

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE A. MIRA DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques**

Spécialité : Analyse Mathématiques

Présenté par :ZATOUCHE Fatiha

Thème

**La théorie des points critiques.
Application à l'étude de quelques équations aux
dérivées partielles non linéaires**

Devant le jury composé de :

Mr. BOUHMILA Fatah	M.C.A	U. Béjaia	Président.
M^{lle}. MEDJBAR Sonia	M.C.B	U. Béjaia	Rapporteur
M^{lle}. BAICHE Leila	M.C.B	U. Béjaia	Examineur
M^{lle}. SANA Zahra	Doctorante	U. Béjaia	Examineur

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LARECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE A. MIRA DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en Mathématiques**

Spécialité : Analyse Mathématiques

Par

ZATOUCHE Fatiha

Thème

**La théorie des points critiques.
Application à l'étude de quelques équations aux
dérivées partielles non linéaires**

Devant le jury composé de :

Mr. DAHMANI Abdelnasser Professeur U. Béjaia Président.

M_μ.e. TAS Saâdia Maître de Conférences U. Béjaia Rapporteur.

Mr. BOUHMILA Fatah Maître de Conférences U. Béjaia Examineur.

Mr. AIBECHE Aissa Professeur U. Sétif Examineur.

Remerciements

Je remercie Dieu, de m'avoir donné la force et la patience afin de parvenir à terminer ce travail.

Je témoigne toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

Mes vifs remerciements vont à :

M^{lle} S. MEDJBAR pour avoir accepté de diriger ce projet et pour toute son attention, sa disponibilité permanente, sa confiance et aussi pour toute son aide durant l'élaboration de ce mémoire.

M^r F. BOUHMILA pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.

M^{lle} L. BAICHE pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.

Ainsi M^{lle} Z. SANA pour avoir accepté à son tour d'examiner ce mémoire, et pour sa participation au jury.

Un remerciement spécial est destiné pour mon cher mari, qui m'a tellement soutenu pendant toutes ses années, et qui m'a encouragé pour atteindre mon but et réaliser mes projets.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, ma mère en premier lieu, pour l'écoute, la présence, le soutien, les encouragements et l'amour qu'elle me porte de jour en jour, que ce soit dans les moments d'euphorie et de joie que dans ceux de doute et de remise en question.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher mari.

A ma chère mère.

A mon adorable père.

A ma chère fille.

A ma princesse Houda .

A mes chères soeurs.

A toute ma famille.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons la théorie des points critiques qui constitue une méthode variationnelle permettant l'étude des équations aux dérivées partielles notamment non linéaires. Nous rappelons des théorèmes dus à Rabinowitz, généralisant le principe du min-max ainsi le théorème de Ljusternick Schnirelmann et sa généralisation. Ensuite, nous les appliquons à la résolution de quelques problèmes non linéaires ayant des structures variationnelles avec ou sans contraintes.

Mots-clés : Théorème de Ljusternick-Schnirelmann, Points critiques, fonctionnelles d'énergie, équations d'Euler-Lagrange, minimisation, contraintes, théorèmes du col et du point selle, problèmes non linéaires, Suite de Palais-Smale.

Abstract

In this work, we introduce the theory of critical points which constitutes a variational method allowing the study of the partial differential equations in particular nonlinear. We recall theorems due to Rabinowitz, generalizing the principle of min-max as well as the theorem of Ljusternick Schnirelmann and its generalization. Then, we apply them to the solution of some nonlinear problems having variational structures with or without constraints.

Keywords : Ljusternick-Schnirelmann's theorem, critical points, energy functionals, equations of Euler-Lagrange, minimization, constraints, the mountain pass theorem and the saddle point theorem, nonlinear problems, Palais-Smale Suite.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires et notions de base	6
1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev	6
1.2 Opérateurs elliptiques du second ordre	10
1.3 Quelques critères de convergences	12
1.4 Rappel sur le calcul différentiel	14
1.4.1 Dérivée directionnelle	14
1.4.2 Différentielle au sens de Gâteaux	14
1.4.3 Différentielle au sens de Fréchet	15
1.5 Quelques opérateurs continus	17
1.6 Quelques fonctionnelles différentiables	19
1.7 Points critiques et multiplicateurs de Lagrange	21
1.8 Espaces de Sobolev à poids	26
2 Théorie des points critiques	29
2.1 Introduction	29
2.2 Points critiques sans contraintes	31
2.2.1 Condition de Palais-Smale	31
2.2.2 Lemme de déformation	34
2.2.3 Principe du min-max	37

2.3	Points critiques avec contraintes	40
2.3.1	Condition de Palais-Smale	40
2.3.2	Lemme de déformation	41
2.3.3	Principe du min-max	45
3	Application à l'étude de quelques problèmes elliptiques semi-linéaires	49
3.1	Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet	49
3.2	Existence de solution pour un problème aux valeurs propres el- liptique	58
	Conclusion	65

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles tirent leur origine de l'étude des surfaces en géométrie et pour résoudre une large variété de problèmes en mécanique. Durant la seconde moitié du 19^{ième} siècle un grand nombre de mathématiciens s'engagent davantage à examiner de nombreux problèmes régis par les équations aux dérivées partielles. La première raison de cet engouement était que les équations aux dérivées partielles expriment plusieurs lois fondamentales de la nature et fréquemment, elles surviennent dans l'analyse mathématique de divers problèmes. La seconde phase du développement des équations aux dérivées partielles est caractérisée par les efforts fournis pour établir une théorie générale et présenter différentes méthodes de résolutions de solutions de ces équations. En fait, les équations aux dérivées partielles s'avèrent, d'une part un outil essentiel pour développer la théorie des surfaces et d'autre part pour chercher les solutions des problèmes en physique. Ces deux champs de mathématiques semblent être étroitement liés par le calcul des variations. Bien que l'origine des équations aux dérivées partielles non linéaires est très ancienne, leur développement est considérable durant la seconde moitié du 20^{ième} siècle. L'un des principaux moteurs du rayonnement des équations aux dérivées partielles non linéaires fut l'étude des problèmes des ondes de propagation non linéaire. Ces problèmes apparaissent dans différents domaines des mathématiques appliquées, en physique et en ingénierie, incluant la dynamique des fluides, l'optique non linéaire, la mécanique des solides, la physique des plasmas et la théorie des quanta. Il existe différentes méthodes de résolution d'équations et de systèmes notamment non linéaires. Cette diversité des moyens utilisés est étroitement liée aux contraintes imposées. Si dans le cas linéaire l'approche variationnelle est efficace, cette approche a montré ses limites dans le cas non

linéaire. D'autres techniques plus élaborées sont sollicitées selon l'étude, à savoir, quantitative ou qualitative, notamment la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, les méthodes d'itérations monotones, les méthodes topologiques (comme le théorème du point fixe de Schauder, la théorie du degré de Leray-Schauder,...), les méthodes de comparaison, et les méthodes variationnelles (théorie des points critiques, la théorie de Morse,...).

Nous allons traiter les problèmes de la forme :

$$Au = \lambda Gu + F(x, u) \quad (1)$$

où x est la variable de l'espace, λ est un paramètre réel, A est un opérateur linéaire elliptique d'ordre deux, G est l'opérateur de multiplication et F est un opérateur non linéaire. Les trois opérateurs A, G et F sont définis dans un espace de Hilbert réel H . Si F est identiquement nul, nous retrouvons le cadre linéaire. Dans ce cas nous appliquons la théorie de Weinberger pour en déduire l'existence d'une suite dénombrable de couples de solutions non triviales (λ_n, u_n) telle que

$$\lambda_n = \min_{H_n} \max_{u \in H_n} \frac{(Au, u)}{(Gu, u)} = \frac{(Au_n, u_n)}{(Gu_n, u_n)}.$$

Ici H_n est un sous espace de H de dimension n , λ_n est la n ème valeur propre de (1) considéré comme multiplicateur de Lagrange, u_n son vecteur propre associé (point critique), et $(., .)$ désigne produit scalaire dans H . Ce résultat est connu sous le nom de Principe de Courant-Hilbert.

En outre, soit α un nombre réel positif. En posant $a(u) = (Au, u)$, $g(u) = (Gu, u)$ et soit la variété M_α définie par

$$M_\alpha = \{u \in H ; g(u) = \alpha\},$$

nous obtenons alors,

$$\lambda_n = \min_{H_n} \max_{H_n \cap M_1} a(u) = a(u_n).$$

Dans ce cas, u_n est dit point critique de la fonctionnelle a par rapport à la variété M_α , et la valeur $a(u_n)$ est dite niveau critique.

Plus généralement, soient a et g deux fonctionnelles non linéaires, différentiables au sens de Gâteaux. Nous pouvons définir les valeurs propres et les vecteurs propres pour le couple $a', g' : H \rightarrow H^*$ (H^* est l'espace dual de H), si l'équation

$$\lambda g'(u) - a'(u) = 0$$

admet des solutions non triviales. Nous dirons que $u_0 \in M_\alpha$ est un point critique de la fonctionnelle a par rapport à la variété M_α , s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\lambda g'(u_0) - a'(u_0) = 0. \quad (2)$$

Comme dans le cas linéaire, le nombre $a(u_0) = \gamma$ est dit niveau critique. Si les fonctionnelles a et g sont quadratiques alors $\gamma = \alpha\lambda$. Dans le cas où a et g sont non quadratiques, il faudra examiner l'ensemble Γ de tous les niveaux critiques et déduire les propriétés de l'ensemble Γ .

Ce concept est remarquablement développé dans la théorie de Ljusternick-Schnirelmann. La théorie en question est l'analogue non linéaire du Principe de Courant-Hilbert, et stipule que l'ensemble Γ est au moins dénombrable.

De plus, l'équation $\lambda g'(u) - a'(u) = 0$ a un nombre infini de solutions sur chaque variété M_α .

Néanmoins si l'opérateur F vérifie des conditions appropriées, nous pouvons dans ce cas, faire appel à la méthode des itérations monotones pour montrer l'existence et

l'unicité des solutions positives du problème (1). Cette méthode consiste à construire une suite récurrente convergente dont la limite est précisément la solution du problème.

D'autre part si le problème (1) décrit un système non linéaire de n équations à n fonctions inconnues, nous utilisons un théorème de point fixe de Schauder pour montrer l'existence de solutions. Il s'agit de considérer une fonctionnelle non linéaire continue et compacte opérant sur un cône. Ainsi les solutions du problème sont les points fixes de cette fonctionnelle.

L'objet de ce travail est de présenter quelques méthodes variationnelles, plus précisément la théorie des points critiques.

Celle-ci occupe une place importante dans l'analyse non linéaire et elle est développées pour résoudre des problèmes notamment non linéaires. La théorie des points critiques consiste à trouver les points critiques de la fonctionnelle d'énergie J associée à notre problème initiale, en se servant des résultats dus entre autre à Rabinowitz et Ambrosetti. Parmi ses résultats, on cite :

- *Le théorème du col de la montagne : qui est l'exemple type de construction de valeurs critiques par le principe du min-max et qui un outil puissant permettant de montrer qu'une fonctionnelle qui a un minimum local admet un autre point critique.
- *Le théorème du point selle.

Ces deux résultats sont une généralisation du principe du min-max. Ce dernier caractérise une valeur critique c d'une fonctionnelle comme min-max sur une classe convenable d'ensembles S , c'est à dire

$$c = \inf_{A \in S} \sup_{v \in A} J(v)$$

Ces énoncés exigent une supposition technique indispensable en l'occurrence la condition de Palais-Smale qui a été apparue dans les années soixante.

Cette approche est obtenue par Birkhof en 1917, elle fut développée par Morse et par Ljusternik et Schnirelmann vers la fin des années vingt et au début des années trente.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier est consacré à des outils de base essentiels donnés sous forme de définitions, propositions, théorèmes... pour établir le deuxième chapitre. Ensuite, on introduit le deuxième chapitre qui est le noyau de ce travail. Lui même est dévisé en deux parties : points critiques sans contraintes, et points critiques avec contraintes. Nous énonçons des théorèmes dus à Rabinowitz (théorème du col et du point selle) dans le cas sans contraintes, ainsi le théorème de Ljusternik-Schnirelmann et sa généralisation, dans le cas avec contraintes. Le troisième chapitre traite quelques problèmes non linéaires avec la condition du type Dirichlet, et cela en se basant sur les théorèmes énoncés dans les chapitres précédents.

Nous terminons notre travail par une conclusion incluant quelques perspectives de recherche.

Préliminaires et notions de base

Nous présentons dans ce chapitre quelques notions de base importantes qui seront représentées comme des définitions, notations, propositions ainsi que des théorèmes, et qui vont nous servir tout au long de ce mémoire.

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous regroupons, un certain nombre de résultats concernant les espaces de Sobolev qui nous seront utiles par la suite. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, ou pour la démonstration des résultats que nous énonçons ici, on pourra consulter par exemple H. Brezis (chapitres 8 et 9), R.A. Adams, J.L. Lions & E. Magenes, V.G. Maz'ja et E. Stein.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre un et on note $W^{1,p}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles premières au sens des distributions sont des fonctions de $L^p(\Omega)$, c.à.d*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) ; \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\}$$

On muni l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

qui est équivalente à :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{si } 1 \leq p < \infty).$$

Si $p = 2$, alors $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.1.1 On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, qui est un espace de Banach muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Si $p = 2$, on aura : $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert pour la norme de $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.1.1 (Voir [5])

L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

On définit pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega) ; \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \right\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $W^{m,p}$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.2 Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. On dit que E_1 s'injecte continûment dans E_2 et on note $E_1 \hookrightarrow E_2$ si les conditions suivantes sont vérifiées

1. $\forall u \in E_1, u \in E_2$, c.à.d E_1 est un sous-espace de E_2 .
 2. $\exists c > 0$ telle que $\forall u \in E_1 : \|u\|_{E_2} \leq c \|u\|_{E_1}$
- c.à.d toute suite convergente dans E_1 est convergente dans E_2 .

Définition 1.1.3 Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. On dit que l'injection de E_1 dans E_2 est compact et on note $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$ si

- (i) E_1 s'injecte continûment dans E_2 .
 - (ii) L'application $f : E_1 \rightarrow E_2$ est compacte.
- Autrement dit, toute suite bornée dans E_1 est relativement compact dans E_2 .

Notation

On désigne par $W^{-1,p}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual. On a :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injection continue et dense.

Nous allons présenter maintenant quelques résultats importants concernant les espaces de Sobolev, il s'agit des théorèmes d'injection de Sobolev qui sont très utiles dans les applications.

Théorème 1.1.1 (Voir [5])

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Si $1 \leq p < N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$ où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev.

Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \infty[$.

Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.1.2 (Rellich-Kondrachov, voir [5])

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $p \geq 1$.

(i) Si $p < N$, alors pour tout $q \geq 1$ tel que $q < p^*$, on a $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(ii) Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$, $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty[$.

(iii) Si $p > N$ et $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(iv) Lorsque Ω est un ouvert borné de classe C^1 , les assertions ci-dessus restent vrais en remplaçant $W_0^{1,p}(\Omega)$ par $W^{1,p}(\Omega)$.

(v) Lorsque $N = 1$, l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est continue et non compacte, mais toute suite bornée $(u_n)_n$ contient une sous-suite $(u_{n_j})_j$ telle que pour tout $x \in \Omega$, la suite $(u_{n_j}(x))_j$ est convergente.

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Poincaré, voir [15])

On suppose que Ω est un ouvert borné (ou borné au moins dans une direction). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Hölder, voir [15])

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et p' l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Proposition 1.1.4 (Voir [15])

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $1 \leq p \leq N$ et $1 \leq r \leq \infty$. Il existe une constante $C(p, \theta, N)$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, on ait

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta}$$

où $0 \leq \theta \leq 1$, avec $\theta > 0$ si $p = N \geq 2$ et

$$\frac{1}{q} = \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{r}.$$

Corollaire 1.1.1 (Voir [23])

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ quand $N \geq 3$ et il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour tout $t \in [1, \frac{2N}{N-2}]$ et pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ est compacte pour tout $t \in [1, \frac{2N}{N-2}[$.

Remarque 1.1.2 Dans la suite, on ne considère que des espaces de Banach réels, même si certaines notions se généralisent sans peine au cas complexe. Lorsque X est un espace de Banach, nous désignons par χ' son dual topologique ; si $x \in X$ et $l \in X'$, la valeur de l en x , ou l'action de l en x , sera notée $\langle l, x \rangle$ ou encore $l(x)$.

1.2 Opérateurs elliptiques du second ordre

Notation

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, un multi-indice, de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$, et soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

On note par

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right) \\ D^\alpha &= \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \right) \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \end{aligned}$$

Soit P un polynôme de N variables, il existe un entier m dans \mathbb{N} , des constantes a_α ($a_\alpha \in \mathbb{R}$ ou $a_\alpha \in \mathbb{C}$) tels que

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$$

On note P_0 , le polynôme

$$P_0(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$$

Soit A l'opérateur différentiel qui à u associe $A(u)$, comme application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , avec

$$A(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u$$

L'entier m est appelé l'ordre de l'opérateur différentiel A .

L'opérateur différentiel A est dit elliptique, si

$$\forall u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, P_0(u) \neq 0.$$

Exemple 1.2.1 Pour p un nombre non négatif, le p -Laplacien est un opérateur elliptique non linéaire défini par

$$L(u) = - \sum_{i=1}^N \partial_i (|\nabla u|^{p-2} \partial_i u).$$

Exemple 1.2.2 L'opérateur de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

est elliptique, car on a : $p_0(v) = \sum_{i=1}^N v_i^2 = |v|^2 \neq 0$, si $v \neq 0$.

1.3 Quelques critères de convergences

Nous regroupons ici les résultats qui permettront de manipuler les différentes notions de convergence de suites dans les espaces $L^p(\Omega)$. Nous énonçons systématiquement ce qui suit en considérant un borélien Ω de \mathbb{R}^N et la mesure de Lebesgue notée dx . Cependant la plupart de ces résultats sont vrais, pour des espaces mesurés et des mesures σ -finies plus générales. Pour $1 \leq p \leq \infty$, la norme de $L^p(\Omega)$ sera notée $\|\cdot\|_p$.

Théorème 1.3.1 (Théorème de la convergence monotone ou Beppo-Levi, voir [17])

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. En notant

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x),$$

on a :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Lemme 1.3.1 (Lemme de Fatou, voir [17])

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Théorème 1.3.2 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, voir [17])

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que

- (i) f_n converge presque partout vers une fonction mesurable
- (ii) il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout.

Alors,

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0, \text{ c.à.d. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

Théorème 1.3.3 (Réciproque du théorème de convergence dominée, voir [17])

Soient f_n, f deux fonctions intégrables telles que

$$\int_{\Omega} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction intégrable g telles que :

- (i) $|f_{n_k}| \leq g, \forall k \in \mathbb{N}$.
- (ii) $f_{n_k} \rightarrow f$ presque partout.

Théorème 1.3.4 (Théorème d'Egorov, voir [17])

On suppose que Ω est de mesure finie et que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f . Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $A \subset \Omega$ mesurable tel que :

$$\text{mes}(A^c) < \delta, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Le théorème 1.3.4 établit une relation entre la convergence presque partout et la convergence uniforme.

Proposition 1.3.1 (Voir [17])

Soient $1 \leq p < \infty, f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0.$$

Alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(f_{n_i})_i$ telles que :

- (i) $|f_{n_i}| \leq g$ presque partout,
- (ii) $f_{n_i} \rightarrow f$ presque partout.

1.4 Rappel sur le calcul différentiel

Il existe plusieurs notions de dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach.

Nous commençons par celle de la dérivée directionnelle.

1.4.1 Dérivée directionnelle

Définition 1.4.1 Soient ω une partie d'un espace de Banach χ et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \omega$ et $z \in \chi$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit, on a $u + tz \in \omega$, on dit que F admet (au point u) une dérivée dans la direction z si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $F'_z(u)$.

On notera qu'une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in \chi$, sans pour autant être continue.

1.4.2 Différentielle au sens de Gâteaux

Définition 1.4.2 Soient ω une partie d'un espace de Banach χ et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G -dérivable ou encore G -différentiable) en u , s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u + tz)$ existe, pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

On posera $F'(u) = l$.

Remarque 1.4.1 On remarquera qu'une fonction G -dérivable n'est pas nécessairement continue.

Par exemple, l'application F de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0 \text{ et } x_1 = x_2^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est G -différentiable en $(0, 0)$ sans être continue en ce point.

On introduit enfin la dérivée classique (ou la dérivée au sens de Fréchet). (On utilise la notation de Landau $o(x)$ pour désigner une fonction de x telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{o(x)}{\|x\|} = 0$).

1.4.3 Différentielle au sens de Fréchet

Définition 1.4.3 Soient χ un espace de Banach, ω un ouvert de χ et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si $u \in \omega$, on dit que F est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $l \in \chi'$, tel que $\forall v \in \omega$ on a

$$F(v) - F(u) = \langle l, v - u \rangle + o(v - u).$$

Remarque 1.4.2 .Si F est Fréchet différentiable en u , l est unique (raisonner par l'absurde pour le vérifier) et on note $F'(u) = l$. L'ensemble des fonctions différentiables (au sens de Fréchet) de $\omega \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté $C^1(\omega, \mathbb{R})$.

.Si F est différentiable au sens de Fréchet en u , alors F est continue.

.La différentiabilité aux sens de Gâteaux et celle au sens de Fréchet sont des notions différentes. S'il y a risque de confusion, on doit préciser dans quel sens la notation $F'(u)$ doit être comprise.

.Si f est différentiable au sens de Fréchet au point u alors :

$$F'_z(u) = \langle F'(u), z \rangle$$

.Si F est différentiable au sens de Fréchet alors elle est différentiable au sens de Gâteaux, de plus les dérivées coïncident. En effet, soit F une application différentiable (au sens de Fréchet), on a

$$F(u + tz) - F(u) = \langle F'(u), tz \rangle + o(tz) = t \langle F'(u), z \rangle + o(tz)$$

et

$$\frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = \langle F'(u), z \rangle + \frac{o(tz)}{t} \rightarrow \langle F'(u), z \rangle, \text{ lorsque } t \rightarrow 0.$$

Mais la réciproque est fautive. En voici un contre exemple :

Exemple 1.4.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^8 + (y - x^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Considérons l'application $t \mapsto f(tu, tv)$ définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On a

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(tu, tv) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Ce qui prouve que f est dérivable au sens de Gâteaux à l'origine et qu'en ce point sa différentielle au sens de Gâteaux est nulle. D'autre part, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x, x^2) = \frac{1}{x^2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, (x, x^2) tend vers l'origine dans \mathbb{R}^2 et $f(x, x^2)$ tend vers ∞ , donc f n'est pas différentiable au sens de Fréchet.

Proposition 1.4.1 Soit F une fonction continue de ω dans \mathbb{R} et G -dérivable dans un voisinage de $u \in \omega$. On désigne par $F'(v)$ la G -dérivée de F en v et on suppose que l'application $v \mapsto F'(v)$ est continue au voisinage de u . Alors

$$F(v) = F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle + o(v - u),$$

c'est à dire que F est différentiable au sens de Fréchet et sa dérivée (classique) coïncide avec $F'(u)$.

Démonstration. En considérant, pour $u \in \omega$ fixé et v assez voisin de u , l'application $t \mapsto F(u + t(v - u))$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$, on peut écrire :

$$F(v) = F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle + h(u, v - u),$$

où, par commodité, on a posé :

$$h(u, v - u) = \int_0^1 \langle F'(u + t(v - u)) - F'(u), v - u \rangle dt.$$

Il s'agit donc de voir que $h(u, v - u)$ est un $o(v - u)$. Or $w \mapsto F'(w)$ étant continue au voisinage de u , pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|w - u\| < \delta \implies \|F'(w) - F'(u)\| < \varepsilon$$

Par conséquent si $\|v - u\| < \delta$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|\langle F'(u + t(v - u)) - F'(u), v - u \rangle| \leq \|F'(u + t(v - u)) - F'(u)\| \|v - u\| \leq \varepsilon \|v - u\|,$$

ce qui donne, en intégrant sur $[0, 1]$

$$|h(u, v - u)| \leq \varepsilon \|v - u\|,$$

pour $\|v - u\| < \delta$. ■

1.5 Quelques opérateurs continus

Dans l'étude de nombreuses équations aux dérivées partielles, nous aurons à considérer des opérateurs locaux définis par des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition 1.5.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit qu'une fonction $(x, s) \mapsto f(x, s)$, définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} , est mesurable en x , continue en s si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

. $\forall s \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\cdot, s)$ est mesurable sur Ω

.p.p en $x \in \Omega$ la fonction $f(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R} .

On dit que f est une fonction de Caratheodory.

Définition 1.5.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et f une fonction définie par

$$\begin{cases} f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$$

On appelle opérateur de Nemitskii (ou opérateur de superposition) associé à f l'application B qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction Bu définie sur Ω par

$$Bu(x) = f(x, u(x)).$$

Théorème 1.5.1 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $1 \leq p, q < \infty$ des réels et f une fonction de Caratheodory définie de $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $b \geq 0$ et $a \in L^q(\Omega)$ tels que la condition de croissance :

$$\text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p sur } \Omega, \quad |f(\cdot, s)| \leq a(\cdot) + b |s|^{\frac{p}{q}}$$

est satisfaite. Pour toute fonction u mesurable de Ω dans \mathbb{R} , on définit un opérateur B en posant

$$(Bu)(x) = f(x, u(x)).$$

Alors B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u . D'après la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_i})_i$ telle que

$$u_{n_i} \rightarrow u, \quad |u_{n_i}| \leq g \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

On en déduit que p.p sur Ω , on a

$$f(x, u_{n_i}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$$

et

$$|f(x, u_{n_i}(x))| \leq a(x) + b |g(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée on conclut que $Bu_{n_i} \rightarrow Bu$ dans $L^q(\Omega)$. Ainsi la suite $(Bu_n)_n$ est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ et admet comme unique point limite Bu : par conséquent la suite $(Bu_n)_n$ converge vers Bu dans $L^q(\Omega)$, ce qui prouve que B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. ■

Remarque 1.5.1 .L'opérateur B défini dans le théorème 1.5.1 est un opérateur local en ce sens que la valeur de $(Bu)(x)$ dépend uniquement de celle de u en x .

.On peut montrer, en admettant l'hypothèse de la continuité, qu'en fait tout opérateur local, défini par

$$B(1_A u) = 1_A Bu$$

pour tout ensemble mesurable A , est un opérateur de superposition.

1.6 Quelques fonctionnelles différentiables

Dans un premier temps, nous considérons des fonctionnelles définies sur les espaces $L^p(\Omega)$. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable en x , continue en s , c'est à dire vérifiant la condition de Caratheodory. On pose

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \sigma) d\sigma \tag{1.6.1}$$

De même lorsque cela a un sens, on définit une fonctionnelle V par

$$V(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx \tag{1.6.2}$$

Nous allons préciser dans quelles conditions $u \mapsto V(u)$ est continue ou de classe C^1 .

Proposition 1.6.1 *On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$ et F une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} vérifiant :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, p.p \text{ sur } \Omega, \quad |F(x, s)| \leq a(x) + b |s|^p \quad (1.6.3)$$

Alors, si F vérifie le théorème 1.5.1, V définie par (1.6.2) est continue sur $L^p(\Omega)$.

En particulier, si $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie le théorème 1.5.1, et s'il existe $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$, avec $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, et $b_0 \geq 0$ tels que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p \text{ sur } \Omega, \quad |f(., s)| \leq a_0(.) + b_0 |s|^{p-1} \quad (1.6.4)$$

alors, F et V données par (1.6.1) et (1.6.2), V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ et on a :
 $V'(u) = f(., u(.)).$

Démonstration. Si F vérifie la condition (1.6.3), le théorème 1.5.1 assure que l'application $u \mapsto F(., u(.))$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et par conséquent V est continue sur $L^p(\Omega)$. Lorsque l'hypothèse porte sur f , la condition (1.6.4) implique :

$$|F(x, s)| \leq a_0(x) |s| + \frac{1}{p} b_0 |s|^p \leq \frac{1}{p'} |a_0(x)|^{p'} + \frac{1}{p} (1 + b_0) |s|^p,$$

où on utilise l'inégalité de Young

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}.$$

On en déduit, en utilisant la première partie de la proposition 1.6.1, que V est continue de $L^p(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Pour montrer que V est de classe C^1 , on va montrer que V est G-dérivable et que la G-dérivée est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. En posant

$$\varphi(t, x) = \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} - f(x, u(x))v(x),$$

on a

$$\frac{V(u + tv) - V(u)}{t} - \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx = \int_{\Omega} \varphi(t, x)dx.$$

Or, il existe $\theta(t, x) \in]0, 1[$ tel que :

$$|\varphi(t, x)| = |f(x, u + \theta(t, x)tv(x)) - f(x, u(x))| |v(x)|.$$

Ainsi, d'une part, on a $\varphi(t, x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, p.p. en $x \in \Omega$ et d'autre part, on a la majoration

$$|\varphi(t, x)| \leq 2(a_0(x) + b_0(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} + b_0|u(x)|^{p-1}) |v(x)|$$

Comme le second membre de l'inégalité ci dessus est dans $L^1(\Omega)$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de dire que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{V(u + tv) - V(u)}{t} - \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx \right] = \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t, x)dx = 0.$$

Ainsi la G-dérivée $V'(u)$ existe et on a pour tout $v \in L^p(\Omega)$:

$$\langle V'(u), v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx,$$

c'est à dire $V'(u) = f(\cdot, u)$. De plus la condition de croissance (1.6.4) imposée à f et le théorème 1.5.1 impliquent que l'opérateur $u \mapsto f(\cdot, u)$ (c'est à dire V') de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ est continu. Finalement la proposition 1.4.1 implique que V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ (on note que ce dernier résultat n'est pas vérifié si $p = 1$). ■

1.7 Points critiques et multiplicateurs de Lagrange

Définition 1.7.1 Soit X un espace de Banach et $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in X$ est un maximum relatif (respectivement un minimum relatif) s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap X$, on a

$$f(x) \leq f(a)$$

respectivement

$$f(a) \leq f(x)$$

1.7. Points critiques et multiplicateurs de Lagrange

Si $V = X$ alors le point a est dit maximum absolu (respectivement minimum absolu).

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Définition 1.7.2 Soient X un espace de Banach, $\omega \subset X$ un ouvert de $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J , si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J .

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J , s'il existe $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J .

Remarque 1.7.1 Souvent, lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = 0$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = 0$ est l'équation d'Euler satisfaite par le point critique u .

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonction $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ est un point extrémal, c'est à dire un point où J atteint un minimum ou un maximum, local ou global.

Une classe importante de fonctions atteignant leur minimum est constituée par (certaines) fonctions convexes.

Remarque 1.7.2 Si a est un point d'extremum relatif de F , alors c'est un point critique. La réciproque est fautive : une fois qu'on a déterminé les points critiques d'une fonction, il faut examiner leur nature, par exemple en effectuant le calcul de la matrice hessienne de F . En voici un contre exemple :

Exemple 1.7.1 Soit la fonction F définie de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$F(x, y) = x^2 - y^2.$$

L'expression de son gradient est :

$$\nabla F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

il s'annule donc uniquement en $(0, 0)$, qui est l'unique point critique. Pour déterminer la nature de ce dernier, on peut calculer la matrice hessienne de la fonction

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Elle a pour valeurs propres 2 et -2 . Elle n'est donc ni positive, ni négative : il s'agit d'un point-selle. On pouvait également constater que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a

$$F(0, t) < F(0, 0) < F(t, 0)$$

ce qui assure qu'il n'y a ni maximum ni minimum en $(0, 0)$.

Après avoir vu ce que signifie une valeur critique ou un point critique pour une fonctionnelle définie sur une variété, on introduit la notion de multiplicateurs de Lagrange.

Multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes ou sur une variété. C'est pourquoi on doit préciser le sens qu'on donne à un point critique ou à une valeur critique sur un ensemble de contraintes.

Définition 1.7.3 Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contrainte :

$$S = \{v \in X ; F(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $u \in S$, on a $F'(u) \neq 0$. Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou bien de classe C^1 sur un voisinage de S ou encore C^1 sur S) on dit que $c \in \mathbb{R}$ est valeur critique de J sur S , s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$J(u) = c, \quad \text{et} \quad J'(u) = \lambda F'(u).$$

Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c (ou le point critique u).

Remarque 1.7.3 Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation

$$J'(u) = \lambda F'(u)$$

correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation d'Euler-Lagrange (ou l'équation d'Euler) satisfaite par le point critique u sur la contrainte S .

Cette définition est justifiée par le résultat suivant qui établit l'existence de multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 1.7.1 (Voir [15], p 55)

Sous les hypothèses et notations de la définition 1.7.3, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v).$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Exemple 1.7.2 Soient Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N et $p > 1$ tel que

$$(N - 2)p < N + 2.$$

On considère, sur l'espace $H_0^1(\Omega)$:

$$S = \{v \in H_0^1(\Omega) ; F(v) = 0\},$$

avec

$$F(v) = \int_{\Omega} |v(x)|^{p+1} dx - 1$$

et

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Montrons d'abord qu'il existe $u_0 \in S$ tel que

$$J(u_0) = \mu = \min_{v \in S} J(v).$$

En effet en considérant une suite minimisante $(v_n)_n$, d'après l'inégalité de Poincaré (proposition 1.1.3) on sait que cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et on peut supposer que $v_n \rightarrow v_0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On sait que si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de Ω qui converge faiblement vers x dans Ω , alors on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \tag{1.7.1}$$

On a donc d'après (1.7.1)

$$J(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \mu. \tag{1.7.2}$$

Par ailleurs, puisque $(N-2)(p+1) < 2N$, d'après le théorème de Rellich-Kondrachov (théorème 1.1.2), l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ est compacte et on en déduit que $v_n \rightarrow v_0$ dans $L^{p+1}(\Omega)$. En particulier $F(v_0) = 0$, $v_0 \in S$ et par définition de μ on a $J(v_0) \geq \mu$: ce qui joint à (1.7.2), montre que μ est atteint sur S . Alors, d'après le théorème 1.7.1, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(v_0) = \lambda(p+1) |v_0|^{p-1} v_0,$$

ou encore :

$$-2\Delta v_0 = \lambda(p+1) |v_0|^{p-1} v_0.$$

En multipliant par v_0 , en intégrant et en effectuant une intégration par parties sur le terme de gauche, on obtient :

$$2J(v_0) = \lambda(p+1) = 2\mu.$$

On entiore que $\lambda = \frac{2\mu}{p+1}$, c'est à dire

$$-\Delta v_0 = \mu |v_0|^{p-1} v_0$$

au sens des distributions. Comme $\mu > 0$, en posant

$$u = \mu^{\frac{1}{p-1}} v_0$$

On obtient une solution non nulle de l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

Remarque 1.7.4 On peut montrer que l'on peut choisir la suite minimisante $(v_n)_n$ telle que $v_n \geq 0$ et on obtient ainsi une solution $u \geq 0$ et de classe C^∞ dans Ω .

On notera que la première partie de l'argument ci-dessus fonctionne lorsque $p = 1$, mais dans ce cas on obtient $\mu = \lambda_1$ la première valeur propre et $\varphi_1 = v_0$ une première fonction propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω .

1.8 Espaces de Sobolev à poids

Les problèmes aux limites sont étudiés en général dans les espaces de Sobolev classiques lorsqu'ils sont posés sur des domaines bornés avec des conditions au bord. Cependant, ce cadre fonctionnel n'est plus adéquat dès que l'on s'intéresse à des domaines non bornés. En effet, il est nécessaire d'ajouter des contraintes supplémentaires afin de contrôler le comportement des solutions à l'infini. Pour cela, on introduit les espaces de Sobolev à poids qui permettent d'une part, de décrire de manière explicite le comportement des solutions à l'infini et d'autre part, si les poids sont bien choisis, d'étendre certaines propriétés essentielles des espaces de Sobolev classiques à des domaines non bornés. L'exemple le plus pertinent est celui de l'inégalité de Hardy qui, pour un ouvert non borné, joue le rôle de l'inégalité de Poincaré.

Introduisons les fonctions poids suivantes

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.8.1)$$

Définition 1.8.1 On appelle **poids** toute fonction $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle, non négative et mesurable.

Remarque 1.8.1 On peut trouver d'autres fonctions poids telles que

$$\rho_\beta(x) = \rho^\beta(x) \left(1 + \log\left(\frac{1}{(1 + |x|^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.8.2 Soit $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $L_\alpha^p(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^p(\mathbb{R}^N)$ muni du poids (1.8.1), c'est à dire

$$L_\alpha^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^N) : (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{p}} u \in L^p(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Nous avons les résultats suivants

- 1) $W_0^{0,p}(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$.
- 2) $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} ((1 + |x|^2)^\alpha u^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- 3) $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
- 4) Pour $\phi \in D(\mathbb{R}^N)$, l'application $u \mapsto \phi(u)$ est linéaire continue de $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

5) Dans le cas $p = 2$, on note $W_\alpha^{1,2}(\mathbb{R}^N) = H_\alpha^1(\mathbb{R}^N)$, qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^\alpha u v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx.$$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , nous désignons par $W_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ défini par

$$W_\alpha^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) : u \in L_\alpha^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), \forall j = 1, \dots, N \right\}$$

Proposition 1.8.1 (*Inégalité de Hardy, voir [13]*)

Pour $\alpha + N \neq 2$, il existe $C = C(\alpha, N) > 0$ tel que pour tout $u \in D(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha-2} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u(x)|^2 dx$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$$

Théorie des points critiques

2.1 Introduction

Pourquoi rechercher des points critiques?

Etant donné Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Considérons le problème elliptique suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 c.à.d

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds$$

Associons à (P) la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx$$

Alors J est bien définie, de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et sa différentielle est donnée par

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Les problèmes suivants sont équivalents

- (i) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f(u)$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.
- (ii) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J'(u) = 0$.

En effet :

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, $-\Delta u = f(u)$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Alors

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle, \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx, \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

D'où

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(u) v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \iff \langle J'(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ce qui signifie que $J'(u) = 0$.

Inversement, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J'(u) = 0$. On a

$$\langle J'(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Comme $\mathfrak{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

ou encore

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle f(u), v \rangle \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

ce qui signifie que $-\Delta u = f(u)$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Résoudre le problème aux limites revient donc à trouver des points critiques de la fonctionnelle associée.

2.2 Points critiques sans contraintes

2.2.1 Condition de Palais-Smale

La condition de Palais-Smale (ou condition de compacité de Palais-Smale) est une hypothèse de compacité nécessaire pour démontrer certains théorèmes du calcul des variations. Elle garantit l'existence de certains types de points critiques, en particulier de points col. La condition porte sur la fonctionnelle dont on cherche à montrer l'existence d'un extremum.

Définition 2.2.1 Soient X une espace de Banach et X' son dual topologique. On dit qu'une fonctionnelle continûment différentiable au sens de Fréchet $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ d'un espace de Banach X à valeurs dans \mathbb{R} satisfait la condition de Palais-Smale (en abrégé (PS)) si toute suite $(u_n)_n \subset X$ vérifiant :

$$\begin{cases} (J(u_n))_n \text{ est bornée} \\ J'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X' \end{cases}$$

Admet une sous-suite convergente dans X .

Remarque 2.2.1 la suite $(u_n)_n$ est appelée suite de Palais-Smale.

Définition 2.2.2 Soient X un espace de Banach, et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c , (en abrégé $(PS)_c$), si toute suite $(u_n)_n$ de X vérifiant :

$$\begin{cases} J(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X' \end{cases}$$

admet une sous-suite notée $(u_{n_k})_k$ convergente.

Remarque 2.2.2 Si J vérifie la condition de Palais-Smale en c , alors l'ensemble

$$K(c) = \{u \in X : J(u) = c \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact, il en est de même de $\cup_{a \leq c \leq b} K(c)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Si J vérifie la condition (PS) , alors J vérifie $(PS)_c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Donnons maintenant deux exemples sur les fonctionnelles qui vérifient (PS) et qui ne la vérifient pas.

Exemple 2.2.1 Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $p > 1$ tel que $(N - 2)p \leq N + 2$. On considère pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1} \int_{\Omega} |v(x)|^{p+1} dx.$$

On va voir que J satisfait la condition de Palais-Smale, au niveau c . En effet si $(u_n)_n$ est une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$J(u_n) \rightarrow c, J'(u_n) = -\Delta u_n + \lambda |u_n|^{p+1} \rightarrow 0$$

dans $H^{-1}(\Omega)$, alors on a:

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p+1} dx = (p+1)E(u_n) - \frac{p-1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx.$$

Or

$$|\langle J(u_n), u_n \rangle| \leq \| J'(u_n) \|_{H^{-1}} \| \nabla u_n \|_{L^2(\Omega)}$$

et on peut en déduire que:

$$\frac{p-1}{2} \| \nabla u_n \|^2 \leq (p+1)E(u_n) + \| J'(u_n) \|_{H^{-1}} \| \nabla u_n \|_{L^2} .$$

Comme $p-1 > 0$, cette inégalité montre que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, puisque Ω est borné et que $p+1 < 2^*$, (ou $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev), l'injection $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich-Kondrachov 1.1.2), et on peut extraire une sous-suite $(v_i)_i$ qu'on notera $(u_n)_n$ qui converge faiblement vers v dans $H_0^1(\Omega)$ ainsi que dans $L^{p+1}(\Omega)$. En utilisant le théorème 1.5.1 énoncé dans le premier chapitre, on en conclut que

$$|v_i|^{p-1} v_i \rightharpoonup |v|^{p-1} v \text{ dans } L^{\frac{(p+1)}{p}}(\Omega),$$

donc aussi dans $H^{-1}(\Omega)$, et finalement :

$$\Delta v_i = J'(v_i) - \lambda |v_i|^{p-1} v_i \rightharpoonup -\lambda |v|^{p-1} v \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

En appelant B l'opérateur qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ fait correspondre z solution de :

$$z \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta z = f$$

au sens $H^{-1}(\Omega)$, on sait que B est continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a donc:

$$v_i = B(J'(v_i) - \lambda |v_i|^{p-1} v_i) \rightharpoonup B(-\lambda |v|^{p-1} v) \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_n$ contient une sous-suite convergente.

Exemple 2.2.2 La fonction $J(x) = e^x$ définie sur \mathbb{R} , ne vérifie pas la condition de Palais-Smale en 0.

En fait, très souvent il faut adapter la définition de la condition de Palais-Smale au problème que l'on veut résoudre. Une variante est la suivante : s'il existe $(u_n)_n$ une suite de χ telle que $J(u_n) \rightarrow c$ et $J'(u_n) \rightarrow 0$ dans χ' , alors c est une valeur critique de J . On pourrait aussi, par exemple, donner une condition analogue pour les fonctions définies seulement sur une partie de χ , ou restreindre l'existence de sous-suite convergente pour les $(u_n)_n$ telles que $J(u_n)$ décroît vers c et $J'(u_n) \rightarrow 0$, ou encore se contenter d'avoir une sous-suite convergente modulo une certaine transformation, par exemple, si $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on exigera que la suite des translatées $v_n = u_n(\cdot + x_n)$ soit relativement compact pour une suite x_n de \mathbb{R}^N bien choisie.

2.2.2 Lemme de déformation

Le lemme de déformation est un outil essentiel et important dans plusieurs méthodes variationnelles. Avant d'énoncer ce lemme, on introduit d'abord la notion du champ de pseudo-gradient qui sera l'un des outils utilisés dans la démonstration du lemme.

Définition 2.2.3 Soient X un espace Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Si $u \in X$, on dit que $v \in X$ est un **pseudo-gradient** (en abrégé p.g) de J en u si on a :

$$\|v\| \leq 2 \|J'(u)\|, \quad \langle J'(u), v \rangle \geq \|J'(u)\|^2.$$

En désignant par

$$X_r = \{u \in X; J'(u) \neq 0\}$$

l'ensemble des points réguliers (c.à.d non critiques) de J , une application V de $X_r \rightarrow X$ est appelée **champ de pseudo-gradient** de J si V est localement lipschitzienne sur X_r et pour tout $u \in X_r$, $V(u)$ est un pseudo-gradient de J en u .

Remarque 2.2.3 Si v_1 et v_2 sont deux p.g de J en u , pour tout $\theta \in [0, 1]$, la combinaison convexe $\theta v_1 + (1 - \theta)v_2$ est également un p.g de J en u .

Théorème 2.2.1 (Théorème d'existence, voir [17]) Soient X un espace de Banach et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction non constante. Il existe alors un champ de p.g de J .

Notation

Si χ est un ensemble et $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une application on posera, pour $a \in \mathbb{R}$

$$[J \leq a] = \{u \in X; J(u) \leq a\}.$$

De même on définit les ensembles $[J < a]$, $[J \geq a]$, $[J > a]$ et les ensembles de niveau $[J = a]$.

Théorème 2.2.2 (lemme de déformation)

Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction non constante satisfaisant la condition de Palais-Smale et $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de J . Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une application $\eta \in C(\mathbb{R} \times X, X)$, appelée **le flot** associé à J , satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) Pour tout $u \in X$, on a $\eta(0, u) = u$.
- 2) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon]$, on a $\eta(t, u) = u$.
- 3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de X dans X .
- 4) Pour tout $u \in X$, la fonction $t \mapsto J(\eta(t, u))$ est décroissante sur \mathbb{R} .
- 5) Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, alors $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.
- 6) Si de plus J est paire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme impair.

Démonstration. Puisque J satisfait la condition de Palais-Smale et que c n'est pas valeur critique de J , on voit facilement qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ (on prendra en plus $\delta \leq 1$) tels que:

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1], \quad \|J'(u)\| \geq \delta.$$

On pose $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \frac{\delta}{8})$, et pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0], \quad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon].$$

Comme $A \cap B = \emptyset$, la fonction

$$\alpha(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

est localement lipschitzienne et vérifie $\alpha = 0$ sur A , $\alpha = 1$ sur B . On notera également que si J est paire, les ensembles A , B sont symétriques par rapport à l'origine et α est une fonction paire. On considère maintenant V , un champ de pseudo-gradient de J , que l'on choisira impaire, si J est paire. En posant alors

$$W(x) = \alpha(x) \min\left(1, \frac{1}{\|V(x)\|}\right) V(x)$$

pour $x \in \chi$, on vérifie sans difficulté que W est bien définie sur χ , qu'elle est localement lipschitzienne et que $\|W(x)\| \leq 1$. On remarquera également que si J est paire, W est impaire. D'après la théorie générale des équations différentielles, l'équation :

$$\frac{d\eta(t, x)}{dt} = -W(\eta(t, x)) \text{ avec } \eta(0, x) = x \quad (2.2.1)$$

admet une unique solution $\eta(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}, \chi)$ et en fait $\eta(\cdot, \cdot)$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times \chi$. De plus comme pour $t, s \in \mathbb{R}$, on a

$$\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t + s, x),$$

On voit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de χ dans χ , son inverse étant $\eta(-t, \cdot)$. Pour terminer la démonstration du lemme de déformation, nous allons vérifier que η satisfait 1) et 6) du lemme.

Les conditions 1) et 3) sont satisfaites de façon évidente. Si $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, alors $W(u) = 0$, et l'unicité de la solution (2.2.1) implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\eta(t, u) = u$: la condition 2) est donc satisfaite. Pour la propriété 4), il suffit de calculer la dérivée de $t \mapsto J(\eta(t, u))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\eta(t, u)) &= \langle J'(\eta(t, u)), \frac{d\eta(t, u)}{dt} \rangle \\ &= -\alpha(\eta(t, u)) \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}\right) \langle J'(\eta(t, u)), V(\eta(t, u)) \rangle \\ &\leq -\alpha(\eta(t, u)) \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}\right) \|J'(\eta(t, u))\|^2, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

où \langle, \rangle désigne le crochet de dualité entre χ' et χ .

Ce qui montre que $J(\eta(t, u))$ est décroissante sur \mathbb{R} . Pour vérifier 5), considérons $u \in [J \leq c + \varepsilon]$ et remarquons que, si pour un $t_0 \in [0, 1[$, on a $\eta(t_0, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$, d'après ce que nous venons de voir, $\eta(1, u)$ reste dans $[J \leq c - \varepsilon]$. Supposons donc que pour tout $t \in [0, 1[$, $\eta(t, u)$ soit dans $[c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon]$. Alors d'après l'inégalité (2.2.2) et le fait que

$$\| J'(x) \| \leq \| V(x) \| \leq 2 \| J'(x) \|,$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\eta(t, u)) &\leq \frac{-1}{4} \left(1, \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|} \right) \|V(\eta(t, u))\|^2 \\ &\leq \begin{cases} \frac{-1}{4} \text{ si } \|V(\eta(t, u))\| \geq 1 \\ \frac{-\delta^2}{4} \text{ si } \|V(\eta(t, u))\| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\delta \leq 1$, on en conclut finalement que

$$J(\eta(1, u)) \leq \frac{-\delta^2}{4} + J(u) \leq \frac{-\delta^2}{4} + c + \varepsilon.$$

C.à.d d'après la définition de ε_0 , $J(\eta(1, u)) \leq c - \varepsilon$: cela signifie qu'au plus tard au temps $t = 1$, la trajectoire de $\eta(t, u)$ entre dans l'ensemble $[J \leq c - \varepsilon]$. Pour finir, on remarque que la condition 6) est vérifiée, car W est impaire lorsque J est paire et par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est impaire. ■

2.2.3 Principe du min-max

Théorème 2.2.3 Soient X un espace de Banach, J de X dans \mathbb{R} une fonction de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale et B une famille non vide de parties non vides de X . On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1, \cdot)$ construit dans le théorème 2.2.2 respecte B (c.à.d si $A \in B$, on a $\eta(1, A) \in B$). On pose :

$$\varsigma = \inf_{A \in B} \sup_{v \in A} J(v).$$

Si $\varsigma \in \mathbb{R}$, alors ς est une valeur critique de J .

Démonstration. En effet si ς n'est pas valeur critique, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut choisir $A \in B$ tel que $\varsigma \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq \varsigma + \varepsilon$. Mais par hypothèse, en posant $W = \eta(1, A)$, on a d'une part $W \in B$, et d'autre part $W \subset [J \leq \varsigma - \varepsilon]$, ce qui contredit la définition de ς . ■

Le premier exemple de construction de valeur critique par le procédé de min-max est le théorème du col de la montagne (the mountain pass theorem) qui exprime très bien le contenu du résultat et sa démonstration. Voici ce résultat que nous appliquerons un peu plus loin à la résolution de certaines équations semilinéaires (nous suivons ici A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz [6]).

Théorème 2.2.4 (Théorème du col)

Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale.

On suppose que $J(0) = 0$ et que :

- (i) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$;
- (ii) il existe $u_0 \in \chi$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.

Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$B = \{\varphi([0, 1]); \varphi \in C([0, 1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_0\},$$

et

$$c = \inf_{A \in B} \max_{v \in A} J(v),$$

alors c est une valeur critique de J , et $c \geq a$.

Démonstration. Soient B (qui est évidemment non vide) et c défini comme dans le théorème 2.2.4. Tout d'abord notons que par connexité, pour tout $A \in B$, l'intersection $A \cap \{u \in \chi; \|u\| = R\}$ est non vide, et par conséquent $\max_{v \in A} J(v) \geq a$ et finalement $c \geq a$.

Si c n'est pas une valeur critique de J , avec les notation du lemme de déformation (théorème 2.2.2), pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver $A \in B$ tel que

$$A = \varphi([0, 1]), \quad c \leq \max_{v \in A} J(v) \leq c + \varepsilon.$$

En posant $\Psi(\tau) = \eta(1, \varphi(\tau))$ et $Z = \Psi([0, 1])$, on a $Z \in B$. Mais la propriété 5) du lemme de déformation (théorème 2.2.2) implique que $Z \subset [J \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit le fait que, par définition de c , on a $\max_{v \in Z} J(v) \geq c$. On en conclut que c est une valeur critique de J (et nous avons vu que $c \geq a$). ■

Remarque 2.2.4 *L'intuition qui sous-entend ce théorème se trouve dans le mot "col" lui-même. Supposons que J désigne l'altitude. Il existe alors deux points bas : l'origine, car $J(0) = 0$, et un autre point u_0 où $J(u_0) \leq a$.*

Entre ces deux points, se situe une chaîne de montagnes (à distance $\|u\| = R$ de l'origine) où l'altitude est élevée (plus grande que $a > 0$). Pour aller de l'origine à u_0 en suivant un chemin φ , il faut traverser les montagnes, c'est-à-dire d'abord monter, puis redescendre. Comme J est plus ou moins régulière, elle doit atteindre un point critique quelque part entre les deux. L'intuition suggère que si un tel point se situe sur un chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse, ce sera presque toujours un point col.

En voici maintenant le deuxième exemple de construction de valeur critique par le principe de min-max qui est le théorème du point selle (Saddle Point Theorem) et qui est dû à Rabinowitz.

Théorème 2.2.5 *(du point selle, voir [23]) Soient χ un espace de Banach, χ_1 un sous-espace de dimension finie et χ_2 un sous-espace fermé de χ tel que $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$. On considère $J \in C^1(\chi, \mathbb{R})$ telle que $J(0) = 0$, vérifiant la condition de Palais-Smale et les deux conditions suivantes :*

- (i) *il existe $R > 0$, $a > 0$ tel que si $u \in \chi_2$ et $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$,*
- (ii) *il existe $u_0 \in \chi_2$ avec $\|u_0\| = 1$, $R_0 > R$ et $R_1 > R$ tels que $J(u) \leq 0$, pour tout $u \in \partial\omega$ où*

$$\omega = \{u_1 + ru_0; u_1 \in \chi_1, \|u_1\| \leq R_1, 0 \leq r \leq R_0\}$$

et $\partial\omega$ désigne la frontière de ω dans $\chi_1 \oplus \mathbb{R}u_0$ (noter que ω est un cylindre). Alors J possède une valeur critique $c \geq a$. Plus précisément c est définie par :

$$c = \inf_{A \in B} \max_{v \in A} J(v),$$

où

$$B = \{\varphi(\omega); \varphi \in C(\omega, \chi), \varphi(u) = u \text{ pour } u \in \partial\omega\}.$$

Remarque 2.2.5 La démonstration de ce théorème nécessite la théorie du degré topologique de Brouwer. Pour plus de détails, on peut consulter [27].

Le théorème du col est un cas particulier du théorème du point selle, en prenant $X_1 = \{0\}$.

Dans la pratique, pour utiliser le théorème du col, on montre que l'origine est un point minimum local, sans être global ; on montre ensuite que J possède un point critique distinct de l'origine. De ce point de vue, le théorème du point selle a l'avantage de ne pas exiger une telle situation : en effet il se peut très bien que l'origine soit un point de minimum local pour la restriction de J à X_2 , sans être un point de minimum local de J .

2.3 Points critiques avec contraintes

2.3.1 Condition de Palais-Smale

On considère dans toute la suite une contrainte du type :

$$S = \{v \in \chi ; F(v) = 0\} \tag{2.3.1}$$

et on suppose que

$$\forall v \in S, F'(v) \neq 0. \tag{2.3.2}$$

Définition 2.3.1 Soient χ un espace de Banach et $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) sur la variété S , si toute suite $(u_n, \lambda_n)_n \subset S \times \mathbb{R}$ telle que :

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) - \lambda_n F'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X',$$

contient une sous-suite notée $(u_{n_k}, \lambda_{n_k})_k$ convergeante vers (u, λ) dans $S \times \mathbb{R}$.

Naturellement, il n'est pas indispensable que J soit définie dans X tout entier : On peut définir une notion analogue lorsque J est définie dans un voisinage de S ou même seulement sur S , en précisant le sens de la dérivée d'une fonctionnelle définie sur une variété. On notera que si J satisfait la condition de Palais-Smale en $c \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble

$$\{(u, \lambda) \in S \times \mathbb{R} ; J(u) = c, \text{ et } J'(u) = \lambda F'(u)\}$$

est compact dans $X \times \mathbb{R}$ et il en est de même des ensembles

$$K(c) = \{u \in S ; J(u) = c \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } J'(u) = \lambda F'(u)\}$$

et $\cup_{a \leq c \leq b} K(c)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Lemme de déformation

Avant d'énoncer le lemme de déformation, on aura besoin d'introduire la notion du champ de pseudo-gradient tangent, qui est un outil important dans la démonstration du lemme.

Champ de pseudo-gradient tangent

Soient X un espace de Banach et $F \in C^1(X, \mathbb{R})$. Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, pour tout $x \in S$ on pose :

$$\|J'(x)\|_* = \sup \{ \langle J'(x), y \rangle ; y \in X, \|y\| = 1, \text{ et } \langle F'(x), y \rangle = 0 \}.$$

Remarque 2.3.1 La condition $\|J'(u)\|_* = 0$ et $x \in S$ signifie précisément que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $J'(u) = \lambda F'(u)$, c'est à dire que x est un point critique de J sur S .

Définition 2.3.2 Soient X un espace de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$, S définie par (2.3.1), F vérifiant la condition (2.3.2). Pour tout $u \in S$, on dit que $v \in X$ est un pseudo-gradient tangent (à S) de J en u , si on a :

$$\begin{cases} \|v\| \leq 2 \|J'(u)\|_*, \\ \langle J'(u), v \rangle \geq \|J'(u)\|_*^2, \quad \langle F'(u), v \rangle = 0. \end{cases}$$

En désignant par

$$S_r = \{u \in S ; \forall \lambda \in \mathbb{R}, J'(u) - \lambda F'(u) \neq 0\}$$

l'ensemble des points réguliers (c.à.d non critiques) de J sur S , une application $V : S_r \rightarrow X$ est appelée champ de pseudo-gradient tangent de J si V est localement lipschitzienne sur S_r et pour tout $u \in S_r$, $V(u)$ est un pseudo-gradient tangent de J en u .

Remarque 2.3.2 L'ensemble des pseudo-gradients tangents de J en un point fixé u est convexe. Donc, si V_1, V_2 sont deux champs de p.g tangent de J , alors pour tout $\theta \in [0, 1]$ il en est de même de $\theta V_1 + (1 - \theta)V_2$.

Définition 2.3.3 On désigne par $C_{loc}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ telles que F' est localement lipschitzienne de X dans X' .

Théorème 2.3.1 (Théorème d'existence d'un champ p.g tangent, voir [13])

Soient X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $F \in C_{loc}^{1,1}(X, \mathbb{R})$, S définie par (2.3.1). On suppose que F vérifie la condition (2.3.2) et que J n'est pas constante sur S . Alors il existe V , un champ de p.g tangent de J sur S_r , tel que V soit défini et localement lipschitzien sur un voisinage ouvert S_r^\sim de S_r . De plus si F et J sont paires, on peut choisir S_r^\sim symétrique par rapport à l'origine et V impair.

Théorème 2.3.2 (lemme de déformation)

Soient X un espace de Banach, $F \in C_{loc}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ et vérifiant la condition (2.3.2), S définie par (2.3.1). On suppose que $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $J = E|_S$ vérifie la condition de Palais-Smale sur S ; on suppose enfin que J n'est pas constante sur S et que $c \in \mathbb{R}$ n'est

2.3. Points critiques avec contraintes

pas valeur critique de J sur S . Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une application $\eta \in C(\mathbb{R} \times S, S)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) Pour tout $u \in S$, on a $\eta(0, u) = u$.
- 2) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, on a $\eta(t, u) = u$.
- 3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de S dans S .
- 4) Pour tout $u \in S$, la fonction $t \longmapsto J(\eta(t, u))$ est décroissante sur \mathbb{R} .
- 5) Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, alors $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.
- 6) Si J et F sont paires, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme impair.

Démonstration. On sait qu'il existe un voisinage ouvert S_r^\sim de S_r (l'ensemble des points réguliers de J sur S) et V un champ de pseudo-gradient tangent de J tels que V est localement lipschitzien sur S_r^\sim (on prendra soin de choisir V impair lorsque J et F sont pairs). Comme c est une valeur régulière de J sur S et J satisfait la condition de Palais-Smale, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J(u) \leq c + \varepsilon_1], \quad \|J'(u)\|_* \geq \delta.$$

On peut prendre de plus $\delta \leq 1$ et on pose

$$\varepsilon_0 = \min\left(\varepsilon_1, \frac{\delta^2}{8}\right).$$

Pour $v \in S_r$, soit

$$\Omega(v) = B\left(v, \frac{1}{2}d(v, (S_r^\sim)^c)\right)$$

et

$$\Omega = \cup_{v \in S_r} \Omega(v).$$

Puis pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, en considérant :

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0] \cup \Omega^c, \quad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon],$$

on prend

$$\alpha(x) = \frac{d(x, A)}{(d(x, A) + d(x, B))},$$

de sorte que $\alpha(x) = 1$, pour tout $x \in B$, et $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in A$, et α est localement lipschitzienne sur χ .

Lorsque F et J sont des fonctions paires, A et B sont symétriques par rapport à l'origine et α est une fonction paire. Soit alors

$$W(x) = \alpha(x) \min\left(1, \frac{1}{\|V(x)\|}\right)V(x)$$

pour $x \in X$. On peut vérifier que W est localement lipschitzien sur X , et que $\|W(x)\| \leq 1$, pour tout $x \in X$; par conséquent pour tout $x \in X$ donné, il existe une unique solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d\eta(t,x)}{dt} = -W(\eta(t,x)) \\ \eta(0,x) = x \end{cases}$$

définie sur \mathbb{R} . On sait aussi (revoir la démonstration du théorème 2.2.2) que $\eta \in C^1(\mathbb{R}, X)$, et que

$$\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t + s, x)$$

et que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de X dans X . On vérifie sans difficulté que les propriétés 1) et 2) sont satisfaites. Pour la propriété 3), on doit vérifier que si $u \in S$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\eta(t, u) \in S$. Le seul cas où une difficulté pourrait surgir est lorsque $u \in [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$. Mais dans ce cas, comme $t \mapsto \eta(t, u)$ est continue et que $u \in S_r$, pour t assez petit, $\eta(t, u)$ reste dans l'ouvert S_r° et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\eta(t, u)) &= \langle F'(\eta(t, u)), \frac{d}{dt}\eta(t, u) \rangle \\ &= -\alpha(\eta) \min\left(1, \frac{1}{\|V(\eta)\|}\right) \langle F'(\eta), V(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

Mais comme par définition du champ pseudo-gradient tangent, on a

$$\langle F'(\eta), V(\eta) \rangle = 0,$$

on conclut que $F(\eta(t, u))$ est constant pour t assez petit, et par conséquent $\eta(t, u)$ reste finalement sur S , pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les autres propriétés de η se vérifient en suivant point par point la démarche que nous avons suivi pour la démonstration du théorème 2.2.2. ■

On peut maintenant énoncer le principe de min-max ou inf-sup sur les variétés.

2.3.3 Principe du min-max

Théorème 2.3.3 (Voir [15])

Soient X un espace de Banach, $F \in C_{loc}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (2.3.2), et S est défini comme (2.3.1). Soit $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ telle que $J = E|_S$ n'est pas constante et vérifie la condition de Palais-Smale sur S et B une famille non vide de parties non vides de S . On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1, \cdot)$ construit dans le lemme de déformation (théorème 2.3.2) respecte B (c.à.d si $A \in B$, on a aussi $\eta(1, A) \in B$). On pose:

$$c_* = \inf_{A \in B} \sup_{v \in A} J(v).$$

Si $c_* \in \mathbb{R}$, alors c_* est une valeur critique de J sur S .

Notion du genre

La notion de genre que nous allons définir ici nous permet de distinguer deux ensembles A, B fermés, symétriques et ne contenant pas l'origine, en regardant s'il existe un fonction continue et impaire de A dans B .

Définition 2.3.4 Soit E un espace de Banach. On désigne par $s(E)$ l'ensemble des parties fermées symétriques de E ne contenant pas l'origine, plus précisément

$$s(E) = \{A \subset E ; A \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin A, A = -A\}.$$

Si $A \in s(E)$, on appelle genre de A le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par :

$$\gamma(A) = \inf \{N \geq 1 ; \exists \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ continue et impaire}\}.$$

2.3. Points critiques avec contraintes

Par commodité on posera $\gamma(\emptyset) = 0$. Comme toujours, s'il n'existe pas d'entier $N \geq 1$ et de fonction φ continue et impaire de A dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on pose $\gamma(A) = +\infty$. On notera également que $\gamma(A)$ aurait pu être défini par:

$$\gamma(A) = \inf \{ N \geq 1 ; \text{il existe } \varphi : A \rightarrow S^{N-1} \text{ continue et impaire} \}.$$

Il est important de noter que le genre n'est défini que pour des ensembles fermés.

Exemple 2.3.1 Soit $x_0 \in E$, $R < |x_0|$ et $A = \overline{B}(x_0, R) \cup \overline{B}(-x_0, R)$. Alors, A est de genre un : $\gamma(A) = 1$. En effet, il suffit de poser $\varphi(x) = +1$ si $x \in \overline{B}(x_0, R)$, et $\varphi(x) = -1$ si $x \in \overline{B}(-x_0, R)$.

Théorème 2.3.4 (Propriétés du genre, voir [15])

Soit E un espace de Banach et $A, B \in s(E)$.

(i) S'il existe $f : A \rightarrow B$ continue et impaire, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(ii) Si $A \subset B$, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(iii) S'il existe un homéomorphisme impair $f : A \rightarrow B$ alors, $\gamma(A) = \gamma(B)$.

(iv) γ est sous-additif : $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

(v) Si A est compact alors, $\gamma(A) < \infty$.

(vi) Si A est compact, alors il existe un voisinage fermé de A ayant le même genre que A . plus précisément, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $A_\varepsilon = \{x \in E ; d(x; A) \leq \varepsilon\}$, on a $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$.

(vii) Si $\gamma(B) < \infty$, alors $\gamma(\overline{A \setminus B}) = \gamma(\overline{A \cap B^c}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

Remarque 2.3.3 Comme nous le verrons par la suite, la notion de genre a été utilisée pas L.Ljusternik et L.Schnirelmann pour montrer (notamment) que si $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est une fonction paire et $J = F|_{S^{N-1}}$, alors J possède au moins N valeurs critiques sur S^{N-1} .

Dans certains problèmes variationnels, ainsi que pour les équations aux dérivées partielles elliptiques semilinéaires, on peut utiliser la notion de genre pour montrer de tels résultats.

Théorème 2.3.5 (Théorème de Ljusternick & Schnirelmann).

Soit E une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Sur la sphère S^{N-1} de \mathbb{R}^N (muni d'une norme euclidienne), on considère la fonction $J(u) = E(u)$ pour $u \in S^{N-1}$. Alors J admet au moins N paires de points critiques sur S^{N-1} , c.à.d il existe (au moins) N couples (u_k, λ_k) avec $u_k \in S^{N-1}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $E'(u_k) = \lambda_k u_k$ pour $1 \leq k \leq N$ (naturellement $(-u_k, \lambda_k)$ possède la même propriété).

Avant d'établir la démonstration du théorème 2.3.5, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1 (Voir [15])

Si pour des entiers $1 \leq K \leq N - 1$ et $1 \leq j \leq N - k$ on a $c_k = c_{k+j}$, alors l'ensemble

$$K(c_k) = \{u \in S^{N-1} ; J(u) = c_k \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } E'(u) = \lambda u\}$$

est du genre au moins $j + 1$ (c'est à dire $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$).

Démonstration. (du théorème 2.3.5)

Rappelons que $s(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des parties non vides, fermées de \mathbb{R}^N ne contenant pas 0 et qui sont symétriques par rapport à l'origine, et que $\gamma(A)$ est le genre de A , lorsque $A \in s(\mathbb{R}^N)$. Soit, pour $1 \leq k \leq N$:

$$B_k = \{A \subset S^{N-1}; A \in s(\mathbb{R}^N) \text{ et } \gamma(A) \geq k\}.$$

On a, $B_k \supset B_{k+1} \neq \emptyset$ si $1 \leq k \leq N - 1$ (notons que $B_{N+1} = \emptyset$). On définit alors :

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \max_{v \in A} J(v).$$

En posant $F(x) = \|x\|^2 - 1$ pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $S = S^{N-1}$, les hypothèses du lemme de déformation 2.3.2 sont remplies et B_k est stable par le flot $\eta(1, \cdot)$ et J sur S^{N-1} . Par conséquent, d'après le principe du min-max (théorème 2.3.3), chaque c_k est une valeur critique de J sur S^{N-1} . De plus $c_k \leq c_{k+1}$ si $1 \leq k \leq N - 1$, on voit donc que si tous les c_k sont distincts alors J possède N valeurs critiques distinctes, c'est à dire N paires de points critiques. Finalement, en se servant du lemme précédent, on achève cette démonstration (rappelons que si $\gamma(A) \geq 2$ alors, A contient une infinité de points). ■

Théorème 2.3.6 (Généralisation du théorème 2.3.5, voir [15]).

Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie, $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ une fonction paire et $J = E|_S$ où S est la sphère unité de H . On suppose que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S , est minorée et n'est pas constante. Alors J possède une infinité de (paires de) points critiques sur S . Plus précisément, si

$$B_k = \{A \in s(H) ; A \subset S, A \text{ compact et } \gamma(A) \geq k\}$$

et

$$c_k = \inf_{A \in B_k} \max_{v \in A} J(v)$$

c_k est une valeur critique de J sur S , $c_k \leq c_{k+1}$ et si $c_k = c_{k+j}$, alors $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$.

De plus, $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = +\infty$.

Remarque 2.3.4 Comme toujours $s(H)$ est l'ensemble des parties non vides et fermées de H , ne contenant pas 0 et qui sont symétriques par rapport à l'origine.

Par ailleurs on notera que si H est un espace de Banach de dimension infinie telle que sa norme $\|\cdot\|$ est de classe $C_{loc}^{1,1}$ sur $H \setminus \{0\}$, le résultat du théorème ci-dessus reste vrai.

Application à l'étude de quelques problèmes elliptiques semi-linéaires

Dans ce chapitre, nous traitons quelques problèmes semi-linéaires faisant intervenir le Laplacien, sur un ouvert borné de \mathbb{R}^N , ou encore sur \mathbb{R}^N , avec la condition de Dirichlet. Nous appliquons le théorème du col de la montagne et le théorème de Ljusternick-Schnirelmann pour la résolution de tels problèmes.

3.1 Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

Considérons le problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = p(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné dont le bord est supposé être assez régulier, Δ signifie le Laplacien et $p : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les conditions suivantes :

$$\text{(P1)} \quad p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

(P2) Il existe deux constantes $a_1, a_2 \geq 0$ telles que

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s.$$

avec $0 \leq s \leq \frac{N+2}{N-2}$, si $N > 2$.

Si $N = 1$, la condition (P2) peut être négligée, pendant que si $N = 2$, on a

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 \exp \varphi(\xi),$$

avec $\varphi(\xi)\xi^{-2} \rightarrow 0$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$. La raison pour une telle condition est la suivante : La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1.1) est définie par

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \right) dx, \quad (3.1.2)$$

où

$$P(x, \xi) = \int_0^{\xi} p(x, t) dt.$$

L'espace vectoriel dont on va traiter (3.1.2) est $W_0^{1,2}(\Omega)$, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ avec

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré (proposition 1.1.3), il existe une constante $\mu_1 > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\mu_1 \int_{\Omega} u^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

Par conséquent, on considère la norme de $W_0^{1,2}(\Omega)$ suivante :

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avant d'appliquer le théorème du col énoncé dans le deuxième chapitre pour la fonctionnelle I donnée par (3.1.2), on doit montrer que $I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ et que les points critiques de I sont des solutions faibles du problème (3.1.1).

Énonçons le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N dont le bord est régulier. Si p satisfait les conditions (P1) et (P2), alors la fonctionnelle I définie par (3.1.2) appartient à $C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$, de plus pour tout $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on a*

$$I'(u)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x, u)\varphi) dx \quad (3.1.3)$$

ainsi, on a

$$J(u) = \int_{\Omega} P(x, u(x)) dx \quad (3.1.4)$$

est faiblement continue et $J'(u)$ est compact.

Démonstration. D'après le théorème d'injection de Sobolev (Corollaire 1.1.1), et les hypothèses (P1), (P2), I est bien définie sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ et de même pour $I'(u)$ grâce à l'inégalité de Holder (proposition 1.1.4). Il est clair que le premier terme de I est C^1 (même C^∞) et sa dérivée au sens de Fréchet est le premier terme de I' . Par conséquent, on doit montrer que

$$J(u) = \int_{\Omega} P(x, u(x)) dx$$

appartient à $C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$. Cela sera fait en deux étapes : la première est de montrer que J est Fréchet différentiable sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ puis de prouver que $J'(u)$ est continue.

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

Pour commencer, soit $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. On a : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, u)$ tel que

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} p(x, u)\varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\| \quad (3.1.5)$$

Montrons que si $\|\varphi\| \leq \delta$, alors J est Fréchet différentiable en u et J' est donnée par le terme approprié dans (3.1.3).

Soit

$$\Psi = |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x)) - p(x, u(x))\varphi(x)|,$$

on a

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} p(x, u)\varphi dx \right| \leq \int_{\Omega} \Psi dx. \quad (3.1.6)$$

On définit

$$\Omega_1 = \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| \geq \beta\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \bar{\Omega} : |\varphi(x)| \geq \gamma\},$$

$$\Omega_3 = \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| \leq \beta \text{ et } |\varphi(x)| \leq \gamma\}.$$

avec β et γ sont arbitrairement données. Donc

$$\int_{\Omega} \Psi dx \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \Psi dx. \quad (3.1.7)$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$P(x, \xi + \eta) - P(x, \xi) = p(x, \xi + \theta\eta)\eta, \quad (3.1.8)$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

où $\theta \in]0, 1[$. Alors d'après (3.1.8), (P2) et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_1} |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x))| dx &\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2(|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)|] dx & (3.1.9) \\
 &\leq \int_{\Omega_1} a_1 |\varphi(x)| dx + a_2 \int_{\Omega_1} (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)| dx \\
 &\leq a_1 (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \\
 &\quad + a_3 (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{1}{\sigma}} \left[\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s + \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s \right] \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)},
 \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N} = 1. \quad (3.1.10)$$

Observons que $s < \frac{N+2}{N-2}$ implique que $\frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N} < 1$, donc il existe $\sigma > 1$ satisfaisant (3.1.10) et justifiant (3.1.9). D'après (3.1.9) et le théorème d'injection de Sobolev (Corollaire 1.1.1), on a

$$\int_{\Omega_1} |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x))| dx \leq a_4 \|\varphi\| \left[(\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{N+2}{2N}} + (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{1}{\sigma}} (\|u\|^s + \|\varphi\|^s) \right]. \quad (3.1.11)$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\int_{\Omega_1} |p(x, u(x))\varphi(x)| dx \leq a_5 \|\varphi\| \left[(\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{N+2}{2N}} + (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|^s \right]. \quad (3.1.12)$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev (corollaire 1.1.1) et l'inégalité de Holder (proposition 1.1.4),

$$\|u\| \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geq a_6 \beta (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.13)$$

Donc

$$(\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6 \beta} \right)^{\frac{2}{\sigma}} = M_1, \quad (\text{mes}(\Omega_1))^{\frac{N+2}{2N}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6 \beta} \right)^{\frac{N+2}{N}} = M_2, \quad (3.1.14)$$

où $M_1, M_2 \rightarrow 0$ quand $\beta \rightarrow \infty$. En combinant (3.1.9) et (3.1.14), on obtient

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq a_7 [M_2 + M_1(\|u\|^s + \|\varphi\|^s)] \|\varphi\|. \quad (3.1.15)$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

On peut supposer que $\sigma \leq 1$. Choisissons β plus grand de sorte que

$$a_7 [M_2 + M_1(\|u\|^s + 1)] \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient que

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\|. \quad (3.1.16)$$

D'une manière similaire, on montre que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Psi dx &\leq a_3 \int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)|] dx \\ &\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}} dx \right)^{\frac{s}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} \\ &\leq a_5 (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \right)^{m-(s+1)} dx \right)^{\frac{1}{s+1}}, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

où

$$m = 2N(N-2)^{-1} > s+1.$$

Donc

$$\int_{\Omega_2} \Psi dx \leq a_6 \gamma^{(s+1-m)/(s+1)} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{m/(s+1)}. \quad (3.1.18)$$

Comme $p \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $\hat{\varepsilon}, \hat{\beta} > 0$, il existe $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ tel que

$$|P(x, \xi + h) - P(x, \xi) - p(x, \xi)h| \leq \hat{\varepsilon} |h| \quad (3.1.19)$$

pour tout, $x \in \bar{\Omega}$, $|\xi| \leq \hat{\beta}$, et $|h| \leq \hat{\gamma}$. En particulier, si $\hat{\beta} = \beta$ et $\gamma \leq \hat{\gamma}$, le théorème d'injection de Sobolev et (3.1.19) impliquent :

$$\int_{\Omega_3} \Psi dx \leq \hat{\varepsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi(x)| dx \leq a_7 \hat{\varepsilon} \|\varphi\|. \quad (3.1.20)$$

Choisissons $\hat{\varepsilon}$ de sorte que $3a_7 \hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Cela détermine $\hat{\gamma}$. Choisissons $\gamma = \hat{\gamma}$.

En combinant (3.1.7), (3.1.16), (3.1.18) et (3.1.20), on obtient

$$\int_{\Omega} \Psi dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\| + a_6 \gamma^{(s+1-m)/(s+1)} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{m/(s+1)}. \quad (3.1.21)$$

Finallement, en choisissant δ assez petit tel que

$$a_6 \gamma^{(1-m)/(s+1)} (2 + \|u\|^s) \delta^{(m/(s+1))-1} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.1.22)$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

On obtient

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} p(x, u) \varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|.$$

Pour montrer que, $J'(u)$ est continue, soit $u_m \rightarrow u$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors d'après le théorème d'injection de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$, pour tout $0 \leq s < \frac{N+2}{N-1}$ ($0 \leq s+1 < 2^*$), $u_m \rightarrow u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$.

Sachant que

$$\|J'(u_m)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle J'(u_m), \varphi \rangle|.$$

D'après l'inégalité de Holder, on a

$$\begin{aligned} \|J'(u_m) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (p(x, u_m(x)) - p(x, \varphi(x))) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq a_7 \|p(\cdot, u_m) - p(\cdot, u)\|_{L^{(s+1)/s}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Grâce à (P2),

$$|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}$$

pour tout $\alpha \geq 1$ et pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Le théorème 1.5.1 implique que

$$p \in (L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega)).$$

En choisissant $\alpha = (s+1)s^{-1}$, on voit que la partie droite de l'inégalité (3.1.23) tend vers 0 quand $m \rightarrow \infty$ et J' est continue.

Il nous reste à montrer que J est faiblement continue, soit (u_m) une suite qui converge faiblement vers u sur $W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors, grâce au théorème d'injection de Sobolev (corollaire 1.1.1), (u_m) converge vers u sur $L^{s+1}(\Omega)$ dès que $s+1 < \frac{2N}{N-2}$. Par conséquent $J(u_m) \rightarrow J(u)$. Puisque J est faiblement continue et J' est uniformément différentiable sur les sous-ensembles bornés de $W_0^{1,2}(\Omega)$, alors J' est compact. (Alternativement, soit $(u_m)_m$ une suite bornée dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors on peut extraire une sous-suite $(u_{m_k})_k$ qui converge faiblement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ vers u . Comme $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$, alors $u_{m_k} \rightarrow u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$. ■

Remarque 3.1.1 Les idées qu'on a utilisé dans la démonstration du théorème précédent peuvent être employées pour prouver les résultats de régularités liés.

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

La résolution du problème (3.1.1) nécessite des conditions supplémentaires sur le comportement de la fonction p au voisinage de 0 et de l'infini. En plus des conditions (P1) et (P2), supposons que p vérifie

(P3) $p(x, \xi) = o(|\xi|)$ quand $\xi \rightarrow 0$, et

(P4) Il existe des constantes $\mu > 2$ et $r \geq 0$ telles que pour $|\xi| \geq r$,

$$0 < \mu P(x, \xi) \leq \varepsilon p(x, \xi).$$

Alors le problème (3.1.1) admet une solution non triviale.

Remarque 3.1.2 (i) L'hypothèse (P3) implique que le problème (3.1.1) possède la solution triviale $u = 0$.

(ii) L'intégration de (P4) montre qu'il existe des constantes $a_3, a_4 > 0$ telles que

$$P(x, \xi) \geq a_3 |\xi|^\mu - a_4 \tag{3.1.24}$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}^N$. Donc dès que $\mu > 2$, $P(x, \xi)$ a une croissance surquadratique. L'hypothèse (P4) signifie que $p(x, \xi)$ a une croissance sur-linéaire quand $|\xi| \rightarrow \infty$.

(iii) Notons que si $n = 1$ et $p(x, \xi) = \xi^3$, alors les conditions (P1) et (P4) sont satisfaites.

Théorème 3.1.2 Si p satisfait les conditions (P1) et (P4), alors le problème (3.1.1) possède une solution faible non triviale.

Démonstration. Soient $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ et I étant définie par (3.1.2). La solution faible I de (3.1.1) sera obtenue comme un point critique de I à l'aide du théorème du col 2.2.4. Le théorème 3.1.1 et les hypothèses (P1), (P2) impliquent que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Il est clair que $I(0) = 0$. Donc, on doit montrer que I satisfait aux deux conditions du théorème du col : (i) et (ii), ainsi la condition du Palais-Smale (PS). Pour vérifier (ii), notons que grâce à (P4) et (3.1.24),

$$J(u) = \int_{\Omega} P(x, u) dx \geq a_3 \int_{\Omega} |u|^\mu dx - a_4 \text{mes}(\Omega) \tag{3.1.25}$$

3.1. Existence de solutions pour un problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet

pour tout $u \in E$. Pour $u \in E \setminus \{0\}$ choisi, (3.1.25) implique

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} P(x, tu) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - t^\mu a_3 \int_{\Omega} |u|^\mu dx + a_4 \text{mes}(\Omega) \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

quand $t \rightarrow \infty$. Donc (ii) est satisfaite. Pour la condition (i), grâce à (P3),

quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\xi| \leq \delta$ implique

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |\xi|^2, \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Grâce à (P2) il existe une constante $A = A(\delta) > 0$ telle que $|\xi| \leq \delta$ implique

$$|P(x, \xi)| \leq A |\xi|^{s+1}, \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

En combinant ces deux estimations, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $x \in \bar{\Omega}$,

$$|P(x, \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A |\xi|^{s+1}. \quad (3.1.27)$$

Par conséquent,

$$|J(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + A \int_{\Omega} |u|^{s+1} dx \leq a_5 \left(\frac{\varepsilon}{2} + A \|u\|^{s-1} \right) \|u\|^2 \quad (3.1.28)$$

d'après l'inégalité de Poincaré. En Choisisant

$$\|u\| \leq (\varepsilon/2A)^{1/(s-1)}$$

on obtient

$$|J(u)| \leq a_5 \varepsilon \|u\|^2. \quad (3.1.29)$$

ε étant arbitraire, (3.1.29) montre que $J(u) = o(\|u\|^2)$ quand $u \rightarrow 0$. Donc

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + o(\|u\|^2)$$

quand $u \rightarrow 0$, d'ou (i) est atteinte. L'étape suivante est de vérifier la condition de (PS), la vérification de cette dernière ici et dans les résultats suivants est simplifiée à l'aide de la proposition suivante. ■

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

Proposition 3.1.1 (Voir [23])

Soit p , tel que p satisfait (P1) et (P2), et I étant définie par (3.1.2), et soit $(u_m)_m$ une suite bornée sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ telle que $I'(u_m) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$. Alors $(u_m)_m$ est relativement compacte sur $W_0^{1,2}(\Omega)$.

En se servant de cette dernière proposition, pour vérifier (PS), on a uniquement besoin de montrer que si $|I(u_m)| \leq M$ et $I'(u_m) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$ impliquent (u_m) est une suite bornée. Pour m assez grand, (3.1.3), avec $u = u_m$ et $T = \mu^{-1}p(x, u)u - P(x, u)$, on obtient que

$$\begin{aligned} M + \mu^{-1} \|u\| &\geq I(u) - \mu^{-1}I'(u)u - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u\|^2 + \int_{\Omega} T dx & (3.1.30) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u\|^2 + \int_{\{x \in \Omega; |u(x)| \geq r\}} T dx + \int_{\{x \in \Omega; |u(x)| < r\}} T dx. \end{aligned}$$

En utilisant (P4), $(2^{-1} - \mu^{-1}) > 0$ et le second terme à droite de (3.1.30) est positif. Le troisième terme est majoré par une constante indépendante de m . Alors (3.1.30) implique que (u_m) est bornée sur $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Finalement notons que $I(0) = 0$, pendant que pour notre point critique u ,

$I(u) \geq \alpha > 0$, donc u est une solution faible non triviale du problème (3.1.1).

Remarque 3.1.3 Si l'hypothèse (P1) est remplacée par (P'1) telle que

(P'1) $p(x, \xi)$ est localement lipschitzienne et continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$,

alors (P'1) et (P2) impliquent que toute solution faible de (3.1.1) sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ est une solution classique de (3.1.1).

Remarque 3.1.4 Si p satisfait les trois hypothèses (P1), (P4) et (P'1) alors le problème

(3.1.1) possède des solutions classiques positives et négatives.

3.2 Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

Considérons le problème non linéaire du type elliptique défini sur \mathbb{R}^N par :

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(x) |u|^{p-2} u, & x \in \mathbb{R}^N \\ |u| \rightarrow 0, & \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où Δ_p est l'opérateur p-Laplacien défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

g est une fonction mesurable dans \mathbb{R}^N , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que g vérifie les deux hypothèses :

(H1) Pour $1 < p < N$, g est une fonction régulière, tel que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et $g(x) > 0$ sur Ω^+ , avec $\operatorname{mes}(\Omega^+) > 0$.

(H2) Il existe R_0 suffisamment large et $k > 0$ tels que $g(x) < -k$, pour tout $|x| > R_0$.

Notation

On note par B_R la boule ouverte de \mathbb{R}^N centrée à l'origine et de rayon R , et $B_R^* = \mathbb{R}^N \setminus B_R$, on note ainsi $g_\pm = \max\{\pm g, 0\}$.

Pour r_0 assez large ($r_0 \geq R_0$), il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $g(x) \leq -\frac{k}{\sigma_0}$, pour tout $|x| \geq r_0$.

Soit

$$g_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } |x| \geq r_0, \\ -\frac{k}{\sigma_0} & \text{si } |x| \leq r_0, \end{cases} \quad g_1(x) = g(x) - g_2(x)$$

On définit l'opérateur $A_\lambda : D(A_\lambda) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ comme le suite

$$(A_\lambda(u), v) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \lambda g_2 |u|^{p-2} uv) dx, \quad \forall u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

On définit ainsi

$$a_\lambda : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_\lambda(u, v) = (A_\lambda(u), v).$$

Il est facile de vérifier que a_λ est borné, pour tous $u, v \in D(A_\lambda)$. En effet, on a

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

$$\begin{aligned}
|a_\lambda(u, v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \lambda g_2 |u|^{p-2} uv) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-1} |\nabla v| + \frac{\lambda k}{\sigma_0} |u|^{p-1} |v|) dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\lambda k}{\sigma_0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \infty
\end{aligned}$$

On a aussi $a_\lambda(u, v)$ est coercive, car on a

$$a_\lambda(u, u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p - \lambda g_2 |u|^p) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \frac{\lambda k}{\sigma_0} |u|^p) dx \geq \frac{\lambda k}{\sigma_0} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

On introduit aussi la forme suivante :

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u|^{p-2} uv dx, \quad \forall u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

On voit que $b(u, v)$ est bornée, car à l'aide de l'inégalité de Hölder et la définition de g_1 , pour tous $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}
|b(u, v)| &= \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u|^{p-2} |uv| dx \leq \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |v| dx \right) \\
&\leq c^* \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c^* \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

avec $c^* = \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Donc d'après le théorème de représentation de Riesz-Frechet (voir [5]), on peut définir l'opérateur non-linéaire $B : D(B) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ tel que $(B(u), v) = b(u, v)$, pour tous $u, v \in D(B)$ et $\lambda > 0$. Il est facile de voir que $D(B) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De plus, il est aussi facile de voir que les opérateurs A_λ, B sont bien définis et A_λ est continu.

La formulation variationnelle du problème (3.2.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), u \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g |u|^{p-2} uv dx, \text{ pour tout } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

Le problème (3.2.2) est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation

$$J'(u)v = \lambda F'(u)v \quad \text{pour tout } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (3.2.3)$$

où J', F' désignent les dérivées au sens de Gâteaux des fonctionnelles

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad (3.2.4)$$

et

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} g |u|^p dx \quad (3.2.5)$$

D'après la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, la résolution de l'équation (3.2.3) revient exactement à la recherche des points critiques de J sur la variété G ,

$$G = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), pF(u) = \int_{\mathbb{R}^N} g |u|^p dx = 1 \right\} \quad (3.2.6)$$

Théorème 3.2.1 *Soit $1 < p < N$. Supposons que $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, $g_1 \neq 0$ (où $g = g_1 + g_2$). Alors le problème (3.2.2) admet une suite de solutions $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow \infty$) avec*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g |u_k|^p dx = 1.$$

Avant de démontrer ce résultat, on a besoin de vérifier la condition de Palais-Smale afin de pouvoir appliquer la théorie de Ljusternick-Schnirelmann.

Lemme 3.2.1 *Supposons que $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Alors la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale sur G , c'est à dire pour $(u_n) \subset G$, si $J(u_n)$ est bornée et*

$$J'(u_n) - a_n F'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ où } a_n = \frac{\langle J'(u_n), u_n \rangle}{\langle F'(u_n), u_n \rangle} \quad (3.2.7)$$

alors, (u_n) admet une sous-suite convergente dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

Démonstration. Soit $(u_n) \subset G$ une suite de Palais-Smale. D'après l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p dx \leq c \|g_1\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p. \quad (3.2.8)$$

Comme $J(u_n)$ est borné, alors $\int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p dx$ est bornée. Par conséquent, nous concluons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_2 |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p dx - 1$$

est borné. Nous rappelons l'inégalité de Hardy,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad (3.2.9)$$

Nous concluons que (u_n) est bornée dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. D'où, sans perte de généralité, nous pouvons supposer, pour un certain $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que $u_n \rightarrow u_0$ faiblement dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Sur tout domaine borné Ω , on a

$$\int_{\Omega} g |u_0|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g |u_n|^p dx.$$

Nous énonçons que $u_0 \neq 0$. En effet si $u_0 = 0$, alors pour tout domaine Ω borné, on a $\int_{\Omega} g_1 |u_n|^p dx \rightarrow 0$. Soit $\tilde{\Omega}$ un domaine borné tel que pour tout n assez grand, on a

$$c \|g_1\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega})} \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega})}^p < \frac{1}{4}. \quad (3.2.10)$$

Maintenant, nous pouvons choisir n suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p dx &= \int_{\tilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p dx \\ &\leq \int_{\tilde{\Omega}} g_1 |u_n|^p dx + c \|g_1\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega})} \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega})}^p \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Nous déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_2 |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_1 |u_n|^p dx - 1 < -\frac{1}{2},$$

d'où, la contradiction. Donc $u_0 \neq 0$. Il suit de (3.2.7) que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx = a_n \int_{\mathbb{R}^N} g |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx + o(1) \quad (3.2.12)$$

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

où $\varphi = u_n - u_m$. Ecrivons l'équation (3.2.12), pour n et m . Après soustraction, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) \nabla (u_n - u_m) dx & (3.2.13) \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(a_n |u_n|^{p-2} u_n - a_m |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx + o(1) \\
& = \int_{\Omega} g a_n (|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g a_n (|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx \\
& \quad + (a_n - a_m) \int_{\mathbb{R}^N} g |u_m|^{p-2} u_m (u_n - u_m) dx + o(1),
\end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné arbitraire. Notons ici que, $a_n = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx$ est bornée.

On voit que, d'après l'inégalité de Hölder et la monotonie de la fonction $|t|^{p-2} t$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g a_n (|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g_1 a_n (|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx \\
& \leq c a_n \|g_1\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega})} (\|\nabla u_n\|_{L^p}^p + \|\nabla u_m\|_{L^p}^p),
\end{aligned}$$

qui approche de 0 quand $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, indépendant de n et m . Cependant, pour tout domaine Ω , on a

$$\int_{\Omega} g a_n (|u_n|^{p-2} u_n - |u_m|^{p-2} u_m) (u_n - u_m) dx \rightarrow 0 \quad (3.2.14)$$

Comme $n, m \rightarrow \infty$, alors u_n converge vers u_0 dans $L^p(\Omega)$. En outre, l'inégalité de Hölder implique que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} g |u_m|^{p-2} u_m (u_n - u_m) dx$ est bornée, et nous pouvons choisir une sous-suite de (a_n) telle que $a_n - a_m \rightarrow 0$ quand $n, m \rightarrow \infty$. Donc nous concluons que, le côté droit de (3.2.13) tend vers 0 quand $n, m \rightarrow \infty$. D'autre part, en utilisant l'inégalité :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^N, \quad |a - b|^p \leq c. \left[(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) \right]^{\frac{s}{2}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1-s}{2}} \quad (3.2.15)$$

où $s = p$ si $p \in]1, 2[$ et $s = 2$ si $p \geq 2$, on trouve

$$|\nabla u_n - \nabla u_m|^p \leq c. \left[(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) \nabla (u_n - u_m) \right]^{\frac{s}{2}} \cdot (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)^{\frac{1-s}{2}}.$$

3.2. Existence de solution pour un problème aux valeurs propres elliptique

En appliquant l'inégalité de Holder nous obtenons

$$\int |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \leq c_1 \cdot [(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) \nabla (u_n - u_m)]^{\frac{s}{2}} \cdot (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)^{\frac{1-s}{2}}.$$

Donc nous obtenons à partir de ces dernières inégalités que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u_0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Il suit alors que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_i |u_n|^p dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} g_i |u_0|^p dx, i = 1, 2$$

et cela combiné avec l'inégalité de Hardy implique que $u_n \rightarrow u_0$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Démontrons maintenant le théorème 3.2.1.

Démonstration. (Du théorème 3.2.1)

La fonctionnelle J est paire et bornée sur G . Puisque les points critiques de $J(u)$ sur G sont solutions du problème (3.2.1) pour une certaine valeur de λ , pour continuer la procédure, il est nécessaire de prouver que $J(u)$ satisfait la condition de Palais-Smale sur G , c'est à dire pour toute suite $(u_n) \subset G$, la suite $(J(u_n))_n$ est bornée et

$$J'(u_n) - a_n F'(u_n) \rightarrow 0, \quad a_n = \frac{\langle J'(u_n), u_n \rangle}{\langle F'(u_n), u_n \rangle}$$

alors (u_n) admet une sous-suite convergente dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Or d'après le lemme 3.2.1, la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale dès que $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Par la suite en appliquant le théorème de Ljusternik-Schnirelmann énoncé dans le deuxième chapitre, on conclut le résultat final du théorème 3.2.1. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons exploré, dans le cadre de la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, quelques méthodes variationnelles plus précisément la théorie des points critiques, et celle de Ljusternick-Schnirelmann.

Nous avons ainsi traité des problèmes semi linéaires elliptique du type Dirichlet dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^N , ou sur \mathbb{R}^N tout entier, avec ou sans contraintes par une méthode variationnelle basée sur la théorie des points critiques, tout en appliquant les deux résultats essentiels du principe du min-max dans le cas sans contraintes, à savoir le théorème du col et le théorème du point selle, qui sont des outils importants et essentiels permettant de montrer l'existence de points critiques d'une fonctionnelle donnée, ainsi le théorème de Ljusternick-Schnirelmann et sa généralisation dans le cas avec contraintes.

En perspectives, nous envisageons de faire :

- Quelques généralisations du théorème du col et leurs applications à l'étude des systèmes Hamiltoniens.
- Etude de problèmes elliptiques semi-linéaires sur un domaine non borné.

Bibliographie

[1] W. Allegretto and Y.X Huang

"Eigenvalues of the indefinite-weight p -Laplacian in weighted spaces", *Funkc. Ekvac.* 38, 233-242. (1995).

[2] A. Ambrosetti, A. Malchiodi.

"Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems", Cambridge University Press (2007).

[3] Lê. An.

"Eigenvalue problems for the p -Laplacian". Department of Mathematics, University of Utah, 199 South 1400 East, Salt Lake City, UT 84112, USA, (2005).

[4] J. Appell.

"The superposition operator in function spaces". *Asurvey ; Expositiones Mathematicae*, 6, p.209-207. (1998).

[5] H. Brézis.

"Analyse fonctionnelle, théorie et applications". Masson, Paris (1987).

[6] G. Barles

"Remarks on uniqueness result of the first eigenvalue of the p -Laplacian". *Annales Faculté des Sciences de Toulouse*. Vol. IX, No 1, (1988).

[7] M. Berger.

-
- "Nonlinearity and Functional Analysis", Acad. Press (1977).
- [8] Thèse de Z. BELYACINE,
"Etude d'une équation aux dérivées partielles complètement non linéaire avec résonance dans \mathbb{R}^N ", (2013).
- [9] P. Donato.
"Calcul différentiel pour la licence". Cours, exercices et problèmes résolus. Dunod, Paris, (2000).
- [10] A. Djellit, N. Benouhiba,
"Asymptotic Estimates for the Eigenvalues of some Nonlinear Elliptic Problems", Antalya, Turkey-Dynamical systems and Applications, Proceedings, pp.310-322.
- [11] I. Ekeland, Jean-Pierre Aubin.
"Applied Nonlinear Analysis", Dover Books, (2006).
- [12] J. Fleckinger, R.F. Manasevich, N.M. Stavrakakis and F.de Thelin,
"Principal eigenvalues for some quasi linear elliptic equations on \mathbb{R}^N ", Adv.Differential Equations 2, 981-1003. (1997).
- [13] Y.X Huang,
"Eigenvalues of the p-Laplacian in \mathbb{R}^N with indefinite weight", comm. Math. Univ. Carolin. 36 (1995), 519-527.
- [14] G.G. Hardy, D.E. Littlewood, G. Polya
"Inequalities", Cambridge (1952).
- [15] Y. Jabri.
"The Mountain Pass Theorem variants, generalisations and some applications", University of Oudja, Morocco. (2003).

- [16] O. Kavian.
"Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques". Springer-Verlag France. Paris, (1993).
- [17] L. Ljusternick et L. Schnirelmann.
"Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels" ; Hertmann, Editeur, Paris, (1934).
- [18] EL Haj Laamri,
"Mesures, intégration convolution, et transformée de Fourier des fonctions", Dunod, Paris, (2001)
- [19] C. Lawrence Evans,
"Partial Differential Equations", Providence, Rhode Island, American Mathematicae Society, (1998).
- [20] M. Poulou AND N. Stavrakakis,
"Eingenvale Problems For A Quasilinear Elliptic Equation on \mathbb{R}^N ". (2004).
- [21] S. Palais.
"Ljusternick-Schnirelmann Theory On Banach Manifolds", (1965).
- [22] R.S. Palais,
"Morse theory on Hilbert Manifold". Topology 2, 299-340. (1963).
- [23] P.H Rabinowitz.
"Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Eigenvalues of Nonlinear Problems" (G. Prodi, ed.), C. I.M. E., Edizioni Cremonese, Roma, (1975).
- [24] P.H Rabinowitz.
"Minimax methods in critical point theory whith applications to differential equations, Conf. Board of Math. Sci. Reg. Conf. Ser. in Math., No. 65, Amer. Math. Soc, (1986).

[25] Shibo Liu, Shujie Li.

"An elliptic equation with concave and convex nonlinearities". Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Academia Sinica, No., (2002).

[26] A. Szulkin, M. Willem.

"Eigenvalue problems with indefinite weight", *Studia Mathematica* 135 (2) (1999).

[27] C. Zuily.

"Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles". Dunod, Paris, (2002).