République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

# ***MÉMOIRE DE MASTER***

**En**
**Mathématiques**

**Option**
***Analyse Mathématique***

# Thème

# La Stepanov presque périodicité : extension et applications

**Présenté par : Melle Amer Cylia et Melle Tabet Amira**

**Soutenu le 21 Septembre 2020 devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Président** | **Dr L. Baiche** | **Maître de conf. B** | **U. A/Mira Bejaia.** |
| **Rapporteur** | **Dr F. Boulahia-Talbi** | **Maître de conf. A** | **U. A/Mira Bejaia.** |
| **Examinateur** | **Dr M. S. M'hamdi** | **Maître de conf. B** | **U. A/Mira Bejaia.** |

Béjaia, Septembre 2020.

# ⁜ *Remerciements* ⁜

Nous remercions avant tout, le Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté pour achever ce mémoire.

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à notre promotrice Mme Talbi-Boulahia Fatiha pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Ses conseils, ses orientations, sa coopération, ses idées pratiques, son soutien moral et ses encouragements nous ont facilité la réalisation de ce mémoire en cette période de pandémie de Covid-19.

Nous avons pu découvrir lors de ces années d'études quelqu'un d'intègre et de qualités humaines et scientifiques éminemment rares et précieuses, qu'elle soit chaleureusement remerciée ici.

Nous tenons à remercier les membres du jury qui nous ont honorés en acceptant de juger ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier ceux qui nous ont aidé d'une manière ou d'une autre à élaborer ce travail.

# ⋇ *Dédicaces* ⋇

Je dédie ce simple travail à :

Mon cher grand père qui m'a beaucoup encouragé pour poursuivre mes études, et ma chère grande mère pour ses prières qui m'ont toujours accompagné.

Mes chers parents.

Mes chères sœurs.

Mon frère.

Ma nièce Chaima et mon neveu Abd-Ennour.

Toute ma famille Amer.

Mes chères copines.

Toutes les personnes qui m'ont aidé.

***Melle. Amer Cylia***

# ⁜ *Dédicaces* ⁜

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

Mon très cher père

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

Mon frère, mes sœurs et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.

Mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

***Melle. Tabet Amira***

# Table des matières

# Notations et symboles

| | | |
|---|---|---|
| **A** | $\mathcal{A}$ | L'ensemble des polynômes trigonométriques géneralisés. |
| | $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Bohr presque périodiques. |
| | $APU(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Bohr presque périodiques avec paramètres. |
| **B** | $BUC(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions bornées et uniformément continues. |
| | $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Stepanov bornés. |
| **C** | $C_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions continues et bornées. |
| | $C_u(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions uniformément continues. |
| **E** | $\mathbb{E}(\varepsilon,f)$ | L'ensemble des $\varepsilon$-presque périodes de $f$. |
| | $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions ergodiques. |
| | $\mathcal{E}U(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions ergodiques avec paramètres. |
| **F** | $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$. |
| **L** | $L^p([0,1],\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions $p$-intégrables sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{X}$. |
| | $L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions localement p-intégrables. |
| **M** | $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$. |
| | $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ | Ensemble des matrices carées d'ordre $n$ à coefficients complexes. |
| **P** | $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions pseudo presque périodiques. |
| **S** | $S^p\mathbb{E}(\varepsilon,f)$ | L'ensemble des $\varepsilon$-Stepanov presque périodes de $f$. |
| | $S^p_l(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions de Stepanov. |
| | $S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Stepanov presque périodiques. |
| | $S^pAPU(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Stepanov presque périodiques avec paramètres. |
| | $S^pPAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. |
| | $S^pPAPU(\mathbb{R},\mathbb{X})$ | L'espace des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques avec paramètres. |
| **U** | $\mu$ | La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. |
| **X** | $(\mathbb{X},\\|\cdot\\|)$ | L'espace de Banach muni de la norme $\\|\cdot\\|$. |
| | $\\|\cdot\\|_\infty$ | La norme infinie de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{X}$. définie par : $\\|f\\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\\|f(x)\\|$. |
| | $(\mathbb{R}^n,\lvert\cdot\rvert)$ | $\lvert x\rvert=\max\limits_{1\leq i\leq n}\lvert x_i\rvert$ avec $x=(x_1,x_2,...,x_n)^t$. |

# Introduction générale

La presque périodicité est une généralisation de la périodicité, elle a été introduite au début des années vingt par H. Bohr [7]. Elle concerne seulement les fonctions continues. Cette restriction est parfois un inconvénient dans l'étude qualitative des équations différentielles. Ceci a motivé plusieurs auteurs à généraliser la presque périodicité aux fonctions qui ne sont pas nécessairement continues.

En 1926, Stepanov [27] a introduit une nouvelle classe de fonctions presque périodiques qui porte son nom (fonctions Stepanov presque périodiques). Par la suite la presque périodicité de Stepanov a été développée grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens comme par exemples Amerio et Prouse [1], A. S. Besicovitch [5], C. Corduneanu [8] et B. M. Levitan [19].

Bersani et al [2] ont fait une trés bonne synthèse des fonctions presque périodiques généralisées dans le cadre des espaces de Lebesgue $L^p$ : il s'agit des fonctions presque périodiques de Stepanov, de Besicovitch, et de Weyl.

C. Zhang [28] a introduit la pseudo presque périodicité comme extension de la presque périodicité. Plus précisément, une fonction pseudo presque périodique est une perturbation d'une fonction presque périodique par un terme ergodique (une fonction continue bornée de moyenne nulle). Cette classe de fonctions a attiré de nombreux chercheurs, elle a été largement utilisée dans l'étude qualitative des solutions des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles partielles et des équations différentielles abstraites.

En 2007, Diagana [11] a introduit les fonctions Stepanov pseudo-presque périodiques. Ce concept est une généralisation de la notion classique de la pseudo presque périodicité.
Ce mémoire se fixe deux objectifs essentiels : le premier est l'étude de la presque périodicité au sens de Stepanov et ses applications aux équations différentielles, le deuxième est la présentation des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. Les propriétés essentielles de ces notions et des théorèmes de superpositions sont exposés et détaillés dans ce mémoire.
Ce mémoire est composé de trois chapitres :
L'objectif du premier chapitre est la présentation des fonctions Stepanov presque périodiques. Il traite en premier lieu la presque périodicité au sens de Bohr (différentes définitions et quelques propriétés sont données). Par la suite, la presque périodicité au sens de Stepanov est présentée

ainsi qu'une étude comparative des deux notions de presque périodicité introduite précedement. Nous terminons ce chapitre par la démonstration de deux théorèmes de superposition l'un pour les fonctions Bohr presque périodiques et l'autre pour les fonctions Stepanov presque périodiques.
Dans le deuxième chapitre on s'est intéréssé aux fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. Il est composé de troix sections, dans la première section, nous avons présenté la classe des fonctions ergodiques et leurs propriétés. Dans la deuxième section on s'est interessé par la pseudo presque périodicité. On a finalisé le chapitre par la présentation des fonctions Stepanov pseudo presques périodiques.
Le troixième chapitre est consacré à l'étude de la nature des solutions de certaines équations différentielles à coefficients pseudo presque périodique(ou Stepanov presque périodique), il est composé de deux sections. Dans la première section, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solution pseudo presque périodiques d'un système de réseaux de neurones. Dans la deuxième, nous avons abordé le problème d'existence et d'unicité de solutions mild Bohr presque périodiques d'une classe d'équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques.

Chapitre 1

# Fonctions Stepanov presque périodiques

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux fonctions presque périodiques au sens de Stepanov. Nous présentons leurs définitions et leurs propriétés essentielles. Pour cela on commence par rappeler quelques notions sur la presque périodicité de Bohr.

## 1.2 Les fonctions presque périodiques de Bohr

La presque périodicité a été introduite par le mathématicien Danois H. Bohr [7] autour de 1924-1926 et généralisée plus tard par de nombreux mathématiciens comme par exemple A. S. Besicovitch [5], S. Bochner [6], C. Cordueanu [8], T. Diagana [10, 11, 12], A. Fink [17], W. Stepanov [27].

### 1.2.1 Définitions et propriétés

On rappelle dans ce qui suit trois définitions équivalentes des fonctions Bohr presque périodiques :

1. Critère de Bohr en utilisant les ensembles relativement dense.
2. Critère d'approximation en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la norme uniforme.
3. Critère de Bochner en utilisant la compacité relative de l'ensemble des translatés.

**Définition 1.2.1.** [2, Definition 2.1]
Un ensemble $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longeur $l$ rencontre $\mathbb{E}$ c'est-à-dire

$$\exists \;\; l > 0 \,\text{tel que}\, [a, a+l] \cap \mathbb{E} \neq \emptyset \;\; \forall a \in \mathbb{R}.$$

Le nombre $l$ est appelé nombre d'inclusion de $\mathbb{E}$.

**Exemple 1.2.1.**

1. $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense dans $\mathbb{R}$ car $\forall l > 0, [-2l, -2l + l] \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
2. $\mathbb{Z}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ car tout intervalle de longeur 2 rencontre $\mathbb{Z}$. Il suffit de prendre $l = 2, alors \quad [a, a + 2] \neq \emptyset$.
3. $\forall \mathtt{T} \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{n\mathtt{T}, n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Notons que tout ensemble contenant un sous ensemble relativement dense est relativement dense. Par conséquent $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sont relativements dense.

**Définition 1.2.2.** [1, Definition 1.2], [2, Definition 2.2], [11, Definition 2.1]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction continue. On dit que $f$ est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathbb{E}(\varepsilon, f)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Où :

$$\mathbb{E}(\varepsilon, f) = \{T \in \mathbb{R}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + T) - f(x)\| \leq \varepsilon\}.$$

Autrement dit,
$\forall \varepsilon > 0, \exists l_\varepsilon$ tel que tout intervalle de longeur $l_\varepsilon$ contient un $T$ qui vérifie :

$$\|f(x + T) - f(x)\| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Un nombre $T \in \mathbb{E}(\varepsilon, f)$ est appelé $\varepsilon$-presque périodique ou $\varepsilon-$nombre de translation de $f$. L'ensemble des fonctions Bohr presque périodique sera noté $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. On notera $AP(\mathbb{R})$ dans le cas $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

**Exemple 1.2.2.** [12]
La fonction $f : t \mapsto \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$ est presque périodique mais elle n'est pas périodique.
Du point de vue géométrique, on observe la presque périodicité d'une fonction à partir de l'allure de sa courbe représentative donné par la **figure1.1**.

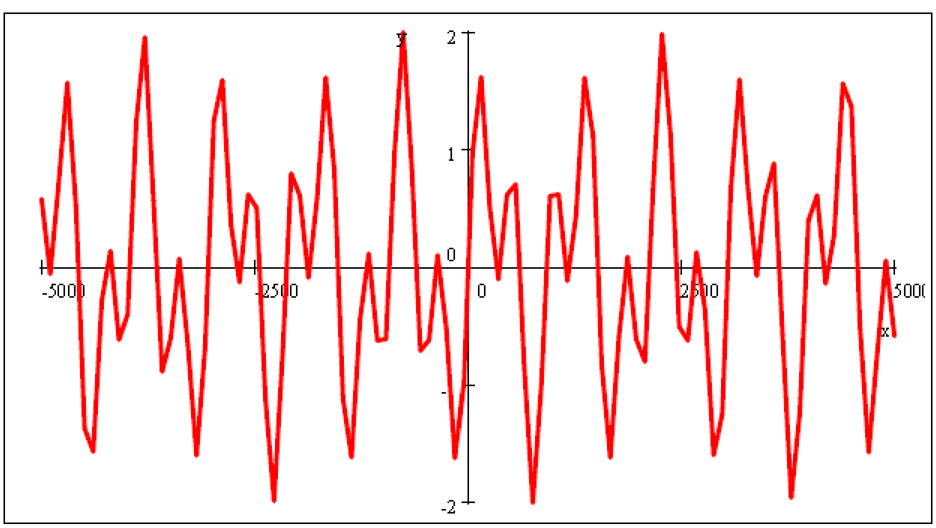



**figure1.1**

Dans la proposition suivante, nous collectons les propriétés fondamentales des fonctions Bohr presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach.

**Proposition 1.2.1.** *[1], [12, Proposition 3.4]*
*Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *$f$ est bornée et est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($f \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$).*
2. *Si $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $h \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $hf \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
3. *$Imf = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{X}$.*
4. *Les coefficients de Bohr-Fourier de $f$,*
$$a_\lambda(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda s} f(s)\, ds = \lim_{T\to\infty} \int_\alpha^{T+\alpha} e^{-i\lambda s} f(s)\, ds.$$
*existent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
5. *Si $a_\lambda(f) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
6. *Le spectre de Bohr $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : a_\lambda(f) \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*
7. *(Invariance par convolution ) Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $g * f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, où*
$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 1.2.2.**

1. *L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est invariant par translation.*
2. *L'espace $(AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*
3. *$AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est stable par la limite uniforme c'est-à-dire :*
*Si $(g_n)_n$ est une une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément vers une fonction $g$, alors $g$ est aussi presque périodique.*

**Critère d'approximation** :

**Définition 1.2.3.** (voir [1, 2])
On appelle polynôme trigonométrique généralisé, toute combinaison de la forme :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \text{ avec } \ a_k \in \mathbb{X}, \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces polynômes.

**Définition 1.2.4.** [2, Remark 2.9], [2, Definition 2.8]
$f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si elle possède la proprieté d'approximation polynômiale. C'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que :
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

**Critère de Bochner** :

**Définition 1.2.5.** [2, Definition 2.6]

Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est dite normale si l'ensemble de ses translatés :

$$H(f) = \{f_a, \quad a \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $f_a(t) = f(t+a), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, de toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ on peut extraire une sous suite $(a_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(t + a_{n_k}))_k$ soit uniformément convergente.

**Théorème 1.2.1.** *[1]*

*Les définitions 1.2.2, 1.2.4 et 1.2.5 sont équivalentes.*

**Valeur moyenne d'une fonction presque périodique**

**Définition 1.2.6.** [2, Theorem 6.2]
La valeur moyenne d'une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ existe indépendament de $a \in \mathbb{R}$ et elle est définie par :

$$\mathcal{M}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f(x)dx.$$

**Proposition 1.2.3.** *[1, Definition* VI*]*
*Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction dérivable alors :*
*$f' \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si $f'$ est uniformément continue.*

**Preuve.**
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = n\{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\}.$$

La fonction $f_n$ est presque périodique comme somme de deux fonctions presque périodiques.
Pour montrer que $f' \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, il suffit de montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f'$.

On a par définition $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
|f'(x) - f_n(x)| &= |f'(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt| \\
&= |n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(x)dt - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt| \\
&= n|\int_x^{x+\frac{1}{n}} (f'(x) - f'(t))dt| \\
&\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(x) - f'(t)|dt \\
&\leq n\frac{1}{n} \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)|.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)|, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}.$$

On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x) - f_n(x)| = 0$. C'est-à-dire montrer que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que } \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall\ x \in \mathbb{R}, \text{ on a } |f'(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Comme $f'$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|u - v| < \delta$, on a

$$|f'(u) - f'(v)| < \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (provenant de l'inégalité $|x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} < \delta$, avec $\delta > 0$ est celui provenant de l'uniforme continuité de $f'$), tel que $\forall n \geq n_0$, on a

$$\sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $f_n \to f'$ uniformément, et comme $f_n$ est presque périodique alors $f'$ est aussi presque périodique. ■

**Proposition 1.2.4.**
*Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $F$ une primitive de $f$.*
*Dans le cas où $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{X}$ est uniformement convexe on a*
*$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si $F$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

### 1.2.2 Théorème de superposition des fonctions Bohr presque périodiques

**Définition 1.2.7.** [12, Definition 3.29]
On dit qu'une fonction continue $F : (t, x) \mapsto F(t, x)$ est presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ et uniformément en $x$ si la fonction $t \mapsto F(t, x)$ est presque périodique uniformément en $x \in B \subset \mathbb{X}$, où

$B$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{X}$.
C'est-à-dire, $F$ est continue et $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longeur $l_\varepsilon$ contient un $\tau$ qui verifie :

$$\|F(t+\tau, x) - F(t, x)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall x \in B.$$

On note par $APU(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions Bohr presque périodiques avec paramètres.

Dans ce qui suit on definit l'opérateur de superposition, et on montrera que ce dérnier envoie $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans lui-même quand la fonction qui le construit est lipschitzienne.

**Définition 1.2.8.**
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, x) \mapsto F(t, x)$ une fonction.
L'opérateur de superposition appelé aussi opérateur de Nemytskii, noté par $\mathcal{N}_F$ construit sur la fonction $F$, est définit comme suit :

$$\mathcal{N}_F : [t \mapsto g(t)] \mapsto F(t, g(t)),$$

pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$.
Plus précisement, si on note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ : l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ alors

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_F : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \\ g & \mapsto & \mathcal{N}_F(g) \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{N}_F(g) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{X} \\ t & \mapsto & F(t, g(t)). \end{array}$$

**Théorème 1.2.2.** *[12, Theorem 3.30]*
*Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, x) \mapsto F(t, x)$ une fonction presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $x \in B \subset \mathbb{X}$, où $B$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{X}$. Supposons que $F$ est Lipschitzienne en $x \in B$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\exists L > 0$ tel que*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

*Si $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\mathcal{N}_F(g(\cdot)) = F(\cdot, g(\cdot)) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Comme $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longeur $l_\varepsilon$ contient $\tau$ vérifiant

$$\|g(t+\tau) - g(t)\| < \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{1.1}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_F(g(t+\tau)) - \mathcal{N}_F(g(t))\| &= \|F(t+\tau, g(t+\tau)) - F(t, g(t))\| \\ &\leq \|F(t+\tau, g(t+\tau)) - F(t+\tau, g(t))\| + \|F(t+\tau, g(t)) - F(t, g(t))\| \\ &\leq L\|g(t+\tau) - g(t)\| + \|F(t+\tau, g(t)) - F(t, g(t))\|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $F$ est presque périodique

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t+\tau, g(t)) - F(t, g(t))\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{N}_F(g(t+\tau)) - \mathcal{N}_F(g(t))\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+\tau, g(t+\tau)) - F(t, g(t))\| < \varepsilon.$$

Par conséquent $\mathcal{N}_F(g)$ est presque périodique. C'est-à-dire $\mathcal{N}_F$ envoie $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans lui-même. $\blacksquare$

## 1.3 Les fonctions Stepanov presque périodiques

Cette section est consacrée au concept de la Stepanov presque périodicité (ou $S^p$-presque périodicité), qui est une généralisation de la notion de Bohr presque périodicité. Cette notion a été introduite dans la première moitié du vingtième siècle par le mathématicien russe V. Stepanov [27]. Elle est développée par la suite par les travaux de plusieurs mathématiciens, comme par exemples Amerio et Prouse [1], J. Andres [2], et A. S. Besicovitch [5].

### 1.3.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.3.1.** [1, 2, 24]
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $1 \le p < \infty$.

On dit que $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}$ la quantité $\int_K \|f(t)\|^p dt$ est finie.
On introduit la norme de Stepanov comme suit :

$$\|f\|_{S^p_l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l} \|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}, \quad l > 0$$

**Propriété 1.3.1.** *[2]*
*Pour tout $1 \le p < \infty$ les normes de Stepanov sont équivalentes. C'est-à-dire : pour tout $l_1, l_2 > 0$, il existe $\alpha$ $\beta$ dépendant de $l_1, l_2$ tels que :*

$$\alpha \ \|f\|_{S^p_{l_1}} \le \|f\|_{S^p_{l_2}} \le \beta \ \|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

**Preuve.**
Montrons qu'il existe $\alpha \ > 0$ tel que $\alpha \ \|f\|_{S^p_{l_1}} \le \|f\|_{S^p_{l_2}}$. Soit $0 < l_1 < l_2$ alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt &= \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt + \frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} \|(t)\|^p dt \\ &\ge \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt \times \left(\frac{l_1}{l_1}\right) \ge \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\|f\|_{S^p_{l_2}} \ge \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

Montrons qu'il existe $\beta\ > 0$ tel que $\|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \beta\ \|f\|_{S^p_{l_1}}$.

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{S^p_{l_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{l_1}{l_1\times l_2}\int_x^{x+l_1}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1}\|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|f(t)\|_{S^p_{l_1}} + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\frac{1}{l_1}\int_{x+l_1}^{x+l_2}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|f(t)\|_{S^p_{l_1}} + \|f(t)\|_{S^p_{l_1}}\\
&\leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)\|f(t)\|_{S^p_{l_1}}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right)\|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

Ce qui achève la démonstration ■

**Remarque 1.3.1.**

En raison de cette équivalence, on peut supposer dans tout ce qui suit que $l = 1$ c'est-à-dire :

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[\int_x^{x+1}\|f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 1.3.2.** [2]

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. $f$ est dite Stepanov bornée si

$$\|f\|_{S^p} < \infty.$$

C'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}\|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^1\|f(t+x)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

L'espace de ces fonctions sera noté $BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, il est muni de la norme

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\|f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t+.)\|_{L^p([0,1],\mathbb{X})}.$$

**Proposition 1.3.1.** *[2, 12, 24]*

*Soit $p, q \in [1, \infty[$ tel que $p \leq q$ alors $BS^q(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Soit $f \in BS^q(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, montrons que $f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

On a $f \in BS^q(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors

$$f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au deux fonctions $f$ et $g \equiv 1$ on aura
$\forall\ x\ \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \leq \left( \int_x^{x+1} (\|f(t)\|^p)^n \, dt \right)^{\frac{1}{n}} \left( \int_x^{x+1} (1)^m \right)^{\frac{1}{m}}.$$

avec $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$. En prenant $n = \frac{q}{p}$ on obtient,

$$\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \leq \left( \int_x^{x+1} \|f(t)\|^q \right)^{\frac{p}{q}} < \infty, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

D'où, $\|f\|_{S^p} < +\infty$. C'est-à-dire, $f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
Par consequent, $BS^q(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Ce qui achève la démonstration ■

**Théorème 1.3.1.** *[4, Theorem 2.5]*
*Pour tout* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $(BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_{S^p})$ *est un espace de Banach.*

**Définition 1.3.3.** [2, Definition 3.1], [1]
Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite presque périodique au sens de Stepanov (on écrit $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longeur $l$ contient au moins un nombre $\tau$ verifiant :

$$\|f_\tau - f\|_{S^p} = \|f(. + \tau) - f(.)\|_{S^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \int_x^{x+1} \|f(t + \tau) - f(t)\|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ où :

$$S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f) = \{\tau \in \mathbb{R}, \|f(. + \tau) - f(.)\|_{S^p} < \varepsilon\}.$$

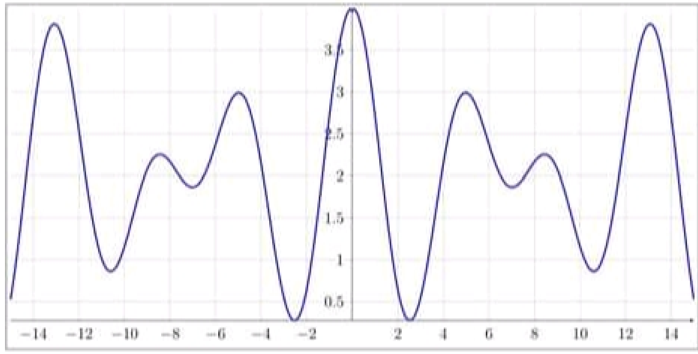
Le nombre $\tau \in S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f)$ est appelé Stepanov-$\varepsilon$ presque période de $f$.

**Exemple 1.3.1.** [18, Exemple 2.2.2]
Soit $f \in AP(\mathbb{R})$, alors la fonction $sign(f) \in S^1AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec,

$$sign(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si} f(x) > 0 \\ 0, & \text{si} f(x) = 0 \\ -1, & \text{si} f(x) < 0 \end{cases}$$

**Exemple 1.3.2.**
Les fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes :

1. $g(x) = 2 + \cos x + \cos \sqrt{2}x$.
   La représentation graphique de cette fonction est




2. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{g(x)}\right)$
3. $h(x) = (g(x))^2 \sin\left(\frac{1}{g(x)}\right)$

sont des fonctions $S^pAP(\mathbb{R})$ mais pas $AP(\mathbb{R})$.

**Définition 1.3.4.** [2, Definition 3.3](**La propriété de $S^p$ normalité**)
Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite $S^p$ normale si la famille des fonctions $\{f(.+h), h \in \mathbb{R}\}$ est $S^p$ précompact, c'est-à-dire si pour toute sous suite $f(.+h_1), f(.+h_2)\dots$ on peut extraire une sous suite $S^p$ convergente.

**Définition 1.3.5.**
L'espace des fonctions Stepanov presque périodiques est la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés relativement à la norme de Stepanov. C'est-à-dire,

$$S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{S^p}}.$$

Autrement dit, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ possède la propriété d'approximation polynomiale au sens de Stepanov, si il existe une suite $(P_n)_n \subset \mathcal{A}$ tel que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|f(t) - P_n(t)\|\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.3.2.** *[2, Theorem 3.2]*
*Si $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors :*

1. *$S^p$-bornée, $(f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X}))$*
2. *$S^p$ uniformément continue c'est-à-dire : $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,$ tel que si $|h| < \delta$ alors*

$$\|f_h - f\|_{S^p} < \varepsilon,$$

*$f_h$ est la translatée de $f$.*

**Théorème 1.3.2.** *[2, Theorem 3.5]*
*Les trois définitions 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5 coincident.*

Dans ce que suit, on présentera certaines propriétés des fonctions Stepanov presque périodiques.

**Propriété 1.3.2.**
*Soient les fonctions $f, h \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $1 \leq p < \infty$, on a :*

1. $f + h \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
2. *Si* $f \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda f \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

**Preuve.**

1. Montrons que $f + h \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   Soit $\varepsilon > 0$ et $\tau \in S^p E(\frac{\varepsilon}{2}, f) \cap S^p E(\frac{\varepsilon}{2}, h)$, alors

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|(f+h)(t+\tau) - (f+h)(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t) + h(t+\tau) - h(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&+ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|h(t+\tau) - g(t)\|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

   Doù $\tau \in S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f + h)$.

   Par conséquent, $S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f + h)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Ceci implique que $f + h$ est presque périodique au sens de Stepanov.

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $\tau \in S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, f)$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

   Par suite,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|\lambda f(t+\tau) - \lambda f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $\tau \in S^p\mathbb{E}(\varepsilon, \lambda f)$ c'est-à-dire $S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{\lambda}, f) \subset S^p\mathbb{E}(\varepsilon, \lambda f)$. Comme $S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{\lambda}, f)$ est relativement dense alors $S^p\mathbb{E}(\varepsilon, \lambda f)$ est relativement dense.

Par conséqent, $\lambda f$ est presque périodique au sens de Stepanov. ■

**Propriété 1.3.3.**
*Soient $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g \in S^qAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $1 \leq p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a : $fg \in S^1AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.** Soit $\varepsilon > 0$ et $\tau$ une Stepanov $\varepsilon$-presque périodique commune à $f$ et $g$.

En vertu de l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|fg(t+\tau) - fg(t)\|dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|(f(t+\tau)(g(t+\tau) - g(t)) + g(t)(f(t+\tau) - f(t))\| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|(f(t+\tau)\| \ \ \|(g(t+\tau) - g(t)\|dt \\
&+ \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|g(t)\| \ \ \|(f(t+\tau) - f(t)\|dt \\
&\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t+\tau)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|g(t+\tau) - g(t)\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&+ \quad \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|g(t)\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{P}}\right) \\
&\leq 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

avec

$$M = \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|g(t)\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

Donc $fg$ est $S^1$-presque périodique. ■

**Propriété 1.3.4.**
*Si $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $|f| \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Soient $\varepsilon > 0$, $\tau \in S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f)$ alors :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \||f(t+\tau)| - |f(t)|\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $\tau \in S^p\mathbb{E}(\varepsilon, |f|)$ qui est relativement dense. Donc $|f|$ est presque périodique au sens de Stepanov. ■

**Propriété 1.3.5.**
*Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ $S^p$*-convergente vers une fonction* $f$.
*C'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0, \forall n \geq N : \|f_n - f\|_{S^p} < \varepsilon,$$

*alors* $f \in S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

**Preuve.**
Soient $\tau \in S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{4}, f_n)$, alors $\forall n \geq N$ on a :

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f\|_{S^p} &= \|f_\tau + (f_n)_\tau - (f_n)_\tau + f_n - f_n - f\|_{S^p} \\ &\leq \|(f_n)_\tau - f_n\|_{S^p} + \|(f_n)_\tau - f_\tau\|_{S^p} + \|f_n - f\|_{S^p} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{4}, f_n) \subset S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f)$. Donc $S^p\mathbb{E}(\varepsilon, f)$ est relativement dense ce qui donne $f \in S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. ■

**Théorème 1.3.3.** *[4, Proposition 2.2]*
*Pour tous* $1 \leq p < \infty$ *l'espace* $(S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|.\|_{S^p})$ *est un espace de Banach.*

**Preuve.**
Soit $1 \leq p < \infty$, il est clair que $S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est un sous espace vectoriel de $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Il suffit de prouver que $S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est fermé dans $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Soit $(f_n)_n$ une suite de $S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que $f_n \to f$ quand $n \to \infty$ dans $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Par hypothèse $f_n \to f \subset S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$, tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $\tau \in [a, a + l_\varepsilon]$ satisfaisant

$$\left(\int_t^{t+1} \|f_n(s+\tau) - f_n(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f(s)\|^p ds\Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left(\int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f_n(s+\tau)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_t^{t+1} \|f_n(s+\tau) - f_n(s)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_t^{t+1} \|f_n(s) - f(s)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent,

$$\left(\int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_\tau - (f_n)_\tau\|_{S^p} + \left(\int_t^{t+1} \|f_n(s+\tau) - f_n(s)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \|f - f_n\|_{S^p}.$$

Ce qui implique que

$$\left(\int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_\tau - (f_n)_\tau\|_{S^p} + \|f - f_n\|_{S^p} + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Par hypothèse $f_n \to f$ quand $n \to \infty$ dans $BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ il s'ensuit que $(f_n)_\tau \to f_\tau$ quand $n \to \infty$ dans $BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Par conséquent, pour $n \geq 0$ suffisament grand, on déduit que

$$\left( \int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Danc, $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

**Proposition 1.3.3.**
*Soit $f$ une fonction Stepanov presque périodique.*
*Si $f'$ est $S^p$-uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est Stepanov presque périodique.*

**Preuve.**
Supposons que $f$ est presque périodique au sens de Stepanov et prenons une suite $(h_n)_n$ telle que $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, alors

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x + \theta h_n), \quad 0 < \theta < 1$$

L'expréssion à gauche de cette égalité est une somme de deux fonctions presque périodiques au sens de Stepanov, elle est donc Stepanov presque périodique.

Puisque $f'$ est $S^p$-uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $(f'(. + \theta h_n))_n$ est $S^p$-uniformément convergent vers $f'$.

En effet,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \int_x^{x+1} |f'(t+x) - f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad lorsque \quad |x| < \delta.$$

Choisisons $h_n$ telle que $|h_n| < \delta$, alors

$$|t + \theta h_n - t| = |\theta h_n| < \delta.$$

Ainsi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \int_x^{x+1} |f'(t+\theta h_n) - f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

D'après le Théorème 1.3.3, $f'$ est Stepanov presque périodique. ■

**Proposition 1.3.4.** *[1]*
*Si $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $F(t) = \int_0^t f(\eta)d\eta$, alors $F$ est uniformément continue.*

**Preuve.** [1, Definition $VIII$]
Pour $p = 1$, on suppose que $F$ n'est pas uniformément continue, alors il existe $\rho > 0$ et deux suites $(\sigma_n)_n$ et $(\delta_n)_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, tel que :

$$\|F(\sigma_n + \delta_n) - F(\sigma_n)\| = \| \int_0^{\delta_n} f(\sigma_n + \eta) d\eta \| \geq \rho \tag{1.3}$$

Comme $f \in S^1AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est uiformément, on peut ( par le critère de Bochner) admettre que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \|f(t+\sigma_n+\eta)-f_\sigma(t+\eta)\|d\eta = 0.$$

$f_\sigma$ existe, comme $f \in S^1AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, de plus :

$$\|\int_0^{\delta_n} f(\sigma_n+\eta)d\eta\| \leq \|\int_0^{\delta_n} f_\sigma(\eta)d\eta\| + \|\int_0^{\delta_n}(f(\sigma_n+\eta)-f_\sigma(\eta))d\eta\|$$

Ce qui contredit (1.3)
Par suite, $F$ est uniformément continue. ■

### 1.3.2 Le lien entre les fonctions Bohr presque périodiques et les fonctions Stepanov presque périodiques

**La transformée de Bochner**

**Définition 1.3.6.** [2, Remark 3.10], [24, Definition 4.1], [11, Definition 2.7]
La transformée de Bochner $f^b$ d'une fonction localement $p$-intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est définie comme suit

$$\begin{array}{rcl} f^b : \mathbb{R} & \to & L^p([0,1],\mathbb{X}) \\ t & \mapsto & f^b_t \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} f^b_t : [0,1] & \to & \mathbb{X} \\ s & \mapsto & f^b_t(s) = f(t+s). \end{array}$$

**Proposition 1.3.5.** *[4, Remark 2.2]*
*Soient $f, g \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, pour $1 \leq p < \infty$ on a*

1. $(f+g)^b = f^b + g^b$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $(\lambda f)^b = \lambda f^b$.
3. *Si* $\tau \in \mathbb{R}$ *alors* $(f_\tau)^b = f^b_\tau$, *où* $f_\tau$ *designe la translatée de* $f$.
   *En effet, pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}, s \in [0,1]$ *on a*

$$\begin{aligned}(f_\tau)^b_t(s) &= f_\tau(t+s) \\ &= f(t+s+\tau) = (f_t(\tau+s)) \\ &= (f^b_t)_\tau(s).\end{aligned}$$

**Remarque 1.3.2.**
Si $f : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ alors

$$\begin{array}{rcl} f^b : \mathbb{R}\times\mathbb{X} & \to & L^p([0,1],\mathbb{X}) \\ (t,u) & \mapsto & f^b_{(t,u)} \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} f^b_{(t,u)} : [0,1] & \to & \mathbb{X} \\ s & \mapsto & f^b_{(t,u)}(s) = f(t+s,u). \end{array}$$

Le théorème de Bochner qui suit exprime la presque périodicité de Stepanov à l'aide de celle de Bohr.

**Théorème 1.3.4.** *[1], [11, Definition 2.10]*
*Soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on a la caractérisation suivante :*

$$f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \Leftrightarrow f^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})).$$

*De plus,*

$$\|f\|_{S^p} = \|f^b\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f^b_t\|_{L^p([0,1],\mathbb{X})}.$$

**Proposition 1.3.6.** *[1], [12, Proposition 3.70]*
*Toute fonction Bohr presque périodique est Stepanov presque périodique.*

*C'est-à-dire :*

$$AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

La réciproque n'est pas vraie, il existe des fonctions Stepanov presque périodiques qui ne sont pas Bohr presque périodiques, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.3.** [12, Exemple 3.69], [18, Exemple 2.2.1]
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\beta^{-1}$ un nombre irrationnel bien défini alors les fonctions :

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha t) + \cos(\beta t)}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$g(t) = \cos\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha t) + \cos(\beta t)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 1.3.7.** *[1, Definition*VII*], [20, Lemma 4]*
*Si f est Stepanov presque périodique et uniformément continue alors f est Bohr presque périodique. Autrement dite,*

$$AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \cap C_u(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

**Preuve.** (Voir [1], [20])
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(t) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t+\eta)d\eta.$$

Comme f est uniformément continue, il vient par la Proposition 1.2.3 que $f_n \to f$ lorsque $n \to +\infty$ uniformément sur $\mathbb{R}$.
Pour montrer le résultat désiré, il suffit de montrer que $f_n$ est Bohr presque périodique pour chaque $n$.
Pour ce faire, nous exploitons la Stepanov presque périodicité avec $l = \frac{1}{n}$.
Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble relativement dense dont les élements $\tau$ vérifient :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} n\int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\|^p d\eta \leq \varepsilon^p.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient que pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\|f_n(t+\tau) - f_n(t)\| &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\| d\eta \\
&\leq n \left( \int_0^{\frac{1}{n}} 1^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq n \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq n.n^{\frac{-1}{q}} \left( \int_0^{\frac{1}{n}} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)\|^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, ce qui achève la démonstration. ■

### 1.3.3 Théorème de superposition des fonctions Stepanov presque périodiques

**Définition 1.3.7.** [4, Definition 2.7]
Soit $1 \leq p < \infty$. Une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ telle que $F(\cdot, x) \in L^p_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ $\forall x \in \mathbb{X}$ est dite Stepanov presque périodique en $t$ uniformément en $x \in \mathbb{X}$ si pour tout compact $K \subset X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists l_{\varepsilon,K} > 0$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \tau \in [a, a + l_{\varepsilon,K}]$ satisfaisant :

$$\sup_{x \in K} \left( \int_t^{t+1} \|f(s+\tau, x) - f(s, x)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On note par $S^pAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ l'espace de ces fonctions.

**Lemme 1.3.1.** *[4, Lemma 3.1]*
*Soient $1 \leq p < \infty$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ une fonction telle que $F(\cdot, x) \in L^p_{Loc}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $\forall x \in \mathbb{X}$ alors $F \in S^pAPU(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ si et seulement si les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *$\forall x \in \mathbb{X}$, $F(\cdot, x) \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
2. *$F$ est $S^p$ uniformèment continue par rapport à la deuxième variable sur tout compact $K \subset \mathbb{X}$. Autrement dit,*
   *$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_{K,\varepsilon}$ tel que $\forall x_1, x_2 \in K$*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta_{K,\varepsilon} \Longrightarrow \left( \int_t^{t+1} \|f(s, x_1) - f(s, x_2)\|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

**Théorème 1.3.5.** *[4, Theorem 3.1]*
*Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, $(t,x) \mapsto F(t,x)$ une fonction Stepanov presque périodique. Supposons que $F$ vérifie l'hypothèse de Lipschitz c'est à dire $\exists L_F \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ tel que*

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L_F \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

*Si $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $N_F(g(\cdot)) \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Soit $1 \leq p \leq \infty$ prenons $l_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $\tau \in [a, a + l_\varepsilon]$ satisfisant

$$\begin{aligned}&\left(\int_t^{t+1} \|F(s+\tau, g(s+\tau)) - F(s, x(s))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_t^{t+1} \|F(s+\tau, g(s+\tau)) - F(s+\tau, x(s))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_t^{t+1} \|F(s+\tau, g(s)) - F(s, g(s))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'après la condition 1.5 et comme $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ on aura

$$\begin{aligned}\left(\int_t^{t+1} \|F(s+\tau, g(s+\tau)) - F(s+\tau, g(s))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_t^{t+1} [L(s+\tau)]^p \|g(s+\tau) - g(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \|g(s+\tau) - x(s)\| \left(\int_t^{t+1} [L(s+\tau)]^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|L\|_{S^p} \cdot \frac{\varepsilon}{4\,(1 + \|L\|_{S^p})} \leq \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

On donne $K = \overline{\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}}$ un sous ensemble compact de $\mathbb{X}$, et $\varepsilon > 0$ fixe.
En utilisant le Lemme 1.3.1 il s'ensuit qu'il existe $\delta_{\varepsilon,K}$ tel que l'équation (1.4) soit satisfaite. En vue de la compacité de $K$, il vient qu'il existe un ensemble fini $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset K \; (n \in \mathbb{N}^*)$ tel que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(g_i, \delta_{K,\varepsilon}\right)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $i(t) = 1, \ldots, n$ tel que $\left\|g(t) - g_{i(t)}\right\| \leq \delta_{K,\varepsilon}$.
Danc

$$\left(\int_t^{t+1} \left\|F(s+\tau, g(s)) - F(s+\tau, g_{i(t)})\right\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.7}$$

et

$$\left(\int_t^{t+1} \|(F(s, g(s)) - F(s, g_i(t))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.8}$$

En utilisant (1.5) on obtient

$$\left(\int_t^{t+1} \left\|F(s+\tau, g_{i(t)}) - F(s, g_{i(t)}))\right\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.9}$$

Par conséquent, par (1.6), (1.7), (1.8) et (1.9) on obtient :

$$\left(\int_t^{t+1} \|F(s+\tau, g(s+\tau)) - F(s, g(s))\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

D'où

$$\mathcal{N}_F(g(\cdot)) \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Chapitre 2

# Fonctions Stepanov pseudo presques périodiques

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de faire une présentation des fonctions pseudo presque périodiques introduites par C. Zhang [28] et des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques définies pour la première fois par Diagana dans [11]. Pour se faire on doit commencer par une présentation des fonctions ergodiques.

## 2.2 Les fonctions ergodiques

### 2.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.2.1.**
Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on dit que la fonction $\varphi$ est ergodique si :

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(x)\| dx = 0.$$

On note par $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions ergodiques.

**Proposition 2.2.1.**
*L'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est invariant par translation c'est-à-dire, si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $s \in \mathbb{R}$ alors*

$$\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

**Preuve.**
Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $s \in \mathbb{R}$, montrons que $\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

On pose $y = x + s$. alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi_s(x)\| dx &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x+s)\| dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+s}^{T+s} \|\varphi(y)\| dy \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(T+s)-(-T+s)} \int_{-T+s}^{T+s} \|\varphi(y)\| dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

**Proposition 2.2.2.**

1. *Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
2. *Si $\varphi, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\varphi + h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
3. *Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g$ une fonction bornée définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
4. *Si $\varphi, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $h\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
5. *Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $|\varphi| \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**

1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   On a
   $$\begin{aligned}
   \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\alpha\varphi(x)\| dx &= |\alpha| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx \\
   &= 0.
   \end{aligned}$$
   Par conséquent, $\alpha\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
2. Soit $\varphi, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, montrons que $\varphi + h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   On a
   $$\begin{aligned}
   \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|(\varphi+h)(x)\| dx &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x) + h(x)\| dx \\
   &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|h(x)\| dx \\
   &= 0.
   \end{aligned}$$
   D'où
   $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|(\varphi+h)(x)\| dx = 0.$$
   Par conséquent $\varphi + h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g$ une fonction bornée, montrons que $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   Par hypathèse $g$ est bornée donc il existe $c > 0$ tel que :
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \leq c.$$
   On a
   $$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |(g\varphi)(x)|dx &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \|\varphi(x)\|dx \\ &\leq c \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\|dx \\ &= 0.\end{aligned}$$
   Donc $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
4. (4) est une conséquence de (3).
5. (5) découle directement de la Définition 2.2.1. ■

**Remarque 2.2.1.**
D'après les Propriétés (1) et (2) de la Proposition 2.2.2 on remarque que l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel.

**Proposition 2.2.3.**
*L'espace* $(\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

**Preuve.**
Il est claire que $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est un sous espace vectoriel de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors il suffit de montrer que $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}$.
On a :
$$\int_{-T}^{T} \|(\varphi(t)\|dt \leq \int_{-T}^{T} \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|dt + \int_{-T}^{T} \|(\varphi_n(t)\|dt$$
On déduit que :
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\|dt$$
En utilisant le fait que $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on obtient
$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Comme $\lim_{T\to+\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_\infty = 0$, on déduit que :
$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|dt = 0.$$
Finalement, $(\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. ■

**Théorème 2.2.1.**
*Soit* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*. Alors*

$$\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad \varphi^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

**Preuve.**
La première implication découle de la Proposition 2.2.2 donc il reste à montrer la deuxième implication.
On suppose que $\varphi^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et on montre que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
D'apres l'inégalité de Hölder, pour $p = q = 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\| dt &\leq \frac{1}{2\mathrm{T}} \left( \left[ \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} 1 dt \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{T}} \left[ \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} [2\mathrm{T}]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[ \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\| dt \leq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[ \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\varphi^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \|\varphi(t)\|^2 dt = 0$. Ce qui donne $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

**Définition 2.2.2.**
Un sous ensemble $C$ de $\mathbb{R}$ est dit sous ensemble zéro-ergodique de $\mathbb{R}$ si

$$\overline{\mu}(C) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \mu(C \cap [-T, T]) = 0.$$

**Théorème 2.2.2.**
*Soit* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*. Alors* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, l'ensemble*

$$C_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : \|\varphi(t)\| \geq \varepsilon\}$$

*est un sous-ensemble zéro-ergodique de* $\mathbb{R}$*.*
*Autrement dit,*

$$\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \Leftrightarrow \overline{\mu}(C_\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0.$$

**Lemme 2.2.1.** *[21, Lemma 2.7]*
*Supposons que* $f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*.* $f^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \mu(M_{T,\varepsilon}(f)) = 0, \tag{2.1}$$

*Où* $\mu$ *définie la mesure de Lebesgue et* $M_{T,\varepsilon}(f) = \left\{ t \in [-T, T] : \left( \int_t^{t+1} \|f(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \geq \varepsilon \right\}$.

**Preuve.**
Si $f^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$. On montre (2.1). Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que $\frac{1}{2\mathtt{T}} \ \mu(M_{\mathtt{T},\varepsilon_0}(f))$ ne converge pas vers 0 quand $\mathtt{T} \to +\infty$.
Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n$

$$\frac{1}{2\mathtt{T}_n} \ \ \mu(M_{\mathtt{T}_n,\varepsilon_0}(f)) \geq \delta \ \ pour \ \ certains \ \ \mathtt{T}_n > n.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mathtt{T}_n}\int_{-\mathtt{T}_n}^{\mathtt{T}_n}\left(\int_t^{t+1}\|f(\sigma)\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt &\geq \frac{1}{2\mathtt{T}_n}\int_{M_{\mathtt{T}_n,\varepsilon_0}(f))}\left(\int_t^{t+1}\|f(\sigma)\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt\\ &\geq \frac{\varepsilon_0}{2\mathtt{T}_n}\mu(M_{\mathtt{T}_n,\varepsilon}(f))\\ &\geq \varepsilon_0\delta.\end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que $f^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$. D'autre part, supposons que (2.1) est vraie alors pour tout $\varepsilon > 0$ il exist $\mathtt{T}_0 > 0$ tel que pour tout $\mathtt{T} > \mathtt{T}_0$ on a

$$\frac{1}{2\mathtt{T}} \ \ \mu(M_{\mathtt{T},\varepsilon}(f)) < \frac{\varepsilon}{\|f\|_{S^p}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\mathtt{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\left(\int_t^{t+1}\|f(\sigma)\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt\\ &= \frac{1}{2\mathtt{T}}\left(\int_{M_{\mathtt{T},\varepsilon}(f)} + \int_{[-\mathtt{T},\mathtt{T}]\setminus M_{\mathtt{T},\varepsilon}(f)}\right)\left(\int_t^{t+1}\|f(\sigma)\|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} dt\\ &\leq \frac{1}{2\mathtt{T}}\left(\|f\|_{S^p}\mu(M_{\mathtt{T},\varepsilon}(f))\right) + \left(2\mathtt{T} - \mu(M_{\mathtt{T},\varepsilon}(f))\varepsilon\right)\\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

pour $\mathtt{T} > \mathtt{T}_0$.
Ce qui implique que $f^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$. ■

### 2.2.2 Fonctions ergodiques avec paramètres

**Définition 2.2.3.**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t,u) \mapsto \varphi(t,u)$ une fonction bornée continue. On dit que $\varphi$ est ergodique en $t$ uniformément en $u \in K$ avec $K$ un compact de $\mathbb{X}$ si

$$\lim_{\mathtt{T}\to\infty}\frac{1}{2\mathtt{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi(t,u)\|dt = 0.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{E}U(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}) = \{\varphi \in C_b(\mathbb{R},K) : \lim_{\mathtt{T}\to\infty}\frac{1}{2\mathtt{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi(t,u)\|dt = 0\}.$$

On désigne par $\mathcal{E}U(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ l'espace des fonctions ergodiques avec paramètres.

## 2.3 Les fonctions pseudo presque périodiques

Le concept de la pseudo presque périodicité est une généralisation de la presque périodicité. Il a été présenté pour la première fois, dans la littérateure, par C.Zhang dans son article publié en 1994. Par suite cette notion a été développée et généralisée par plusieur auteurs citons par exemples, Toka Diagana [11, 12], [12], Li, Hong-Xu and Zhang, Li-Li [21], Long, Wei and Ding, Hui-Sheng [22].

### 2.3.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.3.1.** [11, Definition 2.3],[28, Definition 1.2], [12, Definition 5.1]
Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite pseudo presque périodique si :

$$f = g + \varphi, avec \ \ g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \ \ et \ \ \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

$g$ est dite la composante presque périodique de $f$ et $\varphi$ la perturbation ergodique de $f$.
Lensemble de ces fonctions sera noté $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

**Exemple 2.3.1.** [12, Exemple 5.2]
La fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{(1 + x^2)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

est pseudo presque périodique.
En effet, la fonction $x \mapsto \sin(x) + sin(\sqrt{2}x)$ est presque périodique et la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)}$ est dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car elle est continue et bornée, de plus

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \frac{1}{1 + x^2} dx &= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \left[\arctan(x)\right]_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{\arctan(\mathtt{T}) - \arctan(-\mathtt{T})}{2\mathtt{T}} \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{2\arctan(\mathtt{T})}{2\mathtt{T}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Exemple 2.3.2.**
La fonction $f$ définie par

$$f(x) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) + x\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

est pseudo presque périodique.

En effet, la fonction $x \mapsto \cos(2\pi x) + \cos(2\pi\sqrt{2}x)$ est presque périodique et on a aussi la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est ergodique, car elle est continue bornée, et

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} |x\sin(x)|dx &= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \left( \int_{-\mathtt{T}}^{0} -x\sin(-x)dx + \int_{0}^{\mathtt{T}} x\sin(x)dx \right) \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} x\sin(x)dx \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \left( [-x\cos(x)]_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} + \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \cos(x)dx \right) \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \left[ -\mathtt{T}\cos(\mathtt{T}) + \mathtt{T}\cos(-\mathtt{T}) + \sin(\mathtt{T}) - \sin(-\mathtt{T}) \right] \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{2\sin(\mathtt{T})}{2\mathtt{T}} \\
&= \lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{\sin(\mathtt{T})}{\mathtt{T}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Théorème 2.3.1.** *[29, Theorem 1.4], [28, Lemma 1.3], [12, Definition 5.6]*
*Si $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g$ sa composante presque périodique alors :*

$$g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})},$$

*Donc,*

$$\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} \|g(x)\| \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\|.$$

**Preuve.**
On raisonne par l'absurde.
On suppose que $g(\mathbb{R}) \not\subseteq \overline{f(\mathbb{R})}$, alors

$$\exists x_0 \in g(\mathbb{R}) \quad et \quad x_0 \notin \overline{f(\mathbb{R})}.$$

C'est-à-dire

$$\exists \;\; x_0 \in \mathbb{R}, \forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; on \; a \;\; \inf_{s\in\mathbb{R}} \|g(x_0) - f(s)\| \geq \varepsilon.$$

D'après la continuité de $g$ en $x_0$, $\exists \;\; \delta \;\; > \;\; 0$ tel que

$$|x| < \delta \Rightarrow \inf_{s\in\mathbb{R}} \|g_{x_0}(x) - f_{x_0}(s)\| > \varepsilon. \tag{2.2}$$

Comme $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est invariant par translation alors $g_{x_0} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, donc pour $\varepsilon > 0, \exists \;\; l_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ tel que chaque intervalle de longeur $l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ contient un nombre $\tau$ vérifiant :

$$\|(g_{x_0})_\tau(x) - g_{x_0}(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, |x| < \delta. \tag{2.3}$$

Par hypothèse $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ donc $f = g + \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Donc

$$\begin{aligned}\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| &= \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x+\tau)\| \\ &= \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x) + g_{x_0}(x)\| \\ &\geq \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x)\| - \|g_{x_0}(x) - g_{x_0}(x+\tau)\| \\ &\geq \|(f_{x_0})_\tau(x) - g_{x_0}(x)\| - \|g_{x_0}(x) - (g_{x_0})_\tau(x)\|.\end{aligned}$$

D'après (2.3) on aura :

$$\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| \geq \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}, \forall x, |x| < \delta.$$

On pose $s = x + \tau$ alors, $\forall s \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$.

$$\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| = \|\varphi_{x_0}(s)\| \geq \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\|\varphi_{x_0}(s)\| &\geq \inf_{s\in[\tau-\delta,\tau+\delta]} \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \inf_{s\in\mathbb{R}} \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

En utilisant (2.2) on obtient :

$$\|\varphi_{x_0}(s)\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, on aura

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi_{x_0}(s)\| ds > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci contredit le fait que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Par conséquent, $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$. ■

**Lemme 2.3.1.** *[11, Lemma 2.5], [12, Lemma 5.8]*
*Si $(f_n)_n \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

**Preuve.** [11]
Soit $(f_n)_n \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n = g_n + \varphi_n \;\; avec \;\; g_n \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \;\; et \;\; \varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

D'apres le Théorème 2.3.1 on a $\|g_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$ donc $\exists g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$ ( car $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est stable par passage à la limite uniforme).
De la même manière on trouve qu'il existe aussi une fonction $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.
Il reste à vérifier que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour $\mathtt{T} > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi(x)\|dx &\leq \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\|dx + \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi_n(x)\|dx \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty + \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi_n(x)\|dx.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on trouve :

$$\lim_{\mathtt{T}\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi(x)\|dx = 0.$$

C'est à dire $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$
Par conséquent $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$. ■

**Proposition 2.3.1.** *[12, Proposition 5.3]*
*Soit $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, si $h \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(f * h) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Soit $f = g + \varphi$ tel que $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On a : $f * h = g * h + \varphi * h$.
D'après la Proposition 1.2.1 On a $g * h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Verifions que $\varphi * h \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$.
On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\|(\varphi * h)(x)\|dx &= \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\|\varphi(x-s)h(s)\|ds\right]dx \\ &\leq \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\varphi(x-s)\|\|h(s)\|dsdx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\|h(s)\|\left(\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\|\varphi(x-s)\|dx\right)ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\|h(s)\|\left(\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\|\varphi_{-s}(x)\|dx\right)ds.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est invariant par translation alors

$$\lim_{\mathtt{T}\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi_{-s}(x)\|dx = 0.$$

Ceci se déduit de l'égalité précedente que la fonction $\mathtt{T} \mapsto \frac{1}{2\mathtt{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{+\mathtt{T}}\|\varphi_{-s}(x)\|dx$ est bornée et $h \in L^1(\mathbb{R})$ et grâce au Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\lim_{\mathtt{T}\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\|h(s)\|\left(\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}}\|\varphi_{-s}(x)\|dx\right)ds = 0.$$

Doù
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi * h(x)\| dx = 0.$$

Alors
$$\varphi * h \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Donc, $f * h \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

**Théorème 2.3.2.** *[12, Theorem 5.9]*
*L'espace $(PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

**Preuve.**
Il est clair que $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et par le lemme 2.3.1, l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est fermé.
Par conséquent, l'espace $(PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. ■

**Proposition 2.3.2.** *[29, Theorem 1.5], [12, Proposition 5.7]*
*L'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est invariant par translation. Ceci découle de l'invariance par translation de $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Proposition 2.3.3.** *[29], [12, Lemma 5.5]*

1. *Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, la décompotion $f = g + h$ est unique, c'est-à-dire*
$$PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \oplus \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$
2. *L'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est stable par le produit.*

**Preuve.** [29]

1. Montrons que la décompotion de $f$ est unique.
   Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ on suppose qu'il existe $g_1, g_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ tels que :
$$f = g_1 + \varphi_1 \quad et \quad f = g_2 + \varphi_2.$$
   Alors
$$(g_1 - g_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$
   $(g_1 - g_2) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $(\varphi_1 - \varphi_2) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, car $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ sont des espaces vectorièls.
   D'après le Théorème 2.3.1, $(g_1 - g_2)(\mathbb{R}) \subset \{0\}$ alors $(g_1 - g_2)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
   Ce qui donne $g_1 = g_2$.
   Par concéquent : $\varphi_1 = \varphi_2$.
   D'où la décomposition de $f$ est unique.

2. Montrons que l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est stable pour la multiplication.
   Soit $f_1, f_2 \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ on a
   $f_1 = g_1 + \varphi_1,\ f_2 = g_2 + \varphi_2$ avec $g_1, g_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   On a
   $$f_1.f_2 = (g_1 + \varphi_1).(g_2 + \varphi_2) = g_1.g_2 + \varphi_1.\varphi_2 + g_1.\varphi_2 + \varphi_1.g_2.$$
   D'après la Proposition 1.2.1 et la Proposition 2.2.2 on a
   $g_1.g_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\varphi_1.\varphi_2 + g_1.\varphi_2 + \varphi_1.g_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   D'où $f_1.f_2 \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

**Dérivation et intégration des fonctions pseudo presque périodiques**

**Théorème 2.3.3.**
*Si $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et sa dérivé $f'$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Théorème 2.3.4.** *[12, Theorem 5.12]*
*On suppose que l'espace de Banach $\mathbb{X}$ est uniformément convexe. Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, avec $f = g + h$, $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
*On définit les fonctions :*

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \quad et \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds, t \in \mathbb{R}.$$

*On suppose que*

1. *$G$ est bornée.*
2. *$\exists\ \Phi \in \mathbb{X}$ tel que : $H - \Phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

*Alors la fonction définie par :*

$$t \mapsto F(t) = G(t) + H(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

### 2.3.2 Théorème de superposition des fonctions pseudo presque périodiques

**Définition 2.3.2.** [11, Definition 2.6], [12, Definition 5.10]
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, u) \mapsto f(t, u)$. On dit qu'une fonction continue $f$ est dite pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$, uniformément en $u \in \mathbb{X}$ si

$$f = g + \varphi \quad avec \quad g \quad \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X}) \quad et \quad \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X}).$$

**Exemple 2.3.3.** [12, Exemple 5.11]
La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, u) = \cos u \left[ \sin t + \sin \pi t + \frac{1}{(1 + t^2)} \right]$$

est pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in B$, où $B \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borné arbitraire.

**Théorème 2.3.5.** *[12, Theorem 3.13]*
*Soit $F \in PAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, on suppose que $F$ vérifie la condition de Lipschitz, c'est-à-dire $\exists L > 0$ tel que*

$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{X} \quad et \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Si $g \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $\mathcal{N}_F(g(\cdot)) = F(\cdot, g(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Soit $F = H + \phi$ avec $H \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, $\phi \in \mathcal{E}U(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
On utilise le fait que $f$ vérifie la condition de Lipschitz alors

$$\begin{aligned}\|F(t, g(t))\| &\leq \|F(t, g(t)) - F(t, 0)\| + \|F(t, 0)\| \\ &\leq L\|g\|_\infty + \|F(t, 0)\| \\ &\leq L\|g\|_\infty + \|H(t, 0)\| + \|\phi(t, 0)\|.\end{aligned}$$

Par conséquent $F(\cdot, g(\cdot)) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$. Nous avons

$$\begin{aligned}F(\cdot, H(\cdot)) &= H(\cdot, g_1(\cdot)) + F(\cdot, g(\cdot)) - H(\cdot, g_1(\cdot)) \\ &= H(\cdot, g_1(\cdot)) + F(\cdot, g(\cdot)) - F(\cdot, g_1(\cdot)) + \phi(\cdot, g_1(\cdot)).\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2.2, $H(\cdot, g_1(\cdot)) \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ de plus en utilisant le fait que $F$ vérifie la condition de Lipschitz et $g_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors

$$\begin{aligned}\|F(t, g(t)) - F(t, g_1(t))\| &\leq L\|g(t) - g_1(t)\| \\ &\leq L\|g_2(t)\|.\end{aligned}$$

Donc $F(\cdot, g(\cdot)) - F(\cdot, g_1(\cdot)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.
Pour montrer que $F(\cdot, g(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, il suffit de montrer $\phi(\cdot, g_1(\cdot)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$. Comme $\mathrm{Img}(g_1)$ est relativement compact dans $\mathbb{X}$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini $m$ de boules ouvertes $O_k$ de centre $u_k \in \mathbb{X}, k = 1, 2, \ldots, m$, et de rayon inférieur à $\frac{\varepsilon}{3L}$ tel que

$$\mathrm{Img}(g_1) \subset \sqcup_{k=1}^{m} O_k$$

Pour tout $k = 1, \ldots, m$ l'ensemble

$$B_k = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \in O_k\} \tag{2.4}$$

est ouvert et

$$\mathbb{R} = \sqcup_{k=1}^{m} B_k.$$

Soit

$$E_k = B_k \backslash \sqcup_{j=1}^{k-1} B_j,$$

alors

$$E_k \cap E_j = \emptyset \text{ quand } k \neq j, 1 \leq k, j \leq m.$$

Comme chaque $\phi(\cdot, u_k) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, il existe un nombre $T_0 > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t, u_k)\| \, dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (T \geq T_0). \tag{2.5}$$

De plus, comme $H \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ est uniformément continue alors

$$\|H(t, u) - H(t, u_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (u \in O_k, t \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Comme $F$ satisfait la condition de Lipschitz et

$$\phi(\cdot, g_1(\cdot)) = F(\cdot, g_1(\cdot)) - H(\cdot, g_1(\cdot)) \quad et \quad \phi(\cdot, u_k) = F(\cdot, u_k) - H(\cdot, u_k).$$

Alors d'après (2.6), (2.4) et (2.5) on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t, g_1(t))\| dt &\leq \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k \cap [-T,T]} (\|\phi(t, g_1(t)) - \phi(t, u_k)\| + \|\phi(t, u_k)\|) \, dt \\
&\leq \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \left[ \int_{E_k \cap |-T,T|} (\|F(t, g_1(t)) - F(t, u_k)\| + \|H(t, g_1(t)) - H(t, u_k)\| \right. \\
&+ \|\phi(\cdot, u_k)\| dt \\
&\leq \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k \cap |-T,T|} L\|g_1(t) - u_k\| + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T} \int_{E_k \cap |-T,T|} \|H(t, g_1(t)) - H(t, u_k)\| \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T} \int_{E_k \cap |-T,T]} \|\phi(\cdot, u_k)\| \, dt \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\phi(\cdot, g_1(\cdot)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Par conséquent $\mathcal{N}_F(g(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$. ■

## 2.4 Les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques

En 2007, T.Diagana [11] a défini les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. Ces derniers sont conçus à partir des fonctions Stepanov presque périodiques introduites par Stepanov lui même en 1926 [27]. Plus précisément, on a la définition suivante :

### 2.4.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.4.1.** [21, Definition 2.2], [11, Definition 2.11]
Une fonction $f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite Stepanov pseudo presque périodique ($S^p$-pseudo presque

périodique), si $f = g + \varphi$,
avec

$$g^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})) \quad et \quad \varphi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})).$$

L'espase de toutes les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques est noté par $S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

**Remarque 2.4.1.** [21, Remark 2.6]
L'espace $S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{S^p}$.

**Proposition 2.4.1.** *[11, Proposition 2.12]*
*Si $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $f$ est $S^p$-pseudo presque périodique pour tout $1 \leq p < \infty$.*

**Preuve.** [11]
Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $f = g + \varphi$ tel que $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
On note que $f \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$.
Alors Il reste à verifie que $\varphi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X}))$.
Pour cela, on choisit $q$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
en utilisant l'inégalité de Hölder pour $\mathtt{T} > 0$, on aura

$$\begin{aligned}
\int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt &\leq \left( \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\|^p ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2\mathtt{T})^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\|^p ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2\mathtt{T})^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\| \|\varphi(t+s)\|^{p-1} ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2\mathtt{T})^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\| \|\varphi\|_\infty^{p-1} ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2\mathtt{T})^{\frac{1}{q}} \|\varphi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\| ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2\mathtt{T})^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\| ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\mathtt{T}.\|\varphi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \left[ \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\| ds \right) dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Doù

$$\frac{1}{2T} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_0^1 \|\varphi(t+s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \|\varphi\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_0^1 \frac{1}{2T} \left( \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \|\varphi(t+s)\| dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est invariant par translation alors en utilisant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\left( \int_0^1 \frac{1}{2T} \left( \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \|\varphi(t+s)\| dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad \to \quad 0 \quad quand \quad \mathtt{T} \to \infty.$$

■

**Proposition 2.4.2.**
$S^qPAP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset S^pPAP(\mathbb{R},\mathbb{X}), \quad \forall 1 \leq p < q < \infty.$

### 2.4.2 Théorème de superposition des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques

**Définition 2.4.2.** [11, Definition 2.13]
Une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t, u) \mapsto F(t, u)$ avec $F(., u) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour tout $u \in \mathbb{X}$, est dite $S^p$-pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in \mathbb{X}$ si l'application $t \mapsto F(t, u)$ est $S^p$-pseudo presque périodique pour tout $u \in \mathbb{X}$.
Autrement dit, il existe deux fonctions $G, \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ telles que $F$ s'écrit comme $F = G + \Phi$ avec $G^b \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$, et $\Phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$. C'est-à-dire

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left( \int_{t}^{t+1} \|\Phi(s, u)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt = 0$$

uniformément en $u \in \mathbb{X}$.
L'espace des fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ $S^p$-pseudo presque périodiques est noté par $S^pPAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

**Théorème 2.4.1.** *[11, Theorem 2.14]*
*Soit $F : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une fonction $S^p$-pseudo presque périodique. Supposons que $F$ est Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable $u \in \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que*

$$\|F(t, u) - F(t, v)\| \leq L\|u - v\| \tag{2.7}$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$.*
*Si $\phi \in S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\mathcal{N}_F(\phi) \in S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

**Preuve.**
Comme $F \in S^pPAP(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, \mathbb{X})$ alors on peut écrire : $F^b = G^b+\Phi^b$ avec $G^b \in AP(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$ et $\Phi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$.
$\phi \in S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\phi^b = \phi_1^b + \phi_2^b$ avec $\phi_1^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$ et $\phi_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0, 1], \mathbb{X}))$ c'est-à-dire

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left( \int_{t}^{t+1} \|\phi_2^b(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt = 0. \tag{2.8}$$

Il est évident que $F^b(., \phi(.)) : \mathbb{R} \to L^p([0, 1], \mathbb{X})$.
En décomposant maintenant $F^b$ comme suit

$$\begin{aligned} F^b(., \phi^b(.)) &= G(., \phi_1^b(.)) + F^b(., \phi^b(.)) - G(., \phi_1^b(.)) \\ &= G(., \phi_1^b(.)) + F^b(., \phi^b(.)) - F^b(., \phi_1^b(.)) + \Phi^b(., \phi_1^b)). \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.3.5 on a $G^b(., \phi_1^b(.)) \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})$.
En mettant $H^b = F^b(., \phi^b(.)) - F^b(., \phi_1^b(.))$, alors $H^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})$.
En effet, pour $\mathtt{T} > 0$ ona

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|H^b(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt &= \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|F^b(\sigma, \phi^b(\sigma)) - F^b(\sigma, \phi_1^b(\sigma))\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \frac{L}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|\phi^b(\sigma) - \phi_1^b(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \frac{L}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|\phi_2^b(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt
\end{aligned}$$

Par suite en utilisant l'équation (2.8) il s'enscrit que

$$\lim_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|H^b(\sigma)\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt = 0$$

En utilisant le Théorème 1.2.2, il est facile de voir que $\Phi^b(., \phi_1^b(.)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{X})$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{\mathtt{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathtt{T}} \int_{-\mathtt{T}}^{\mathtt{T}} \left( \int_t^{t+1} \|\Phi^b(\sigma, \phi_1^b(\sigma))\|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} dt = 0.$)
Finalement, $F(\cdot, \phi(\cdot)) \in S^p PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ ■

Chapitre 3

# Application aux équations différentielles

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la nature de la presque périodicité des solutions de certaines classes d'équations différentielles. Dans la première section on étudie des résultats d'existence et d'unicité de solutions pseudo presque périodiques d'un système de réseaux de neurones avec retards mixtes. Dans la seconde on énonce quelques résultats concernant l'existence et l'unicité de solutions mild Bohr presque périodiques de deux classes d'équations différentielles abstraites (linéaire et semi linéaire) à coefficients constants avec second membres Stepanov presque périodiques.

## 3.2 Existence et unicité de solution pseudo presque périodiques d'un système de réseaux de neurones

Les réseaux de neurones (NNs) ont été largement étudiés en raison de leurs applications dans de nombreux domaines en pratique tels que le traitement du signal, la reconnaissance de formes, etc ... Leurs modélisation conduit généralement à des équations différentielles ordinaires ou à des systèmes différentiels retardés. Ces derniers trouvent des applications dans différents domaines applicatifs comme la biologie, la robotique etc voir (les références citées dans [3]).
L'objectif de cette section est de discuter l'existence et l'unicité des solutions pseudo presque périodiques du modèle de réseaux de neurones récurrents, avec retards mixtes et à coefficients variables, décrit par le système suivant. Voir [3]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + d_{ij}(t) g_j(x_j(t-\tau))\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds + J_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où

1. $n$, l'ordre du système, est le nombre de neurones.

2. $a_i$ est une constante strictement positive, $\forall 1 \leq i \leq n$.
3. $x_i(t)$ désigne l'état du $i^{\text{ème}}$ neurone à l'instant $t$.
4. $f_j(.), g_j(.)$ et $h_j(.)$ sont des fonctions d'activation.
5. Les fonctions $c_{ij}(.)$ *et* $d_{ij}(.)$ sont les poids de connexions entre le neurone $j$ et le neurone $i$ à l'instant $t$ *et* $(t-\tau)$ respectivement.
6. Les fonctions $p_{ij}(.)$ sont les coeficients de connexions entre le $j^{\text{ème}}$ et le $i^{\text{ème}}$ neurone, liés aux termes sous intégral.
7. $J_i(t)$ est l'entrée extèrieure du neurone $i$ à l'instant $t$.
8. $\tau$ le retard.

Dans cette étude on considère les hypothèses suivantes :
$(\mathbf{H}_1)$ : Pour tout $1 \leq j \leq n$, les fonctions $f_j(.), g_j(.)$ et $h_j(.)$ sont pseudo presque périodiques et il existe des constantes positives $L_j^f, L_j^g$ et $L_j^h$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq L_j^f |x-y|, \ \ |g_j(x) - g_j(y)| \leq L_j^g |x-y|, \ |h_j(x) - h_j(y)| \leq L_j^h |x-y|. \tag{3.2}$$

De plus, on suppose que pour tout $1 \leq j \leq n$, $f_j(0) = g_j(0) = h_j(0) = 0$ et $\|h_j\|_\infty < +\infty$.

$(\mathbf{H}_2)$ : Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, le noyau $k_{ij} : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est pseudo presque périodique, et

$$\int_0^{+\infty} k_{ij}(s) ds = 1.$$

$(\mathbf{H}_3)$ : Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note

$$c_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( |c_{ij}(t)| \right), \ d_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( |d_{ij}(t)| \right).$$

$$p_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( |p_{ij}(t)| \right), \ J_i^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( |J_i(t)| \right),$$

et on suppose que :

$$r = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left( c_{ij}^+ L_j^f + d_{ij}^+ L_j^g + p_{ij}^+ L_j^h \right)}{a_i} \right) < 1.$$

**Remarque 3.2.1.**
On note que $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ est muni de la norme uniforme suivante :
Si $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))^t$ alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)|.$$

**Lemme 3.2.1.** *[3, Lemma 1]*
*Si $\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** Ce résultat découle de l'invariance par translation de $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ (voir la Proposition 2.3.2).

Pour la commodité du lecteur, on refait la démonstration.

$\varphi \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, donc on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ avec } \varphi_1 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \text{ et } \varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n).$$

Evidemment

$$\varphi(\cdot - h) = \varphi_1(\cdot - h) + \varphi_2(\cdot - h).$$

D'après la Proposition 1.2.2 $\varphi_1(\cdot - h) \in AP\,(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

On a aussi

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi_2(t-h)|\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T+h}^{T-h} |\varphi_2(t)|\,dt = 0.$$

Ce qui implique que $\varphi_2(.-h) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Donc $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. ■

**Théorème 3.2.1.** *[3, Theorem 1]*
*Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont vérifiées et pour tout $1 \leq j \leq n,\ x_j(.) \in PAP(\mathbb{R})$.*

*Alors pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction*

$$\phi_i : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s))ds$$

*est pseudo presque périodique sur $\mathbb{R}$.*

**Preuve.**
En premier lieu, on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\phi_i(t)| &\leq \|h_j\|_\infty \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)ds \\ &= \|h_j\|_\infty \int_{0}^{+\infty} k_{ij}(t)ds = \|h_j\|_\infty.\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction $\phi_i$ est bornée.

Montrons maintenant la continuité de la fonction $\phi_i$.

Soit $(h_n)_n$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. La continuité de la fonction $x_j(.)$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_j\,(s+h_n) - x_j(s)| \leq \frac{\varepsilon}{L_j^h}, \quad \forall n \geq N, s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}|\phi_i(t+h_n) - \phi_i(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{t+h_n} k_{ij}(t+h_n-s)h_j(x_j(s))ds - \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s))ds\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)L_j^h|x_j(s+h_n) - x_j(s)|ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)L_j^h ds \frac{\varepsilon}{L_j^h} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Il nous reste à prouver que la fonction $\phi_i$ s'écrit comme la somme d'une fonction Bohr presque périodique et d'une fonction ergodique.

En utilisant respectivement le Théorème 2.3.5 et le Lemme 3.2.1, on obtient ce qui suit :

pour tout $1 \leq i, j \leq n$, les fonctions $s \mapsto k_{ij}(t-s)$ et $s \mapsto h_j(x_j(s))$ appartiennent à $PAP(\mathbb{R})$.

La Proposition 2.3.3 implique que $\psi : s \mapsto k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s)) \in PAP(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $1 \leq j \leq n$ on a

$$h_j(x_j(\cdot)) = u_j(\cdot) + v_j(\cdot) \text{ où } u_j \in AP(\mathbb{R}) \text{ et } v_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) &= \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\left(u_j(s) + v_j(s)\right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)u_j(s)ds + \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)v_j(s)ds \\
&= \phi_i^1(t) + \phi_i^2(t).
\end{aligned}$$

Prouvons la presque périodicité de la fonction $\phi_i^1(\cdot)$.
Pour $\varepsilon > 0$, on considère, compte tenu de la presque périodicité de $u_j$, un nombre $L_\varepsilon$ tel que dans tout intervalle $[a, a + L_\varepsilon]$ on trouve un nombre $\delta$, avec la propriété

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u_j(\xi + \delta) - u_j(\xi)| < \varepsilon.$$

Ensuite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
|\phi_i^1(t+\delta) - \phi_i^1(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t+\delta} k_{ij}(t+\delta-s)u_j(s)ds - \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)u_j(s)ds \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)\left|u_j(s+\delta) - u_j(s)\right| ds \\
&\leq \varepsilon \int_{0}^{+\infty} k_{ij}(s)ds = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\phi_i^1(\cdot) \in AP(\mathbb{R})$.

Maintenant, nous devons prouver que pour tout $1 \leq i \leq n$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\phi_i^2(s)| ds = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)v_j(s)ds \right| dt &= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \int_{0}^{\infty} k_{ij}(\rho)v_j(t-\rho)d\rho \right| dt \\
&\leq \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{0}^{\infty} k_{ij}(\rho)|v_j(t-\rho)|d\rho dt \\
&\leq \int_{0}^{\infty} k_{ij}(\rho) \left( \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |v_j(t-\rho)|dt \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\phi_i^2(\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $\phi(\cdot) = \phi_i^1(\cdot) + \phi_i^2(\cdot)$ est une fonction pseudo presque périodique. ■

**Lemme 3.2.2.** *[3, Lemma 3]*
*Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont satisfaites. On définit l'opérateur non linéaire $\Gamma$ comme suit : pour tout $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$*

$$(\Gamma\varphi)(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(\varphi)(t) \\ \vdots \\ \Gamma_n(\varphi)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1} F_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n} F_n(s)ds \end{pmatrix},$$

*avec*

$$\begin{aligned} F_i(s) = &\sum_{j=1}^n c_{ij}(s) f_j\left(\varphi_j(s)\right) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j\left(\varphi_j(s-\tau)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left( p_{ij}(s) \int_{-\infty}^s k_{ij}(s-\rho) h_j\left(\varphi_j(\rho)\right) d\rho \right) + J_i(s). \end{aligned}$$

*Alors $\Gamma$ envoie $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dans lui même.*

**Preuve.**
Notons que, grâce à la Proposition 2.3.3, le Lemme 3.3.1 et le Théorème 2.3.5, la fonction $F_i(\cdot)$, $(1 \leq i \leq n)$ est pseudo presque périodique.

Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n$, $F_i$ peut s'éxprimer comme suit :

$$F_i = F_i^1 + F_i^2 \text{ où } F_i^1 \in AP(\mathbb{R}) \text{ et } F_i^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_i\varphi\right)(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s)ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^2(s)ds \\ &= \left(\Gamma_i F_i^1\right)(t) + \left(\Gamma_i F_i^2\right)(t). \end{aligned}$$

La fonction $(\Gamma_i F_i^1) : t \longmapsto \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s)ds$ est presque périodique.

En effet, pour $\varepsilon > 0$, on considère le nombre $L_\varepsilon$ tel que dans chaque intervalle de longeur $L_\varepsilon$, $[\alpha, \alpha + L_\varepsilon]$ on peut trouver un nombre $\tau$ qui vérifie

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|F_i^1(t+\tau) - F_i^1(t)\right| < \varepsilon.$$

(Le $l_\varepsilon$ existe car $F_i^1$ est presque périodique.)
Ensuite, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left|(\Gamma_i F_i^1)(t+\tau)-(\Gamma_i F_i^1)(t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)\alpha_i} F_i^1(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} F_i^1(s)ds\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \left|F_i^1(s+\tau)-F_i^1(s)\right| ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{a_i}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $(\Gamma_i F_i^1) \in AP(\mathbb{R})$.

Maintenant on montre que $(\Gamma_i F_i^2) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. C'est-à-dire, on doit prouver que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} F_i^2(s)ds\right| dt = 0.$$

On a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} F_i^2(s)ds\right| dt \leq I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t} e^{-(t-s)a_i}\left|F_i^2(s)\right| ds\right) dt \text{ et } I_2 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)a_i}\left|F_i^2(s)\right| ds\right).$$

On pose $\xi = t-s$, alors en appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t}\left|e^{-(t-s)a_i}F_i^2(s)\right| ds\right) dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t} e^{-(t-s)a_i}\left|F_i^2(s)\right| ds\right) dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{0}^{t+T} e^{-\xi a_i}\left|F_i^2(t-\xi)\right| d\xi\right) dt \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi a_i}\left|F_i^2(t-\xi)\right| d\xi\right) dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-\xi a_i}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|F_i^2(t-\xi)\right| dt\right) d\xi \\
&\leq \int_{0}^{+\infty} e^{-\xi a_i}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T-\xi}^{T-\xi}\left|F_i^2(u)\right| du\right) d\xi \\
&\leq \int_{0}^{\infty} e^{-\xi a_i}\left(\frac{T-\xi}{T}\frac{1}{2(T-\xi)}\int_{-T-\xi}^{T-\xi}\left|F_i^2(u)\right| du\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Donc $F_i^2(\cdot) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.
La fonction définie par :

$$\Theta_T(\xi) = \frac{1}{2T}\int_{-T-\xi}^{T-\xi}\left|F_i^2(u)\right| du$$

est bornée et vérifie $\lim\limits_{T\to\infty} \Theta_T(\xi) = 0$.
Par conséquent, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$I_1 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t}\left|e^{-(t-s)a_i}F_i^2(s)\right| ds\right) dt = 0.$$

D'autre part, notons que $\|F_i^2\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|F_i^2(t)\right| < \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{-T}\left|e^{-(t-s)a_i}F_i^2(s)\right|ds\right)dt\\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)a_i}\left|F_i^2(s)\right|ds\right)dt\\
&\le \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F_i^2(t)\right|}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{t+T}^{+\infty} e^{-\zeta a_i}d\xi\right)dt\\
&\le \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F_i^2(t)\right|}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{2T}^{+\infty} e^{-\xi a_i}d\xi\right)dt\\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F_i^2(t)\right|}{a_i}e^{-2a_iT} = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $(\Gamma_i F_i^2) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Finalement, $(\Gamma\varphi) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. ■

**Théorème 3.2.2.** *[3, Theorem 2]*
*Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$)-($\boldsymbol{H}_3$) sont vérifiées, alors le système (3.1) admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région*

$$\mathcal{B} = B\left(\varphi_0, r\right) = \left\{\varphi \in PAP\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^n\right), \|\varphi-\varphi_0\|_\infty \le \frac{r\beta}{(1-r)}\right\},$$

*où*

$$\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_1}J_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_n}J_n(s)ds \end{pmatrix},$$

$$r = \max_{1\le i\le n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}^+L_j^f + L_j^g d_{ij}^+ + L_j^h p_{ij}^+\right)}{a_i}\right),$$

*et*

$$\beta = \max_{1\le i\le n}\left(\frac{J_i^+}{a_i}\right).$$

**Preuve.**
Il est clair que $\mathcal{B}$ est un sous ensemble convexe fermé et borné de $PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned}
\|\varphi_0\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\max_{1\le i\le n}\left(\left|\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}J_i(s)ds\right|\right)\\
&\le \max_{1\le i\le n}\left(\frac{J_i^+}{a_i}\right) = \beta
\end{aligned}$$

donc pour tout $\varphi \in \mathcal{B}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leq \|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| + \|\varphi_0(t)\| \\ &\leq \|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| + \beta.\end{aligned}$$

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \|\varphi_0\|_\infty \leq \frac{r\beta}{1-r} + \beta = \frac{\beta}{1-r}.$$

Montrons que l'opérateur $\Gamma$ defini dans le Lemme 3.2.2 envoie $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{B}$, en utilisant $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ on a

$$\begin{aligned}\|(\Gamma\varphi) - \varphi_0\| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} (|c_{ij}(s)|\, |f_j(\varphi_j(s)) - f_j(0)| + |d_{ij}(s)| \\ |g_j(\varphi_j(s-\tau) - g_j(0))| + |p_{ij}(s)| \\ \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(s-\rho)\, |h_j(\varphi_j(\rho) - h(0))|\, d\rho \Big) \end{bmatrix} ds \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \sum_{j=1}^{n} \Big( |c_{ij}(s)|\, L_j^f + |d_{ij}(s)|\, L_j^g + |p_{ij}(t)|\, L_j^h d\rho \Big)\, ds \\ &\leq \|\varphi\| \max_{1\leq i\leq n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{n} \Big( c_{ij}^+ L_j^f + d_{i,j}^+ L_j^g + p_{ij}^+ L_j^h \Big)}{a_i} \right) \\ &\leq \frac{r\beta}{(1-r)}.\end{aligned}$$

Danc $\forall \varphi \in \mathcal{B}$ on a $\Gamma\varphi \in \mathcal{B}$. En utilisant $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_3)$, on a pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\Gamma(\varphi)(t) - \Gamma(\psi)(t)| &\leq \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \Big[ \sum_{j=1}^{n} \Big( |c_{ij}(s)\|f_j(\varphi_j(s)) - f_j(\psi_j(s))| \\ &\quad + |d_{ij}(s)\|g_j(\varphi_j(s)) - g_j(\psi_j(s))| \Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(s)| \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(t-l)|h_j(\varphi_j(l)) - h_j(\psi_j(l))| dl \Big] ds \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \Big[ \sum_{j=1}^{n} \Big( c_{ij}^+ L_j^f + d_{ij}^+ L_j^g \Big) |\varphi_j(s) - \psi_j(s)| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^+ \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(t-l) L_j^h |\varphi_j(l)) - \psi_j(l)| dl \Big] ds \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \left( \frac{\sum_{j=1}^{n} \Big( c_{ij}^+ L_j^f + L_j^g d_{ij}^+ + L_j^h p_{ij}^+ \Big)}{a_i} \right) \|\varphi_j - \psi_j\|_\infty \\ &\leq r\|\varphi_j - \psi_j\|_\infty.\end{aligned}$$

Par $(\mathbf{H}_3)$, $\Gamma$ est une application contractante. Alors par le théorème du point fixe de Banach, $\Gamma$ possède un unique point fixe qui est la solution du système (3.1) dans $\mathcal{B}$. $\blacksquare$

## 3.3 Solution presque périodiques d'une classe d'équations différentielles à coeficients Stepanov presque périodiques

Considérons les équations différentielles suivantes :

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \tag{3.3}$$

et

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t)). \tag{3.4}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}, \quad F : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ sont des fonctions Stepanov presque périodiques (ou Stepanov pseudo presque périodiques) et $A : Dom(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est un générateur infintésimal d'un $C_0$ semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.
Notre objectif dans cette section est de savoir si les équations différentielles (3.3) et (3.4) admettent des solutions purement Stepanov presque périodiques lorsque le second membre $f$ (respectivement $F$) est une fonction presque périodique au sens de Stepanov.
Avant de répondre à cette question, on donnera dans ce qui suit quelques notions concernant les semi groupes d'opérateurs linéaires.

### 3.3.1 Semi groupe d'opérateurs linéaires

**Définition 3.3.1.**
Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach. Un opérateur $T$ de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{X}$ est dit linéaire si on a :

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X} \quad et \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$T$ est dit borné s'il existe un réel positif $M$ tel que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Soit $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :

1. $T$ est borné.
2. $T$ est continu sur $\mathbb{X}$.
3. $T$ est continu en 0.
4. $T$ est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.

Tout au long de ce manuscrit, $\mathcal{L}(\mathbb{X}) = \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ designera l'ensemble des opérateurs linéaires bornés dans $\mathbb{X}$. $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ est muni de la norme suivante :

$$\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

### Semi-groupes

**Définition 3.3.2.** [23, Definition 2.1],[25, Definition 1.1]
Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{X}$ si :

1. $T(0) = I$, ($I$ étant l'opérateur identité sur $\mathbb{X}$).
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$ (dite propriété du semi-groupe).

**Exemple 3.3.1.**
Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) + ky(t) = 0 \quad t > 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $k, x_0 \in \mathbb{C}$.
La solution de (3.5) est $y(t) = x_0 e^{-kt}$. Dans ce cas

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}, \quad T(t) : x_0 \mapsto x_0 e^{-kt}.$$

$(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe.
En effet,

1. $T(0)(x_0) = x_0 e^0 = x_0$. Donc $T(0) = I$.
2. et on a :

$$T(t+s)(x_0) = x_0 e^{-k(t+s)} = x_0 e^{-kt-ks} = x_0 \left(e^{-kt} \cdot e^{-ks}\right) = \left(T(t) \cdot T(s)(x_0)\right).$$

**Exemple 3.3.2.**
Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} Y'(t) + AY(t) = 0 \quad t > 0 \\ Y(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$.
La solution de (3.6) est $Y(t) = X_0 e^{-tA}$.
Dans ce cas

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}^n \text{ et } T(t) : X_0 \mapsto X_0 e^{-tA}$$

$(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe. En effet,

1. On a
$$T(0)(X_0) = X_0 e^0 = X_0. \quad Donc \quad T(0) = I.$$
2. et
$$T(t+s)(X_0) = X_0 e^{-(t+s)A} = X_0 \left(e^{-tA} \cdot e^{-sA}\right) = \left(T(t) \cdot T(s)(X_0)\right).$$

**Définition 3.3.3.** [25, Definition 1.1]
Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe defini sur $\mathbb{X}$. On dira qu'il est

1. Uniformément continue si :
$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} = 0.$$
2. Fortement continu où $C_0$-semi-groupe si :
$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$
3. Exponentiellement stable, s'il existe des constantes $M > 0, \omega > 0$ telles que
$$\|T(t)\| \leq Me^{-wt}, \quad t \geq 0.$$

**Définition 3.3.4.** Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe défini sur $\mathbb{X}$.
Posons
$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{X}, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } \mathbb{X} \right\}$$
L'opérateur $A$ defini de $\Omega$ dans $\mathbb{X}$ par
$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$
est appelé générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$

**Remarque 3.3.1.**

1. $\Omega = D(A)$ est le domaine de $A$.
2. $O_{\mathbb{X}} \in \Omega$.
3. $A$ est linéaire.
4. $A$ est non borné en général.

**Théorème 3.3.1.** *[25, Theorem 1.2]*
*Un opérateur linéaire $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $A$ est un opérateur linéaire borné. Dans ce cas, le semi-groupe associé à $A$ est donné par*
$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{3.7}$$

**Théorème 3.3.2.** *[25, Theorem 1.3]*
*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés, si*
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t) - \mathrm{I}}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - \mathrm{I}}{t},$$
*alors*
$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

**Corollaire 3.3.1.** *[25, corollary 1.4]*
*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu dans $\mathcal{L}(\mathbb{X})$. Alors :*

1. *$\exists w \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.*
2. *$\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ unique tel que $T(t) = e^{tA}$ et $A$ est le générateur infinitésimal de $T(t)$.*

**Preuve.** Montrons (2). C'est à dire montrons si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ tel que $T(t) = e^{tA}$ et $A$ le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.
D'après le Théorème 3.3.1, on sait que le générateur infinitisimal d'un semi-groupe fortement continu est un opérateur linéaire borné. Soit $A$ ce générateur, alors $A$ est le générateur infinitésimal de $e^{TA}$. Donc par le Théorème 3.3.2, $T(t)$=$e^{TA}$.
(1) découle directement de (2). En effet,
D'après (2) $T(t) = e^{tA}$ alors $\|T(t)\| = \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$, comme $A$ est borné alors il existe $w > 0$ tel que $\|A\| \leq w$. Par conséquent,

$$\|T(t)\| \leq e^{tA}.$$

**Proposition 3.3.1.** *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés et $A$ son générateur infinitésimal.*
*Si $u \in D(A)$, alors $T(t)u \in D(A)$ et on a l'égalité*

$$T(t)Au = AT(t)u, \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve.** Soit $u \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T(t)Au &= T(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)u - u}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)T(t)u - T(t)u}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)u \in D(A)$ et on a $T(t)Au = AT(t)u, \quad \forall t \geq 0.$ ■

**Théorème 3.3.3.** *[25, Theorem 2.4]*
*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$ semi-groupe et $A$ son générateur infinitésimal. Alors :*

1. *$\forall u \in \mathbb{X}, \int_0^t T(s)uds \in D(A)$ et $A\left(\int_0^t T(s)uds\right) = T(t)u - u$.*
2. *$\forall x \in \mathbb{X}$ et $t \geq 0$on a :*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

**Preuve.**

1. Soient $u \in \mathbb{X}$ et $h > 0$ on pose $x = s + h$. Alors on aura

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)\ u\ ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)uds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\ u\ ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(x)\ u\ dx - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\ u\ ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(x)\ u\ dx - \frac{1}{h}\int_0^h T(x)\ u\ dx - \frac{1}{h}\int_0^t T(x)\ u\ dx \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(x)\ u\ dx - \frac{1}{h}\int_0^h T(x)\ u\ dx.
\end{aligned}$$

Par pasage à limite pour $h \to 0^+$ et compte tenu du Théorème 3.3.3 nous obtenons :

$$A\left(\int_0^t T(s)uds\right) = T(t)u - u,$$

avec

$$\int_0^t T(s)uds \in D(A).$$

### 3.3.2 Existence et unicité de solution mild Bohr presque périodique d'une classe d'équations différentielles linéaires

Avant d'énoncer le théorème d'existance et d'unicité de solution mild Bohr presque périodique de (3.3) commençons par la définition d'une solution mild.

**Définition 3.3.5.** [16, Definition 1.10]
On appelle solution mild de l'equation (3.3), toute solution continue $u$ de l'équation intégrale

$$u(t) = T(t-a)u(a) + \int_a^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \geq a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

on signale que cette solution est différente de la solution classique dont la définition est donnée comme suit :

**Définition 3.3.6.** Une fonction $u : [t_0, t] \to \mathbb{X}$ est dite solution classique de l'équation (3.3), si $u$ est continue sur $[t_0, T], u(t) \in D(A)$ pour $t_0 < t \leq T$, $u$ est continuement differentiable sur $t_0 < t \leq T$ et satisfaite l'équation (3.3).

**Remarque 3.3.2.**

1. Toute solution classique est une solution mild l'inverse n'est pas forcement vrai.
2. Toutefois, en dimension finie, la solution (3.3.7), obtenue par la méthode de la variation de la constante, est bien une solution classique, de plus,

$$T(t-s) = e^{A(t-s)},$$

et l'opérateur $A$ est partout défini c'est-à-dire $D(A) = \mathbb{X}$.

Le théorème qui suit, affirme la non existence de solutions purement Stepanov presque périodiques pour l'équation (3.3).

**Théorème 3.3.4.** *[23, Lemma 3.3]*
*Soit $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un opérateur linéaire borné et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction $S^p$-presque périodique continue. Toutes les solutions mild $S^p$-presque périodiques de l'équation (3.3) sont Bohr presque périodiques, et elles sont données par :*

$$u(t) = -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A} f(s) \quad ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

*En d'autres termes l'équation (3.3) n'a pas de sulution purement Stepanov presque périodique. De plus, (3.3) admet une unique solution mild Bohr presque périodique.*

Avant de montrer ce théorème on aura besoin des résultats suivants :

**Lemme 3.3.1.** *[23, Lemma 3.1]*
*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction $S^p$-presque périodique et continue, et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ définie par*

$$F(t) = \int_t^{\infty} \phi(t-s) f(s) ds$$

*est Bohr presque périodique si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1. *Si $1 < p < \infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-k}^{1-k} |\phi(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$ est finie avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
2. *Si $p = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{-k \leq t \leq 1-k} |\phi(t)|$ est finie.*

**Preuve.**
Nous définissons

$$F_k(t) = \int_{t+k-1}^{t+k} \phi(t-s) f(s) ds, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$F_k(t) = |F_k(t)| \leq \int_{t+k-1}^{t+k} |\phi(t-s)| \|f(s)\| ds. \tag{3.10}$$

Si $1 < p < \infty$, alors $1 < q < \infty$. En utilisant l'inégalité de Hölder et en posant $u = t - s$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|F_k(t)\| &\leq \left( \int_{t+k-1}^{t+k} |\phi(t-s)|^q ds \right)^{1/q} \left( \int_{t+k-1}^{t+k} \|f(s)\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{-k}^{1-k} |\phi(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{S^p}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $p = 1$, alors $q = \infty$. À partir de (3.10) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|F_k(t)\| &\leq \left( \sup_{t+k-1 \leq s \leq t+k} |\phi(t-s)| \right) \left( \int_{t+k-1}^{t+k} \|f(s)\| ds \right) \\ &\leq \left( \sup_{-k \leq s \leq 1-k} |\phi(s)| \right) \|f\|_{S^1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Par hypothèses on a $L_q$ et $L_\infty$ sont finis avec
$L_q = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-k}^{1-k} |\phi(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$ et $L_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{-k \leq t \leq 1-k} |\phi(t)|$.
De (3.11), (3.12) et en utilisant le test de Weierstrass, il s'ensuit que la suite de fonctions $\sum_{k=1}^{n} F_k(t)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Il nous reste à montrer que $\mathbb{E}(\varepsilon, F)$ est relativement dense puisque la continuité de F découle de la définition.
On a $f \in S^p AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longeur $l$ contient un nombre $\tau$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \int_t^{t+1} \|f(s+\tau) - f(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{L_q}.$$

On considère

$$\begin{aligned} \|F_k(s+\tau) - F_k(s)\| &= \left\| \int_{s+\tau+k-1}^{s+\tau+k} \phi(s+\tau-z) f(z) dz - \int_{s+k-1}^{s+k} \phi(s-z) f(z) dz \right\| \\ &\leq \int_{s+k-1}^{s+k} |\phi(s-z)| \|f(\tau+z) - f(z)\| dz. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si $1 < p < \infty$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|F_k(s+\tau) - F_k(s)\| &\leq \left( \int_{s+k-1}^{s+k} |\phi(s-z)|^q dz \right)^{1/q} \left( \int_{s+k-1}^{s+k} \|f(z+\tau) - f(z)\|^p dz \right)^{1/p} \\ &\leq \varepsilon \left( \int_{-k}^{1-k} |\phi(z)|^q dz \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\|F(s+\tau) - F(s)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|F_k(s+\tau) - F_k(s)\| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-k}^{1-k} |\phi(z)|^q dz \right)^{1/q} = \frac{\varepsilon}{L_q} L_q = \varepsilon.$$

Ainsi $F$ est une fonction presque périodique.

Si $p=1$, soit $\tau \in S^p\mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{L_\infty}, f)$ alors de (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}\|F_k(s+\tau)-F_k(s)\| &\leq \left(\sup_{s+k-1\leq z\leq s+k}|\phi(s-z)|\right)\left(\int_{s+k-1}^{s+k}\|f(z+\tau)-f(z)\|dz\right)\\ &\leq \varepsilon\left(\sup_{-k\leq z\leq 1-k}|\phi(z)|\right).\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k(s+\tau)-F_k(s)\| \leq \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{-k\leq z\leq 1-k}|\phi(z)|\right) = \frac{\varepsilon}{L_\infty}L_\infty = \varepsilon.$$

Ainsi $F$ est une fonction presque périodique. ■

**Remarque 3.3.3.** [23, Lemma 3.2]

Sous les mêmes conditions que le Lemme 3.3.1 on a la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{X}$ définie par

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}\phi(t-s)f(s)ds$$

est presque périodique.

**Preuve.**

La preuve de ce lemme est similaire à celle du Lemme 3.3.1. ■

**Lemme 3.3.2.** *[23, Corollary 3.1]*

*Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{X}$ une fonction $S^p$-presque périodique continue et $(T(t))_{t\leq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$. S'il existe $M>0$ et $\omega>0$ tel que $\|T(t)\|\leq Me^{\omega t}, \quad \forall t\leq 0$ alors la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{X}$ définie par :*

$$F(t)=\int_{t}^{\infty}T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

*est Bohr presque périodique.*

Montrons maintenant le Théorème 3.3.4

**Preuve.**

On a :

$$u(t)=e^{(t-a)A}u(a)+\int_a^t e^{(t-s)A}f(s)ds, \quad t\geq a, \quad a\in\mathbb{R}.$$

On intervertit le $t$ et le $a$ et on trouve, pour $a\geq t$ :

$$u(a)=e^{(a-t)A}u(t)+\int_t^a e^{(a-s)A}f(s)ds.$$

Ceci implique que

$$u(a)-\int_t^a e^{(a-s)A}f(s)ds=e^{(a-t)A}u(t).$$

D oú

$$u(t) = e^{(t-a)A}u(a) - e^{(t-a)A} \times \int_t^a e^{(a-s)A}f(s)ds$$
$$= e^{(t-a)A}u(a) - \int_t^a e^{(t-a)A} \times e^{(a-s)A}f(s)ds.$$

Donc, on obtient

$$u(t) = e^{(t-a)A}u(a) - \int_t^a e^{(t-s)A}f(s)ds, \quad a \geq t, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

En se servant du Lemme 3.3.2 l'intégrale $\int_t^\infty e^{(t-s)A}f(s)ds$ existe. Donc d'aprés (3.14) on aura

$$\lim_{a\to\infty} e^{(t-a)A}u(a) = x \;\; existe.$$

Et on a

$$\|x\| \leq \lim_{a\to\infty} \inf e^{(t-a)\|A\|}\|u(a)\|.$$

Supposons que $\lim\limits_{a\to\infty} \inf \left(e^{(t-a)\|A\|}\|u(a)\|\right) > 0$, comme $u$ est $S^p$-bornée alors il existe $M > 0$ tel que

$$\|u\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle telle que $a_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on suppose que

$$e^{(t-a_n)\|A\|}\|u(a_n)\| \to l \;\; quand \;\; n \to \infty \;\; avec \;\; 0 < l \leq \infty.$$

Si $0 < l < \infty$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|e^{(t-a_n)\|A\|}\left\|u\left(a_n\right)\right\| - l\right| < \frac{l}{2}, \forall n \geq N.$$

Ce qui donne

$$\frac{l}{2}e^{(a_n-t)\|A\|} < \left\|u\left(a_n\right)\right\|, \forall n \geq N.$$

Par conséquent,

$$\left\|u\left(a_n\right)\right\| \to \infty \quad quand \;\; n \to \infty.$$

Si $l = \infty$, alors pour $\varepsilon > 0$ il exists $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$e^{(t-a_n)\|A\|}\left\|u\left(a_n\right)\right\| > \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Alors

$$\varepsilon e^{(a_n-t)\|A\|} < \left\|u\left(a_n\right)\right\|, \quad \forall n \geq N.$$

Par conséquent,

$$\left\|u\left(a_n\right)\right\| \to \infty \quad quand \;\; n \to \infty.$$

Ainsi $\|u(a_n)\| \to \infty$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{a\to\infty} \|u(a)\| = \infty$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $\|u(t)\| \geq M+1$, $\forall t \geq \delta$, ainsi on obtient

$$M+1 \leq \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

Ceci constitu une contraduction. Ainsi on obtient :

$$\|x\| \leq \lim_{a\to\infty} \inf e^{(t-a)\|A\|}\|u(a)\| = 0.$$

Donc,

$$u(t) = -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le Lemme 3.3.2, $u$ est presque périodique.
Maintenant, on considère $t \geq a, a \in \mathbb{R}$

$$u(t) = -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc, par le Lemme 3.3.2, $u$ est une fonction presque périodique. On a

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A} f(s)ds \\
&= -\left[\int_a^{\infty} e^{(t-s)A} f(s)ds - \int_a^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds\right] \\
&= -\int_a^{\infty} e^{(t-s)A} f(s)ds + \int_a^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds \\
&= -\int_a^{\infty} e^{(t-a+a-s)A} f(s)ds + \int_a^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds \\
&= -e^{(t-a)A}\int_a^{\infty} e^{(a-s)A} f(s)ds + \int_a^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds \\
&= e^{(t-a)A}u(a) + \int_a^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors $u$ est une solution mild presque périodique de (3.3).
L'unicité :
Supposons que (3.3) a deux solutions mild presque périodiques $u_1$ et $u_2$, alors $u = u_1 + u_2$ est une solution mild presque periodique pour $u' = Au$.
Par (3.9), $u(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $u_1 = u_2$.
Par conséquent, l'equation (3.3) a une unique solution mild Bohr presque périodique. ■

**Théorème 3.3.5.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi groupe exponentiellement stable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction $S^p$-presque périodique. Alors l'équation (3.3) admet une unique solution mild bornée presque périodique donnée par :*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.**
On montre dans un premier temps que $u(\cdot)$ est une solution mild de (3.3). On suppose que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, $\forall a < t$ on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-a+a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} T(t-a)T(a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds \\ &= T(t-a)\int_{-\infty}^{t} T(a-s)f(s)ds + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Donc

$$u(t) = T(t-a)u(a) + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s)ds.$$

Montrons que $u(\cdot)$ est l'unique solution mild de (3.3). On suppose que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est bornée et satisfait l'équation homogène

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Alors $u(t) = T(t-s)u(s)$, pour tout $t \geq s$.
Par hypothèses $u$ est bornée donc il existe $K > 0$ tel que $\|u(t)\| \leq K$ et $(T(t))_t$ est exponentiellement stable donc il existe $M, w > 0$ tel que $\|u(t)\| \leq Me^{-wt}$
Donc

$$\|u(t)\| \leq KMe^{-w(t-s)},$$

Si $u_1, u_2$ deux solutions bornées de l'équation (3.3) alors $v = u_1 - u_2$ est une solution bornée de l'équation (3.15), ce qui implique que $v = 0$, c'est-à-dire $u_1 = u_2$.
Nous aurons également besoin de montrer que $u(\cdot)$ est une solution mild bornée.
Comme $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l$ contient $\tau$ qui verifie

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \int_{0}^{1} \|f(s+\tau) - f(s)\|ds < \frac{\varepsilon}{cM}, \tag{3.16}$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt[q]{qw}} \left(e^{qw} - 1\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{1 - e^{-w}}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds \right\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\| \|f(s)\| ds \\
&\leq M \int_{-\infty}^{t} e^{-w(t-s)} \|f(s)\| ds \\
&\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-n-1}^{t-n} e^{-w(t-s)} \|f(s)\| ds \\
&\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{t-n-1}^{t-n} e^{-qw(t-s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{t-n-1}^{t-n} \|f(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{qw} \left\{ e^{-qw(t-s)} - e^{-qwn} \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \|f(s)\|_{SP} \\
&\leq \frac{M}{\sqrt[q]{qw}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-qwn} \left( e^{qw} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|f(s)\|_{S^p} \\
&\leq \frac{M}{\sqrt[q]{qw}} \left( e^{qw} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-wn} \|f(s)\|_{Sp}.
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-wn} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-w(n+1)}}{1-e^{-w}} = \frac{1}{1-e^{-w}},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \frac{M}{\sqrt[q]{qw}} \left( e^{qw} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{1-e^{-w}} \|f(s)\|_{S^p} \\
&< cM \frac{\varepsilon}{cM} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $u$ est borné. Il reste donc à montrer la presque périodicité de la solution mild. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{E}(\frac{\varepsilon}{cM}, f)$, donné dans (3.16), on a

$$\|u(t+\tau) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

En faisant le changement de variable $s-\tau=r$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u(t+\tau)-u(t)\| &= \left\|\int_{-\infty}^{t+\tau} T(t+\tau-s)f(s)ds - \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds\right\| \\ &= \left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s+\tau)ds - \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds\right\| \\ &= \left\|\int_{-\infty}^{t} T(t-s)\{f(s+\tau)-f(s)\}ds\right\| \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\|\|f(s+\tau)-f(s)\|ds \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t-n-1}^{t-n} \|T(t-s)\|\|f(s+\tau)-f(s)\|ds \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t-n-1}^{t-n} Me^{-w(t-s)}\|f(s+\tau)-f(s)\|ds.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\|u(t+\tau)-u(t)\| &\leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{t-n-1}^{t-n} e^{-qw(t-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-n-1}^{t-n} \|f(s+\tau)-f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Mc\frac{\varepsilon}{cM} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $u$ est presque périodique. Ce qui achève la démonstration. ■

### 3.3.3 Existence et unicité de solutions mild de l'équation différentielle semi-linéaire

**Définition 3.3.7.** [16, Definition 1.10]
On appelle solution mild du problème (3.4), toute solution continue $u$ de l'équation intégrale

$$u(t) = T(t-a)u(a) + \int_{a}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall t \geq a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 3.3.6.** *[23, Theorem 3.5]*
*Soit $A:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ un opérateur linéaire borné, et $f:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ une fonction continue $S^p$-presque périodique. Supposons que $f(\cdot,x)$ est lipschitzienne en $x\in\mathbb{X}$ uniformément en $t\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire : il existe $L>0$ tel que*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \quad \forall t\in\mathbb{R} \ \ et \ \ (x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}.$$

*Si $L<\|A\|$ alors il existe une unique solution mild presque périodique $u$ pour (3.4).*

**Preuve.**
On définit l'apliquation $\Gamma$ par :

$$\Gamma u(t) = -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le Théorème 1.2.2 et le Lemme 3.3.2, si $u \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors on aura $\Gamma u \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. C'est-à-dire $\Gamma$ envoie $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans lui-même.
Soit $u, v \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on voit que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \int_t^{\infty} \left\| e^{(t-s)A} \right\| \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\
&\leq L \int_t^{\infty} e^{(t-s)\|A\|} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq L \|u - v\|_{\infty} \int_t^{\infty} e^{(t-s)\|A\|} ds \\
&\leq L \|u - v\|_{\infty} e^{t\|A\|} \int_t^{\infty} e^{-s\|A\|} ds \\
&\leq \frac{L}{\|A\|} \|u - v\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\|_{\infty} \leq \frac{L}{\|A\|} \|u - v\|_{\infty}.$$

Alors $\Gamma$ est une contraction qui envoie $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Donc $\Gamma$ a un unique point fixe dans $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$,c'est-à-dire il existe un unique $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ tel que $\Gamma . \varphi = \varphi$. Alors, $\varphi$ est l'unique solution mild presque périodique de (3.4). ■

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons commencé par traité les questions naturelles concernant les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques (définitions, propriétés principales, exemples et théorèmes de superposition). Pour ce faire, il était indispensable de revisiter les fonctions Bohr presque périodiques, les fonctions ergodiques, les fonctions pseudo presque périodique de Zhang et les fonctions presque périodiques de Stepanov.

Par la suite nous nous somme intéressé à la nature de la presque périodicité des solutions de certaines classes d'équations différentielles : un système de réseaux de neurones et une classe d'équations différentielle abstraites linéaires et semi linéaires.

Nous tenons à signaler que plusieurs propriétés concernant les fonctions presque périodiques et leurs généralisations n'ont pas été abordé dans ce mémoire comme par exemple l'étude harmonique de ces fonctions.

Espérant que ce modeste travail va suscité un intérêt et va donner lieu à d'autres travaux.

# Annexe

**Définition .0.8.**
Un espace de Banach $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire un espase normé dont lequel toute suite de Cauchy est convergente).

**Définition .0.9.**
On dit que $A \subset \mathbb{X}$ est un espace pré-compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$ dans $\mathbb{X}$ telles que leur réunion couvre l'ensemble $A$. C'est à dire

$$A = \cup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon).$$

où $x_p$ les centres des boules qui couvrent $A$.

**Définition .0.10.**
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ona

$$|x - y| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

**Définition .0.11.**
On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ on a

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

**Définition .0.12.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\| dx < +\infty$.

**Définition .0.13. Inégalité de Hölder** :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ alors :

1. $f.g \in L^1(\Omega)$.
2. $\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^q}$.

Avec $p$ et $q$ sont deux exposants conjugués c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Définition .0.14.**
On dit qu'un espace de Banach $\mathbb{X}$ est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \ \ et \ \ \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue**
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ une suite de fonction.
On suppose que :

1. $f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur $\Omega$.
2. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq |g(x)|$ presque partout sur $\Omega$.

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

**Théorème de Fubini**
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Théorème du point fixe de Banach**
Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique complet et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une application contractante, alors $f$ admet un point fixe unique dans $\mathbb{X}$, c'est-à-dire

$$\exists! x_0 \in \mathbb{X}, \quad f(x_0) = x_0.$$

**Test de Weierstrass**
Supposons que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un ensemble $A$, et qu'il existe une suite de nombres positifs $M_n$ satisfaisant

$$\forall n \geq 1, \forall x \in A : |f_n(x)| \leq M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge absolument et uniformément sur $A$.

# Bibliographie

[1] L. Amerio and G.Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations.* Van Nostrand Reinhold Co., New York-Toronto, Ont.-Melbourne, 1971.

[2] J. Andres, A.M. Bersani, and R.F. Grande. Hierarchy of almost-periodic function spaces. *Rend. Mat. Appl., VII. Ser.*, 26(2) : 121–188, 2006.

[3] B. Ammar, F. Chérif andA A. M Alimi. Existence and uniqueness of pseudo almost-periodic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. IEEE Transactions on neural networks and learning systems, 23(1) : 109–118, 2011.

[4] M. Baroun, K. Ezzinbi, K. Khalil, Kamal and L. Maniar. Pseudo almost periodic solutions for some parabolic evolution equations with Stepanov-like pseudo almost periodic forcing terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 462(18) : 233–262, 2018.

[5] A.S. Besicovitch. Almost periodic functions. Neudruck. New York : Dover Publications, Inc. XIII, 180 p. 1955.

[6] S. Bochner. Abstrakte Fastperiodische Funktionen. *Acta Math.*, 61(1) : 149–184, 1933.

[7] H. Bohr Zur theorie der fast periodischen funktionen : I. eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen. *Acta Mathematica*, 45 : 29–127, 1925.

[8] C. Corduneanu. *Almost periodic functions.* Interscience Publishers [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, No. 22 1968.

[9] T. Diagana. Pseudo almost periodic solutions to some differential equations. *Nonlinear Anal*, 60(7) : 1277–1286, 2005.

[10] T. Diagana. Weighted pseudo almost periodic functions and applications. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(10) : 643–646, 2006.

[11] T. Diagana. Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonomous differential equations. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 69(8) : 4277–4285, 2008.

[12] T. Diagana. Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces. New York : Springer, 2013.

[13] T. Diagana and M. Zitane. Stepanov-like pseudo-almost automorphic functions in Lebesgue spaces with variable exponents $L^{p(x)}$. *Electron. J. Differ. Equ.*, 20, 2013.

[14] H. Ding, W. Long, and G. M. N'Guérékata. Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with stepanov almost periodic coefficients. *J. Comput. Anal. Appl.*, 13(2) : 231–242, 2011.

[15] H. Ding, J. Liang, G. M. N'Guérékata and T. Xiao. Mild pseudo almost periodic solutions of nonautonomous semilinear evolution equations. *Math. Comput. Modelling*, 45(5-6) : 579–548, 2007.

[16] H. Ding, W. Long and G. M. N'Guérékata. Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with Stepanov almost periodic coefficients. Journal of Computational Analysis and Applications, 13 : 231–243, 2011

[17] A. M. Fink. *Almost periodic differential equations.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 377. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[18] Kostić, Marko. Almost Periodic and Almost Automorphic Solutions to Integro-Differential Equations. Walter de Gruyter GmbH Co KG, 2019..

[19] B. M. Levitan. Almost-Periodic Functions. G.I.T.- T.L., 1959.

[20] B. M. Levitan and V.V. Zhikov. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge etc. : Cambridge University Press. XI, 211 p. sterling 17.50, 1982.

[21] H. Li and L. Zhang. Stepanov-like pseudo-almost periodicity and semilinear differential equations with uniform continuity. *Results in Mathematics*, 59(11) : 43–61, 2011.

[22] W. Long, H. Ding. Composition theorems of Stepanov almost periodic functions and Stepanov-like pseudo-almost periodic functions. *Advances in difference equations*, 2011(11) : 654695, 2011.

[23] Md. Maqbul and D. Bahuguna. Almost periodic solutions for Stepanov-almost periodic differential equations. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 22(3) : 251–264, 2014.

[24] A. A. Pankov. *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations.* Dordrecht etc. : Kluwer Academic Publishers, 1990.

[25] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer Science & Business Media, 44, 2012.

[26] A.S. Rao. On the Stepanov almost periodic solution of a second order operator differential equation. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 19(2) : 261–263, 1974.

[27] W. Stepanoff. Über einige verallgemeinerungen der fast periodischen funktionen. *Mathematische Annalen*, 95(1) : 473–498, 1926.

[28] C. Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 181(2) : 62–76, 1994.

[29] C. Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. ii. *J. Math. Anal. Appl.*, 192(2) : 543–561, 1995.

# RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous avons fait une présentation des fonctions Stepanov presque périodicité et les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques.
Des résultats concérnant l'opérateur de Nemytskii entre les espaces des fonctions Stepanov (pseudo) presque périodiques sont aussi présentés dans ce mémoire.
Nous avons aussi exposé un resultat d'existance et d'unicité de solutions pseudo presque périodique d'un système de réseau de neurone et des résultats d'existance et d'unicité de solutions mild presque périodiques d'une classe d'équations différentielles abstraites linéaires et semi-linéaire à coefficients constants et second membre Stepanov presque périodique.


**Mots clés :**Bohr presque périodicité, Stepanov presque périodicité, pseudo presque périodicité, fonction ergodique , opérateurs linéaires, semi-groupes, solution mild.


# ABSTRACT

In this memoir, we have made a presentation of Stepanov almost periodic functions and Stepanov pseudo almost periodic functions. Results concerning the Nemytskii operator between the spaces of these functions are also presented in this memoir.

We have also exposed a result of existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions for a neuron network system and results of existence and uniqueness of almost periodic mild solutions of a class of linear and semi-linear abstract differential equations with constant coefficients and second member Stepanov almost periodic.


Keywords : Bohr almost periodicity, Stepanov almost periodicity, pseudo almost periodicity, ergodic function, linear operators, semi-groups, mild solution.