
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ÉNERGÉTIQUE

PAR :

MOULAIHCENE Koceila

BRINIS Lounis

Thème

**Analyse des seuils d'instabilités hydrodynamiques entre deux
cylindres coaxiaux**

Soutenu le 28/06/2018 devant le jury composé de:

Mr.	A.DJEMA	Président
Mr.	F.NAIT BOUDA	Rapporteur
Mr.	F.MENDIL	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

Dédicaces & remerciements

A nos chers parents

A nos amis adorés, à tous nos camarades,

A notre dévoué encadreur Mr NAIT BOUDA Faiçal

Table des matières

Table des matières	iii
Table des figures	vi
Liste des tableaux	viii
Nomenclature	ix
Introduction Générale:	1

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I.1. Introduction :	3
I.2. Notion de stabilité:	4
I.3. Théorie linéaire de stabilité :	6
I.3.1. Définitions :	6
I.3.2. Stabilité marginale :	8
I.4. Aperçu sur la stabilité hydrodynamique :	9
I.5. Ecoulements annulaires :	11
I.5.1. Présentation de l'écoulement :	11
I.5.2. Paramètres de contrôle :	13
I.5.3. Applications industrielles :	14
I.6. Revue bibliographique: stabilité linéaire des écoulements annulaires	15
I.7. Conclusion :	21

Chapitre II: Positionnement du problème

II.1. Introduction :	22
II.2. Descriptif du problème physique :	22
II.3. Formulation mathématique du problème :	24

II.3.1. Equations du mouvement :	24
II.3.2. Profil de base :	26
II.4. Formulation adimensionnelles :	31
II.5. Etude de stabilité linéaire :	33
II.5.1. Équations de stabilité (équations aux perturbations) :	33
II.5.2. Formulation du problème aux valeurs propres généralisé:	37
II.6. Conclusion:	38

Chapitre III: Procédure numérique

III.1. Introduction :	39
III.2. Méthode numérique :	40
III.2.1. Description globale de la méthode :	40
III.2.2. Dérivées d'ordre supérieur :	42
III.2.3. Introduction des conditions aux limites :	43
III.3. Discrétisation spatiale du problème :	44
III.3.1. Application locale de la méthode :	44
III.3.2. Calcul de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld A :	45
III.3.3. Calcul de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld B :	45
III.4. Conclusion :	46

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1. Introduction :	47
IV.2. Ecoulement stable :	47
IV.2.1. Valeurs propres à l'état stable :	47
IV.2.2. Vecteurs propres :	49
IV.3. Seuil d'instabilité :	50

IV.3.1. Valeurs propres à l'état critique:	50
IV.3.2. Vecteurs propres:	51
IV.3.3. Stabilité marginale:	52
IV.4. Ecoulement instable :	55
IV.4.1. Valeurs propres à l'état instable:	55
IV.4.2. Vecteurs propres:	56
IV.5. Evaluation du Re_c pour différentes valeurs du rapport Y :	57
IV.6. Evaluation du k_c pour différentes valeurs du rapport Y :	59
IV.7. Conclusion :	61
CONCLUSION GENERALE	62
Annexes	64

Références bibliographiques

Abstract

Table des figures :

Figure I.1: Transition vers le régime turbulent

Figure I.2: Stabilité et Reynolds critiques

Figure I.3: Evolution de la fréquence réelle de la perturbation

Figure I.4: a) courbe de stabilité marginale ; b) valeurs propres associées

Figure I.5: Transition vers la turbulence, expérience de Reynolds (1883)

Figure I.6 : Ecoulement entre deux cylindres concentriques

Figure I.7: a) Profile de la vitesse axiale pour différents rapport des rayons ; b) variation du Reynolds critique en fonction du rapport rayons (Mott 1968)

Figure I.8: Courbes neutres pour les perturbations : a) non axisymétriques b) axisymétriques

Figure I.9: a) Configuration utilisée pour l'écoulement de base ; b) variation du Reynolds critique en fonction du rapport rayon, pour les modes (0, 1, 2 et 3) (Sadeghi 1991).

Figure II.1: Géométrie du problème.

Figure II. 2: coupe transversale des deux cylindres

Figure II.3: Ecoulement unidirectionnel dans la direction axiale

Figure II.4: Profil de vitesse axiale pour différentes valeurs de Y

Figure II.5: Evolution de la vitesse maximale en fonction de Y

Figure IV.1 : Valeurs propres de l'écoulement stable

Figure IV.2 Valeurs propres d'un écoulement à la limite de stabilité

Figure IV.3 : Vecteurs propres du système stable

Figure IV.4 : Valeurs propres à l'état critique

Figure IV.5 : Courbe de stabilité marginale

Figure IV.6 : Vecteurs propres relatives au seuil d'instabilité

Figure IV.7 : Valeurs propres pour un système instable

Figure IV.8 : Vecteurs propres pour un écoulement instable

Figure IV.9 : Influence du rapport rayon sur la valeur du Reynolds critique

Figure IV.10: Variation du nombre d'onde critique k_c en fonction de Y

Liste des tableaux

Tableau I.1: Récapitulatif des résultats d'étude de V.K.Gark (1980)

Tableau III.1 : Construction de l'outil de dérivation de Chebychev

Tableau IV.1 : Valeurs propres maximale pour différents types de maillage

Tableau IV.2 : Coordonnées des points constitutifs de la courbe neutre

Tableau IV.3 : Validation des résultats concernant le Re critique

Tableau IV.4 : Validation des résultats

Nomenclature :

Lettres latines :

A, B	Operateurs d'Orr-Sommerfeld	
C ₁ , C ₂	Constantes d'intégration	
C _i	Coefficient d'expansion numérique	
d	Epaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres ; $d = R_2 - R_1$	[m]
D _N	Matrice de dérivation de Chebychev d'ordre N	
E _v	Energie cinétique de la perturbation	[J]
g	Accélération de l'apesanteur	[m.s ⁻²]
I	matrice identité	
k	Nombre d'onde	
L	Longueur de l'espace annulaire	[m]
N	Nombre de points de collocation pris par la matrice D _N	
P	Pression	[Pa]
q	Spectre de q _n	
Q _m	Débit massique	[kg.m ⁻³]
q _n	Solution quelconque d'une équation différentielle	
r	Coordonnée radiale	[m]
R ₁	Rayon du cylindre intérieur	[m]
R ₂	Rayon du cylindre extérieur	[m]
Re	Nombre de Reynolds	

r_m	Rayon moyen	[m]
s	fréquence complexe:	[s ⁻¹]
S	Section de l'espace annulaire	[m ²]
t	Temps	[s]
Ta	Nombre de Taylor	
T_N	Polynôme de Chebychev de degré N	
u	Composante radiale de la vitesse	[m.s ⁻¹]
U	Vitesse de référence	[m.s ⁻¹]
v	Composante tangentielle de la vitesse	[m.s ⁻¹]
\vec{V}	Vecteur vitesse $\vec{V}(u, v, w)$	[m.s ⁻¹]
w	Composante axiale de la vitesse	[m.s ⁻¹]
Y	Rapport des rayons $Y = R_1/R_2$	
y_i	Points de collocation sur la base de Gauss-Lobatto	
z	Coordonnée axiale	[m]

Symboles Grecs :

θ	Coordonnée azimutale	[rad]
δ_{ij}	Symbole de Kronecker	
ν	Viscosité cinématique	[m ² .s ⁻¹]
μ	Viscosité dynamique	[kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]
ρ	Masse volumique	[kg.m ⁻³]
τ	Contrainte de cisaillement	[Pa]
Γ_n	Base polynomiale quelconque	

Indices & Exposants

c	valeur critique
i	Relatif à r
j	Relatif à z
*	Grandeur adimensionnelle
\bar{x}	Grandeur moyenne
\tilde{x}	Fluctuation

Introduction générale:

L'étude d'instabilité hydrodynamique constitue une étape incontournable dans la résolution des problèmes posés par la maîtrise et le contrôle des différents processus industriels et naturels en relation avec la mécanique des fluides, et elle est également primordiale lorsqu'il s'agit d'expliquer leurs mécanismes et propriétés.

Les recherches expérimentales et théoriques réalisées durant ces dernières décennies, concernant l'analyse des états critiques des écoulements et la description des conditions de transition vers le régime turbulent, ont apporté une quantité considérable d'informations pratiques dans diverses applications, pouvant être exploitées pour prédire l'apparition et le mode de développement des instabilités, qu'elles soient recherchées pour leurs influences avantageuses sur certains procédés, ou bien évitées pour leurs effets désagréables sur d'autres.

Notre contribution à travers ce travail se limite à l'étude des seuils d'instabilité hydrodynamique dans un écoulement entre deux cylindres concentriques. Il s'agit d'une étude de modélisation numérique de stabilité linéaire de l'écoulement considéré, dans le but de déterminer les valeurs critiques des paramètres de contrôle à partir desquelles on peut observer le déclenchement des instabilités au sein du fluide.

Le présent travail est organisé de la façon suivante:

Chapitre I : Généralités et étude bibliographique

Ce chapitre comporte les définitions de quelques notions concernant notre sujet, puis nous allons revenir une revue bibliographique, sur quelques travaux antérieurs relatifs à la stabilité des écoulements annulaires entre deux cylindres.

Chapitre II : Positionnement du problème

Dans ce chapitre, nous allons d'abord donner une description globale du problème posé, puis on passera à la formulation mathématique de l'écoulement de base, sa mise en équation et la détermination de la solution de base, ensuite nous allons appliquer la théorie de

Introduction générale

stabilité linéaire à l'écoulement de base, et établir les équations aux perturbations (équation de stabilité), pour finalement obtenir un système aux valeurs propres généralisées à résoudre au moyen de la méthode numérique appropriée .

Chapitre III : Procédure numérique

Au cours de ce chapitre nous allons décrire la méthode numérique mise en œuvre pour résoudre le problème présent, on parle ici de la méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev adaptée pour convenir à notre cas.

On procédera par la suite à la discrétisation des équations obtenues précédemment, et à la construction des opérateurs de dérivation numérique associé à cette méthode.

Chapitre IV : Résultats et discussion

On consacra ce dernier chapitre, aux résultats obtenus de notre étude de stabilité, tout en fournissant les interprétations des phénomènes apparus.

On termine notre mémoire par une conclusion générale où on met en exergue les principaux résultats de cette étude traduisant les éventuelles perspectives qui nous sembleraient intéressantes à développer.

Chapitre I :
Généralités et revue bibliographique

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I.1. Introduction :

L'instabilité des écoulements annulaires entre deux cylindres concentriques a fait l'objet de bon nombre d'études expérimentales et théoriques, et elle est fréquemment rencontrée dans les applications industrielles et cliniques. La géométrie et le dispositif expérimental relativement simples que nécessite ce type de d'écoulement, ont fait qu'il soit un excellent terrain de comparaison entre les équations de l'hydrodynamique et les observations faites sur les écoulements réels.

Dans un domaine de paramètres bien précis et pour des vitesses relativement faibles, les écoulements annulaires entre deux cylindres concentriques, peuvent être considérés comme stable vis-à-vis des perturbations infinitésimales, mais en fin et à mesure que les paramètres de contrôles évoluent jusqu'à ce que ils atteignent leurs valeurs critiques, l'écoulement se déstabilise et évolue vers un état où le mouvement devient aléatoire et imprévisible.

De grands efforts ont été investis durant tout le siècle précédent, pour mettre sur pieds une théorie générale susceptible de décrire fidèlement les instabilités des écoulements envers les différentes formes de perturbations, sans succès en raison de la de complexité et la richesse des structures de ces systèmes ; mais le domaine de la stabilité hydrodynamique reste néanmoins pas inexploré pour autant, de nombreuses représentations mathématiques et lois de comportements capables d'interpréter l'évolutions et l'aboutissement de certains types de perturbations au sein de l'écoulements d'un certain type et régime, ont été établies répartissant ainsi les instabilités des en plusieurs familles.

Au cours de cette étude bibliographique nous allons mettre la lumière sur les mécanismes de quelques instabilités connues expérimentalement et théoriquement, définir la théorie de la stabilité linéaire et donner une description générale des écoulements annulaires entre deux cylindres coaxiaux, ainsi que leurs réactions envers les perturbations de très faibles amplitudes (analyse linéaire).

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I.2. Notion de stabilité:

"... toutes les solutions des équations du mouvement, même si elles sont exactes, ne peuvent pas réellement se produire dans la nature. Les écoulements qui se produisent dans la nature ne doivent pas seulement obéir aux équations de la dynamique des fluides, mais aussi être stable"

Landau et Lifshitz

L'étude de stabilité est une approche basée sur l'analyse mathématique de l'évolution d'une perturbation injectée dans un écoulement de base laminaire, elle traite les réponses du système envers ces perturbations. Si le système a tendance à retourner à son origine laminaire après être perturbé alors il est défini comme étant stable, dans le cas contraire, si la perturbation se développe et induit la transition du régime laminaire vers le régime chaotique ou turbulent de l'écoulement on dit qu'il est instable.

D'autre part, une solution u_i des équations de Navier-stokes est dite stable si l'énergie de la perturbation vérifie la limite asymptotique suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ev(t)}{Ev(0)} = 0$$

La stabilité d'un écoulement peut aussi dépendre de l'énergie initiale de la perturbation d'où le concept de la stabilité conditionnelle.

Si il existe une énergie-seuil $Ev_c > 0$ tel que l'écoulement admet une solution stable u_i pour $Ev(0) < Ev_c$, on dit que l'écoulement est conditionnellement stable.

Avec $Ev(0)$: énergie initiale de la perturbation injectée.

Lorsque g est très grand ou pour $Ev_c \rightarrow \infty$ on distingue un cas particulier de la stabilité conditionnelle appelé stabilité globale.

Enfin, la stabilité d'un écoulement est dite monotone si l'énergie des perturbations décroît strictement en fonction du temps et en tout instant.

Donc : $\frac{dEv}{dt} < 0$ en tout instant $t > 0$

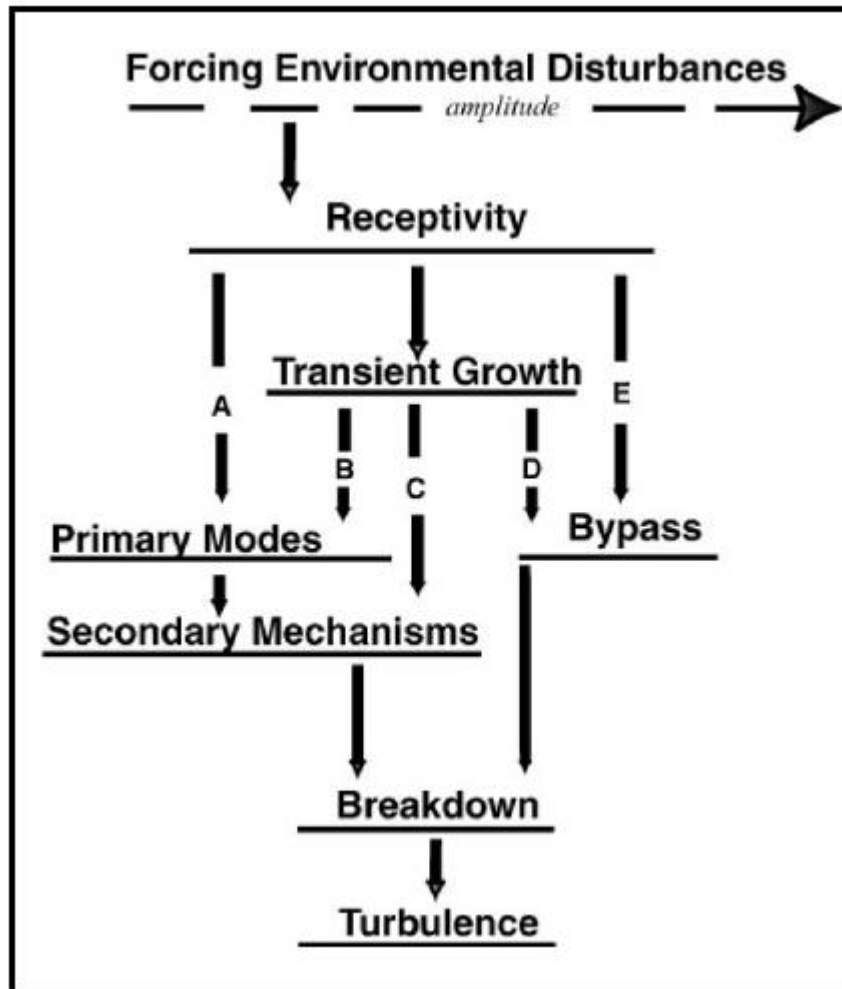


Figure I.1 : Transition vers le régime turbulent [1]

L'étude de l'évolution temporelle et spatiale de la perturbation nous mène à répartir les différents écoulements en trois classes principales :

- Les écoulements stables : la perturbation s'estompe dans le temps et dans l'espace.
- Les écoulements convectivement instables : la perturbation est advectée par le mouvement moyen et laisse tout point de l'écoulement non perturbé après son passage; alors la perturbation est amplifiée spatialement.

- Les écoulements absolument instables: la perturbation s'amplifie à la fois dans le temps et dans l'espace. Progressivement, la zone instable grandit pour gagner progressivement tout l'écoulement.

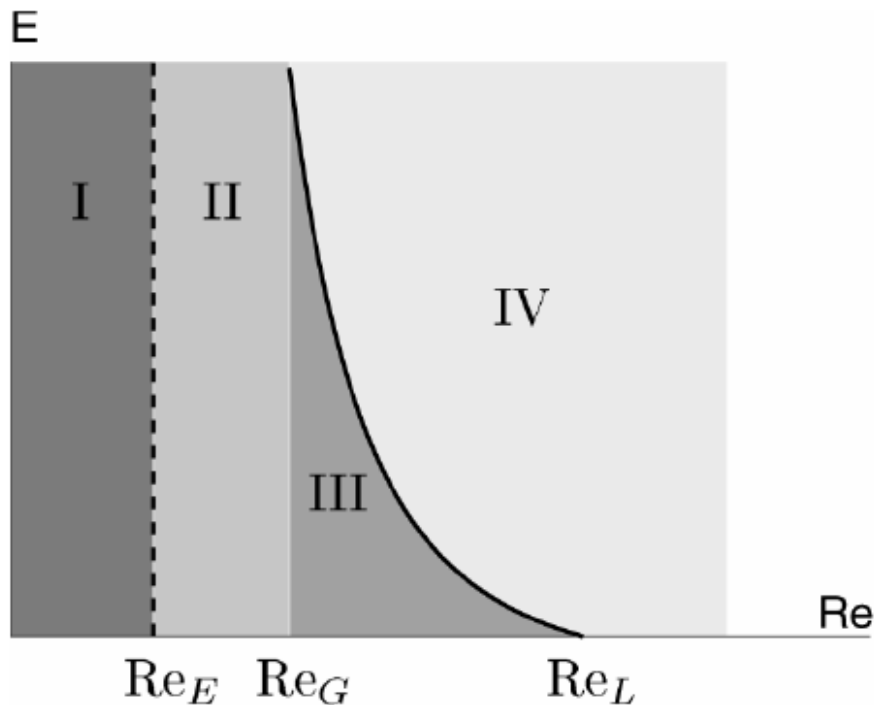


Figure I.2 : stabilité et Reynolds critique [1]

I.3. Théorie linéaire de stabilité :

I.3.1. Définitions :

L'étude de stabilité linéaire consiste à formuler les variables de l'écoulement comme étant la superposition de l'écoulement de base, i.e. de l'écoulement initial, solution stationnaire des équations de Navier-Stokes, et de la perturbation :

Si on considère le champ de vitesse et le champ de pression comme la somme d'une solution (connue) et d'une petite perturbation comme suivant:

$$u(\bar{x},t) = U(\bar{x},t) + u'(\bar{x},t) \quad \text{avec} \quad \|u'(\bar{x},t)\| \ll \|U(\bar{x},t)\|$$

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

$$p(\bar{x},t) = P(\bar{x},t) + p'(\bar{x},t) \quad \text{avec} \quad \|p'(\bar{x},t)\| \ll \|P(\bar{x},t)\|$$

L'hypothèse forte de cette méthode est la très faible amplitude de la perturbation, elle nous permet de ne garder que les termes du premier ordre, et d'éliminer donc ceux qui sont d'ordre supérieur, débouchant ainsi finalement, sur un système d'équations aux dérivées partielles linéarisées.

L'étude de stabilité linéaire se poursuit par l'évaluation du développement temporel et spatial des perturbations dans l'écoulement de base, pour ensuite chercher celle qui à pris le plus d'ampleur en solvant numériquement le système d'équations.

On modélise généralement les perturbations élémentaires sous la forme d'un paquet d'ondes qui se déplace en transportant l'énergie de la perturbation avec une vitesse de propagation propre, appelée vitesse du groupe.

Dans ce cas, la perturbation est décomposée en ondes élémentaires sinusoïdales sous forme de modes normaux de la forme : $u(r)e^{st+ikz}$ où : « z » désigne la direction de propagation, $u(r)$ la distribution transverse d'amplitude, « k » le nombre d'onde complexe, et (s) la fréquence complexe. En outre, dans le cas d'un écoulement dans un système de coordonnées cylindriques, où la direction azimutale est la direction de propagation, le nombre d'onde est pris comme entier « n ».

Dans la plupart des cas, la distribution transverse de l'amplitude $u(r)$ satisfait une équation différentielle ordinaire (ODE), qui peut être transformée en un problème aux valeurs propres par l'imposition de conditions aux limites. Ce système ne présente alors de solutions que si « k » et « s » satisfont une relation de dispersion de la forme :

$$[k, s, \rho] = 0$$

ρ désigne un paramètre de contrôle.

On distingue deux types d'approches dans ce contexte :

- les modes temporels $s(k, \rho)$ pour lesquels la fréquence complexe $s = s_r + i s_{im}$ est déterminée en fonction du nombre d'onde « k » réel.
- les branches spatiales (s, ρ) où les nombres d'ondes complexes $k = k_r + i k_{im}$ sont calculés pour une fréquence s réelle.

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

Le critère de stabilité linéaire d'un écoulement est lié aux modes temporels. Soit « k_{\max} » le nombre d'onde réel pour lequel le taux de croissance temporel « s » est maximum.

Un écoulement est dit :

- Instable si s_{\max} est supérieur à 0.
- Neutre si $s_{\max} = 0$.
- Stable si s_{\max} est inférieur à 0.

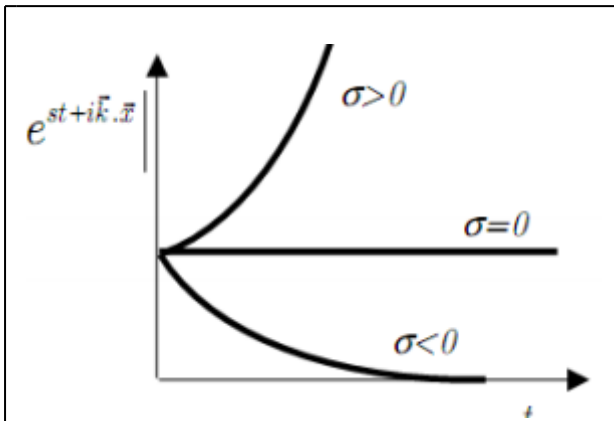


Figure I.3 : évolution de la fréquence réelle ($\sigma = \text{re}(s)_{\max}$) de la perturbation

Parmi ces écoulements instables, seule la connaissance du développement spatiotemporelle des perturbations permet de distinguer les écoulements convectivement instables des écoulements absolument instables.

De ce fait, l'étude de stabilité temporelle donne toujours la perturbation la plus amplifiée, mais ne permet pas de statuer sur la nature convective-absolue de l'écoulement étudié. C'est donc une approche temporelle qui est le plus souvent utilisée dans les études de stabilité des écoulements, et c'est celle qui est adoptée ici.

I.3.2. Stabilité marginale :

Les résultats d'étude de stabilité linéaire sont souvent présentés sous la forme d'une courbe de stabilité marginale. Dans le plan de deux paramètres, par exemple (Re, k), (figure I.4.a), la courbe neutre divise le plan en deux ou plusieurs zones, et elle détermine pour chacune d'elles, le caractère stable ou instable de l'écoulement vis-à-vis des perturbations de

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

faible amplitude. Les courbes de stabilité marginale comportent les points du plan pour lesquelles $s = 0$, en fixant les autres paramètres du problème.

Mais l'analyse linéaire ne suffit pas à décrire toutes les instabilités qu'on peut observer au laboratoire et dans la nature, certaines nécessitent de prendre en compte dans leurs études les termes non linéaires précédemment négligés, du coup l'analyse devient beaucoup plus complexe et il n'existe pas aujourd'hui de théorie générale sur la stabilité non linéaire.

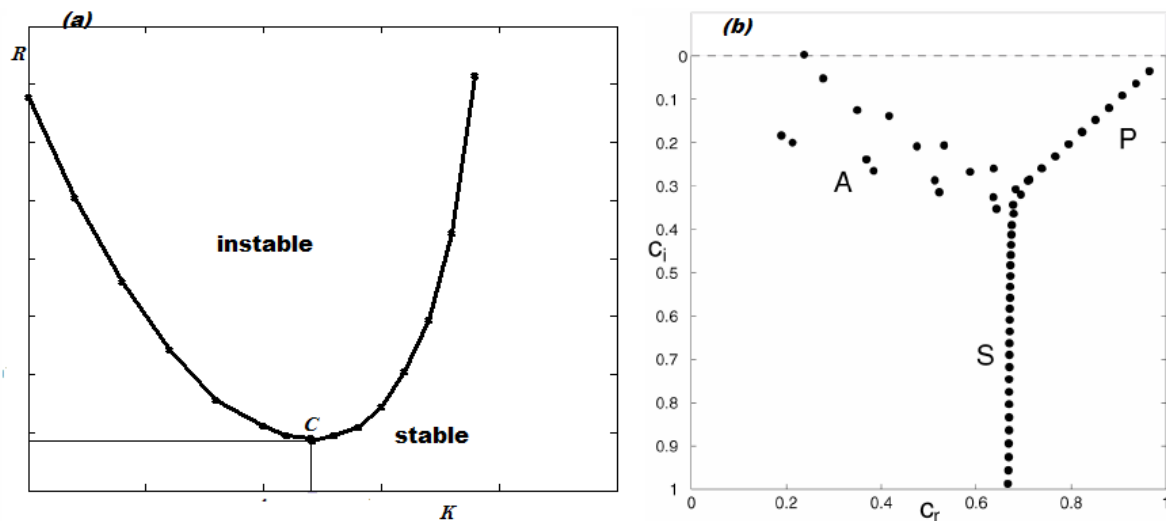


Figure I.4 : a) courbe de stabilité marginale ; b) valeurs propres associées

I.4. Aperçu sur la stabilité hydrodynamique :

La stabilité hydrodynamique est un phénomène commun à tous les écoulements de fluides, vu qu'ils perdent tous leur stabilité chaque fois qu'ils sont soumis aux différents types de perturbations, et que les paramètres de contrôle franchissent leurs valeurs critiques. Par contre, ce qui est typique pour chaque écoulement, c'est les éléments déstabilisateurs, et les mécanismes physiques des instabilités.

Il est important toutefois de séparer les notions d'instabilité et de turbulence en mécanique des fluides : un écoulement est dit turbulent lorsque ses composantes de vitesse varient de façon totalement aléatoire dans l'espace et dans le temps, tandis que l'instabilité apparaît lorsque des phénomènes antagonistes deviennent tellement forts qu'ils forcent la

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

symétrie de l'écoulement à se briser, tel qu'il est le cas avec les forces centrifuges en compétitions avec les forces visqueuses dans la création de l'instabilité centrifuge en écoulements rotatifs, la vitesse de l'écoulement devient donc plus complexe mais garde néanmoins certaines périodicités.

En général, le passage d'un état laminaire à un état turbulent d'un écoulement comporte une succession d'instabilités qui rendent l'écoulement de plus en plus complexe, jusqu'à ce qu'il atteigne enfin son régime chaotique (figure I.5).

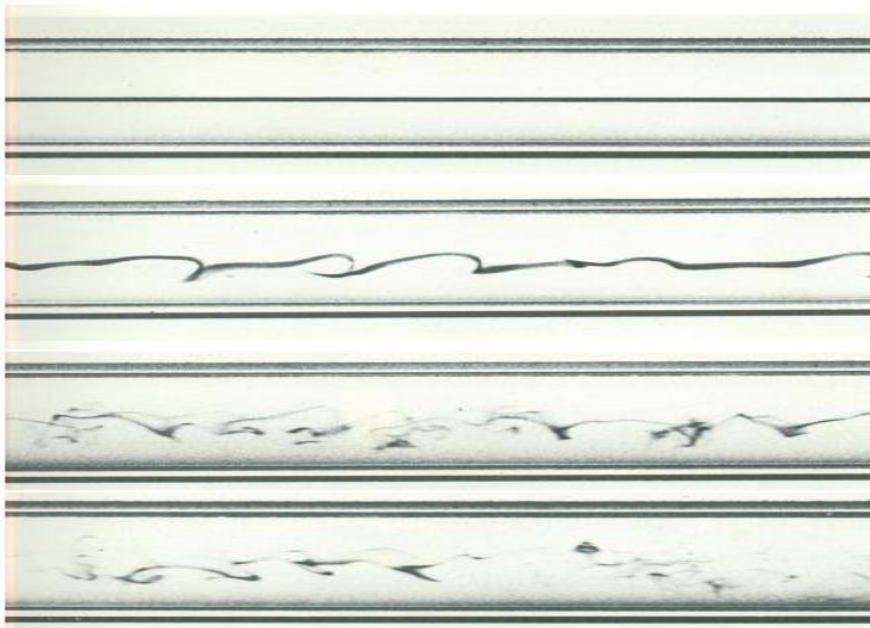


Figure I.5 : Transition vers la turbulence, expérience de Reynolds (1883).

La grande majorité des écoulements admettent un certain seuil d'instabilité au-delà duquel ils subissent des changements qualitatifs importants de leurs natures, tel que la transition à la turbulence, l'enclenchement d'un régime oscillatoire ou l'apparition de la convection thermique.

Le but de l'étude de stabilité est donc de comprendre le fonctionnement des instabilités dans un écoulement de base donné, et de déterminer les seuils à partir desquels elles apparaissent pour mieux pouvoir les maîtriser.

Les recherches expérimentales menées antérieurement ont démontré que la viscosité a un effet stabilisateur sur les écoulements des fluides, elle a tendance à amortir les

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

perturbations et à ramener l'écoulement vers son état initial. Cela dit que pour comprendre plus efficacement les mécanismes des instabilités dans les fluides visqueux, il convient d'étudier d'abord ce phénomène avec les écoulements à grand nombres de Reynolds où les forces d'inertie sont prédominantes et les forces de viscosité sont négligeables ou carrément inexistantes, et où les instabilités peuvent être clairement observées.

« It seems doubtful whether we can expect to understand fully the instability of fluid flow without obtaining a mathematical representation of the motion of a fluid in some particular case in which instability can actually be observed, so that a detailed comparison can be made between the results of analysis and those of experiment. » G.I. Taylor [2].

L'instabilité dans le cas des fluides visqueux est la création de deux phénomènes antagonistes, à savoir l'inertie du fluide en mouvement et la viscosité qui a un effet stabilisateur, ayant tendance à gommer les instabilités. Ainsi, la nature stable ou instable de l'écoulement peut être prédite par l'évaluation du nombre de Reynolds et la détermination de ses valeurs critiques.

I.5. Ecoulements annulaires

I.5.1. Description globale

L'écoulement considéré, dans son cas général, est le mouvement d'un fluide défini, entre deux cylindres concentriques de rayons R_1 et R_2 , et de longueur donnée L (Figure I.6). Les caractéristiques du fluide étudié sont données initialement, et ses propriétés physiques sont constantes.

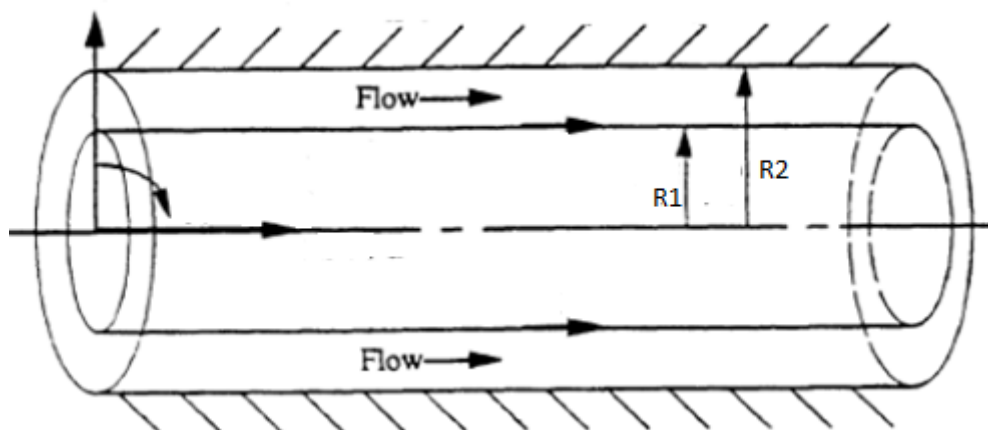


Figure I.6: écoulement entre deux cylindres concentriques

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

La description du champ de vitesse V de composantes (u, v, w) et de pression P , s'effectue en fonction de l'espace et du temps t , dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (figure I.6) de façon que V et le champ de pression P vérifient les équations de l'hydrodynamique :

$$\frac{D(\rho\vec{V})}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0$$

$\frac{D}{Dt}$: Dérivée particulaire et \vec{f} représente les forces volumiques

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

$\vec{\tau}$ Est le tenseur des contraintes, il incarne les interactions entre les particules du fluide :

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu[(\partial_j V_i + \partial_i V_j) + \frac{2}{3}\nabla \cdot V\delta_{ij}]$$

$\vec{V}(u, v, w)$ Est le champ de vitesse, et ρ la masse volumique du fluide.

P la pression, μ la viscosité dynamique et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

À faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisateurs de l'inertie.

I.5.2. Paramètres de contrôle :

L'analyse de stabilité est basée sur l'évaluation des valeurs prises en tout instant par des paramètres adimensionnels appelés paramètres de contrôles, pour les écoulements annulaires, les deux principaux paramètres souvent utilisés pour l'analyse de stabilité hydrodynamique sont :

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

a) Nombre de Reynolds :

Il est défini par le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$\text{Re} = \frac{Ul}{\nu}$$

Où :

U : vitesse caractéristique.

l : Longueur caractéristique

ν : Viscosité cinématique du fluide.

b) Nombre de Taylor :

Il est souvent utilisé comme un nombre caractéristique de la géométrie cylindrique liée aux systèmes tournants (il intervient dans les systèmes comportant un mouvement rotationnel). Il apparaît comme une combinaison du nombre de Reynolds (Re) et du facteur géométrique δ

$$\delta = d / R1$$

Ainsi, le nombre de Taylor Ta de l'écoulement apparaît comme le rapport entre deux temps caractéristiques :

$$Ta = \tau_s / \tau_{des}$$

- τ_s : indique le temps de la diffusion visqueuse due au transfert de vorticité sur la distance d (temps de stabilisation).

- τ_{des} : est le temps caractéristique d'advection du fluide sous l'action de la force centrifuge sur une distance (d) dans la direction radiale (temps de déstabilisation).

Ainsi, cette dernière peut être  valu e à partir de la loi fondamentale de la dynamique exprimant la force centrifuge exerc e sur une particule dans la direction radiale telle que :

$$m \frac{D^2r}{dt^2} = \frac{1}{r} m v_1^2$$

En faisant apparaître les caractéristiques temporelles et spatiales de la vitesse V_1

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

$$\frac{d}{d^2 r_{des}} = \frac{V1}{R1}$$

Le nombre de Taylor Pour la précédente géométrie :

$$Ta = \frac{V1d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R1}} = Re \sqrt{\frac{d}{R1}}$$

À partir d'une valeur critique pour le nombre de Taylor, déterminée par la vitesse de rotation angulaire critique ω_c du tube intérieur, des instabilités apparaissent créant un flux convectif dans le fluide placé entre les deux tubes.

I.5.3 Applications industrielles :

L'étude des instabilités de ce type d'écoulement est particulièrement importante en référence à de nombreuses applications pratiques, dans une large gamme d'ingénierie ainsi que dans les applications cliniques, et cela en raison de sa nature mathématique relativement simple ou de solutions exactes pour les équations de Navier-stockes son possible.

Pour les applications d'ingénierie on peut citer les échangeurs de chaleur avec des tuyaux concentriques, ébullition du film inversé, tissage de textile, revêtement de fils et de fibres optiques à grande vitesse, microcanaux et dispositifs micro- fluidiques etc.

A côté de ceux-ci, il existe dans la littérature le concept "core- annulus flow", dans lequel du l'huile hautement visqueuse est en mouvement axial a travers un tube lubrifié par un mince anneau d'eau au niveau de la paroi du tube, cette huile est souvent traitée comme un corps solide vu que la viscosité de l'eau est deux fois plus faible que celle du l'huile. Par conséquent, un cas comparable à celui-ci serait un écoulement annulaire avec le tuyau interne en mouvement.

Dans les utilisations cliniques, ce type d'écoulement a une application particulière, 'Thread injection', l'injection du fils, une méthode prometteuse pour diverses techniques de chirurgies mini-invasives, qui a pour avantage de réduit le traumatisme chirurgical en injectant un enchevêtrement du fil ayant une structure poreuse. L'injection du fil peut être utilisée dans un large éventail d'applications: systèmes d'administration de médicaments, croissance des tissus, embolisation thérapeutique de vaisseaux sanguins ou remplissage de cavités après une intervention chirurgicale. Une application particulière de l'injection de fil chimique est dans l'augmentation des lèvres dans la plupart des industries de chirurgie plastique. Des matériaux

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

solides peuvent également être transportés à travers un tube de petit diamètre, un cathéter ou une canule grâce à une structure de fil cohérente. Wintermantel (2000) a modélisé la technique d'injection du fil en tant qu'écoulement annulaire avec filetage intérieur mobile.

I.6. Revue bibliographique: stabilité linéaire et écoulements annulaires

D'innombrables études théoriques et expérimentales ont été effectuées dans l'objectif de comprendre ce phénomène :

Sir Isaac Newton [3] utilisa un dispositif comprenant deux cylindres en rotation différentielles pour décrire le mouvement circulaire des fluides dans sa Principia en 1687 (Newton 1946).

Le théoricien pionnier de la dynamique des fluides **George G. Stokes** [4] a également considéré ce type d'écoulement en 1848, Il a prédit l'apparition des tourbillons pour des vitesses de rotation du cylindre interne trop importantes (Stokes 1880), une perspicacité remarquable plusieurs années avant que les vortex ne soient visualisés.

Henry R. A. Mallock [5] et **M. Maurice Couette** [6], chacun de son côté, en cherchant une méthode pour mesurer la viscosité des fluides, utilisèrent deux cylindres concentriques à rotation différentielle, maintenant connus sous le nom de cellule de Taylor-Couette (Mallock 1888, Couette 1890). Couette a fait tourner le cylindre externe en maintenant le cylindre interne fixe, ce qui est la base du viscosimètre moderne, évitant ainsi la structure tourbillonnaire et obtenant une mesure précise de la viscosité des différents fluides. Mallock a effectué des expériences similaires à Couette, mais lui fit tourner le cylindre interne en maintenant le cylindre externe fixé, il remarqua la formation des vortex de Taylor.

En 1923 **G. I. Taylor** [2] put relier la théorie et l'expérience pour décrire la stabilité dans un écoulement cylindrique de Couette (Taylor 1923). Ses résultats ont été un développement clé dans l'étude moderne de la mécanique des fluides.

Potter [7] en 1966 a étudié la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette-Poiseuille et il a montré que la présence d'un composant de Couette a un effet stabilisateur global sur l'écoulement de Poiseuille.

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

Considérant un écoulement de base parallèle et axisymétrique, les équations de perturbation peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité. Les quatre équations de perturbation sont linéarisées et simplifiées en supposant que les perturbations sont exponentiellement dépendantes du temps et des coordonnées spatiales axiales et angulaires par **Lessen et al** [8] en 1968.

L'analyse temporelle de stabilité linéaire est faite de plusieurs façons dans la littérature. **Lessen et al** [8] ont résolu les quatre équations simultanément pour obtenir les valeurs propres. Les solutions aux équations différentielles ordinaires linéaires couplées ont été obtenues par deux méthodes: la méthode des séries puissantes et la méthode d'intégration des contours étape par étape (basée sur l'expansion en série de Taylor).

Mott et Joseph [9] en 1968, ont étudié la stabilité linéaire d'un écoulement parallèle entre deux cylindres concentriques. L'écoulement de base qu'ils ont considéré était un écoulement de Poiseuille circulaire à viscosité variable. Ils ont montré que la stabilité de l'écoulement par rapport aux perturbations axisymétriques est favorisée par l'augmentation du rapport des rayons et aussi par l'asymétrie du profil de vitesse d'écoulement de base. Ils ont analysé le mécanisme de transfert d'énergie entre le mouvement moyen et la perturbation et ont constaté qu'avec l'augmentation de l'asymétrie de l'écoulement de base, la quantité d'énergie transférée de la perturbation vers le mouvement moyen est plus importante, ce qui est un facteur stabilisateur de l'écoulement.

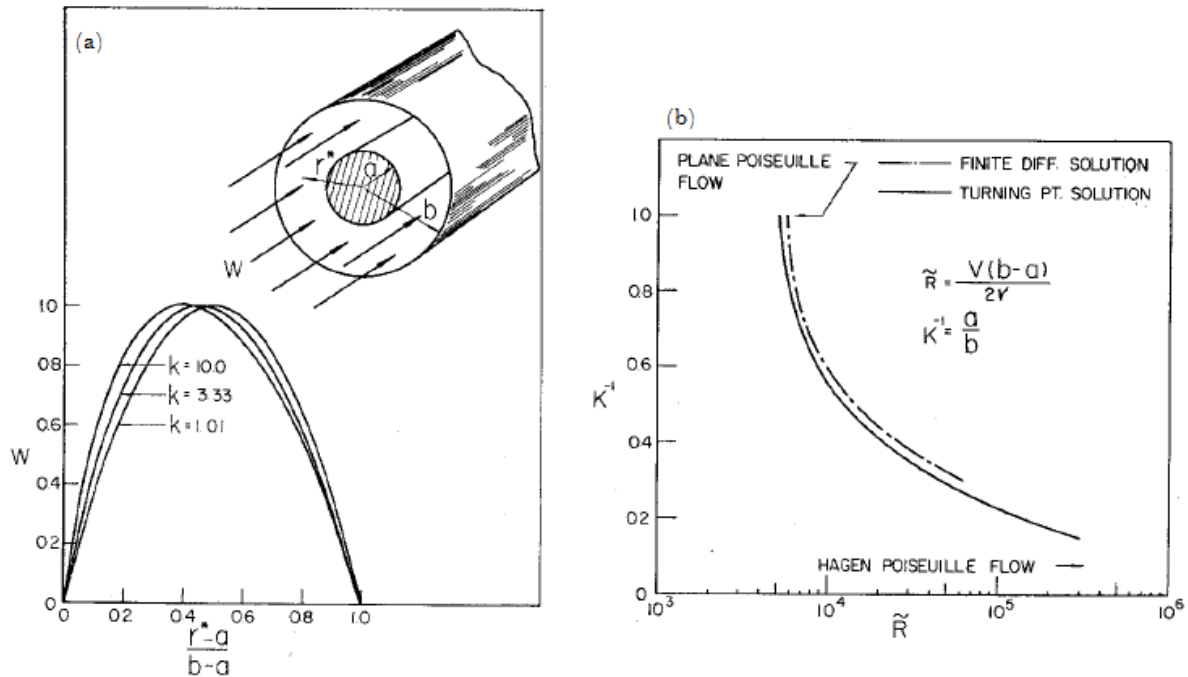


Figure I.7: a) profile de la vitesse axiale pour différents rapport des rayons ; b) variation du Reynolds critique en fonction du rapport des rayons (Mott 1968) [9].

Salwen et Grosch [10] 1972 ont utilisé la méthode de calcul des valeurs propres d'une matrice pour l'analyse de stabilité linéaire du flux de Hagen-Poiseuille, une méthode qui a été rectifiée par **Grosch** [11] en 1980 pour mettre les résultats obtenus en accord complet avec ceux de la méthode l'intégration numérique utilisé par **Lessen, Sadler & Liu** [12] en 1968.

Dans **Huang & Chen** [13] 1974, l'analyse de stabilité est faite en utilisant l'équation de **Sexl** où des changements de variables ont été effectués pour obtenir deux équations différentielles ordinaires couplées de six degrés.

Vijak K. Gark [14] a réalisé la première étude théorique de la stabilité d'un écoulement entre deux cylindres concentrique, vis-à-vis des perturbations axisymétrique et non-axisymétrique simultanément. Ses résultats montrent que pour un éventail de valeurs de rapport rayon Y allant de 0 jusqu'à 0.99, et pour des valeurs du nombre d'onde angulaire ($n = 0,1,2,3$), le nombre d'onde angulaire critique n_c dépend seulement du rapport rayon lorsque les perturbation non-axisymétrique ont un Reynolds critique plus faible que celui des perturbation axisymétrique.

Pour $Y = 0.99$, les courbes neutres de stabilité sont presque les mêmes pour les deux types de perturbation, mais la différence est plus flagrante lorsque Y diminue en valeur.

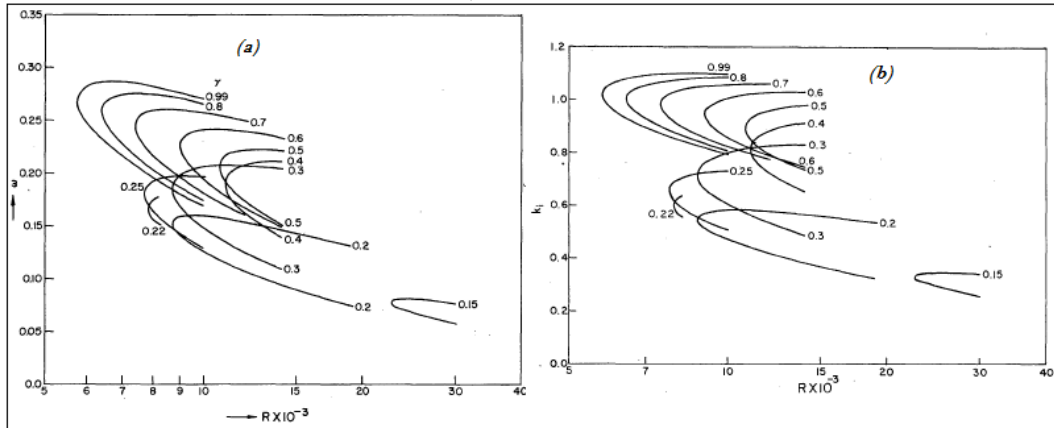


Figure I.8: courbes neutres pour les perturbations : a) non axisymétriques b) axisymétriques [14].

$(h=0.01)$			$(h=0.005)$		
R	ω	k_t	R	ω	k_t
26618.0	0.16500	0.91846	26774.5	0.16500	0.91904
30000.0	0.14025	0.83265	30000.0	0.14069	0.83434
30000.0	0.17611	0.97940	30000.0	0.17552	0.97668
35000.0	0.12445	0.78268	35000.0	0.12476	0.78389
35000.0	0.17532	0.99847	35000.0	0.17482	0.99594
40000.0	0.11368	0.74887	40000.0	0.11396	0.74996
40000.0	0.17234	1.00556	40000.0	0.17184	1.00284

Tableau I.1: Récapitulatif des résultats d'étude de V.K.Gark (1980)

Gustavsson [15] en 1989 a éliminé tous les composants de la vitesse pour obtenir une équation homogène en termes de pression.

Sadeghi et al. [16] en 1991 ont étudié numériquement la stabilité de l'écoulement de Couette-Poiseuille, leur configuration comportant un cylindre interne glissant avec une vitesse constante est soumise à des perturbations à la fois axisymétriques et non-axisymétriques, dans le but d'examiner la manière dont le mouvement de glissement du cylindre interne affecte la stabilité de l'écoulement. Leur écoulement de base était la combinaison d'un écoulement de poiseuille circulaire conduit par le gradient de pression axiale et l'écoulement coulissant de Couette produit par le mouvement constant du cylindre interne. Cette étude était vitale pour la maîtrise des instabilités d'écoulement dans le revêtement à grande vitesse des fils et des fibres

optiques. La géométrie de l'écoulement qu'ils ont utilisée pour l'analyse numérique est indiquée dans la Figure I.9.

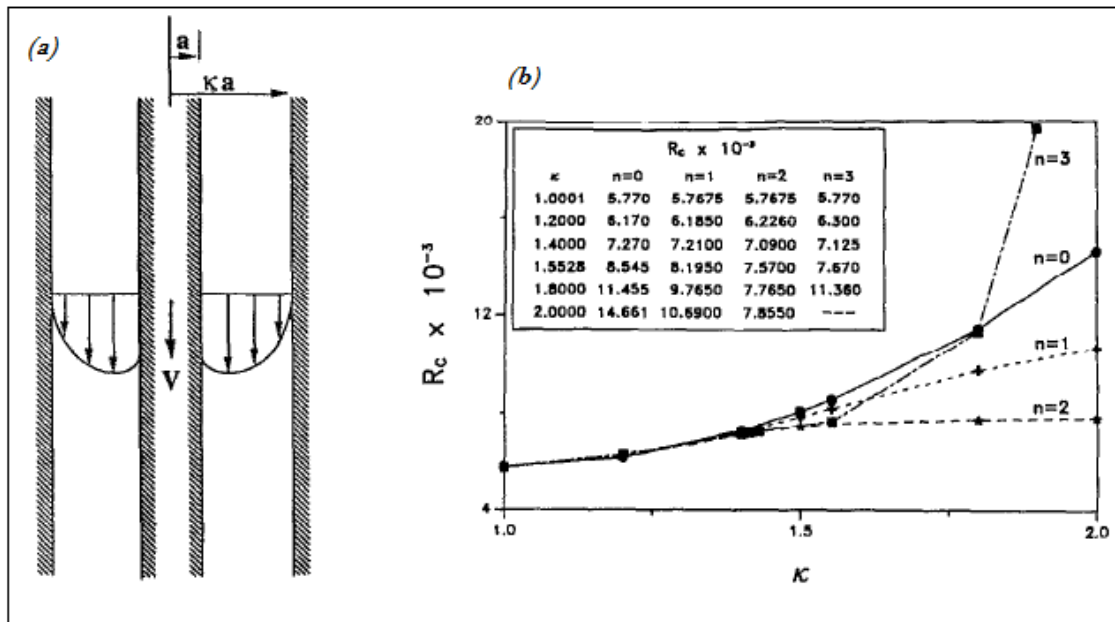


Figure I.9: a) configuration utilisée pour l'écoulement de base ; b) variation du Reynolds critique en fonction du rapport rayons, pour les modes (0, 1, 2 et 3) (Sadeghi 1991)[16].

La stabilité linéaire de l'écoulement circulaire de Poiseuille-Couette envers les perturbations axisymétriques a été analysée asymptotiquement pour les très grands nombres de Reynolds, et numériquement pour les nombres finis par **Walton** [17] en 2004. L'équation d'Orr-Sommerfeld régissant sur les perturbations linéaires a été formulée en coordonnées cylindriques et analysée asymptotiquement pour de grandes valeurs de Reynolds. L'existence de plusieurs régions d'instabilité a été prédite, et leur dépendance du rapport de rayon et de la vitesse interne du cylindre a été déterminée explicitement. Ces résultats ont été confirmés lorsque le problème linéaire a été résolu numériquement à un nombre de Reynolds fini et plusieurs courbes neutres ont été trouvées.

Walton (2004) a étudié la stabilité linéaire du processus d'injection du fil (**Wintermantel**, 2000). Il a superposé une petite perturbation d'onde de déplacement axisymétrique d'amplitude non dimensionnelle à l'écoulement de base. Les équations déterminantes de la perturbation sont obtenues en ajoutant cette dernière à l'écoulement de base et en substituant dans les équations de Navier-Stokes et en assimilant le coefficient

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

d'amplitude non-dimensionnelle. Cela conduit à un ensemble d'équations linéaires résolues numériquement par la suite.

I.7. Conclusion :

A travers cette synthèse bibliographique on conclut que l'étude des seuils d'instabilité pour un écoulement annulaire entre deux cylindres concentrique, ne connaît aucune théorie capable de généraliser ce phénomène complexe, et toutes les approches proposées jusqu'ici sont basées sur des approximations simplificatrices.

Chapitre II :
Positionnement du problème

Chapitre II : Positionnement du problème

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre on décrira d'abord globalement le problème physique en question, puis nous allons établir le système d'équations aux dérivées partielles régissant sur l'écoulement (les équations de Navier-Stokes).

La résolution analytique nous mènera à définir une solution pour l'écoulement de base, et la perturbation de ce dernier en y injectant des perturbations aux amplitudes infinitésimales donnera finalement le problème aux valeurs propres généralisé qui fera l'objet d'une résolution numérique.

II.2. Descriptif du problème physique :

On considère un écoulement d'un fluide newtonien incompressible dans l'espace annulaire séparant deux cylindres coaxiaux horizontalement disposés; les deux cylindres intérieur et extérieur sont immobiles et ont pour rayons R_1 et R_2 respectivement.

Le fluide est de propriétés physiques constantes et l'écoulement est supposé incompressible et isothermes.

Ce problème est caractérisé par deux paramètres géométriques : le rapport des rayons $Y = R_1/R_2$ et la largeur de l'espace annulaire $d = R_2 - R_1$, ainsi que un paramètre de contrôle adimensionnel qui est le nombre de Reynolds (Re).

Le nombre de Reynolds peut être formulé de plusieurs façons, on a opté dans cette étude pour la forme la plus simple :

$$\text{Re} = \frac{R_2 U}{\nu}$$

Avec :

U : vitesse de référence de l'écoulement

ν : viscosité cinématique

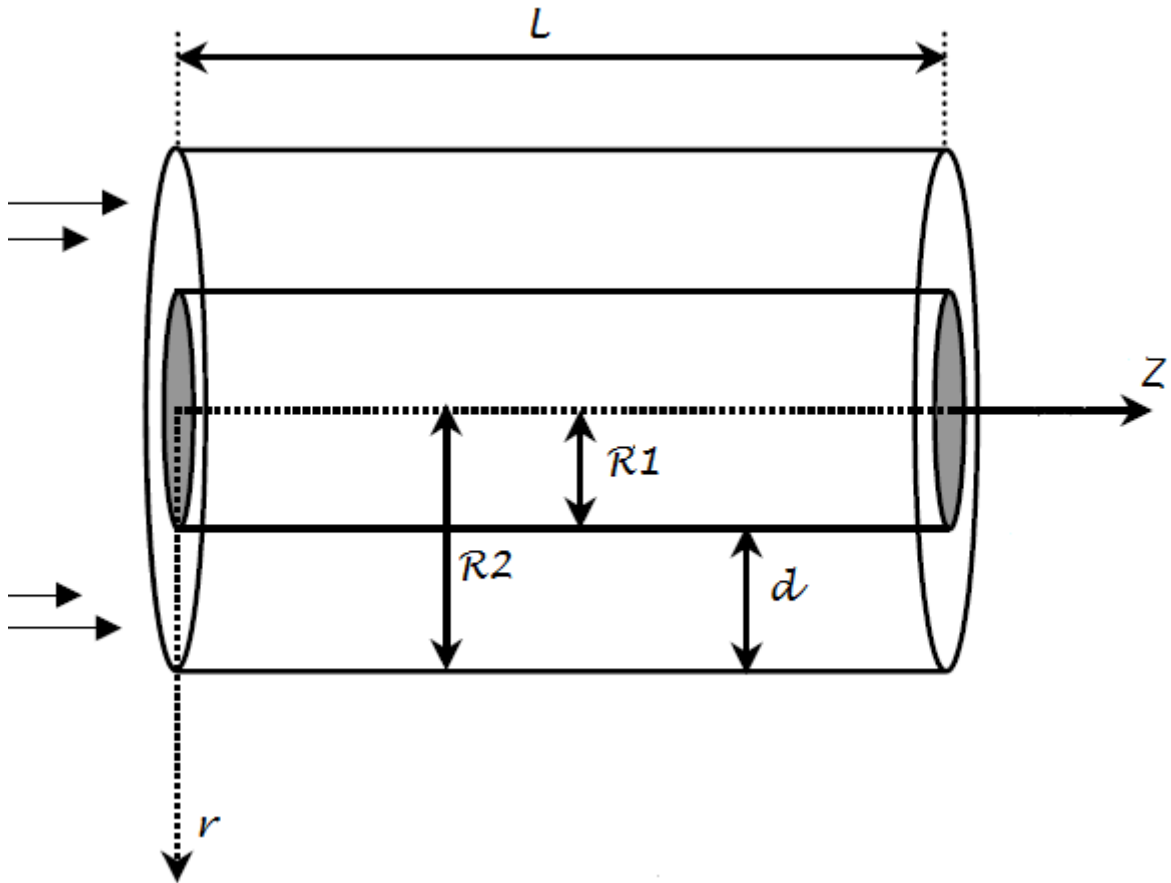


Figure II.1 : Géométrie du problème.

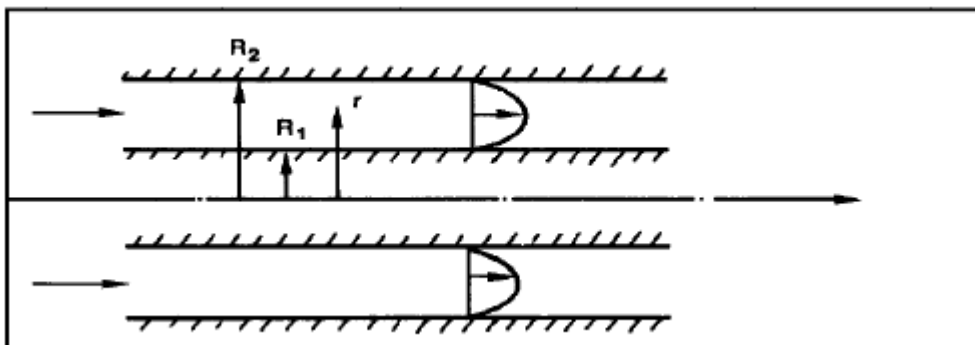


Figure II.2 : Coupe transversale des deux cylindres

II.3. Formulation mathématique du problème :

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique de l'hydrodynamique de l'écoulement décrit précédemment.

Pour décrire cet écoulement, il suffit de déterminer les variables d'Euler qui sont : le vecteur vitesse \vec{V} et la pression P .

Pour cela, nous résolvons les équations fondamentales de la dynamique des fluides auxquelles nous ajoutons les conditions aux limites.

II.3.1. Equations du mouvement:

La conservation de quantité de mouvement et de masse est exprimée à travers les équations de Navier-stokes sous leur forme généralisée :

$$\frac{D(\rho\vec{V})}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho\vec{f} \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$\frac{D}{Dt}$: Dérivée particulaire et \vec{f} représente les forces volumiques

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

τ Est le tenseur des contraintes, il incarne les interactions entre les particules du fluide :

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu[(\partial_j V_i + \partial_i V_j) + \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{V}\delta_{ij}]$$

$\vec{V}(u, v, w)$ est le champ de vitesse, et ρ la masse volumique du fluide.

P : la pression, et μ la viscosité dynamique et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Chapitre II : Positionnement du problème

Pour un fluide newtonien et incompressible les équations du mouvement s'écrivent :

Equation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Equations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f} \quad (\text{II.4})$$

Avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique.

Les forces volumiques \vec{f} se résument ici aux forces de gravité \vec{g} , qui seront négligées pour la suite de cette étude en raison de leur influence insignifiante sur l'écoulement.

Si on considère un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et pour un écoulement axisymétrique $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ les équations précédentes prendront la forme suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Equations de quantité de mouvement :

Après projection sur les trois axes on obtient :

- Selon la direction radiale :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

- Selon la direction azimutale :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

- Selon la direction axiale :

Chapitre II : Positionnement du problème

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{dP}{dz} + \mu \nabla^2 w \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Avec } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Conditions aux limites :

$$\text{\AA } r = R_1 \quad u = v = w = 0$$

$$\text{\AA } r = R_2 \quad u = v = w = 0$$

II.3.2 Profil de base :

II.3.2.1 : Equation gouvernantes :

Pour un écoulement stationnaire, axisymétrique et unidirectionnel selon la direction axiale le système d'équations précédent réduit à une forme plus simple :

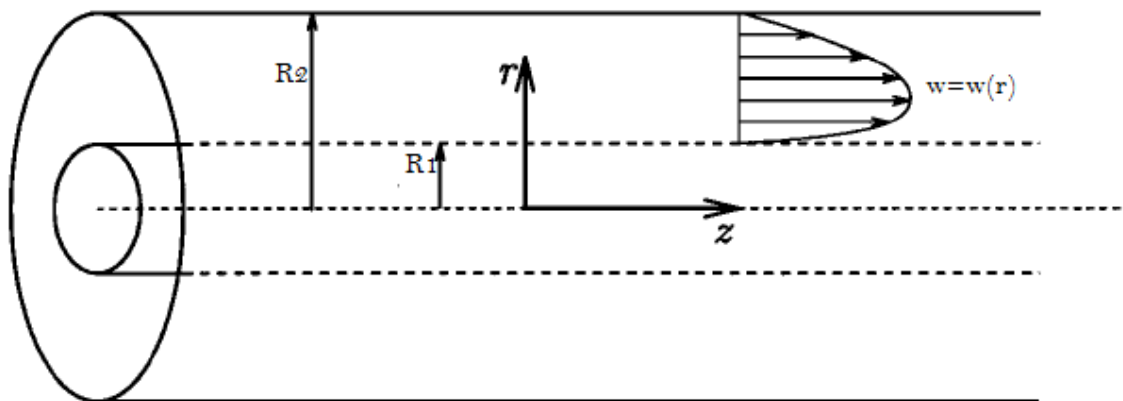


Figure II.3 : écoulement unidirectionnel dans la direction axiale

Écoulement unidirectionnel

$$u = 0$$

$$v = 0$$

Chapitre II : Positionnement du problème

Equation de continuité :

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad (\text{II.9})$$

La vitesse w ne dépend pas de z .

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{dP}{dr} = 0 \quad (\text{II.10})$$

La pression est constante selon la direction radiale.

$$-\frac{dP}{dz} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{dP}{dz} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = cst \quad (\text{II.11})$$

En intégrant cette expression on pourra facilement définir le profile de la vitesse axiale de l'écoulement.

Première intégration :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r + \frac{C_1}{r} \quad (\text{II.12})$$

Et intégrant une deuxième fois :

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (\text{II.13})$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

Chapitre II : Positionnement du problème

Conditions de non glissement :

$$\checkmark \text{ à } r = R_1 \text{ on a } w(r) = 0$$

$$\checkmark \text{ à } r = R_2 \text{ on a } w(r) = 0$$

$$w(R_1) = w(R_2) = 0$$

A partir de cette relation on peut déduire les expressions des deux constantes d'intégrations.

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (\text{II.14})$$

$$C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_2) \right] - R_2^2 \quad (\text{II.15})$$

Après le regroupement approprié des termes, la solution de cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) \right] \quad (\text{II.16})$$

La vitesse maximale de l'écoulement correspond au rayon moyen r_m donné par la formule suivante:

$$r_m = \sqrt{\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \ln(R_2 / R_1)}} \quad (\text{II.17})$$

Chapitre II : Positionnement du problème

En remplaçant l'expression de r_m dans (II.16) on obtient l'expression de la vitesse maximale :

$$w(r)_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R_2^2 \left[1 - \frac{Y^2 - 1}{2 \ln(Y)} \left[1 - \ln \left(\frac{Y^2 - 1}{2 \ln(Y)} \right) \right] \right] \quad (\text{II.18})$$

L'expression du débit traversant la section de l'espace annulaire :

$$Q_m = \int_{R_1}^{R_2} w 2\pi r dr$$

$$Q_m = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dP}{dz} (R_2^2 - R_1^2) \left(R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(\frac{1}{Y} \right)} \right) \quad (\text{II.19})$$

En divisant l'expression du débit sur la section de l'espace annulaire on obtient l'expression de la vitesse moyenne :

$$S = (R_2^2 - R_1^2) \pi$$

$$w_{\text{moy}} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dz} \left(R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(\frac{1}{Y} \right)} \right) \quad (\text{II.20})$$

La contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{dP}{dz} R_2 \left[2 \left(\frac{r}{R_2} \right) - \frac{1 - Y^2}{\ln \left(\frac{1}{Y} \right)} \left(\frac{R_2}{r} \right) \right] \quad (\text{II.21})$$

Avec : $Y = R_1/R_2$

II.3.2.2 : Profil de vitesse axiale pour différents rapports rayon

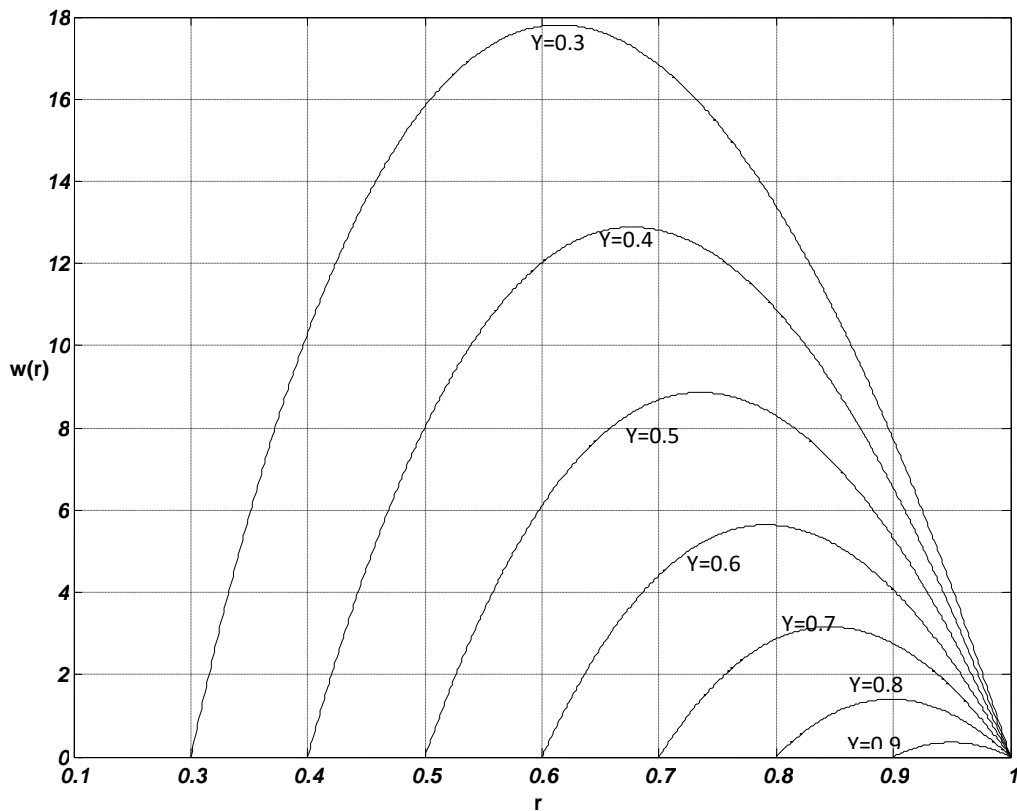


Figure II.4 : Profil de vitesse axiale pour différentes valeurs de Y

La vitesse axiale dans l'espace annulaire devient moins importante à chaque fois qu'on augmente la valeur du rapport entre les rayons des deux cylindres.

En augmentant le rapport Y on constate que la symétrie de l'écoulement de base est faussée, et le profil de vitesse axiale présente une inclinaison vers la paroi du cylindre intérieur, nous allons voir dans l'étude de stabilité linéaire que cette asymétrie a un effet stabilisateur sur l'écoulement.

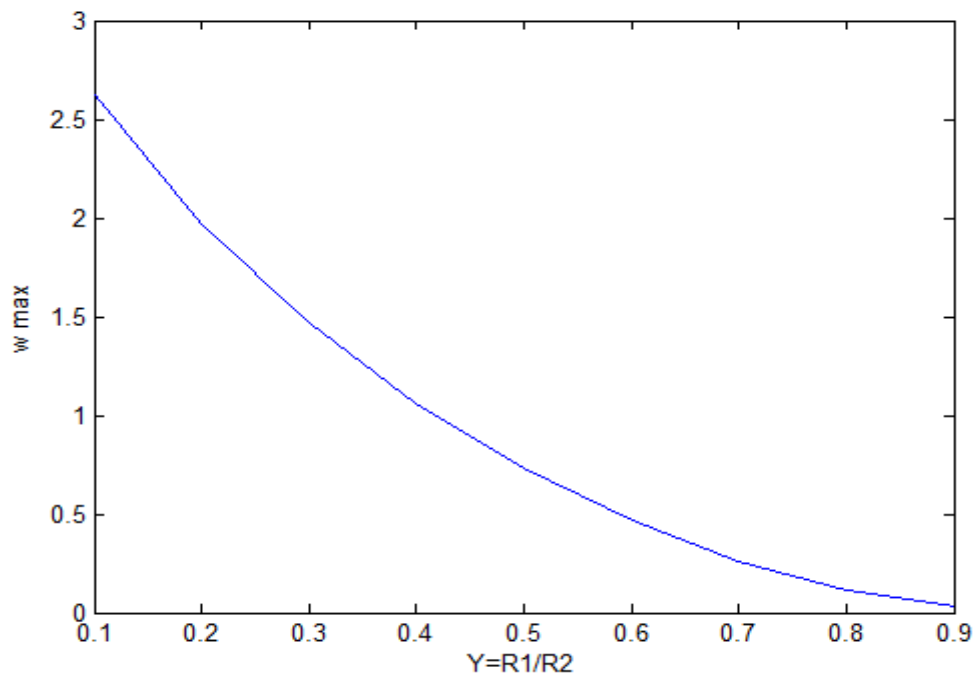


Figure II.5: évolution de la vitesse maximale en fonction de Y

II.4. Formulation adimensionnelle:

Afin de rendre les équations précédentes universelles, nous introduisons des grandeurs de référence qui conduisent à une présentation adimensionnelle des équations du problème.

Nous adoptons les grandeurs caractéristiques suivantes :

U : Vitesse caractéristique

R_2 : longueur caractéristique

ρU^2 : Pression de référence

Chapitre II : Positionnement du problème

Nous distinguons toutes les variables adimensionnelles par le signe *, elles sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{u}{U} & v^* &= \frac{v}{U} & w^* &= \frac{w}{U} \\
 P^* &= \frac{P}{\rho U^2} & r^* &= \frac{r}{R_2} & z^* &= \frac{z}{R_2} \\
 t^* &= \frac{tU}{d} & \text{Re} &= \frac{R_2 \cdot U}{\nu} \\
 Y &= \frac{R_1}{R_2}
 \end{aligned}$$

En remplaçant ces nouvelles variables dans les équations ou on omettra de poser le signe * par soucis de simplification, on aura le système d'équations adimensionnelles suivant :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Quantité de mouvement :

Direction radiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dP}{dr} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (\text{II.22})$$

Direction azimutale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (\text{II.23})$$

Direction axiale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{dP}{dz} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.24})$$

Chapitre II : Positionnement du problème

Conditions aux limites adimensionnelles :

$$\begin{aligned} r = Y & \quad u = v = w = 0 \\ r = 1 & \quad u = v = w = 0 \end{aligned}$$

Solution adimensionnelle de base :

$$w(r) = -\frac{1}{4} \frac{dP}{dz} \operatorname{Re} \left[1 - r^2 + \frac{Y^2 - 1}{\ln(Y)} \ln(r) \right] \quad (\text{II.25})$$

II.5. Etude de stabilité linéaire

II.5.1. Équations de stabilité (équations aux perturbations)

L'écoulement stationnaire établi est toujours perturbé par des petites fluctuations en provenance du milieu extérieur. L'écoulement répond à ces excitations en développant des modes propres qui appariassent sous forme de fluctuations instationnaires.

On supposera ici que ces perturbations existant déjà dans le fluide et on cherchera à les caractériser.

En suivant la technique des petites perturbations, le champ hydrodynamique de l'écoulement bidimensionnel (r, z) peut être décomposé en champ moyen et champ perturbé tels que l'écoulement instantané est la superposition de l'écoulement de base et d'une fluctuation instationnaire :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \tilde{u} \\ w &= \bar{w} + \tilde{w} \\ P &= \bar{P} + \tilde{P} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Avec $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{P}$ perturbations d'amplitudes infinitésimales.

En injectant ces décompositions dans le système d'équations précédent on aura :

Chapitre II : Positionnement du problème

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.27})$$

Quantité de mouvement :

Direction radiale

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{d\tilde{P}}{dr} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \quad (\text{II.28})$$

Direction axiale

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{dP}{dz} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.29})$$

La composante radiale et la dérivée de la vitesse axiale par rapport à z de l'écoulement de base sont nulles:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0 \\ \frac{d\bar{w}}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Le système d'équation ci-dessus devient donc :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.31})$$

Direction radiale :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right) \quad (\text{II.32})$$

Direction axiale :

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \bar{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.33})$$

Chapitre II : Positionnement du problème

On exprime maintenant les perturbations comme superposition de modes normaux :

$$\tilde{u} = u_{(r)} e^{(st+ikz)} \quad (\text{II.34})$$

$$\tilde{w} = w_{(r)} e^{(st+ikz)}$$

$$\tilde{P} = P_{(r)} e^{(st+ikz)}$$

Le terme (st) représente l'évolution temporelle et celui de (ikz) représente l'évolution spatiale de la perturbation.

Avec (k) le nombre d'onde de la perturbation dans la direction axial et (s) une constante pouvant être complexe.

En remplaçant dans l'équation de continuité on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + ikw = 0 \quad (\text{II.35})$$

Quantité de mouvement :

$$\bullet \quad su_{(r)} + ik\bar{w}u_{(r)} = -\frac{\partial P_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{(r)}}{\partial r} \right) - k^2 u_{(r)} - \frac{u_{(r)}}{r^2} \right) \quad (\text{II.36})$$

$$\bullet \quad sw_{(r)} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} u_{(r)} + ik\bar{w}w_{(r)} = -ikP_{(r)} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_{(r)}}{\partial r} \right) - k^2 w_{(r)} \right) \quad (\text{II.37})$$

Pour réduire le nombre de variables dans les équations, nous allons procéder à l'élimination des termes de pression P en remplaçant son expression tirée de (II.37) dans (II.36) , et de w en remplaçant son expression déduite de l'équation de continuité dans (II.37), après le regroupement approprié des termes on aura :

Chapitre II : Positionnement du problème

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{1}{k^2 \text{Re}} D^4 - \frac{2}{rk^2 \text{Re}} D^3 + \left[\frac{3}{r^2 \text{Re} k^2} + \frac{s}{k^2} + \frac{i}{k} \bar{w} + \frac{2}{\text{Re}} \right] D^2 + \left[\frac{s}{rk^2} + \frac{i}{rk} \bar{w} + \frac{2}{r \text{Re}} - \frac{3}{r^3 k^2 \text{Re}} \right] D \right. \\
 & \left. + \left[-\frac{s}{r^2 k^2} + \frac{i}{kr} \bar{w}' - \frac{i}{r^2 k} \bar{w} + \frac{3}{\text{Re} r^4 k^2} - \frac{i}{k} \bar{w}'' - s - ik\bar{w} - \frac{k^2}{\text{Re}} - \frac{2}{r^2 \text{Re}} \right] \right] u = 0 \quad (\text{II.38})
 \end{aligned}$$

Equation de continuité :

$$w = -\frac{1}{ik} \left(D + \frac{1}{r} \right) u \quad (\text{II.39})$$

Avec : $\frac{\partial}{\partial r} \equiv D$

Et si on note : $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \equiv \hat{D}$ Les équations deviennent :

Equation de continuité :

$$w = -\frac{1}{ik} \hat{D} u$$

$$\left[\left(\frac{1}{\text{Re}} (D\hat{D} - k^2) - s - ik\bar{w} \right) (D\hat{D} - k^2) - ik(\bar{w}'(\hat{D} - D) - \bar{w}'') \right] u = 0 \quad (\text{II.40})$$

Dans le cas de l'approximation d'un espace annulaire faible tel que $\frac{d}{R1} \ll 1$ avec $d = R2 - R1$

nous pouvons considérer que $\hat{D} \approx D$.

On aboutira alors à l'équation d'Orr-Sommerfeld pour la stabilité des écoulements parallèles :

$$\left[\frac{1}{\text{Re}} (D^4 - 2k^2 D^2 + k^4) - s(D^2 - k^2) - ik[(D^2 - k^2)\bar{w} - k\bar{w}''] \right] u = 0 \quad (\text{II.41})$$

II.5.2. Formulation du problème aux valeurs propres généralisé

Les équations ci-dessus peuvent être formulées sous forme de problème aux valeurs propres généralisé comme suit :

$$[A]V = s[B]V \quad (\text{II.42})$$

$$\det(A - sB) = 0$$

Avec :

$[A]$: matrice carrée d'ordre N

V : vecteur propre de $[A]$

s : scalaire représentant la valeur propre de $[A]$.

$[B]$: Matrice carré du même ordre que $[A]$.

En appliquant cette forme générale aux précédentes équations on aura ce système :

$$[A]u(r) = s[B]u(r) \quad (\text{II.43})$$

Avec :

A et B : Operateurs d'Orr-Sommerfeld définis comme suit :

$$A = \left[\frac{1}{\text{Re}} (D^4 - 2k^2 D^2 + k^4) - i[(kD^2 - k^3)\bar{w} - k\bar{w}'''] \right] \quad (\text{II.44})$$

$$B = D^2 - k^2 \quad (\text{II.45})$$

$u(r)$: Amplitude de la perturbation

s : Fréquence réelle.

Chapitre II : Positionnement du problème

La forme définitive du système aux valeurs propres généralisé est la suivante:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\text{Re}} (D^4 - 2k^2 D^2 + k^4) \\ -i[(kD^2 - k^3)\bar{w} - k\bar{w}''] \end{bmatrix} (u_{(r)}) = s [D^2 - k^2] (u_{(r)}) \quad (\text{II.46})$$

II.5.Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons explicité le système à résoudre sous forme d'un problème aux valeurs propres généralisé. Dans le chapitre suivant, une méthode spectrale de type Chebychev sera utilisée pour sa discrétisation. La résolution se fera par le moyen d'un programme informatique écrit en Matlab.

Chapitre III :
Procédure numérique

III.1. Introduction

Les méthodes spectrales ont été développées pour la résolution des équations de Navier-Stokes, et elle sont fréquemment utilisées pour leur haute précision lorsqu'il s'agit de traiter avec des problèmes aux valeurs propres.

Elles permettent de résoudre des écoulements limités géométriquement par la présence de parois où l'on impose la condition d'adhérence du fluide. Elles sont aujourd'hui très largement utilisées pour l'étude de la stabilité des écoulements, permettant ainsi de résoudre le système différentiel que doit satisfaire la distribution d'amplitude des perturbations. Cette méthode consiste à rechercher la solution sous forme d'une série tronquée de fonctions de base régulières connues, dont le choix repose essentiellement sur les conditions aux limites du problème. On recherche la solution d'une équation différentielle, d'une équation aux dérivées partielles ou des équations de Navier-Stokes sous la forme d'un développement en séries de fonctions infiniment dérivables et orthogonales au sens d'un produit scalaire. Soit q cette solution, il s'écrit sous la forme : $q = \sum q_n \Gamma_n$, où $(\Gamma_n) \in N$ une base polynômiale, et q_n désigne le spectre (une valeur) de q , Dont on peut calculer une approximation q_N en tronquant la série précédente à un niveau N , on aura donc : $q_N = \sum q_n \Gamma_n$. En pratique, on prend les polynômes trigonométriques, de Chebychev ou de Legendre.

Dans ce chapitre nous allons décrire globalement la méthode numérique qu'on utilisera dans la résolution du problème, qui est une méthode spectrale basée sur les polynômes de Chebychev. En suite on procédera à la discrétisation des équations obtenues dans le chapitre précédent, et obtenir le système final à résoudre.

III.2. Méthode numérique

III.2.1. Description globale de la méthode utilisée:

Une méthode de collocation spectrale basée sur des polynômes de Tchebychev est utilisée pour la discrétisation du problème. Celle-ci est adaptée pour nos analyses de stabilité, permettant d'obtenir une grande précision, avec un nombre de points relativement restreint. Ainsi, nous prenons une répartition de points de Gauss-Lobatto pour la définition des vecteurs perturbations. Celle-ci est caractérisée par la distribution suivante :

$$y_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \text{Pour } i = 0 \dots N \quad (\text{III.1})$$

Ou $y_i \in [-1; 1]$. L'approximation d'une fonction H sur $[-1; 1]$ est donc réalisée par le polynôme f_N :

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^N C_i(x) T_i(x) \quad (\text{III.2})$$

Les T_i représentent les polynômes de Chebychev sur lesquels est basé le développement précédent, ils sont définis par une simple formule :

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad n = 0 \dots N+1 \quad (\text{III.3})$$

Les premiers polynômes sont donc :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Les coefficients d'expansion sont alors déterminés par les formules des polynômes d'interpolation de Lagrange :

Chapitre III : Procédure numérique

$$C_i(y) = \left(\frac{1-x^2}{x-x_i} \right) (-1)^{i+1} \frac{T'_N(x)}{N^2 a_i} \quad (\text{III.4})$$

La dérivée de $f_N(x)$ est égale à celle de son développement: $f'_N(x_i) = f'(x_i)$

Or les dérivées des polynômes de Chebychev sont telles que:

$$T'_0(x) = 0$$

$$T'_1(x) = 1 = T_0(x)$$

$$T'_2(x) = 4x = 4T_0(x)$$

$$T'_{n+1}(x) = 2(n+1)T_n(x) + \frac{n+1}{n-1}T_{n-1}(x) \quad \text{Pour } n \geq 2$$

T_N désigne le polynôme de degré N de Chebychev ; la dérivée première de la fonction f est ainsi déterminée par l'opérateur de dérivation D :

$$D_{ij} = C'_j(x_i) \quad \text{Pour } 0 \leq i, j \leq N \quad (\text{III.5})$$

Les éléments de la matrice de dérivation d'ordre 1 $D^{(1)}$ sont :

$$D_{Nij} = \left\{ \begin{array}{l} D_{00} = \frac{-(2N^2+1)}{6} \\ D_{ii} = \frac{-y_i}{2(1-y_i^2)} \\ D_{i \neq j} = \frac{(-1)^{i+j}}{y_i - y_j} \frac{q_i}{q_j} \\ D_{NN} = \frac{(2N^2+1)}{6} \\ q_n = \begin{cases} 2 \rightarrow n = 0 \\ 1 \rightarrow n = (1 \dots N-1) \\ 2 \rightarrow n = N \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Le tableau ci-dessous donne un aperçu plus clair sur la manière utilisé pour construire les outils de dérivation :

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i} & \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Tableau III.1 : construction de l'outil de dérivation de Chebychev

III.2.2. Dérivées d'ordre supérieur

Les matrices de dérivation d'ordre i , $D_N^{(i)}$, s'obtiennent simplement en tant que produits (i fois) de la matrice de dérivation première $D_N^{(1)}$ du jeu de points de collocation considéré.

Les éléments de la matrice de dérivation d'ordre 2 $D^{(2)}$ sont :

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{(-1)^{i+j}}{c_j} \frac{x_i^2 + x_i x_j - 2}{(1 - x_i^2)(x_i - x_j)^2} \quad (\text{III.7})$$

$$D_{ii}^{(2)} = -\frac{(N^2 - 1)(1 - x_i^2) + 3}{3(1 - x_i^2)^2}$$

$$D_{0j}^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{(-1)^j}{c_j} \frac{(2N^2 + 1)(1 + x_i) - 6}{3(1 - x_i)^2}$$

$$D_{Nj}^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{(-1)^{N+j}}{c_j} \frac{(2N^2 + 1)(1 + x_i) - 6}{3(1 - x_i)^2}$$

$$D_{00}^{(2)} = D_{NN}^{(2)} = \frac{N^4 - 6}{15}$$

De ce fait, la dérivée de u aux $N + 1$ points du maillage est calculée par une simple multiplication de matrice :

$$u' = Du \quad \text{Et} \quad u'' = D^2u \quad (\text{III.8})$$

II.2.3. Introduction des conditions aux limites :

Avant d'introduire les conditions aux limites $w(R_1) = w(R_2) = 0$ il est primordial de définir une fonction de passage du domaine physique au domaine de Chebychev.

$$\text{On a : } r \in [Y, 1] \quad \text{et} \quad x \in [-1, 1]$$

Le changement de variable approprié doit être ainsi formulé :

$$r = ax + b$$

$$r = (Y - 1)x + Y + 1 \quad (\text{III.9})$$

Avec $Y = R_1/R_2$

Pour imposer les conditions de non glissement il suffit de réduire le nombre de points de collocation en supprimant la première et la dernière ligne :

$$\begin{array}{c} \text{ignored} \rightarrow \\ \left(\begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \text{dark} & \text{light} & \text{dark} \\ \hline & D_N^2 & \\ \hline \text{dark} & \text{light} & \text{dark} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \text{zeroed} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{zeroed} \end{array} \end{array}$$

III.3. Discrétisation spatiale du problème

III.3.1. Application locale de la méthode

La résolution du problème formulé précédemment consiste à trouver les valeurs propres S du système pour lesquelles la relation $\det (A-sB)=0$

Le développement polynomial du vecteur perturbation $u_{(r)}$ est donné sous la forme suivante :

Avec la transformation $r = g(x)$

$$u_{(r)} = C_i(r)u_i(r) \tag{III.10}$$

Le coefficient d'expansion s'écrit alors :

$$C_i(r) = \left(\frac{1-r^2}{r-r_i} \right) (-1)^{i+j} \frac{u_i(r)}{N^2 a_i} \tag{III.11}$$

Avec $u_n(r)$ le polynôme de degré N de Chebychev.

Les r_i désignent les racines du polynôme $u_n(r)$.

En notant $N+ 1$ le nombre de points de collocation et D , l'opérateur de dérivation suivant r , de taille $(N + 1)*(N + 1)$, le vecteur u_n , composé des valeurs de u suivant la grille de Gauss-Lobatto, enfin, nous noterons I et 0 , la matrice identité et la matrice zéros.

Les operateurs de stabilité deviennent :

III.3.2. Calcul de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{1,j} & \cdots & A_{1,N+1} \\ A_{i,1} & A_{i,j} & \cdots & A_{i,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & A_{N+1,j} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Les éléments de la matrice A sont :

$$A_{11} = -A_{N+1,N+1} = \frac{1}{\text{Re}} (D_{11}^4 - 2k^2 D^2 + k^4 \otimes I) - i[(kD_{11}^2 - k^3)\bar{w} - k\bar{w}'''] \quad (\text{III.13})$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{\text{Re}} (D_{i,j}^4 - 2k^2 D_{i,j}^2 + k^4 \otimes I) - i[(kD_{i,j}^2 - k^3)\bar{w} - k\bar{w}''']$$

$$A_{1,j} = \frac{1}{\text{Re}} D_{1,j}^4$$

$$A_{i,1} = \frac{1}{\text{Re}} D_{i,1}^4$$

$$A_{1,N+1} = -A_{N+1,1} = \frac{1}{\text{Re}} D_{1,N+1}^4$$

$$A_{N+1,j} = \frac{1}{\text{Re}} D_{N+1,j}^4$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{\text{Re}} D_{i,N+1}^4$$

III.3.3. Calcul de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld B :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1,j} & \cdots & B_{1,N+1} \\ B_{i,1} & B_{i,j} & \cdots & B_{i,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N+1,1} & B_{N+1,j} & \cdots & B_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Chapitre III : Procédure numérique

Les éléments de la matrice B sont les suivants :

$$B_{11} = -B_{N+1,N+1} = D_{11}^2 - k^2 \otimes I \quad (\text{III.15})$$

$$B_{i,j} = D_{i,j}^2 - k^2 \otimes I$$

$$B_{i,1} = B_{1,j} = B_{1,N+1} = B_{N+1,1} = B_{N+1,j} = B_{i,N+1} = 0$$

Le système final à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{1,j} & \cdots & A_{1,N+1} \\ A_{i,1} & A_{i,j} & \cdots & A_{i,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & A_{N+1,j} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{pmatrix} = s \otimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1,j} & \cdots & B_{1,N+1} \\ B_{i,1} & B_{i,j} & \cdots & B_{i,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N+1,1} & B_{N+1,j} & \cdots & B_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Nous allons chercher par la suite les valeurs du nombre de Reynolds Re et du nombre d'ondes k pour lesquels la partie réelle de s est nulle (Re et k critiques).

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons obtenu le système d'équations discrétisées par la méthode spectrale de type Chebychev. La résolution se fera par le moyen d'un programme informatique écrit sur Matlab. Dans le chapitre suivant, on présentera les résultats relatifs à la détermination des seuils d'instabilité.

Chapitre IV :

Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus à l'aide du code de calcul Matlab, en utilisant la méthode spectrale basée sur les polynômes de Chebychev, cette méthode est bien exposée dans le chapitre précédent.

Ces résultats concernent notre problème posé au début, rappelons qu'il s'agit d'une étude des seuils d'instabilité hydrodynamique dans un écoulement entre deux cylindres coaxiaux.

IV.2. Ecoulement stable

IV.2.1. valeurs propres de l'écoulement à l'état stable

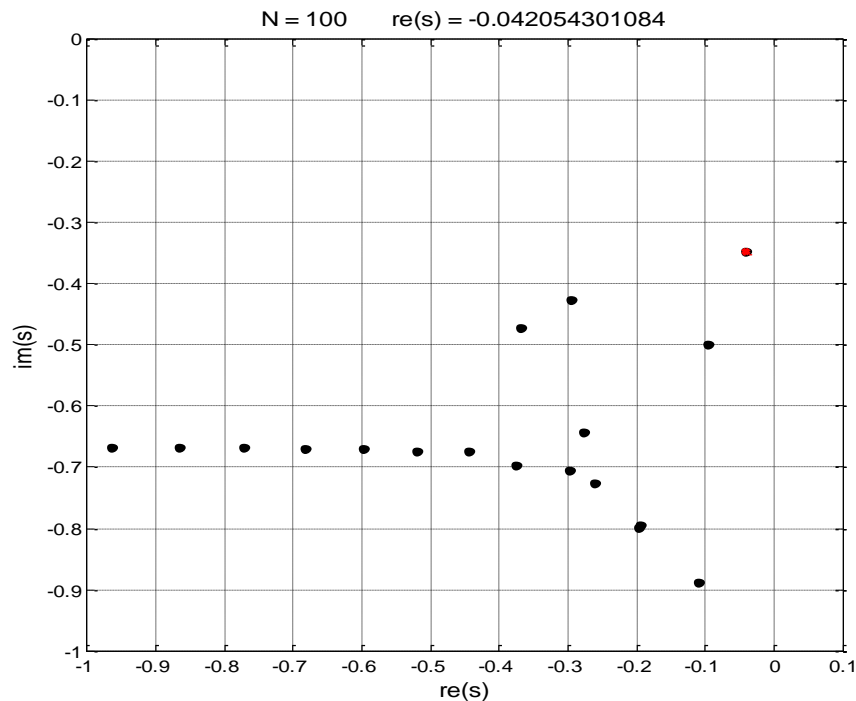


Figure IV.1 : valeurs propres de l'écoulement stable

$$Re = 5000 < Re_c$$

$$k = 1.02056$$

$$s(re)_{\max} = -0.04205 < 0$$

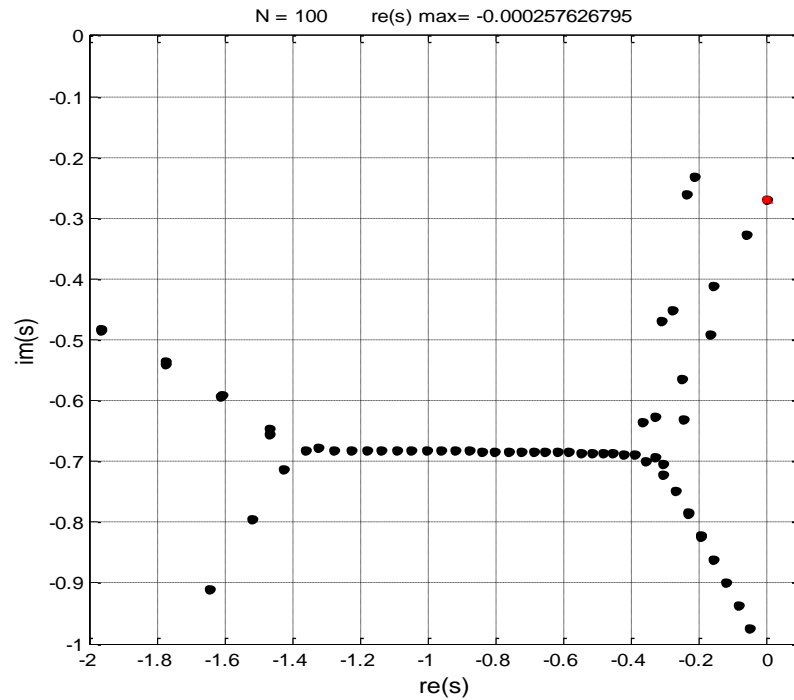


Figure IV.2 valeurs propres de l'écoulement à la limite de stabilité

$$Re = 5771 < Re_c$$

$$k = 1.02056$$

$$s(re) \max = -0.0002576 < 0$$

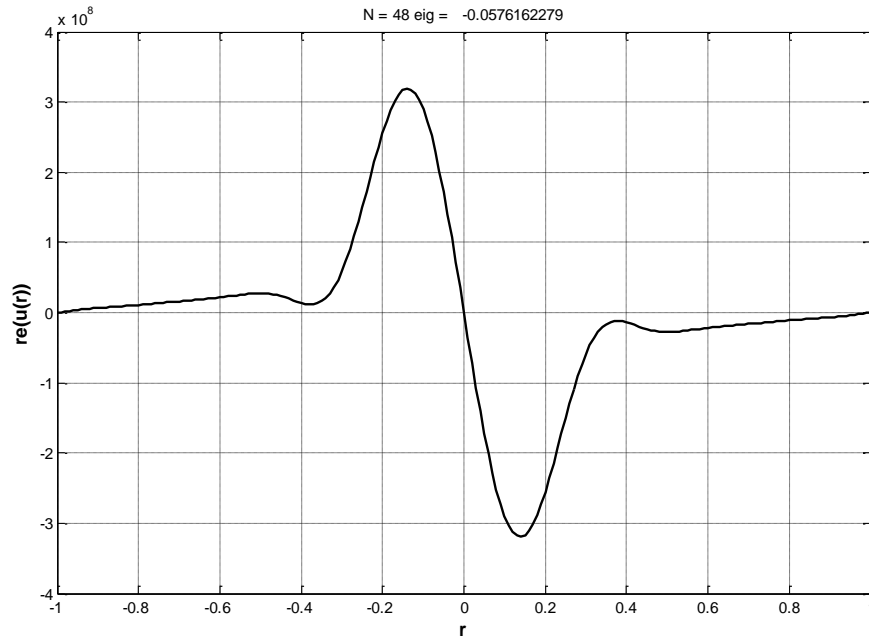
Pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds inférieures à la valeur critique, les valeurs propre du système sont à partie réelle négative, cela ce traduit physiquement par un état stable de l'écoulement dans ce domaine de paramètres (k fixé).

La figure IV.1 désigne un net état de stabilité (Re est loin de la valeur critique), tandis que la Figure IV.2 montre des valeurs propres très proches de 0 (partie réelle), l'écoulement en l'occurrence est à la limite de stabilité.

IV.2.2. Vecteurs propres:

L'amplitude réelle de la perturbation est donnée dans ces deux graphes en fonction de r dans le domaine spectral de Chebychev $[-1 ; 1]$.

(A)



(B)

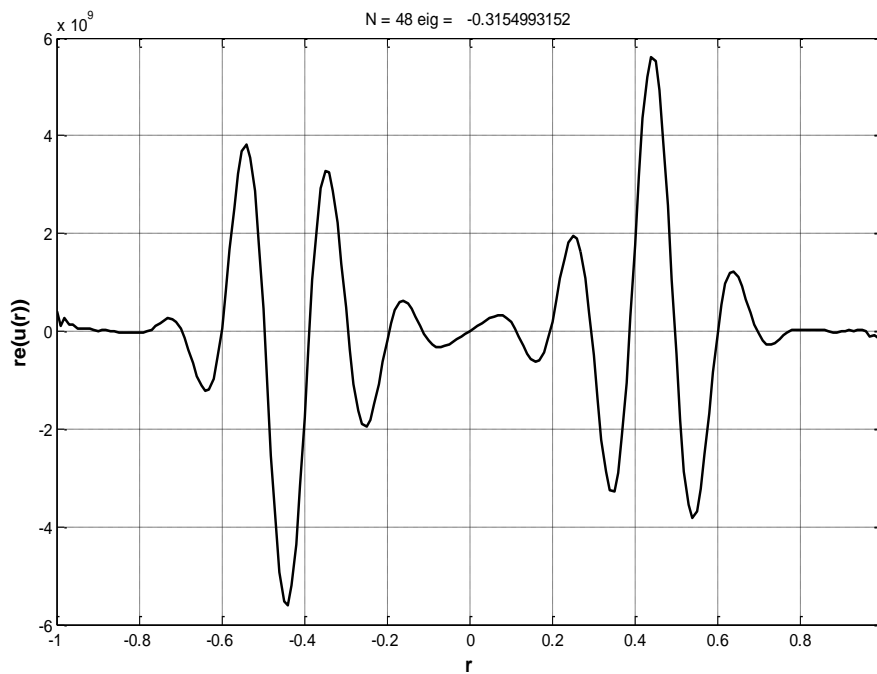


Figure IV.3 : Vecteurs propres du système stable

Chapitre IV : Résultats et discussion

Ces illustrations nous renvoient deux vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres du système stable définies sur l'intervalle : $[-1,1]$, dans les deux cas on peut constater la convergence du vecteur.

IV.3. Seuil d'instabilité :

IV.3.1. Valeurs propres de l'écoulement à l'état critique :

Les valeurs propres définies sur la figure ci-dessous indiquent précisément le seuil d'instabilité de l'écoulement. on remarque que $\text{re}(s)_{\max} \approx 0$, cela dit que les paramètres Re et k sont à leurs valeurs critiques

$$\begin{cases} Re = 5772 \\ k_c = 1.02056 \end{cases}$$

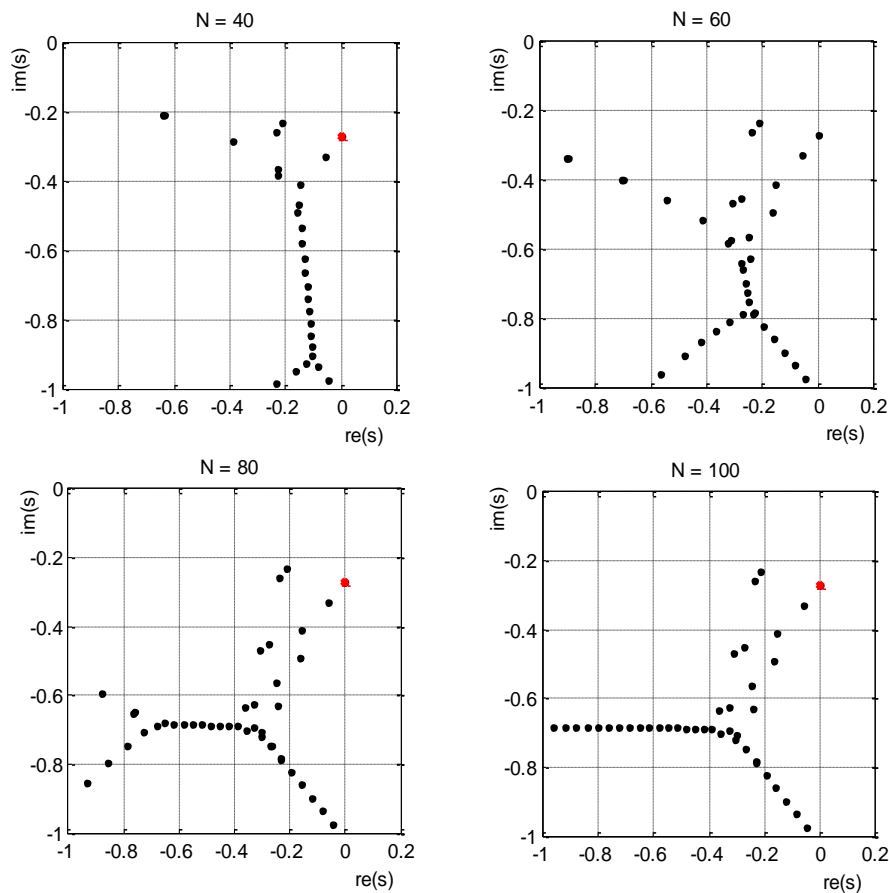


Figure IV.4: valeurs propres relatives au seuil d'instabilité

Chapitre IV : Résultats et discussion

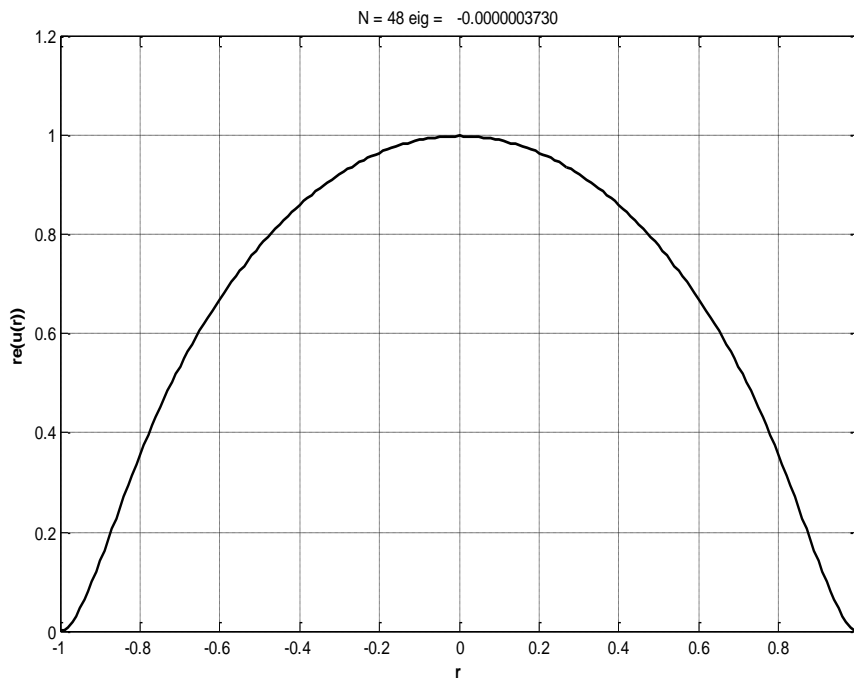
Les valeurs propres critiques sont données dans le tableau IV.1, pour un nombre de point de collocation allant de 40 jusqu'à 100 :

Nombre de point de collocation (N)	40	60	80	100
$re(s) \max$	$-3.656 * 10^{-6}$	$-3.73143 * 10^{-6}$	$-3.73156 * 10^{-6}$	$-3.71878 * 10^{-6}$

Tableau : IV.1 : valeurs propres (parties réelles maximales) pour différents types de maillage

IV.3. 2. Vecteurs propres du système à l'état critique :

(A)



(B)

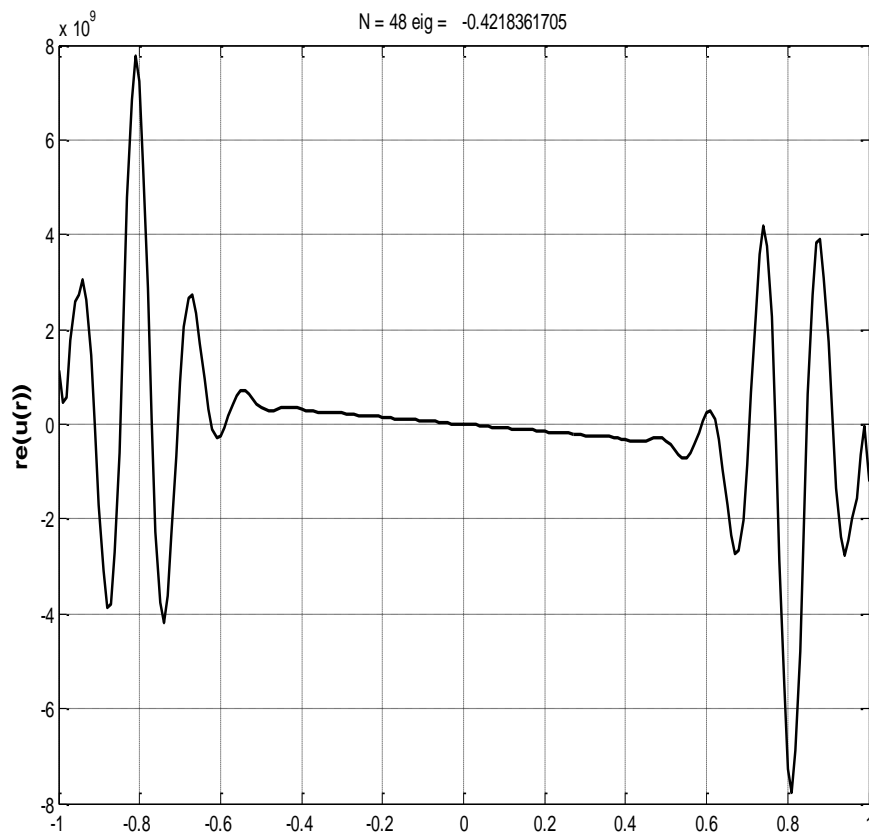


Figure IV.5 : Vecteurs propres à état critique

A : Vecteur propre de la dernière valeur propre stable du système juste avant le seuil d'instabilité.

B : Vecteur propre de la première valeur propre stable obtenue pour les paramètres critiques Re_c et k_c .

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.3.3. Stabilité marginale :

Les résultats relatifs au seuil d'instabilité sont donnés sous forme de courbe Re pour différentes valeurs de k , cette courbe sépare les deux zones qui incarnent les états de l'écoulement stable et instable.

La valeur minimale de Re est appelée Reynolds critique Re_c et celle de k nombre d'onde critique k_c .

Courbe neutre :

Les valeurs représentatives de la stabilité marginale pour un faible espace annulaire sont recueillies dans le tableau ci-dessous.

Les valeurs critiques pour ce cas sont :

$$Re_c = 5772$$

$$K_c = 1.02056$$

Re	5820	5789	5779	5772	5789	5819	5890	6009
k	1	1.01	1.02	1.02056	1.03	1.04	1.05	1.06

Tableau IV.2 : coordonnées des points constitutifs de la courbe neutre

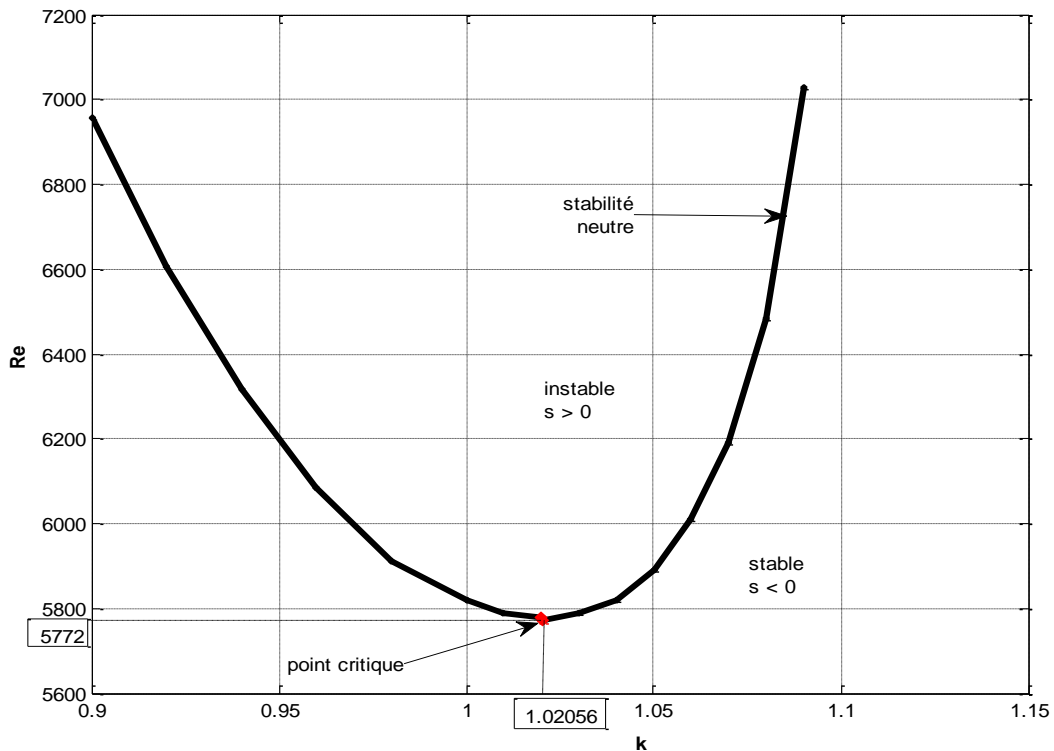


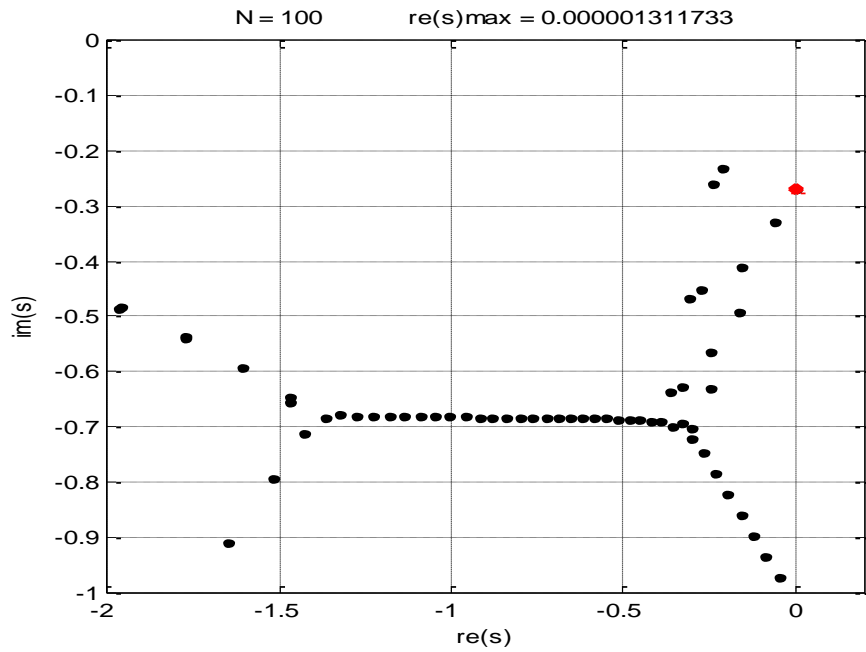
Figure IV.6 : courbe de stabilité marginale

Cette courbe de stabilité neutre obtenue pour une configuration comportant un faible espace annulaire ($R1/R2=0.9999$) divise le plan (k, Re) en deux zones, l'une d'elles est stable et l'autre instable, les premières instabilités apparaissent à partir du point critique C défini par ses coordonnées qui correspondent aux valeurs critiques du nombre de Reynolds $Re_c= 5772$, et du nombre d'onde $k_c=1.021267$. Pour valider ces résultats il suffit de les comparer à ceux obtenu pour un écoulement de poiseuille plan (écoulement entre deux plaques) qui peut être considéré comme un cas limite de l'écoulement annulaire à grande échelle, en effet le nombre de Reynolds et le nombre d'ondes critiques pour un écoulement de poiseuille plan sont respectivement de 5772.22 et 1.02056, comme ils ont été déterminés par Orzag [18] en 1971.

IV.4. Système instable :

IV.4.1. Valeurs propres :

(A)



(B)

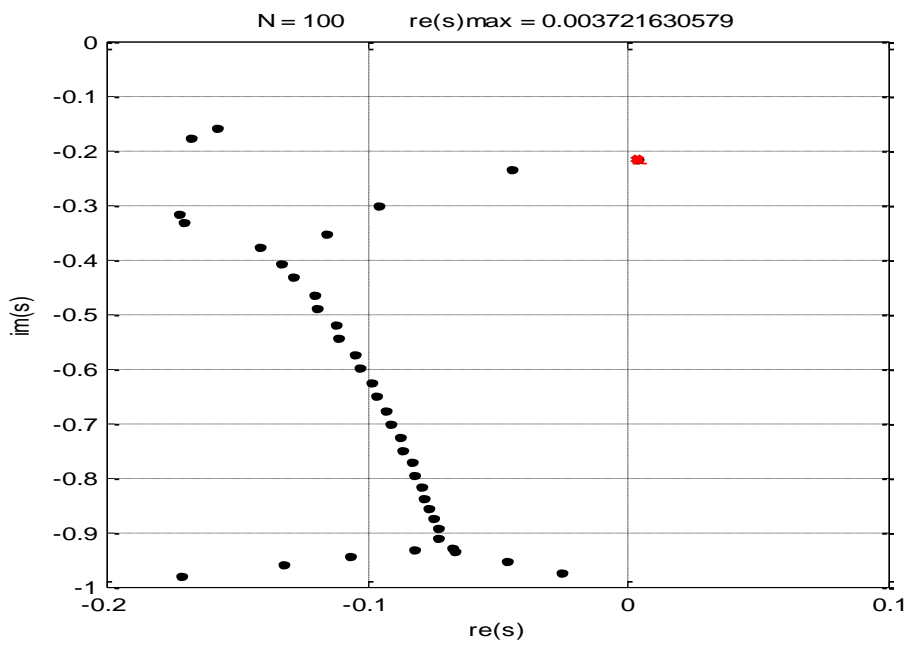


Figure IV.7 : valeurs propres pour un écoulement instable

(A)

$$Re = 5773 > Re_c$$

$$k = 1.02056$$

$$s(re)_{\max} = 3.1 \cdot 10^{-6}$$

(B)

$$Re = 6000 > Re_c$$

$$k = 1.02056$$

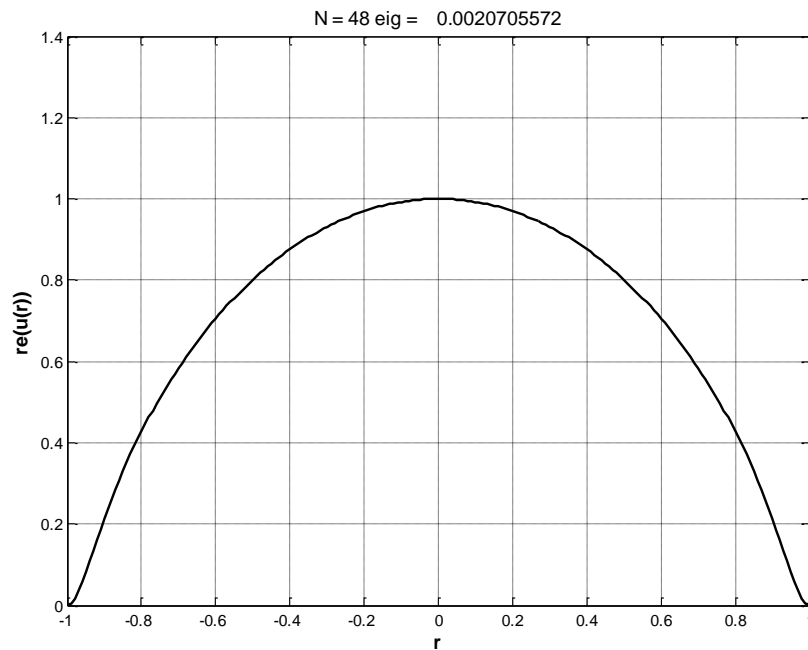
$$s(re)_{\max} = 3.7 \cdot 10^{-3}$$

En augmentant le nombre de Reynolds d'une unité la fréquence réelle (partie réelle de la valeur propre) critique du système devient positive, cela implique que l'écoulement a dépassé son seuil d'instabilité et il est entré dans son état instable.

Dans le cas où le nombre de Reynolds dépasse largement la valeur critique, on remarque que la valeur propre à la partie réelle maximale, se trouve nettement sur la partie droite du plan. La fréquence réelle est positive, la perturbation s'amplifie exponentiellement pour occuper les autres zones du fluide, et l'écoulement se trouve à présent dans son régime instable.

IV.4.2. Vecteurs propres du système à état instable :

(A)



(B)

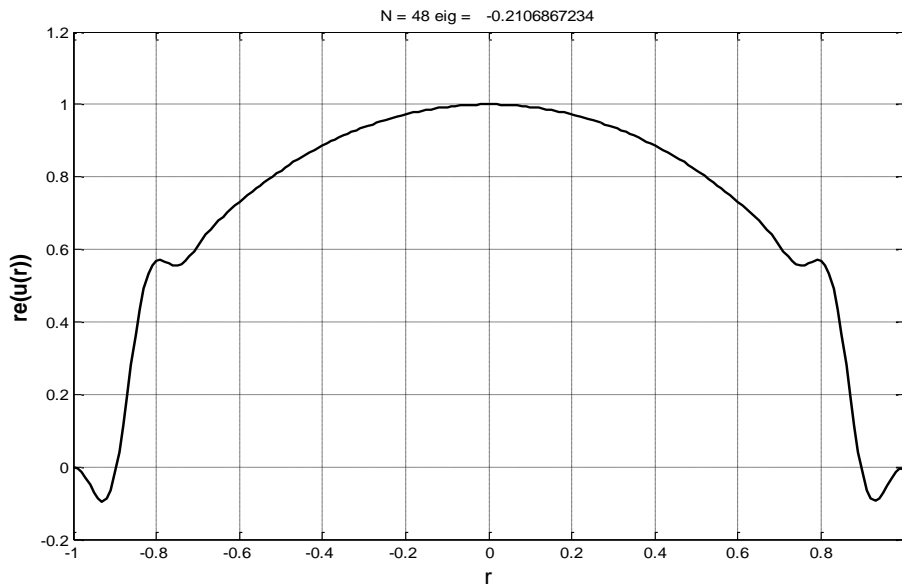


Figure IV.8 : vecteurs propres pour un écoulement instable

Le vecteur propre (A) représenté sur cette figure correspond à la première valeur propre positive, soit la première valeur positive de la fréquence réelle de l'écoulement instable. La perturbation dans ce cas, se développera exponentiellement dans le temps pour occuper les autres régions de l'écoulement.

Quand à (B) elle représente le vecteur propre attribué à la première valeur obtenue dans les plan de paramètres $Re = 6000$ et $k = 1.02056$, on remarque que la fréquence réelle est négative, et pour cette fréquence la perturbation s'efface progressivement.

IV.5. Evaluation du Re_c pour différentes valeurs du rapport Y :

Afin de donner un aspect plus général à cette étude, il convient d'analyser les valeurs critiques des paramètres de contrôle de l'écoulement pour différentes valeurs du rapport Y afin de déterminer l'impact de la variation de ce dernier sur la stabilité de l'écoulement.

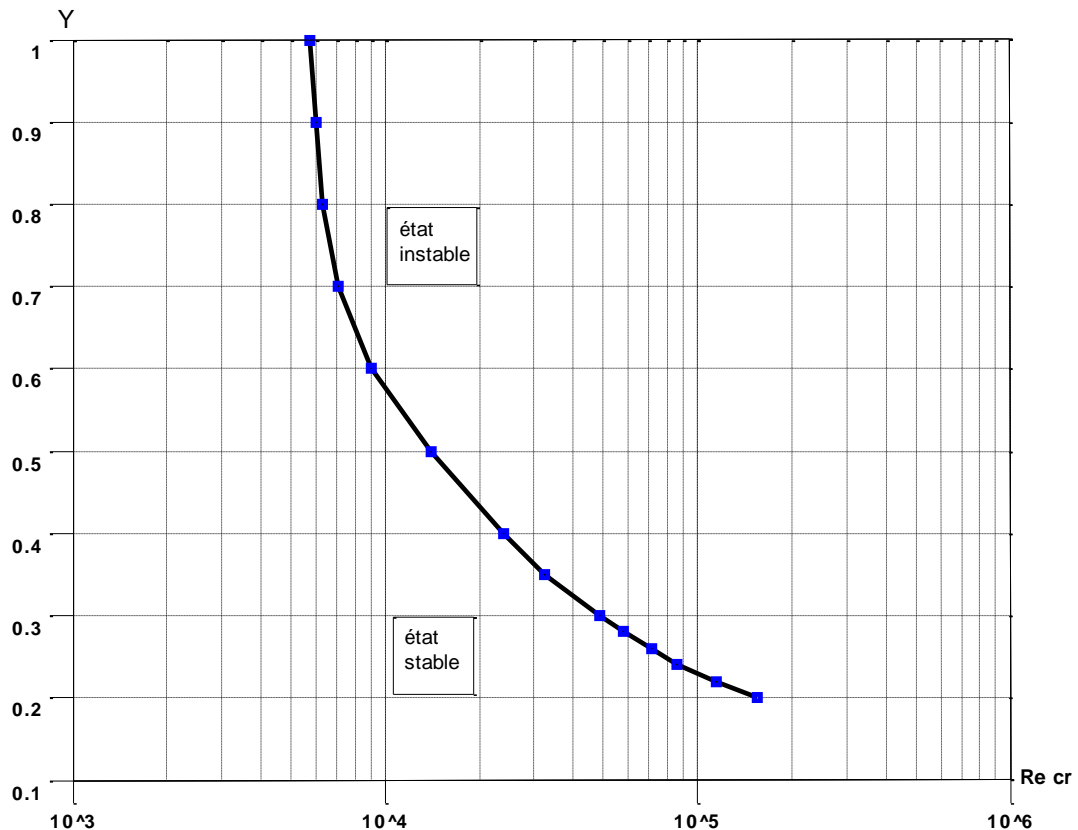


Figure IV.9 : influence du rapport rayon sur la valeur du Reynolds critique

A travers cette courbe on peut constater l'influence de la variation de Y sur la valeur du Reynolds critique. Le Reynolds critique minimal correspond au rapport Y le plus proche de 1, c'est à dire à la configuration de l'écoulement qui implique l'espace annulaire le moins important. En peut déduire alors que le rapport rayon Y est un facteur stabilisateur de l'écoulement.

Nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par Sadighi & Heggins en 1991 dans le but d'estimer leur admissibilité :

Chapitre IV : Résultats et discussion

Y	Nos résultats	Les résultats de S & H
0.9999	5771	5771
0.7	7185	7143(pour Y= 0.707)
0.5	14661	14661

Tableau IV.3 : validation des résultats concernant le Re critique

On conclut donc que l'écoulement atteint son premier seuil d'instabilité lorsque l'espace annulaire séparant les deux cylindres prend sa valeur minimale en largeur, par contre il devient stable pour toutes les valeurs de Reynolds pour un rapport Y qui tend vers 0, ce dernier cas peut être assimilé à l'écoulement de Hagen-poiseuille (poiseuille cylindrique) stable pour tout Re vis à vis des perturbations infinitésimales et qui peut être considéré comme un cas limite supérieur ($Re \rightarrow \infty$).

Evaluation du k_c pour différentes valeurs du rapport Y :

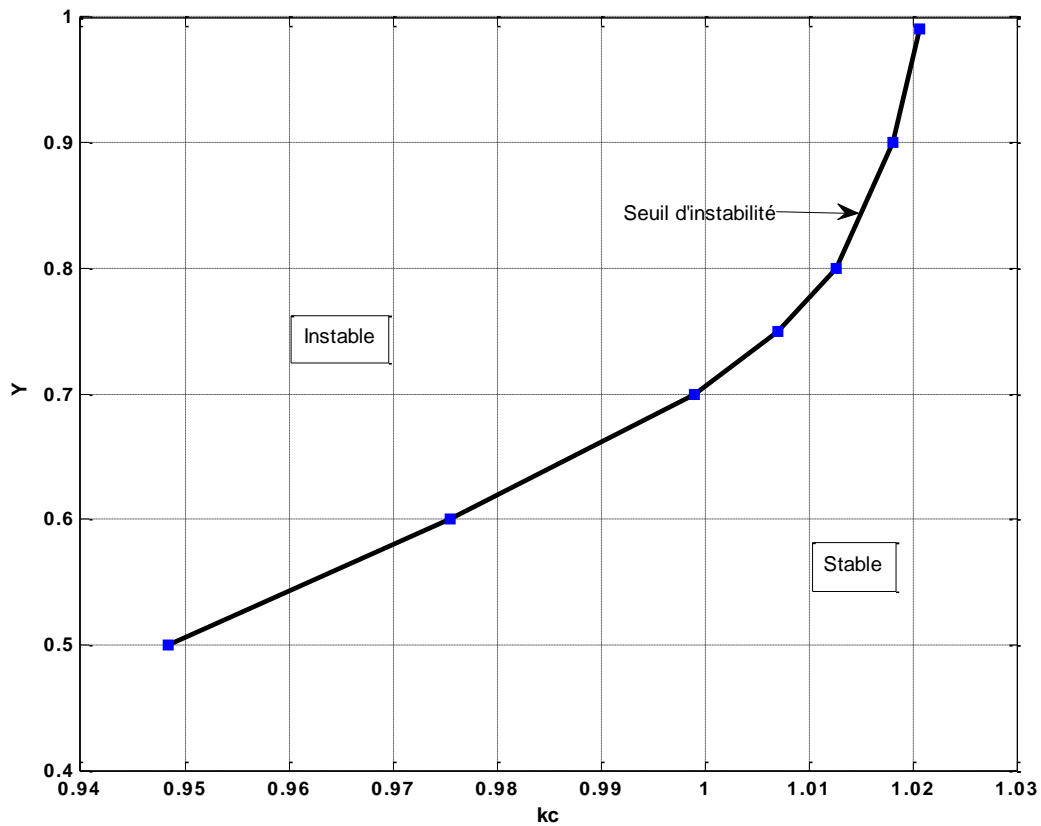


Figure IV.10 : variation du nombre d'onde critique k_c en fonction de Y

La figure ci-dessus illustre clairement l'influence du rapport entre les deux rayons formant l'espace annulaire sur la valeur prise par le nombre d'ondes critique du système, on peut voir aussi que le nombre d'onde critique le plus élevé correspond à un rapport de rayons qui tend vers 1, et l'écoulement dans ce cas est assimilé à celui de poiseuille plan, qui peut être défini comme borne inférieure de écoulement.

Pour vérifier la validité de nos calculs on a comparé nos résultats à ceux obtenus par Sadighi & Higgins en 1991.

Chapitre IV : Résultats et discussion

Y	Nos résultats pour kc	Les résultats de S & H
0.9999	1 .023267	1.0213
0.7	0.979	0.94315 (pour Y=0.707)
0.5	0.94834	0.94834

Tableau IV.4 : validation des résultats

Conclusion :

A travers ces résultats nous constatons que l'augmentation du rapport rayon induit la diminution de la valeur critique du nombre de Reynolds, ceci donc est un facteur déstabilisateur.

Conclusion générale :

Ce travail de mémoire s'inscrit dans le cadre une contribution à la compréhension de l'évolution des petites perturbations au sein d'un écoulement annulaire entre deux cylindres concentriques. Pour l'ensemble des cas étudiés nous avons cherché à déterminer les conditions critiques à partir desquelles les instabilités commencent à se former, par l'évaluation des valeurs seuils des paramètres de contrôle. L'intérêt d'entreprendre ce projet se situe d'une part en un aspect de recherche théorique en matière de dynamique des fluides, et d'autre part en un aspect pratique comme la technologie de récupération d'énergie thermique par les échangeurs coaxiaux.

Nous avons entamé cette étude par la définition de quelques notions en lien direct avec le sujet, puis on a cité quelques travaux antérieurs qui ont rapport avec la stabilité hydrodynamique en général et à la stabilité des écoulements entre deux cylindres en particulier.

Après avoir établis l'écoulement de base et sa solution stationnaire, nous avons procédé à l'analyse de stabilité linéaire en appliquant la démarche classique qui consiste à introduit des petites perturbations dans l'écoulement stable et suivre leur développement au fil du temps, cela nous a conduit à obtenir les équations de stabilité (équations aux perturbations) et à dériver le problème aux valeurs propres.

Nous avons ensuite, utilisé la méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev pour discrétiser ce système, et un algorithme écrit en Matlab pour le résoudre numériquement.

Les plus importants résultats obtenus dans ce travail montre que :

- Le nombre de Reynolds à un effet déstabilisateur, et l'instabilité commence à partir d'un Reynolds critique.
- La diminution du rapport des rayons des deux cylindres $R1/R2$ repousse la valeur critique du Reynolds.
- La diminution du rapport des rayons a un effet stabilisateur

Conclusion générale

- Le nombre de Reynolds et le nombre d'onde critiques pour un écoulement annulaire sont des fonctions monotones du rapport rayon, définies dans le domaine allant de $Y=0$ (écoulement de Hagen poiseuille) jusqu'à $Y=1$ (écoulement de poiseuille plan).

En guise de perspective, plusieurs aspects restent encore à étudier concernant l'étude des seuils d'instabilité hydrodynamique dans les écoulements annulaire. Il est aussi intéressant d'élargir ce travail, citons à titre d'exemple : étude des seuils d'instabilité dans un écoulement de entre deux cylindres en présence d'un champ magnétique.

ANNEXES

Annexe A

Programmes informatiques écrit en MATLAB qu'on a adopté pour résoudre le système aux valeurs propres pour le problème de stabilité [19].

A.1. Construction des matrices de dérivation :

Les matrices de dérivation de Chebychev peuvent être générées à partir d'une fonction de Matlab appelé `Cheb .m`.

```
% CHEB compute D = differentiation matrix, x = Chebyshev grid
function [D,x] = cheb(N)
if N==0, D=0; x=1; return, end
x =cos(pi*(0:N)/N)';
c = [2; ones(N-1,1); 2].*(-1).^ (0:N)';
X = repmat(x,1,N+1);
dX = X-X';
D = (c*(1./c)') ./ (dX+(eye(N+1))); % off-diagonal entries
D = D - diag(sum(D')); % diagonal entries
```

A.2. Calcul de valeurs propres généralisé :

Les valeurs propres généralisées sont calculées sous Matlab grâce à la fonction appelée (`eig`) et le programme à entrer est le suivant :

```
% eigenvalues of Orr-Sommerfeld operator
R = %Reynolds number;
clf, [ay,ax] = meshgrid([.56 .04],[.1 .5]);
for N = %collocation points
% 2nd- and 4th-order differentiation matrices:
[D,x] = cheb(N); D2 = D^2; D2 = D2(2:N,2:N);
S = diag([0; 1 ./ (1-x(2:N).^2); 0]);
D4 = (diag(1-x.^2)*D^4 - 8*diag(x)*D^3 - 12*D^2)*S;
D4 = D4(2:N,2:N);
```

Annexes

```
b=% wave numner;
% Orr-Sommerfeld operators A,B and generalized eigenvalues:
I = eye(N-1);
A = matrix A;
B = matrix B;
ee = eig(A,B);
eig(A,B)
i = N/20-1;subplot('position',[ax(i) ay(i) .38 .38])
plot(ee, '.', 'markersize',12)
grid on, axis([-2 .2 -1 0]), axis square
title(['N = ' int2str(N) ' \lambda_{max} = ' ...
num2str(max(real(ee)), '%16.12f')]), drawnow
end
```

A.3. Calcul des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres obtenues, il est possible de calculer le vecteur propre correspondant à chaque une d'elle :

```
% nth eigenvector
clf
for N = %collocation points
R = Reynolds number;
[ay,ax] = meshgrid([.56 .04],[.1 .5]);
% 2nd- and 4th-order differentiation matrices:
[D,x] = cheb(N); D2 = D^2; D2 = D2(2:N,2:N);
S = diag([0; 1 ./ (1-x(2:N).^2); 0]);
D4 = (diag(1-x.^2)*D^4 - 8*diag(x)*D^3 - 12*D^2)*S;
D4 = D4(2:N,2:N);
b= wave number;
% Orr-Sommerfeld operators A,B and generalized eigenvalues:
I = eye(N-1);
A = matrix A;
```

Annexes

```
B = matrix B;

[V,Lam] = eig(A,B); % generalized ev problem
Lam = diag(Lam); ii = find(Lam<0);
V = V(:,ii); Lam = Lam(ii);
[foo,ii] = sort(Lam);
ii = ii(1);
lambda = Lam(ii);
v = [0;V(:,ii);0]; v = v/v(N/2+1);
eig(A,B)
xx = -1:.01:1; vv = polyval(polyfit(x,v,N),xx);
subplot(2,2,N/12), plot(xx,vv,'linewidth',1), grid on
title(sprintf('N = %d eig = %15.10f',N,lambda))
end
```


Annexe B

Discrétisation spatiale : méthode spectrale, généralité et collocation.

Les problèmes différentiels associés à l'étude de stabilité linéaire locale ou globale sont discrétisés par une méthode spectrale. Nous allons dans cette section détaillée plus rigoureusement, la méthode spectrale choisie. Nous nous plaçons dans un cadre général avec :

$$LH - f = 0 \quad (\text{B.1})$$

où L est un opérateur différentiel, et f le terme source. De manière à résoudre numériquement l'équation (B.1), nous discrétisons alors la quantité H , solution de (B.1). Par commodité, la quantité H ne dépend ici que d'une unique variable, notée x . H est alors approchée par H_N , via les N premiers termes d'une série, de la manière suivante :

$$H_N = \sum_{k=0}^N \hat{H}_k \varphi_k(x) \quad (\text{B.2})$$

Les $\varphi_k(x)$ sont appelées les fonctions de base formant ainsi une base de l'espace vectoriel considéré et \hat{H}_k , les coefficients d'expansion qui sont à déterminer. Nous définissons un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les fonctions de base sont choisies de sorte à former une base orthogonale, liée à ce produit scalaire :

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = c_k \delta_{k,l} \quad (\text{B.3})$$

avec c_k une constante et $\delta_{k,l}$ le symbole de Kronecker. Les méthodes spectrales sont alors définies à l'aide d'une quantité, appelée le résidu R_N , qui va permettre de minimiser l'erreur globalement, entre H_N et H :

Annexes

$$RN(x) = H - HN \tag{B.4}$$

ou encore $RN(x) = LHN - f$

L'idée consiste donc à annuler le résidu, via une base de fonctions tests, notées ϕ_i :

$$\langle RN; \phi_i \rangle_s = 0 \tag{B.5}$$

Avec $i \in I_N$, où la dimension de l'espace IN dépend de la méthode spectrale employée. Le choix de la méthode spectrale va ainsi reposer sur la sélection des fonctions tests. Trois types de méthode existent, Galerkin et Tau, où les fonctions tests sont égales aux fonctions de bases, puis les méthodes de collocation où $\phi_i = \delta(x - x_i)$, avec les points de collocation x_i .

Dans ce dernier cas, le résidu est par conséquent strictement égal à zéro aux points de collocation. Nous nous orientons dans ce mémoire sur cette dernière méthode. Nous résolvons ainsi le problème (B.1) directement dans l'espace physique.

Détaillons maintenant le choix des fonctions de base et de la grille des points de collocation.

A la vue du choix des fonctions tests, les H_k sont pris comme étant les valeurs de H aux points de collocation x_i , avec ici $I_N = \{0, 1, \dots, N\}$. De ce fait, nous obtenons les fonctions de base $\varphi_k(x)$ qui vérifient l'égalité suivante :

$$H_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) H(x_k), \quad \begin{cases} \varphi_k = \frac{\bar{w}(x)}{(x - x_k) \bar{w}'(x_k)} \\ \bar{w}(x) = A \prod_{i=0}^N (x - x_i), A \neq 0 \end{cases} \tag{B.6}$$

On reconnaît ici la formule d'interpolation de Lagrange puisque $\varphi_k(x)$ peut se reformuler de la manière suivante :

Annexes

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^N \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}, \quad \begin{cases} \frac{\bar{w}(x)}{(x-x_k)} = A \prod_{i=0, i \neq k}^N (x-x_i) \\ w'(x_k) = A \prod_{i=0, i \neq k}^N (x_k-x_i) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

De ce fait, le système différentiel (B.1) peut être discrétisé à l'aide d'opérateurs de dérivées qui sont obtenus via ce polynôme. En effet, il est évident que :

$$\frac{d}{dx} = \sum_{k=0}^N \varphi'(x) H(x_k) \quad (\text{B.8})$$

ce qui en chaque point du maillage $x = x_i$, s'écrit :

$$\frac{d}{dx}(H_N)(x_i) = \sum_{k=0}^N \varphi'(x_i) H(x_k), \quad i = \{0, 1, \dots, N\} \quad (\text{B.9})$$

Posons $H = (H(x_0), (x_1), \dots, (x_N))$, le vecteur solution, composé des valeurs de H aux points de collocation. Soit l'opérateur matriciel D de taille $(N+1) \times (N+1)$, dont les éléments d_{ij} sont tels que :

$$d_{ij} = \varphi_j'(x_i), \quad 0 \leq i, j \leq N \quad (\text{B.10})$$

avec

$$\varphi_j(x) = \frac{w'(x)}{(x-x_j)w'(x_j)} - \frac{\bar{w}(x)}{(x-x_j)^2 w'(x_j)} \quad (\text{B.11})$$

La dérivée de H aux $N+1$ points du maillage est alors obtenue par une simple multiplication de l'opérateur D :

$$(H)' = DH; \tag{B.12}$$

Il est trivial de remarquer que :

$$H'' = D^2 H; \tag{B.13}$$

La rigidité de ce type de méthode réside dans le traitement de l'erreur commise entre la fonction H et son polynôme d'interpolation (H_N) , qui est de la forme :

$$H(x) = (H_N)(x) + \frac{H^{N+1}(\xi) \bar{w}(x)}{(N+1)! A}, \quad \xi = \xi(x) \in [a, b] \tag{B.14}$$

Pour obtenir une précision suffisante, il faut minimiser le second terme du membre de droite de (B.14). Nous ne pouvons bien sûr pas modifier la fonction H , ni augmenter le nombre de points du maillage indéfiniment. Notre seul degré de liberté réside dans le choix du polynôme $\bar{w}(y)/A$, c'est-à-dire dans la grille qui va servir à l'interpolation. Il a été montré que cette erreur était minimale pour des grilles basées sur des polynômes de Chebychev (grilles dites de Gauss ou de Gauss-Lobatto), dont les points correspondent aux racines de ces dits polynômes. Ce choix est appelé classiquement méthode de collocation spectrale Chebychev.

Collocation spectrale Chebychev.

Soit la base de polynômes de Chebychev définis par : $T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} y)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ et $y \in [-1, 1]$. Les $N + 1$ extrema de T_N définissent les points dits de Gauss-Lobatto de la manière suivante :

$$y_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \text{Pour } i = 0, \dots, N \tag{B.14}$$

Ou $y_i \in [-1; 1]$. L'approximation d'une fonction H sur $[-1; 1]$ est donc réalisée par le polynôme f_N :

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^N C_i(x) T_i(x) \tag{B.15}$$

Annexes

T_i représentent les polynômes de Chebychev sur lesquels est basé le développement précédent, ils sont définis par des simples formules :

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad n = 0 \dots N+1 \quad (\text{B.16})$$

Les premiers polynômes sont donc :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Les coefficients d'expansion sont alors déterminés par les formules des polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$C_i(y) = \left(\frac{1-x^2}{x-x_i} \right) (-1)^{i+1} \frac{T'_N(x)}{N^2 a_i} \quad (\text{B.17})$$

La dérivée de $f_N(x)$ est égale à celle de son développement: $f'_N(x_i) = f'(x_i)$

Or les dérivées des polynômes de Chebychev sont telles que:

$$T'_0(x) = 0$$

$$T'_1(x) = 1 = T_0(x)$$

$$T'_2(x) = 4x = 4T_1(x)$$

$$T'_{n+1}(x) = 2(n+1)T_n(x) + \frac{n+1}{n-1}T_{n-1}(x) \quad \text{Pour } n \geq 2$$

T_N désigne le polynôme de degré N de Chebychev ; la dérivée première de la fonction f est ainsi déterminée par l'opérateur de dérivation D :

Annexes

$$D_{ij} = C'_j(x_i) \quad \text{Pour } 0 \leq i, j \leq N \quad (\text{B.18})$$

$$D_{Nij} = \left\{ \begin{array}{l} D_{00} = \frac{-(2N^2+1)}{6} \\ D_{ii} = \frac{-y_i}{2(1-y_i^2)} \\ D_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} q_i}{y_i - y_j q_j} \\ D_{NN} = \frac{(2N^2+1)}{6} \\ q_n = \begin{cases} 2 \rightarrow n = 0 \\ 1 \rightarrow n = (1 \dots N-1) \\ 2 \rightarrow n = N \end{cases} \end{array} \right.$$

Les matrices de dérivation d'ordre i , $D_N^{(i)}$, s'obtiennent simplement en tant que produits (i fois) de la matrice de dérivation première $D_N^{(1)}$ du jeu de points de collocation considéré.

Références bibliographique

[1] P. G. Drazin Introduction to Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Sep 9, 2002

[2] G. I. TAYLOR, 1923 stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders. Phil. Trans. Soc. A223, 289-343.

[3] I. Newton, Principia: Vol. 1 The Motion of Bodies, F. Cajori, ed., U. Calif. Press, Berkeley, 1934, pp. 385-386.

[4] G. G. Stokes, Mathematical and Physical Papers, vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1880, pp. 102-104.

[5] A. Mallock, "Determination of the viscosity of water," Proc. Royal Soc. London, 45:126-132, 1888.

[6] M. M. Couette, "Études sur le frottement des liquides," Ann. Chim. Phys. 6, Ser. 21, 433-510, 1890.

[7] Potter M.C., 1966, Stability of plane Couette-Poiseuille flow, J. Fluid Mech. 24, 609

[8] Lessen. 1968, Stability of pipe Poiseuille flow, Phys. Fluids. 11,

[9]. J. E. Mott & D. D. Joseph, 1968, Stability of parallel flow between concentric cylinders, Physics of fluid, vol 11, number 10.

[10] Salwen, H. & Grosch, C. E. 1972, The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section, J. Fluid Mech. 54, 93-112.

[11] Salwen, H., Cotton, F. W. & Grosch, C. E. 1980, Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe, *J. Fluid Mech.* 98, 273-284.

[12] M., Sadler, S. G. & Liu, T. Y. 1968, Stability of pipe Poiseuille flow, *Phys. Fluids*

[13] Huang, L. M. & Chen, T. S. 1974, Stability of the developing laminar pipe flow. *Phys. Fluids*.

[14] Vijay K. Gark, *Journal of the physical society of Japan*, Vol 49, No 04, October 1980.

[15] Gustavsson, L. H. 1989, Direct resonance of non-axisymmetric disturbances in pipe flow, *Studies in Applied Mathematics* 80, 95-108.

[16] Sadeghi Venus M. and Higgins Brain G., 1991, Stability of sliding Couette-Poiseuille flow in an annulus subject to the axisymmetric and non-axisymmetric disturbances, *Phys. Fluids A* 3(9).

[17] Andrew G. Walton, 2004, Stability of circular Poiseuille–Couette flow to axisymmetric disturbances, *J. Fluid Mech*, vol.500, pp. 169-210.

[18] S.A. Orszag, Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries : accuracy, *J. Comput. Phys.* 54 468-488, 1984.

[19] L. N. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, (2000)

Résumé :

Ce travail concerne l'étude des seuils d'instabilité hydrodynamique dans un écoulement entre deux cylindres concentriques. Les perturbations sont considérées comme infinitésimales et axisymétrique (analyse de stabilité linéaire), et les résultats sont donnés sous forme de courbe neutre en tenant compte de l'influence de la variation du rapport rayon. La méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev est employée pour résoudre le système aux valeurs propres généralisées. Les résultats montrent les formes des vecteurs propres pour les différents états de l'écoulement.

Mots clés : Stabilité linéaire ; écoulement annulaire ; instabilité Hydrodynamique.

Abstract:

This work concerns the study of hydrodynamic instability thresholds in a flow between two concentric cylinders. The perturbations are taken as infinitesimal and axisymmetric (linear stability analysis), and the results are given as a neutral curve taking into account the influence of the variation of the ratio radius. The spectral collocation method based on Chebychev polynomials is used to solve the generalized eigenvalues problem obtained by imposing boundary conditions on the stability equations. The results show also the forms of the eigenvectors for the different states of the flow.

Key words: Linear stability; annulus; Hydrodynamic instability.

