_{N=1}^{\infty} \{1 - \exp\{-m \exp\{\frac{-c_2 k_N}{m}\}\}\} \end{aligned}$$

Donc pour établir la convergence complète, il suffit de prouver que :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \{1 - \exp\{-m \exp\{\frac{-c_2 k_N}{m}\}\}\} < \infty \quad (2.11)$$

L'inégalité $1 - t \leq \exp\{-t\}$ nous donne la condition suffisante pour (2.11) :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \{m \exp\{\frac{-c_2 k_N}{m}\}\} < \infty$$

Donc

$$\sum_{i=1}^m \{|\lambda_i| \|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\|\} \leq \left(\sum_{i=1}^m (\lambda_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^m (\|\bar{Y}_i - \tilde{Y}_i\|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

(D'après l'inégalité de Cauchy schwartz)

$$\leq a_0 \left(\sum_{i=1}^m (\|\bar{e}_i\|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on a :

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^m \|\bar{e}_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leq \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^m \|\bar{e}_i\|^2\right)$$

On a d'après l'hypothèse :

$$\mathbb{E}(\|e_{iN}\|^2) = \sigma^2 < \infty$$

Alors, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^m \|\bar{e}_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} &\leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}(\|\bar{e}_i\|^2) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma^2}{k_i}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Remarque :

Si on supprime l'hypothèse de Cramer $\mathbb{E} \|e_{iN}\|^p \leq \frac{p!}{2} \sigma^2 c^{p-2} \forall p \geq 2$;

Donc l'hypothèse (ii) devient :

$$(ii)' \quad \min_{i=1, m} \frac{k_i}{m_N} \rightarrow \infty$$

Inégalité de Markov :

Lemme :

Soit X une variable aléatoire réelle positive de moyenne $\mu = \mu(X)$ finie ; pour toute constante $c > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\{X \geq c\} \leq \frac{\mu}{c}$$

On a $m_N = m$, alors :

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^m \|\bar{e}_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leq \sigma \frac{m_N}{\min_{i=1,m} k_i} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty \quad (\text{d'après } (ii)')$$

Donc en utilisant l'inégalité de Markov ; il vient que :

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\hat{T}_N - T_N\| > \eta\} < \infty$$

C'est-à-dire $\|\hat{T}_N - T_N\| \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$
d'où

$$\|\hat{T}_N - T\| \rightarrow 0 \text{ en probabilité quand } N \rightarrow \infty$$

2.3.2 Estimation de x

(Ces résultats sont basés sur l'article H.Zerouati & A.Dahmani[18])

Dans la deuxième étape d'expérimentation nous observons Y_{N+1}, \dots, Y_{N+n} ; n variables de réponses, supposées liées à une seule valeur explicative x_{ex} :

$$Y_{N+j} = Y_{ex} + e_{N+j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

et

$$= T x_{ex} + e_{N+j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

où e_{N+j} est une suite de variable aléatoire fonctionnelle définie sur (Ω, \mathcal{F}) dans $L^2([a, b])$ qui remplissent l'hypothèse de Cramer.

Nous substituons Y_{ex} par la moyenne empirique \bar{Y}_n (donnée par la loi forte des grands nombres) définie par :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{N+j}$$

où \bar{Y}_n est une valeur approximée de Y_{ex} .

Définition : La loi forte des grands nombres :

Si $(Y_{N+j})_{N \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et d'espérance \bar{Y}_{ex} alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{N+j} \rightarrow Y_{ex} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

Grâce à la loi forte des grands nombres ; on a obtenu \bar{Y}_n converge vers Y_{ex} lorsque $n \rightarrow \infty$.

Donc le problème à résoudre se transforme en :

$$\widehat{T}_N x = \bar{Y}_n \quad (2.14)$$

Nous déduisons que l'équation (2.12) est un problème mal posé. Plus clairement nous remplaçons ceci dans l'équation (2.14) ; nous obtenons :

$$(\widehat{T}_N + \alpha I)x = \bar{Y}_n \quad (2.15)$$

Tel que :

I désigne l'opérateur de la matrice identité et α est un réel positif, donc la solution de l'équation (2.15) est définie par :

$$\bar{X}_n^\alpha = (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}(\bar{Y}_n)$$

En fixant certaines hypothèses sur le paramètre α et sur la classe des solutions possibles ; le nouveau problème obtenu est stable pour des petites variations de \bar{Y}_n et peut être résolu quelque soit \bar{Y}_n dans $L^2([a, b])$.

Remarque :

Soient \tilde{T} et $\tilde{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ avec \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont deux espaces de Banach.

Si \tilde{T} est inversible il vient que :

$$\|\tilde{T}^{-1}\| \|\tilde{T} - \tilde{B}\| < 1$$

Alors \tilde{B} est également inversible et :

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}^{-1}\| &\leq \frac{\|\tilde{T}^{-1}\|}{1 - \Delta} \\ \|\tilde{B}^{-1} - \tilde{T}^{-1}\| &\leq \frac{\Delta \|\tilde{T}^{-1}\|}{1 - \Delta} \end{aligned}$$

Avec :

$$\Delta = \|\tilde{T}^{-1}\| \|\tilde{T} - \tilde{B}\|$$

Utilisons ce résultat pour $\tilde{T} = T + \alpha I$ et $\tilde{B} = \widehat{T}_N + \alpha I$.

Comme $T + \alpha I$ est inversible alors son inverse est défini par :

$$(T + \alpha I)^{-1}(\varphi_i) = \frac{\varphi_i}{\alpha + \lambda_i}$$

Où λ_i sont les valeurs propres de l'opérateur T correspondantes aux fonctions propres φ_i .

Le paramètre α est introduit pour assurer l'inversibilité de l'opérateur.

l'inversibilité de l'opérateur $(\widehat{T}_N + \alpha I)$ est obtenu d'après les résultats de Nashed[12].
En particulier :

$$\|(T + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} - (T + \alpha I)^{-1}\| &\leq \frac{\|(T + \alpha I)^{-1}\|^2 \|T - \widehat{T}_N\|}{1 - \|(T + \alpha I)^{-1}\| \|T - \widehat{T}_N\|} \\ \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} - (T + \alpha I)^{-1}\| &\leq \frac{\|\widehat{T}_N - T\|}{\alpha^2(1 - \|(T + \alpha I)^{-1}\| \|(\widehat{T}_N - T)\|)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Théorème de convergence dominée de Lebergue :

Soit $(f_n)_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ (où \mathbb{R}^n) ; $n \in \mathbb{N}^*$ mesurable telles que $f_n \rightarrow fp.p$ quand $n \rightarrow \infty$.
S'il existe g une fonction mesurable : $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, \infty[$ telle que :

- $|f_n| \leq g$, presque partout
- g est μ - *intgrable*

Alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$
ie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$

Théorème 2 :

Soit le modèle défini par (2.1) et (2.2).

Supposons que :

(**H₁**) est vérifié et que T est positif (ie : $\langle Tx, x \rangle \geq 0$) ;
 \widehat{T}_N est un estimateur fort de T (C'est à dire $\|\widehat{T}_N - T\| \rightarrow 0$ *p.s*)

En outre supposons que :

(**H₂**) soit $\alpha = \alpha(N, n)$ une séquence de paramètre tels que lorsque $n, N \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow 0; \quad \frac{\log n}{\alpha \sqrt{n}} \rightarrow 0 \\ n\alpha^2 \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\|\widehat{T}_N - T\|}{\alpha^2} \rightarrow 0 \quad \text{p.s} \end{aligned}$$

(**H₃**) Les trajectoires d'erreur e_{N+1}, \dots, e_{n+N} sont des réalisations indépendantes d'un processus satisfaisant l'hypothèse (**E₁**).

Ainsi ; pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\{\|\overline{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq 2 \exp\left(\frac{-n\epsilon^2 \alpha^2 \delta^2}{8\sigma^2} \left(1 + 1.62 \frac{\epsilon \alpha \delta}{2\sigma^2} c\right)^{-1}\right) \quad (2.18)$$

Avec :

$$\delta = 1 - \|(T + \alpha I)^{-1}\| \|\widehat{T}_N - T\|$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}\bar{X}_n^\alpha &= (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} \bar{Y}_n \\ \bar{Y}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{N+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Tx_{ex} + e_{N+i})\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} &= \mathbb{P}\{\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} \bar{Y}_n - x_{ex}\| > \epsilon\} \\ &= \mathbb{P}\{\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Tx_{ex} + e_{N+i})\right) - x_{ex}\| > \epsilon\} \\ &= \mathbb{P}\{\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i} - x_{ex}\| > \epsilon\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\| + \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\| > \epsilon\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\| > \epsilon - \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\|\} \quad (2.19)\end{aligned}$$

Nous devons prouver d'abord que :

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\| \rightarrow 0 \quad p.s$$

On a :

$$\begin{aligned}\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\| &= \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} + (T + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - (T + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\| \\ &\leq \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - (T + \alpha I)^{-1} Tx_{ex}\| + \|(T + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\|\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.17) on a :

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} - (T + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{\|\widehat{T}_N - T\|}{\alpha^2 \delta}$$

Alors

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\| \leq \frac{\|\widehat{T}_N - T\|}{\alpha^2 \delta} \|Tx_{ex}\| + \|(T + \alpha I)^{-1} Tx_{ex} - x_{ex}\|$$

D'après l'hypothèse **(H₂)** on a :

$$\frac{\|\widehat{T}_N - T\|}{\alpha^2 \delta} \rightarrow 0 \quad p.s \quad \text{lorsque } n, N \rightarrow \infty \quad p.c$$

Si

$$x_{ex} = \sum_i \mu_i \varphi_i$$

L'hypothèse (\mathbf{H}_1) donne :

$$Tx_{ex} = \sum_i \lambda_i \mu_i \varphi_i$$

Alors

$$\begin{aligned} (T + \alpha I)^{-1}Tx_{ex} - x_{ex} &= (T + \alpha I)^{-1} \sum_i \lambda_i \mu_i \varphi_i - \sum_i \mu_i \varphi_i \\ &= \sum_i (T + \alpha I)^{-1} \lambda_i \mu_i \varphi_i - \sum_i \mu_i \varphi_i \end{aligned}$$

et on a :

$$(T + \alpha I)^{-1} = \frac{1}{\alpha + \lambda_i}$$

Il vient que :

$$(T + \alpha I)^{-1}Tx_{ex} - x_{ex} = \sum_i \frac{1}{\alpha + \lambda_i} \lambda_i \mu_i \varphi_i - \sum_i \mu_i \varphi_i$$

Donc

$$(T + \alpha I)^{-1}Tx_{ex} - x_{ex} = \sum_i \mu_i \varphi_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha} - 1 \right)$$

Comme $(\varphi_i)_i$ forme une base orthonormée (D'après (\mathbf{H}_1)) alors φ_i est une base hilbertienne.

Donc

$$\|(T + \alpha I)^{-1}Tx_{ex} - x_{ex}\|^2 = \sum_i \mu_i^2 \left\{ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha} - 1 \right) \right\}^2$$

D'après le théorème de la convergence dominée ; le membre à droite tend vers 0 quand $\alpha \rightarrow 0$, car

$$\sum \mu_i^2 < \infty$$

Par conséquent pour N, n assez grands nous avons :

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}Tx_{ex} - x_{ex}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Donc l'inégalité (2.18) devient :

$$\mathbb{P}\{\|\overline{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\right\| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \quad (2.20)$$

Nous définissons :

$$\xi_i = (\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}$$

et

$$\Delta = \|(T + \alpha I)^{-1}\| \|\widehat{T}_N - T\|$$

Avec

$$\Delta \leq \frac{1}{\alpha} \|\widehat{T}_N - T\|$$

Car

$$\|(T + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

Il vient que :

$$\|\xi_i\|^m = \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\|^m \leq \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\|^m \|e_{N+i}\|^m$$

Nous obtenons :

$$\|\xi_i\|^m = \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\|^m \leq \|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\|^m \|e_{N+i}\|^m$$

et on a :

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{\|(T + \alpha I)^{-1}\|}{1 - \Delta}$$

Comme

$$\|(T + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

Alors

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\|^m \leq \frac{1}{\alpha^m (1 - \Delta)^m}$$

D'après l'hypothèse (**H₂**), on a :

$$\frac{\|(\widehat{T}_N - T)\|}{\alpha^2} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n, N \rightarrow \infty \quad \text{presque complètement.}$$

Donc, on déduit que :

$$\frac{1}{\alpha} \|\widehat{T}_N - T\| < \frac{1}{4} \quad (p.s)$$

Par conséquent :

$$\|(T + \alpha I)^{-1}\| \|\widehat{T}_N - T\| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$$

D'où

$$\|(T + \alpha I)^{-1}\| \|\widehat{T}_N - T\| < 1$$

et

$$\mathbb{E}(\|\xi_i\|^m) \leq \mathbb{E}\{\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\|^m \|e_{N+i}\|^m\}$$

Comme

$$\|(\widehat{T}_N + \alpha I)^{-1}\|^m \leq \frac{1}{\alpha^m (1 - \Delta)^m}$$

Alors

$$\mathbb{E}(\|\xi_i\|^m) \leq \frac{1}{\alpha^m (1 - \Delta)^m} \mathbb{E}\{\|e_{N+i}\|^m\}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^m \delta^m} \mathbb{E}\{\|e_{N+i}\|^m\}$$

Avec $\delta = (1 - \Delta)$.

L'hypothèse de Cramer est satisfaite d'après (**H₃**) alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\xi_i\|^m) &\leq \frac{1}{\alpha^m \delta^m} \frac{m!}{2} \sigma^2 c^{m-2}; \forall m \geq 2 \\ &\leq \frac{m!}{2} \left(\frac{\sigma}{\alpha\delta}\right)^2 \left(\frac{c}{\alpha\delta}\right)^{m-2} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Yurinskii ,il vient que :

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{T}_N + \alpha I)^{-1} e_{N+i}\right\| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \leq 2 \exp\left(\frac{-n\epsilon^2 \alpha^2 \delta^2}{8\sigma^2} \left(1 + 1.62 \frac{\epsilon\alpha\delta}{2\sigma^2} c\right)^{-1}\right) \quad (2.21)$$

Finalement l'inégalité (2.18) découle des inégalités (2.20)et(2.21).

D'où

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\|\} \leq 2 \exp\left(\frac{-n\epsilon^2 \alpha^2 \delta^2}{8\sigma^2} \left(1 + 1.62 \frac{\epsilon\alpha\delta}{2\sigma^2} c\right)^{-1}\right)$$

2.4 Corollaire 1

Sous les hypothèses du théorème 2 ; la suite \bar{X}_n^α converge presque complètement vers la solution exacte x_{ex} de l'équation $Tx = Y$; c'est-à-dire que $\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| \rightarrow 0$ presque complètement quand $n, N \rightarrow \infty$.

Preuve :

On a $\alpha = \alpha(n, N)$ et d'après la preuve précédente de l'inégalité (2.18) on a :

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq 2 \exp\left(\frac{-n\epsilon^2 \alpha^2 \Delta^2}{8\sigma^2} \left(1 + 1.62 \frac{\epsilon\alpha\delta}{2\sigma^2} c\right)^{-1}\right)$$

donc $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq K_1 \exp(-K_2 n \alpha^2 \epsilon^2) \quad (2.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} K_1 \exp(-K_2 n \alpha^2 \epsilon^2)$$

Comme nous avons déjà constaté dans la preuve de théorème (1), le membre droit de l'inégalité est borné alors :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} < \infty$$

Ce qui veut dire $\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\|$ converge complètement vers 0 lorsque n, N tendent vers ∞ .

2.5 Corollaire 2

Sous les hypothèses du théorème 2 :

$$\bar{X}_n^\alpha - x_{ex} = \mathcal{O}\left(\frac{1 \log n}{\alpha \sqrt{n}}\right) \text{ presque complètement.}$$

Preuve :

On dit que $\bar{X}_n^\alpha - x_{ex} = \mathcal{O}(U_n)$ presque complètement, s'il existe e_0 tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > e_0(U_n)\} < \infty$$

où

$(U_n)_n$ est une suite de nombres positifs réels

En remplaçant ϵ par $e_0 \frac{\log n}{\alpha \sqrt{n}}$ dans l'inégalité (2.22), on aura :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > e_0 \frac{\log n}{\alpha \sqrt{n}}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} K_1 \exp(-K_2 e_0^2 (\log n)^2) < \infty \quad (2.23)$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > e_0(U_n)\} < \infty$$

C'est-à-dire que :

$$\bar{X}_n^\alpha - x_{ex} = \mathcal{O}\left(\frac{1 \log n}{\alpha \sqrt{n}}\right) \text{ presque complètement.}$$

2.6 Corollaire 3

Sous les hypothèses du théorème 2, pour un seuil donné γ ; il existe un entier naturel η_γ pour que :

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_{\eta_\gamma}^\alpha - x_{ex}\| \leq \epsilon\} \geq 1 - \gamma \quad (2.24)$$

ie

La solution exacte de l'équation $Tx = Y$ appartient à la boule fermée de centre $\bar{X}_{\eta_\gamma}^\alpha$ et de rayon ϵ avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\gamma$

Preuve :

En effet, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_1 \exp(-K_2 n \epsilon^2) = 0 \quad (2.25)$$

car $K_2 n \epsilon^2 > 0$

Donc il existe un entier naturel n_γ de sorte que :

$$n \geq n_\gamma \Rightarrow K_1 \exp(-K_2 n \epsilon^2) \leq \gamma$$

On a d'après l'inégalité (2.22) :

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} \leq K_1 \exp(-K_2 n \alpha^2 \epsilon^2) \leq \gamma$$

et

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| > \epsilon\} = 1 - \mathbb{P}\{\|\bar{X}_n^\alpha - x_{ex}\| \leq \epsilon\} \leq \gamma$$

D'où

$$\mathbb{P}\{\|\bar{X}_{n_\gamma}^\alpha - x_{ex}\| \leq \epsilon\} \geq 1 - \gamma$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE 3

EXEMPLE NUMÉRIQUE

(Cet exemple est extrait de H.Zerouati et A.Dahmani[18])

Une étude de simulation est proposée pour vérifier l'efficacité de la solution approchée \bar{X}_n^α . Nous utilisons le modèle fonctionnel :

$$Y_i = Tx_i + e_i$$

Exemple :

Soit T un opérateur compact défini par :

$$T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$

$$x \rightarrow Tx$$

T défini par le noyau :

$$\mathbf{K}(s, t) = \begin{cases} \frac{s(\pi-t)}{\pi}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ \frac{t(\pi-s)}{\pi}, & \text{si } t \leq s \leq \pi \end{cases} \quad (3.1)$$

et

$$Y_i(t) = \frac{1}{2} \sin(2t);$$

Le modèle des observations répétées est utilisé en prenant la base orthonormée :

$\bar{x}_i(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(it)$ par conséquent ; le noyau estimé donné dans la construction du premier membre est :

$$\hat{\mathbf{K}}_N(s, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\sin(i\pi s) \cdot \sin(i\pi t)}{i^2}$$

voici l'algorithme de cet exemple sur Matlab :

Algorithme :

```
clear all
M=10,50
M=10
Matrice A
for i=1 :M
for j=1 :M
if i==j & i<M
T(i,i) = 1./(i.^2)
else T(i,j)=0
end
end
end
Vecteur Y
for i=1 :M
if i==2
Y(i)=0.5
else Y(i)=0
end
end
Solution approchée pour différentes valeurs de alpha
t=0 :pi/30 :pi
j=1
for alfa = [0.5, 0.1, 0.01, 0.001]
al = alfa.*eye(10)
B=T+al
BB=inv(B)
X = BB * U'
X = (X(2)).*sin(2.*t)
x(:,j)=X
j=j+1
end
Solution Exacte
xexa=2.*sin(2.*t)
Tracé des courbes "(xexa est la solution exacte); (x(:,1) pour alfa=0.5); (x(:,2) pour alfa=0.1);
(x(:,3) pour alfa=0.01) (x(:,4) pour alfa=0.001)"
hold on
plot(t,xexa,'k-')
plot(t,x(:,1),'kd')
plot(t,x(:,2),'ks')
plot(t,x(:,3),'k*')
plot(t,x(:,4),'k+')
xlabel('t(s)');ylabel('x(t)')
legend('ExactSol','ApproximateSol(alpha = 0.5)',
'ApproximateSol(alpha = 0.1)', 'ApproximateSol(alpha = 0.01)', 'ApproximateSol(alpha = 0.001)')
```

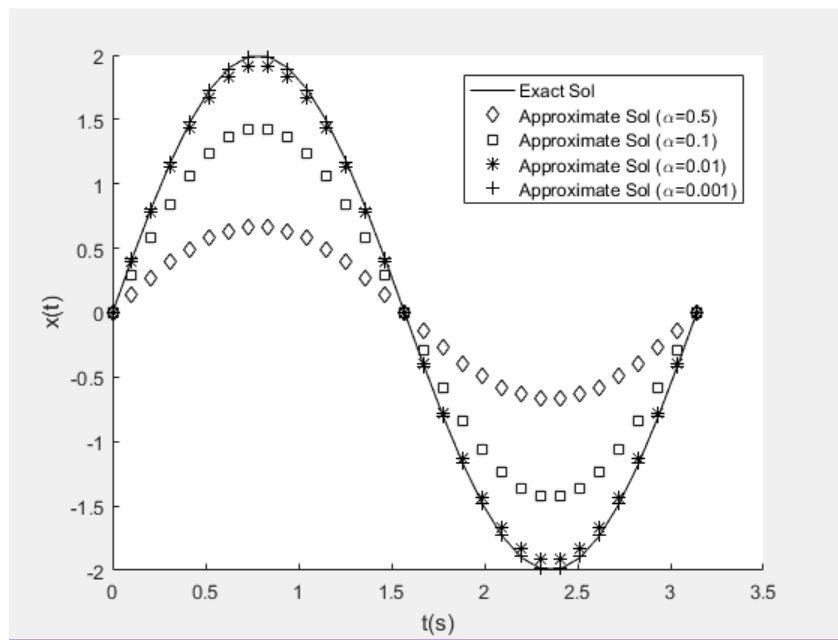



FIGURE 3.1 – plots des solutions approchées et exacte

Dans cet exemple ; les résultats graphiques obtenus pour $\alpha = 0.01$ et $\alpha = 0.001$ sont plus proches de la solution exacte.

Voici l'algorithme de cet exemple sur Maple :

Algorithme :

```
with(MTM);
with(plots);
T := Matrix(10);
for i to 10 do
for j to 10 do
if i = j and i < 10 then
T[i, i] := 1/i2 :
end if :
end do :
end do :
U := Vector([seq(0, i = 1 .. 10)]);
U[2] := 1/2;
t := Vector[seq((1/30) * Pi.i, i = 0..30)];
al := Matrix(10, 10, shape = scalar[0.5]);
BB := inv(al+T);
D := BB * U;
X1 := Vector([seq(0, i = 1 .. 31)]);
X2 :=X1;
X3 :=X1;
X4 :=X1;
for k to nops(t) do
X[k] := X[2].sin(2 * t[k])
end do ;
if j = 1 then
for i to 30 do
X1[i] := X[i]
end do :
else if j = 2 then
for i to 30 do
X2[i] := X[i]
end do :
else if J = 3 then
for i to 30 do
X3[i] := X[i]
end do :
else for i to 30 do
X4[i] := X[i]
end do
end if :
end if :
end if :
end do :
```

```

Xexa := Vector([seq(0, i = 1 .. 31)]);
for k to 31 do
  Xexa[k] := 2. * sin(2. * t[k]) end do;
P1 := plot(t, Xexa, discontinuous = true, color = black, legend = sol exa);
P2 := plot(t, X, discontinuous = true, color = red, legend =  $\alpha=0.5$ );
P3 := plot(t, X, discontinuous = true, color = green, legend =  $\alpha=0.1$ );
P4 := plot(t, X, discontinuous = true, color = blue, legend =  $\alpha=0.01$ );
P5 := plot(t, X, discontinuous = true, color = yellow, legend =  $\alpha=0.001$ );
Display(P1, P2, P3, P4, P5, labels = ["t(s)", "x(t)"]);

```

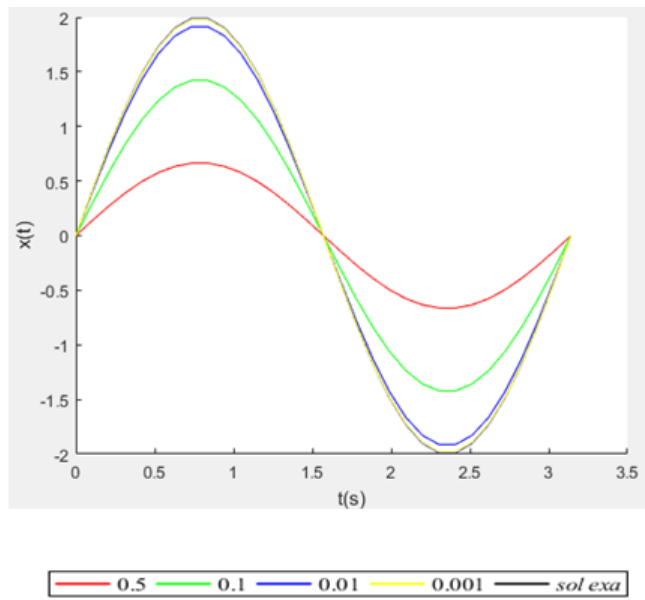


FIGURE 3.2 – plots des solutions approchées et exacte

CONCLUSION

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude des problèmes de calibrations linéaires.

Le principal objectif était de proposer une méthode stochastique pour pouvoir estimer la solution du modèle linéaire $Y = Tx$; où les variables sont toutes supposées aléatoires indépendantes et T un opérateur compact.

Il est établi des inégalités exponentielles pour la probabilité de la distance entre la solution approchée \bar{X}_n^α et la solution exacte x_{ex} ; ce qui a permis de confirmer la convergence presque complète de la solution approchée.

Enfin; la construction d'une boule centrée en \bar{X}_n^α qui est la solution approximée et de rayon ϵ est obtenue comme domaine de confiance pour la solution exacte x_{ex} avec la probabilité $1-\gamma$.

Un exemple a été résolu comme illustration sur Matlab et sur Maple.

Les résultats numériques obtenus montrent que la méthode proposée est applicable aux problèmes linéaires avec des variables aléatoires indépendantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.BREZIS. Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Paris : Dunod. (1999), p. 1-245.
- [2] C.CHARLES. Introduction aux problèmes inverses. Notes de statistique et d'Informatique. (2014), p. 1-19.
- [3] A.CUEVAS, M.FEBRERO & R.FRAIMAN. Linear functional regression : the case of fixed design and functional response. Canadian Journal of statistics. **30**. (2002), p. 285-300.
- [4] H.DEMAILLY. Identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol. Thèse de doctorat. Université d'Orléans. (2011).
- [5] I.E.FRANK & J.H.FRIEDMUN. A statistical view of some chemometrics regression tools. Technometrics. **35**. (1993), p. 109-135.
- [6] D.GARCIA DORADO, J.INSERTE, H.RWIZ-MEANA, M.A.GONZALEZ, J.SOLARES, M.JULIA, J.A.BARRABÉS & J.SOLER-SOLER. Gap Junction uncoupler heptanol prevents cell-to-cell progression of hypercontracture and limits necrosis during myocardial reperfusion. Circulation. **96**. (1997), p. 3579-3586.
- [7] J.HADAMARD. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Hermann. (1932).
- [8] M.KERN. Problèmes inverses : Aspects numériques. Hal archives, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci. (2002).
- [9] L.LANDWEBER. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer.J.Math. **73**. (1951), p. 615-624.
- [10] M.M.LAVRENTIEV, V.G.RAMONOV, P.S.SHISHATSKII. Ill-posed Problems of mathematical physics and analysis. Providence : American Mathematical society, (1986).
- [11] C.MARINEL. Résolution de problèmes inverses en thermique. Mathématiques calcul haute performance, simulation. Université de Lille (2018).
- [12] M.Z.NASHED. Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operator equations. For generalized inverses and applications. (1976). New York : Academic Press, p. 325-396.

- [13] C.OSBORNE. Statistical Calibration : a review International statistical Review. **59** (1915), p. 309-336.
- [14] A.TARANTOLA. Inverse problemes. Théory Elseiver, 1987.
- [15] TIKHONOV & A.N.ARSENIN. Solution of ill posed problems. Washington : winston. New york, (1977).
- [16] V.V YURINSKII. Exponential inequalities for sums of random vectors. Journal of multivariate analysis, **6** (1976), p. 473-499.
- [17] H.ZEROUATI. Analyse et Resolution de problèmes inverses en mécanique stockastique. Thèse de doctorat Université Abderrahman Mira. Bejaia (2012).
- [18] H.ZEROUATI. A.DAHMANI. Exponential inequalities in linear Calibration problem. Communications in statistics -theory and Methodes. **45** (2016), p. 5215-5262.

Résumé

La calibration, également appelée régression inverse, est un problème classique qui apparaît souvent dans une configuration de régression sous plan fixe. Le but de ce travail est de proposer une méthode stochastique qui donne une solution estimée pour un problème de calibration linéaire. Nous établissons des inégalités exponentielles de type Bernstein-Frechet pour la probabilité de la distance entre les solutions approchées et la solution exacte. De plus, nous construisons un domaine de confiance pour la solution exacte ainsi mentionnée. Pour vérifier la validité de nos résultats, un exemple numérique est proposé.

Abstract

Calibration, also called inverse regression, is a classical problem which appears often in a regression setup under fixed design. The aim of this work is to propose a stochastic method which gives an estimated solution for a linear calibration problem. We establish exponential inequalities of Bernstein-Frechet type for the probability of the distance between the approximate solutions and the exact one. Furthermore, we build a confidence domain for the so-mentioned exact solution. To check the validity of our results, a numerical example is proposed.