

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. Mira de Béjaïa



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en  
Mathématiques Financières

Thème :

---

*Analyse de sensibilité et quantification de l'incertitude dans les  
modèles de risque classiques.*

---

Réalisé par :

KAHINA AIT CHAALAL & KARIMA GHODBANE

Devant le jury composé de :

Président	M <sup>r</sup> ASLI Laarbi	M.C.B	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteurs	M <sup>me</sup> BACHI Katia	M.C.B	U. A/Mira Béjaïa.
	M <sup>r</sup> ABBAS Karim	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examinatrice	M <sup>elle</sup> LAKAOUR Lamia	Docteur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineur	M <sup>r</sup> SOUFIT Massinissa	M.C.B	U. A/Mira Béjaïa.

Béjaïa, Septembre 2021.

## \* Remerciements \*

On tient d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Nous exprimons nos profondes gratitude et respectueuse reconnaissance à notre encadreurs et co-promoteur : *Pr K.ABBAS et Mme K.BACHI*

Pour leurs rigueurs et leurs disponibilités durant notre préparation de ce mémoire.

On souhaiterait remercier l'équipe pédagogique *Mr M.SOUFIT, Mr F.CHORFA et Mr S.OUAZINE* pour leurs générosités et leurs patiences dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges.

On exprime notre grand respect aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nos remerciements à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

*Karima et Kahina*

## \* DÉDICACES \*

*A toi qui me manque ! À la mémoire de mon cher papa **GHODBANE BACHIR** ! Le meilleur des pères, ce travail est dédié pour toi, que tu m'as toujours poussé et motivé dans mes études. J'aurais aimé que tu sois à mes côtés ce jour, que ce travail soit une prière pour le repos de ton âme. **Allah yarhmak.***

*A toi la lumière de mes jours, ma **chère maman SORAYA**, qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études, pour son soutien, les sacrifices, et tous les efforts. Je tiens à toi témoigné mon amour. Que dieu vous protège pour nous.*

*A toi mon bras droit,  
cher frère **YOUNES.***

*A mes chères sœurs :  
**SAMIRA, HIDAYETTE, HADJER.***

*A mon adorable binôme :  
**KAHINA** et toute sa famille*

*A toute ma famille, et mes amis, que j'ai connu jusqu'à maintenant.*

***AU** nouveau bébé **LAYANE**,  
que dieu te garde pour tes parents.*

*Sans oublier la famille **YAHIAOUI.***

*Merci pour votre amour. Que dieu vous donne une longue et joyeuse vie.*

***Merci à tous.***

***Karima***

# \* DÉDICACES \*

*Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents **BOUKHALFA** et **NADIA** que j'aime énormément qui n'ont pas cessé de m'encourager pour achever mon travail. Je souhaite qu'ils trouvent dans ce travail ma reconnaissance pour leurs sacrifices et leur soutien permanent.*

*A mon cher frère : **ISMAIL** et sa femme **KARIMA***

*A ses adorables enfants : **IBRAHIM, IKRAM***

*A ma chère sœur : **MOUNIA** et son mari **NORDINE***

*A ses adorables enfants : **YOUNES, ANFEL, AMIRA, HAROUNE, GHANOU***

*A ma chère sœur : **MERIEM** et son mari **MOUSTAPHA***

*A ses adorables enfants : **AHLAM, LILIA, AYA, MALAK, RAFIK***

*Et aussi aux adorables enfants : **FARAH, FAYEZ, FARIEL, FIDIA***

*A mon adorable binôme : **KARIMA** et toute sa famille*

*A toute ma famille, et mes amies : **RAHIMA, NADJET***

*A mon très cher ami : **BILLAL***

*Merci à tous.*

*Kahina*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des Matières</b>	<b>I</b>
<b>Table des Figures</b>	<b>III</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorie de ruine et modèle de risque classique</b>	<b>5</b>
1.1 Théorie de ruine . . . . .	5
1.2 Modèle individuel et Modèle collectif . . . . .	6
1.2.1 Modèle individuel . . . . .	6
1.2.2 Modèle collectif . . . . .	7
1.3 Processus de renouvellement . . . . .	7
1.3.1 Processus de Poisson . . . . .	7
1.3.2 Processus de Poisson composé . . . . .	8
1.4 Modèle classique de la théorie de ruine . . . . .	8
1.4.1 Processus de réserve et de surplus . . . . .	8
1.4.2 Probabilité de ruine . . . . .	9
1.5 Chargement de sécurité . . . . .	10
1.5.1 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini . . . . .	11
1.5.2 Autres approches . . . . .	14

<b>Conclusion</b>	<b>15</b>
<b>2 Analyse d'incertitude et de sensibilité</b>	<b>16</b>
2.1 Analyse d'incertitude . . . . .	16
2.1.1 Différentes sources d'incertitude . . . . .	17
2.2 Analyse de sensibilité . . . . .	18
2.2.1 Analyse de sensibilité locale . . . . .	19
2.2.2 Analyse de sensibilité globale . . . . .	20
2.2.3 Indices de Sobol . . . . .	21
2.2.4 Estimation des indices de Sobol . . . . .	25
<b>3 Estimation des indices de sobol dans les modèles de risque classique</b>	<b>31</b>
3.1 Modèle de risque classique . . . . .	32
3.1.1 Remboursements de loi exponentielle . . . . .	33
3.1.2 Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine . . . . .	34
3.1.3 Approximation à queue lourde . . . . .	47
<b>Conclusion Générale</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

## TABLE DES FIGURES

1.1	Description du modèle de base en assurance . . . . .	9
3.1	Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi normale. . . . .	41
3.2	Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi normale. . . . .	41
3.3	Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi uniforme. . . . .	42
3.4	Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi uniforme. . . . .	42
3.5	Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi normale. . . . .	45
3.6	Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$ avec la loi normale. . . . .	46
3.7	Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi uniforme. . . . .	46
3.8	Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$ avec la loi uniforme. . . . .	47
3.9	Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi normale. . . . .	49

3.10 Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des récla- mations avec la loi normale. . . . .	50
3.11 Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi uniforme. . . . .	50
3.12 Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des récla- mations avec la loi uniforme. . . . .	51
3.13 Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi normale. . . . .	54
3.14 Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$ avec la loi normale. . . . .	54
3.15 Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi uniforme. . . . .	55
3.16 Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$ avec la loi uniforme. . . . .	55



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

**E**n actuariat, la théorie de ruine consiste à la modélisation mathématique et à l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance. Le concept de la théorie de ruine se comprend comme étant la survenance d'un scénario défavorable pouvant conduire à l'impossibilité pour la société d'assurance de faire face à certains de ses engagements, aussi bien envers ses assurés que ses actionnaires, voir à cessé son activité pour cause d'insolvabilité.

L'un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance est la modélisation stochastique. L'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond à la notion mathématique de probabilité de ruine. Le premier but de la théorie de ruine a donc logiquement été d'évaluer la probabilité de la ruine, soit la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise. La problématique la plus souvent posée dans ce domaine est le calcul de la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique du zéro. Cette mesure est une caractéristique très importante mais qui ne possède malheureusement pas des formules explicites dans la plupart des modèles de risque. Néanmoins, elle peut être trouvée en utilisant la formule bien connue de Pollaczek-Khinchine.

Lors de la construction et la modélisation de l'évolution de la richesse de la compagnie

d'assurance, les valeurs des paramètres du modèle sont généralement considérés comme des constantes, or la connaissance des valeurs exactes de ces paramètres étant souvent imparfaites, ils sont donc entachés d'incertitude. En science actuarielle, une nouvelle tendance de l'étude consiste à intégrer l'incertitude des paramètres au modèle de risque.

L'analyse de sensibilité de la probabilité de ruine est une technique utilisée pour étudier comment la variabilité des paramètres d'entrées se répercute sur celle de la sortie. L'analyse de sensibilité doit permettre de séparer l'action de chaque paramètre individuellement et présenter graphiquement les résultats, de manière à classer ces paramètres entre eux. La production d'un rapport d'étude de sensibilité est aujourd'hui entièrement automatisable dans tous les domaines, grâce aux outils de simulation et aux méthodes existantes. L'ingénieur chargé de l'étude rédigera ensuite ses conclusions en se basant sur une bonne compréhension du système et une analyse détaillée de l'ensemble des résultats.

Selon la problématique, l'étude de sensibilité permet de :

- Trouver le bon compromis entre plusieurs solutions,
- Décider sur quels paramètres jouer en priorité pour modifier le comportement d'un système,
- Quantifier l'influence de perturbations extérieures et de les intégrer éventuellement dans le système,
- Spécifier son problème de commande (modèle standard) de manière judicieuse.

Au cours des dernières années, des différentes techniques d'analyse de sensibilité ont été proposées pour calculer les indices de sensibilité locaux et globaux pour la conception de l'incertitude. Les principales techniques d'analyse de sensibilité sont classées en deux catégories : analyse de sensibilité locale et analyse de sensibilité globale. Dans ce travail, on s'intéresse particulièrement aux méthodes d'analyse de sensibilité globale qui sont basées sur l'étude de la variance appelée ANOVA (Analysis Of Variance). L'ANOVA d'une mesure de sortie permet de caractériser l'influence des entrées sur la variabilité de la mesure de sortie.

La méthode de Sobol est la méthode la plus générale d'analyse d'influence reposant sur la décomposition de la variance fonctionnelle. Cette technique développée par le mathématicien Russe I. M. Sobol permet de prendre en compte toutes les interactions entre les  $n$  grandeurs d'entrée, en n'ayant aucune connaissance sur l'expression du modèle de la mesure de sortie. Ainsi nous allons obtenir l'indice de sensibilité total pour chaque grandeur d'entrée. Sobol s'est inspiré de divers travaux de statistique il les a généralisés pour fournir une mise en oeuvre directe du concept de la méthode de Monte Carlo. En utilisant l'indice de Sobol, on peut étudier et quantifier comment la probabilité de ruine dans l'espace des paramètres est influencée entre deux ou plusieurs paramètres (les indices de second ordre et plus).

Les indices de Sobol peuvent parfois être calculés formellement lorsque la fonction du modèle étudié est connue. En revanche, ce n'est pas toujours possible de les calculés formellement, si les équations du modèle sont complexes et les paramètres sont nombreux. Par conséquent, il est donc indispensable de pouvoir les estimer.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes d'estimation des indices de sensibilité [9, 17, 19], à savoir les méthodes basées sur des échantillons Monte Carlo développées par Sobol [35]. Cette dernière est la plus simple à mettre en oeuvre et la plus couramment utilisée en analyse de sensibilité, la méthode Fast (Fourier Amplitude Sensitivity Test), développée par Cukier et al. [9], repose sur la décomposition de Fourier, son principal intérêt et de réduire les décompositions multi-dimensionnelles par des décompositions unidimensionnelles, ce qui revient à réduire le coût de calcul des intégrales multiples en les remplaçant par une intégrale unidimensionnelle. On se restreint dans ce mémoire à détailler la méthode de Monte Carlo basique pour l'estimation des indices de sensibilité.

La méthode Monte Carlo est une méthode numérique est utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution d'un échantillon à partir d'un raisonnement mathématique. Elle est basée sur le tirage de nombres aléatoires, le principe de l'estimation des indices de sensibilité, selon la méthode de Sobol, est de simuler deux échantillons à partir des grandeurs d'entrée, puis d'estimer la variance conditionnelle par rapport à chaque grandeur d'entrée considérée en combinant ces deux échantillons. Le principal inconvénient de la méthode de

Sobol est son temps de calcul, elle nécessite une taille d'échantillon suffisamment grande pour assurer la convergence des indices selon la complexité du modèle de mesure. Finalement, le grand avantage de l'analyse de sensibilité avec la méthode de Sobol est qu'elle permet de ne faire aucune hypothèse sur les propriétés de la fonction du modèle mathématique, elle est adaptée quelque soit le modèle (non-linéaire, non-monotone, code de calcul, ...).

L'objectif principal de ce document est de fournir une analyse de sensibilité basée sur l'estimation des indices de sobol pour les mesures de sorties des modèles de risque. En particulier, on va analyser la sensibilité de la probabilité de ruine par rapport à certains paramètres d'entrée. Cette analyse va permettre de quantifier l'incertitude dans la probabilité de ruine qui résulte du paramètre le plus influent.

Ce manuscrit est composé de trois chapitres, d'une conclusion générale et d'une bibliographie.

- Le premier chapitre présente les modèles et des résultats de la théorie de la ruine, on s'intéresse à des méthodes mathématiques d'approximation des différentes quantités d'intérêts.
- Le deuxième chapitre concerne l'analyse d'incertitude et l'analyse de sensibilité, nous discutons la notion d'incertitude de modèle, par la suite on introduit les différents indices de sensibilités, ainsi que leurs méthodes d'estimation.
- Dans le troisième chapitre, nous donnons une application dans les modèles de risque classique, on estime les indices de Sobol de la probabilité de ruine, avec deux lois de probabilité pour la quantité des réclamations, afin de déterminer l'influence des paramètres d'entrée  $\lambda$  et  $\mu$  sur la probabilité de ruine  $\psi(\lambda, \mu)$ . Et nous terminons par caractériser statistiquement la probabilité de ruine induite, et ce en estimant la moyenne, variance, coefficient d'aplatissement (kurtosis), et le coefficient d'asymétrie (skewness).

# CHAPITRE 1

## THÉORIE DE RUINE ET MODÈLE DE RISQUE CLASSIQUE

### Introduction

**E**n assurance, on qualifie le risque de ruine la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants de réclamations payées, devienne négative à un certain temps. À ce moment, on dit que la ruine apparaît du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou des sinistres trop importants à couvrir.

Dans ce premier chapitre, on présente la théorie de ruine d'une manière générale (modèle individuel et modèle collectif), Par la suite, on introduit les modèles de risques classiques (processus de réserve et surplus), On finit le chapitre par présenter comment mesurer la rentabilité de la compagnie (chargement de sécurité).

### 1.1 Théorie de ruine

La théorie de la ruine a pris naissance en Suède au début du 20<sup>ème</sup> siècle dans les travaux de Lundberg (1903) [21], Cette théorie est un domaine des sciences actuarielles qui modélise

le surplus d'un portefeuille d'assurance par un processus stochastique  $U = \{U(t), t \geq 0\}$ , ou le surplus au temps  $t$  est donné par :

$$U(t) = u + Ct - S(t),$$

- .  $u$  : la réserve initiale de la compagnie.
- .  $C$  : flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.
- . Le choix de  $S(t)$  détermine le processus  $U(t)$ .
- .  $S(t)$  : le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ .

## 1.2 Modèle individuel et Modèle collectif

La charge globale de sinistres peut s'écrire comme la somme, sur le nombre de polices, du montant de sinistre total engendré par chaque police ou encore comme la somme, sur le nombre de sinistres, des montants de chaque sinistre. On appelle modèle individuel la première approche et modèle collectif le second [6].

### 1.2.1 Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge totale générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant  $N$  contrats est définie par la formule suivante :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

- .  $X_i$  variable aléatoire positive qui caractérise le montant de l'ensemble des sinistres subit par l'assuré  $i$ .

On a supposés que la variable aléatoire  $X_i, i = \overline{1, N}$  sont des variables aléatoires indépendantes, mais pas forcément de la même loi de probabilité [6].

## 1.2.2 Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subit par un portefeuille donné, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tous assuré. La charge totale est définie par :

$$S^{col} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

- .  $X_i$  représente le montant de la  $i^{\text{ème}}$  perte.
- .  $N(t)$  représente le nombre de perte.

On a supposé que la variable aléatoire  $X_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  sont des variables aléatoires indépendantes et la variable  $N$  est indépendante des  $X_i$  [6].

## 1.3 Processus de renouvellement

### 1.3.1 Processus de Poisson

**Définition 1.5** : Un processus de comptage est dit processus de Poisson si :

$$Pr[N_t = k] = \begin{cases} o(dt) & \text{si } k \geq 2; \\ \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 1; \\ 1 - \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

où  $o(t)$  est une fonction tendant plus vite vers 0 que l'identité, i.e., telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Le coefficient  $\lambda$  est dit taux du processus ou intensité du processus.

On note  $P[N_t = k] = P_k(t)$ .

**Remarque 1.1** : Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et à accroissements stationnaires.

### 1.3.2 Processus de Poisson composé

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

$\{N(t); t \geq 0\}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .  $\{X_1, X_2, \dots\}$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de distribution commune  $F$ . La suite aléatoire  $(X_t)_{t \geq 1}$  et le processus  $\{N(t); t \geq 0\}$  sont indépendants. Le processus aléatoire  $\{S(t); t \geq 0\}$ , défini par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

est appelé processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et de distribution  $F$ .

On obtient également par conditionnement sur  $N$  les premiers moments de  $S$ .

## 1.4 Modèle classique de la théorie de ruine

Le modèle le plus connu ou classique de la théorie de ruine représente le fonctionnement d'une compagnie d'assurance de la manière suivante, on suppose que la société d'assurance encaisse des cotisations de ses assurés (appelés primes) de manière continue, à raison de  $c$  unité de comptes par unité de temps (exemple :  $1000DA/h$ ).

Elle dispose d'une réserve initiale  $u$  pour absorber un éventuel excès de sinistralité et doit indemniser ses assurances pour les sinistres qui la concernent.

### 1.4.1 Processus de réserve et de surplus

On note  $\{R(t) : t \geq 0\}$  le processus de réserve à la forme suivante [41] :

$$R(t) = u + c t - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, \tag{1.1}$$

- $(X_i)_{i \in N^*}$  suite de v.a. positives i.i.d. égales aux montants des sinistres.
- $u$  : la réserve initiale de la compagnie.
- $c$  : flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.



- On note par la suite  $\{N(t)_{t \geq 0}\}$  le processus qui représente les pertes agrégées de la compagnie avec

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i,$$

- $N(t)$  : est dans ce modèle décrit par un processus de poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .
- Les  $(X_i)_{i \in N^*}$  : forment une suite de variables aléatoire indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus de poisson  $N(t)$ .
- On a le processus de surplus  $\{S(t); t \geq 0\}$  :

$$S(t) = u - R(t).$$

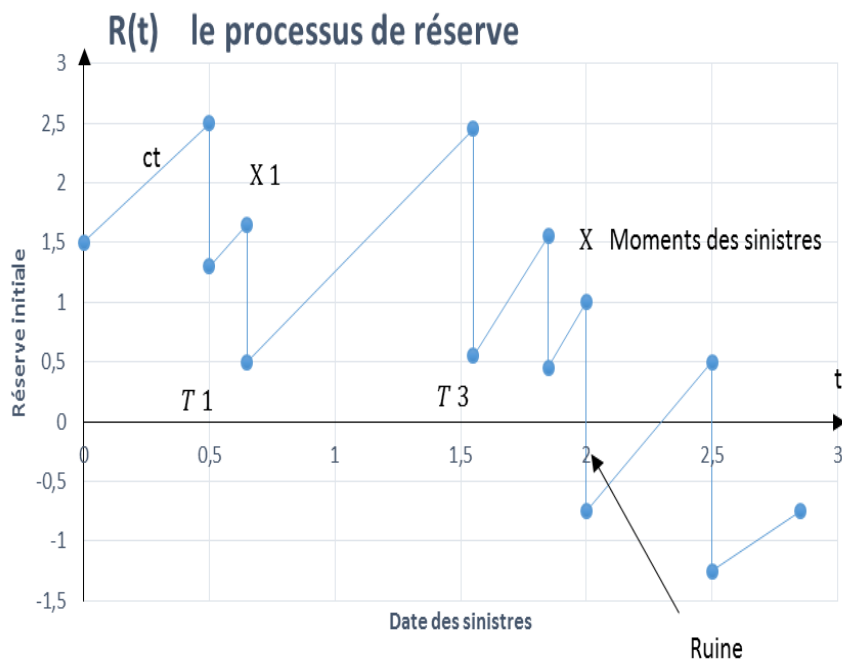


FIGURE 1.1 – Description du modèle de base en assurance

### 1.4.2 Probabilité de ruine

Le risque de faillite des sociétés d’assurances est un problème primordial. Par conséquent, il est impératif de le prendre en compte et anticiper la faillite en calculant la probabilité de

ruine.

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine [18, 20, 22, 40].

**Définition 1.1 :** L'instant de la ruine, noté  $\tau$  associé à une réserve initiale  $u$ , est défini par :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0; S(t) > u\}.$$

**Définition 1.2 :** La probabilité de ruine ultime ou probabilité de ruine à horizon de temps infini notée  $\psi$ , est définie par :

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 : R(0) = u).$$

**Définition 1.3 :** La probabilité de ruine avant l'instant  $T$  ou probabilité de ruine à horizon de temps fini est définie par :

$$\psi(u, T) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u).$$

**Définition 1.4 :** La probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine, notée  $\phi$ , est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T).$$

## 1.5 Chargement de sécurité

On appelle chargement ou coefficient de sécurité de la compagnie, mesurant la rentabilité de cette dernière, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu,$$

La constante  $\theta$  définit le chargement de sécurité de la compagnie. Il mesure la rentabilité de la compagnie.

Le coefficient  $\lambda\mu$  est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime  $c$  supérieur à  $\lambda\mu$  pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnités payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante [1] :

**Propriété du coefficient de sécurité [4]**

\* Si  $\theta > 0$ , alors, presque sûrement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t) = +\infty,$$

et

$$\phi(u) \neq 0,$$

\* Si  $\theta < 0$ , alors, presque sûrement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t) = -\infty,$$

et

$$\psi(u) = 1.$$

L'activité donc ce cas n'est donc pas rentable.

### 1.5.1 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini

Le théorème suivant fournit une expression de la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(u)$  dans le cas du modèle de risque classique.

***Théorème 1.1*** [33]

Pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\psi(u) = (1 - \lambda\mu/c) \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda\mu/c)^i \overline{(F_Z^s)^{*i}}(u), \quad (1.2)$$

où

$\overline{(F_Z^s)^{*n}} = 1 - (F_Z^s)^{*n}$  est la  $n^{eme}$  convolution de  $F_Z^s$  tel que :

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{u} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy \quad , \quad x > 0$$

### Le cas du Modèle classique de Lundberg (P/P)

Le modèle de Lundberg, appelé modèle  $P/P$ , est un cas particulier du modèle de risque classique. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des moments des réclamations, c'est-à-dire,

$$F_Z(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\mu}\right) \quad , \quad y \geq 0,$$

où

- $Z$  est la variable aléatoire qui génère le montant des réclamations.
- $F_Z$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z$ .

En utilisant la formule (1.2), nous allons déduire l'expression exacte de  $\psi(u)$  pour le modèle de risque de Lundberg ( $P/P$ ).

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \overline{(F_Z^s)^{*i}}(u) \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\delta c}$$

Pour des montants de réclamations exponentielles de paramètre  $\delta$ , nous avons :

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1 - \exp(-\delta u) & \text{si } u \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Calculons

$$\begin{aligned}
 F_Z^s(u) &= \delta \int_0^u (1 - F_Z(y)) dy \quad , \quad x \geq 0 \\
 &= \delta \int_0^u \exp(-\delta y) dy \\
 &= \delta \left( \frac{-1}{\delta} \right) [\exp(-\delta y)]_0^u \\
 &= 1 - \exp(-\delta u)
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_Z^s(u) = F_Z(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R}$$

$(F_Z^s)^{*n}$  représente la  $n^{\text{ème}}$  convolution de  $(F_Z^s)$ , puisque nous avons l'indépendance des  $n$  variables aléatoires  $Z_i$ ,  $\{i = 1, \dots, n\}$ .

Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer  $(F_Z^s)^{*n}$ , où  $f_z$  est la densité de probabilité des montants des réclamations  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi,

$$L_{f_z}(x) = \int_0^\infty f_z(t) \exp(-xt) dt = \int_0^\infty \delta \exp(-\delta - x)t dt = \frac{\delta}{\delta + x},$$

d'où

$$L_{(f_z)^n}(x) = \left[ \frac{\delta}{\delta + x} \right]^n.$$

En se référant aux tables des transformées de Laplace [32] nous trouvons que

$$(f_z)^n(x) = \frac{\delta(\delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\delta x) \quad , \quad x \geq 0,$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang( $\delta, n$ ) [34] dont la fonction de répartition est donnée par :

$$(f_z)^n(x) = (F_Z)^n(x) = \frac{\Gamma(n, \delta x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\delta x) \frac{(\delta x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes, de distributions exponentielles de même paramètre  $\delta$  est une loi d'Erlang( $\delta, n$ ). Alors,

$$\overline{(F_Z^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\delta x) \frac{(\delta x)^k}{k!}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\delta u) \frac{(\delta u)^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) \exp(-\delta u) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho) \exp(-\delta u) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1 - \rho} \\ &= \rho \exp(-\delta u) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \delta u)^k}{k!} \\ &= \rho \exp\left(-\delta + \frac{\lambda}{c}\right)u, \end{aligned}$$

finalement

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\delta c} \exp\left(-\delta + \frac{\lambda}{c}\right)u. \quad (1.4)$$

## 1.5.2 Autres approches

Il existe plusieurs autres approches pour évaluer la probabilité de ruine qui possède beaucoup de champs dans les modèles de risques. Et comme certains faits sont ignorés dans la modélisation stochastique, ces approches permettant de faire une meilleure considération des faits. Par exemple, la réaction entre les assureurs et les assurés dans la théorie des jeux. Pour cela, ils ont proposés plusieurs solutions d'estimation de la probabilité de ruine basés sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [36, 15], les représentations matricielles avec modèles markoviens (Asmussen et al [2]), la théorie des martingales et inégalités de probabilités (Kalashnikov [29]), les méthodes d'optimisation (De Vylde et al.

[12]), les transformations analytiques (De Vylder et al. [11]) et la théorie des distributions [39, 40].

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle classique de la théorie de ruine, connu comme le fondement théorique de la théorie du risque. En particulier, Nous avons détaillé le calcul de l'expression explicite de la probabilité de ruine à horizon infini, du modèle de Lundberg.

## CHAPITRE 2

# ANALYSE D'INCERTITUDE ET DE SENSIBILITÉ

## Introduction

L'analyse de sensibilité permet de hiérarchiser l'influence des entrées du modèle sur la variable de sortie. On pourra donc déterminer quelles sont entrées qui ont le plus influence sur la sortie et doivent être connues avec plus de précision.

Les approches globales visent une exploration des variations possibles des paramètres sans hypothèse a priori sur le code. Elles sont fondées sur le calcul d'indices représentant la contribution relative due à une variable ou à un groupe de variables d'entrée sur la quantité d'intérêt, qui est souvent la variance de la réponse  $Y$ .

### 2.1 Analyse d'incertitude

De nombreuses incertitudes sont associées à l'analyse des risques. Il est nécessaire de comprendre les incertitudes et leurs causes pour assurer une interprétation judicieuse des valeurs obtenues par le calcul de risque. L'analyse des incertitudes associées aux données, aux méthodes et aux modèles mathématiques utilisés pour identifier les dangers et analyser les risques impliqués joue un rôle important dans leur application. L'analyse des incertitudes



consiste à déterminer la variation ou l'imprécision des résultats du modèle qui découle de la variation collective des paramètres et des hypothèses utilisées pour définir le modèle. L'analyse de sensibilité est un domaine étroitement lié à l'analyse des incertitudes. L'analyse de sensibilité modélise la réaction d'un modèle aux changements des paramètres individuels de celui-ci.

### 2.1.1 Différentes sources d'incertitude

Les différentes sources d'incertitude peuvent être classées en trois catégories :

#### - L'incertitude structurelle

Cette incertitude surgit au moment du passage du phénomène réel au modèle mathématique. En effet, les modèles mathématiques sont une approximation de la réalité. Cette approximation est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices qui constituent des sources d'incertitude [14].

#### - L'incertitude numérique

Les modèles mathématiques sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles traduisant la variation dans le temps et/ou dans l'espace des échanges de quantité de mouvement, de masse ou d'énergie. Pour ces modèles, il n'existe généralement pas de solution analytique et nous avons recours à des solutions numériques. Ces solutions contiennent des imprécisions inhérentes à toute simulation numérique. Ces imprécisions sont dues au fait que nous approchons un système continu par un autre discret (dans l'espace et/ou dans le temps) [14].

#### - L'incertitude paramétrique

Les modèles contiennent souvent un nombre important de paramètres présentant des incertitudes importantes liées à leur estimation, tels que les constantes physiques, les valeurs initiales, les conditions aux limites, la géométrie initiale,.... On distingue alors l'incertitude aléatoire de l'incertitude épistémique. L'incertitude aléatoire provient de la variabilité naturelle des paramètres d'entrée du modèle. On l'explique parfois par l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète

plusieurs fois dans des conditions identiques une expérience. Alors que l'incertitude épistémique découle du manque de connaissance, telle que l'estimation des paramètres par le biais d'un échantillon ne contenant pas assez de mesures, ou un échantillon non représentatif. Cette incertitude peut être réduite en recueillant des informations supplémentaires.

Connaître l'influence des différents paramètres d'entrée et quantifier l'impact de leur incertitude sur la réponse du modèle constitue alors l'objet de la "propagation des incertitudes" (Saltelli et al 2006) [26].

## 2.2 Analyse de sensibilité

### Contexte

La question majeure qui se pose en effectuant l'analyse d'incertitude est : quelles sont les entrées qui contribuent le plus à l'incertitude en sortie. Autrement dit, si l'on souhaite réduire l'incertitude sur la sortie, quelles sont les entrées qu'il faudrait en priorité mieux caractériser ? L'analyse de sensibilité permet de répondre à ces interrogations.

Pour mener à bien une telle analyse, il est primordial d'utiliser un indicateur d'importance fiable et qui soit indépendant de la nature du modèle. Un tel indicateur doit être global, facile à interpréter et si possible peu coûteux à estimer. Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter quelques indices de sensibilité globaux. En particulier, nous nous focaliserons sur les indices basés sur la variance qui sont aussi appelés indices de Sobol.

L'analyse de sensibilité est un outil important pour les domaines d'applications qui utilisent un modèle numérique. Dans son ouvrage Saltelli [28] définit quatre objectifs de l'analyse de sensibilité :

- Les priorisations des facteurs (Factors prioritization) : Déterminer les variables à prendre en compte pour la réduction d'incertitudes afin de maximiser la réduction de l'incertitude de la quantité d'intérêt ;

- Les facteurs fixants (Factors fixing) : Déterminer les variables qui n'ont pas suffisamment d'influence sur l'incertitude du modèle et que l'on peut fixer dans un exercice de réduction d'incertitudes ;
- Le coupe de variance (Variance cutting) : Déterminer les variables à fixer pour réduire l'incertitude à une valeur donnée ;
- La cartographie des facteurs (Factors mapping) : Cartographier l'influence des variables en entrée selon un domaine de valeurs de la sortie.

### 2.2.1 Analyse de sensibilité locale

La technique d'analyse de sensibilité locale étudie essentiellement les variations de notre variable de sortie  $Y$  pour des petites variations de nos variables d'entrées  $X$  autour de valeurs locales  $x_i^0$ . Mathématiquement, l'analyse de sensibilité locale correspond au calcul des dérivées de la variable  $Y$  par rapport aux variables  $X$ . L'approche basée sur les dérivées a l'avantage d'être très efficace en temps de calcul sur ordinateur. Cependant, elle requiert beaucoup plus d'implications de la part de l'analyste qui doit préparer et coder l'algorithme. Comme le fait remarquer Saltelli [26], le problème fatal avec cette méthode c'est qu'elle est non efficace lorsque les intrants sont incertains ou que la linéarité du modèle est inconnue. Ainsi, si les dérivées sont efficace localement, elles le sont moins dans le cas de l'exploration d'un espace de solution surtout si le modèle est non linéaire. Pour le cas des modèles linéaires on peut extrapoler la propriété d'un point éloigné en fonction de la dérivée localement étudiée. D'après la thèse [19], l'auteur fait remarquer que la technique d'analyse de sensibilité locale est souvent un facteur, elle se limite aux alentours de la valeur d'un point d'intérêt particulier noté  $x_i^0$  calculant les différentes perturbations représentées par l'indice :

$$S_i = \frac{\delta_y}{\delta_{x_i}}(x_1^0, \dots, x_k^0). \quad (2.1)$$

Ainsi Turyani et al. [38] regroupent les avantages et inconvénients de l'analyse de sensibilité locale en 3 groupes :

- **Analyse et calibrage de modèle** : on peut avoir recours à une analyse locale pour étudier les effets des variables explicatives sur la variable réponse d'une part, et d'autre part, pour calibrer le modèle en identifiant un nombre maximum de variables pertinentes.
- **Analyse d'incertitude** : on reconnaît que, dans le cas de l'étude de la propagation des erreurs, l'analyse de sensibilité locale est moins efficace comparativement à l'analyse de sensibilité globale ; cependant on pense que son application est beaucoup plus aisée dans bien des cas.
- **Estimation des paramètres** : on retrouve souvent dans les méthodes d'estimation de paramètres lors de régressions des estimations de coefficients de sensibilité ce qui facilite d'avance l'analyse de sensibilité locale.

### 2.2.2 Analyse de sensibilité globale

Il existe une littérature foisonnante qui s'intéresse à l'analyse de sensibilité globale. Un état de l'art des méthodes est présenté dans [25] et rassemble les méthodes sous deux groupes :

- **Méthodes basées sur la régression** : l'analyse de sensibilité est donnée à partir de la régression linéaire entre les variables en entrée et les variables en sortie. Les principales limitations de ces méthodes, comme présentées dans [24], se résument en deux points : si le modèle n'est pas strictement monotone, la linéarisation n'est pas valable. Deuxième-

mement, la régression à tendance à sous-estimer les effets totaux qui proviennent de l'interaction entre les variables en entrée.

- **Méthodes basées sur la variance :** L'analyse de sensibilité est décrite à partir de la décomposition de la variance de la réponse du modèle comme la somme de la contribution de chaque variable en entrée, ainsi que toutes les combinaisons possibles d'interaction entre eux. En statistique, on les connaît sous le nom de ANOVA (ANalysis Of VAriance) [13], comme les indices de Sobol [34] ont été créés par cette méthode.

### 2.2.3 Indices de Sobol

Plaçons-nous désormais dans le cas d'une fonction  $f$  dont la forme analytique n'est pas connue. Pour apprécier l'importance d'une variable d'entrée  $X_i$  sur la variance de la sortie  $Y$ , nous étudions à combien la variance de  $Y$  décroît si on fixe la variable  $X_i$  à une valeur  $x_i^* : V(Y|X_i = x_i^*)$ . Le problème de cet indicateur est le choix de la valeur  $x_i^*$  de  $X_i$ , que l'on résout en considérant l'espérance de cette quantité pour toutes les valeurs possibles de  $x_i^* : E[V(Y|X_i)]$ . Ainsi, plus la variable  $X_i$  sera importante vis-à-vis de la variance de  $Y$ , plus cette quantité sera petite.

Etant donné la formule de la variance totale

$$V(Y) = V(E[Y|X_i]) + E[V(Y|X_i)],$$

nous pouvons utiliser de façon équivalente la quantité

$$V(E[Y|X_i]),$$

qui sera d'autant plus grande que la variable  $X_i$  sera importante vis-à-vis de la variance de  $Y$ . Afin d'utiliser un indicateur normalisé, nous définissons l'indice de sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  :

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}. \quad (2.2)$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre par Sobol [35], Il quantifie la sensibilité de la sortie  $Y$  à la variable d'entrée  $X_i$ , ou encore la part de variance de  $Y$  due

à la variable  $X_i$ .

Sobol [35] a introduit cet indice de sensibilité en décomposant la fonction  $f$  du modèle en somme de fonctions de dimensions croissantes :

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots p}(X_1, \dots, X_p) \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbb{E}[Y], \\ f_i(X_i) &= \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y], \\ f_{ij}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y|X_j] + \mathbb{E}[Y], \\ f_{ijk}(X_i, X_j, X_k) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k] - \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y|X_i, X_k] - \mathbb{E}[Y|X_j, X_k] \\ &\quad + \mathbb{E}[Y|X_i] + \mathbb{E}[Y|X_j] + \mathbb{E}[Y|X_k] - \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

**Théorème 2.1** : Décomposition de Sobol de la variance.

$$V = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1\dots p}, \quad (2.4)$$

où

$$\begin{aligned} V_i &= V(\mathbb{E}[Y|X_i]), \\ V_{ij} &= V(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j, \\ V_{ijk} &= V(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k, \\ &\dots \\ V_{1\dots p} &= V - \sum_{i=1}^p V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} V_{i_1 \dots i_{p-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi on peut définir **les indices de sensibilité de premier ordre** :

$$S_i = \frac{V_i}{V}.$$

**Les indices de sensibilité d'ordre deux :**

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}.$$

expriment la sensibilité de la variance de  $Y$  à l'interaction des variables  $X_i$  et  $X_j$ , c'est-à-dire la sensibilité de  $Y$  aux variables  $X_i$  et  $X_j$  qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules.

**Les indices de sensibilité d'ordre trois donnés ci-dessous**

$$S_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V},$$

expriment la sensibilité de la variance de  $Y$  aux variables  $X_i$ ,  $X_j$  et  $X_k$  qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules et des interactions deux à deux. Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre  $p$ . L'interprétation de ces indices est facile, leur somme est égale à 1, et étant tous positifs, plus l'indice sera grand (proche de 1), plus la variable aura d'importance.

Le nombre d'indices de sensibilité ainsi construit, de l'ordre 1 à l'ordre  $p$ , est égale à  $2^p - 1$ . Lorsque le nombre de variables d'entrée  $p$  est trop important, le nombre d'indices de sensibilité explose.

L'estimation et l'interprétation de tous ces indices deviennent vite impossible. Homma et Saltelli [16] ont alors introduit des indices de sensibilité totaux, qui expriment la sensibilité totale de la variance  $Y$  à une variable, c'est-à-dire la sensibilité à cette variable sous toutes ses formes (sensibilité à la variable seule et sensibilité aux interactions de cette variable avec d'autres variables).

**L'indice de sensibilité total**

$S_{Ti}$  est un indice de sensibilité total pour la variable  $X_i$ , il est défini comme la somme de tous les indices de sensibilité relatifs à la variable  $X_i$  :

$$S_{Ti} = \sum_{k \in \#i} S_k. \tag{2.5}$$

où  $\#i$  représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice  $i$ .

**Exemple 2.1** : pour un modèle à trois variables d'entrée  $S_{T_1} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}$ .

\* Nous présentant, dans ce qui suit quatre méthodes d'estimation d'indice de sensibilité : celle de AM (Modèle Additifs), Mckay, FAST ; et Monte Carlo.

### 1. La méthode AM (Modèle Additifs)

Une approche du problème de l'analyse de sensibilité basée sur les modèles additifs [23] est possible. le modèle additif (AM) permet mutuellement via sa construction, de séparer l'effet de chaque variable d'entrée. Il est alors possible d'obtenir une décomposition de la variance en effet des variables d'entrer, à partir de laquelle il est possible de déduire des estimations d'indices de sensibilité. Après des études, la méthode d'analyse de sensibilité par (AM) [23] ne permet d'estimer les indices de sensibilité que pour des modèles qui s'expliquent relativement bien par des modèles additifs comme les indices SRC (standardized regression coefficient) qui sont utilisable pour les modèles relativement linéaires.

### 2. La méthode Mckay

La méthode d'estimation des indices de sensibilité proposé par Mckay [37], se base sur l'échantillonnage par hyper cube latin répliqué (r-LHSampling). À partir d'un  $N$  échantillon créé selon le plan d'échantillonnage par hyper cube latin ( $N$  premières lignes de la matrice), on crée  $r$  réplifications (paquets de  $N$  lignes) en permutant indépendamment et aléatoirement les  $N$  valeurs de chaque variable. La réunion de ces  $r$  réplifications donnera  $N*r$  échantillons pour chaque variable. les indices de Sobol qui sont estimés par cette méthode donnent comme résultat la notion de sensibilité totale étant introduite postérieurement à la méthode d'estimation de Mckay, cette dernière ne propose pas d'estimation pour les indices de sensibilités totaux.



### 3. La méthode FAST

La méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) a été développée par Cukier et al [8, 9, 10], ainsi que Schaibly et Shuler [30].

Cukier et al. montrent qu'il est possible d'obtenir une décomposition de la variance de  $Y$ , semblable à la décomposition de Sobol, en utilisant la transformée de Fourier multidimensionnelle de  $f$ . Le calcul d'une telle décomposition multidimensionnelle étant trop complexe pour être réalisé en pratique, l'idée de la méthode FAST est de remplacer les décompositions multidimensionnelles par des décompositions unidimensionnelles. Un des avantages de cette méthode est que les indices de sensibilité peuvent être calculés indépendamment les uns des autres, à partir d'un même échantillon de simulations, ce que ne permet pas la méthode de Sobol qui nécessite deux échantillons. Par contre, la méthode de Sobol étant stochastique, elle permet d'obtenir un intervalle de confiance sur les estimations d'indices, ce que ne permet pas FAST, puisque pour une série de fréquences donnée, les estimations d'indices sont déterministes.

#### Remarque 2.1

- Saltelli et Bolado [27] montrent, en s'appuyant sur un certain nombre d'exemples tests, que les indices de sensibilité définis par la méthode FAST sont équivalents à ceux définis et estimés par Sobol.
- Les méthodes de Sobol et FAST sont les deux méthodes les plus couramment utilisées en analyse de sensibilité pour estimer les indices de sensibilité.

#### 2.2.4 Estimation des indices de Sobol

En pratique, il est rare de pouvoir calculer analytiquement les indices de Sobol (intégrale de grande dimension, forme non analytique du modèle . . .). En effet, le calcul des indices pour un système complexe implique la connaissance des lois des paramètres d'entrée, ainsi que la connaissance de la réponse au-delà du modèle. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques pour estimer les indices de Sobol.

Les indices de Sobol ont pris une importance croissante dans l'analyse de sensibilité, du fait de leur universalité (sous réserve que les entrées soient indépendantes et que

la sortie soit de carré intégrable) et de leur interprétation assez aisée. Mais leur calcul n'est pas simple. On dispose d'un certain nombre de méthodes pour les calculer ou les estimer [31]. Dans la littérature, il existe plusieurs techniques pour l'estimation des indices de Sobol [3, 7], dans ce chapitre, on se restreint à détailler la méthode de Monte Carlo [3, 7].

### Estimation de Monte Carlo

Dans beaucoup de problèmes scientifiques, on est amené à calculer une intégrale du type

$$I = \int_D f(x) \, dx \quad ,$$

où  $D$  est un espace de plus ou moins grande dimension, et  $f$  une fonction (intégrable). Soit  $x_1, \dots, x_N$  la réalisation d'un  $N$ -échantillon d'une variable aléatoire uniforme sur  $D$ . Nous supposons cet échantillon pris de manière totalement aléatoire (échantillonnage aléatoire). Une approximation de  $I$  par la méthode de Monte Carlo est faite par :

$$\widehat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

La convergence (presque sûre) de  $I_N$  vers  $I$  découle directement de la loi forte des grands nombres. Cette méthode d'estimation permet alors d'estimer l'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire de densité quelconque par

$$\widehat{\mathbb{E}}[f(X)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

où  $(x_i)_{i=1 \dots N}$  est un  $N$ -échantillon de réalisations de la variable aléatoire  $X$ . D'après le théorème central limite, on a le taux de convergence de la méthode de Monte Carlo :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\widehat{I}_N - I) \rightarrow N(0, 1).$$

### Estimation des indices de sensibilité par Monte Carlo

Considérons un  $N$  échantillon  $\widetilde{X}(N) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_p})_{k=1 \dots N}$  de réalisations des variables

d'entrée  $(X_1, \dots, X_p)$ .

L'espérance de  $Y$ ,  $\mathbb{E}[Y] = f_0$ , et sa variance,  $V(Y) = V$ , sont estimées par :

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) \quad \text{et} \quad \hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) - \hat{f}_0^2. \quad (2.6)$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation d'espérance de variance conditionnelle. Nous présentons une technique d'estimation due à Sobol [35].

L'estimation des indices de sensibilité de premier ordre consiste à estimer la quantité :

$$V_i = V(\mathbb{E}[Y|X_i]) = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X_i]^2]}_{U_i} - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X_i]]^2 = U_i - \mathbb{E}[Y]^2.$$

Sobol propose d'estimer la quantité  $U_i$ , c'est-à-dire l'espérance du carré de l'espérance de  $Y$  conditionnellement à  $X_i$ , comme une espérance classique, mais en tenant compte du conditionnement à  $X_i$  en faisant varier entre les deux appels à la fonction  $f$  toutes les variables sauf la variable  $X_i$ . Ceci nécessite deux échantillons de réalisations des variables d'entrée, que nous notons  $\tilde{X}_{(N)}^{(1)}$  et  $\tilde{X}_{(N)}^{(2)}$  :

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_{(i-1)}}^{(1)}, x_{k_i}^{(1)}, x_{k_{(i+1)}}^{(1)}, \dots, x_{k_p}^{(1)}) f(x_{k_1}^{(2)}, \dots, x_{k_{(i-1)}}^{(2)}, x_{k_i}^{(1)}, x_{k_{(i+1)}}^{(2)}, \dots, x_{k_p}^{(2)}). \quad (2.7)$$

Les indices de sensibilité de premier ordre sont alors estimés par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}} = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}. \quad (2.8)$$

Pour les indices de sensibilité de second ordre :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V},$$

où :

$$V_{ij} = V(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j = U_{ij} - \mathbb{E}[Y]^2 - V_i - V_j.$$

nous estimons les quantités  $U_{ij} = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]^2]$  de la même manière, en faisant varier entre les deux appels à la fonction toutes les variables sauf  $X_i$  et  $X_j$  :

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_{(i-1)}}^{(1)}, x_{k_i}^{(1)}, x_{k_{(i+1)}}^{(1)}, \dots, x_{k_{(j-1)}}^{(1)}, x_{k_j}^{(1)}, x_{k_{(j+1)}}^{(1)}, \dots, x_{k_p}^{(1)}) \\ &\quad \times f(x_{k_1}^{(2)}, \dots, x_{k_{(i-1)}}^{(2)}, x_{k_i}^{(1)}, x_{k_{(i+1)}}^{(2)}, \dots, x_{k_{(j-1)}}^{(2)}, x_{k_j}^{(1)}, x_{k_{(j+1)}}^{(2)}, \dots, x_{k_p}^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'indice  $S_{ij}$  est alors estimé par :

$$\widehat{S}_{ij} = \frac{\widehat{U}_{ij} - \widehat{f}_0^2 - \widehat{V}_i - \widehat{V}_j}{\widehat{V}}. \quad (2.10)$$

Et ainsi de suite pour les indices de sensibilité d'ordre supérieur.

### Exemple d'analyse de sensibilité

Nous présentons un exemple d'application tiré de Julien Jacques [19] pour la méthode de Sobol.

Soit le modèle représenté par l'équation :

$$Y = \sin(X_1) + 7 \sin^2(X_2) + \frac{X_3^4}{10} \sin(X_1);$$

où

$X_i \sim U \sim [-\pi, \pi]$  avec  $i = 1, 2, 3$ .

Les calculs d'indices de sensibilité ont été effectués par l'auteur sous Matlab où il a calculé les indices de sensibilité 20 fois pour des échantillons de taille : 100, 1000 et 10000.

On présente dans le tableau ci-dessous la moyenne des indices calculés.

$N = 100$				$N = 1000$				$N = 10000$			
$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_{13}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_{13}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_{13}$
0,318	0,456	0	0,226	0,316	0,449	0	0,235	0,310	0,441	0	0,249

TABLE 2.1 – Indices de sensibilité avec la méthode de Sobol.

On constate que l'augmentation de la taille de l'échantillon permet de mieux calibrer le modèle et déterminer l'influence de l'interaction  $(X_1, X_3)$  d'une manière plus précise. De la

même manière, on constate que l'écart type des estimations d'indices diminue avec l'augmentation de la taille des échantillons. Ainsi, si la méthode de Sobol est plus efficace parce qu'elle permet de déterminer les effets d'interactions. En revanche elle demande une taille d'échantillon grande pour être plus précise.

$N = 100$			$N = 1000$			$N = 10000$		
$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
0,157	0,122	0,150	0,050	0,057	0,073	0,011	0,014	0,018

TABLE 2.2 – Indices de sensibilité avec la méthode de Sobol.

## Conclusion

L'analyse de sensibilité globale étudie l'impact de la variabilité des entrées d'un modèle sur la variabilité de sa sortie. Elle consiste à évaluer des indices de sensibilité qui quantifient combien une variable ou un groupe de variables contribue à la variance de la sortie.

La méthode d'analyse de sensibilité de Sobol définit des indices de sensibilité pour tous les sous-ensembles de variables d'entrée, ainsi que des indices de sensibilité totaux.

L'estimation de Sobol basées sur une méthode de Monte Carlo semble être la plus robuste, bien que relativement gourmande en temps de calcul.

## CHAPITRE 3

# ESTIMATION DES INDICES DE SOBOL DANS LES MODÈLES DE RISQUE CLASSIQUE

### Introduction

**D**e nombreuses enquêtes se concentrent sur l'estimation de la probabilité de ruine, qui est généralement obtenue en fonction de certains paramètres du modèle spécifiés tels que  $\lambda$  (le taux d'arrivée des sinistres),  $\mu$  (la taille moyenne des réclamations) et tous les paramètres du modèle sont approximatifs, chaque paramètre à une certaine incertitude voile leurs vraies valeurs. Pour cela la probabilité de ruine doit être estimée en tenant compte de l'incertitude infligée aux paramètres du modèle.

Dans ce chapitre, la question abordée est l'analyse de sensibilité et d'incertitude dans les modèles de risque classique. on a estimé les indices de Sobol avec la technique de simulation de Monte Carlo. D'après le théorème central limite, on a le taux de convergence de la méthode de Monte Carlo, et on se basant sur les résultats obtenus, on a estimé les moments d'ordre  $k$  de la probabilité de ruine.

### 3.1 Modèle de risque classique

Au cours du temps, une compagnie d'assurance qui dispose d'un capital initial  $u > 0$ , en quelconque unité, évolue en fonction des cotisations des assurés, les montants de remboursement et la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés.

On suppose que :

- . Les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson  $\{N_t : t \geq 0\}$  de paramètre  $\lambda > 0$ ;
- . Le  $k^{\text{ème}}$  sinistre occasionne pour la compagnie une perte aléatoire  $Z_k > 0$ ;
- . Les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps.

Dans la pratique, les cotisations sont capitalisées à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'évènement  $N_t = 0$ , le capital de la compagnie est égal à  $u + c t$  au temps  $t$ .

On suppose de plus, que  $(Z_k)_{k \geq 1}$  correspondant au montants des remboursement forment un processus de renouvellement de loi F, et telle que

$$E[Z_k] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z_k) = \sigma^2.$$

**Définition 3.1 :** On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$\forall t \geq 0, \quad X_t = c t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k.$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la compagnie d'assurance au temps  $t$  est égal à  $u + X_t$ . De plus le risque moyen sur  $[0, t]$  est égal à

$$E[X_t] = c t - E[N_t] \mu = (c - \lambda \mu) t.$$



La garantie que le processus de risque dévie presque sûrement vers  $+\infty$  est  $\varrho = \frac{c-\lambda}{\mu} > 0$  (la ruine n'est pas certaine). D'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = c - \lambda \mu \rightsquigarrow ps.$$

Nous avons :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t};$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow ps;$$

aussi

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \rightsquigarrow ps;$$

Ceci entraîne :

$$\frac{X_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i N_i}{N_t t} \rightarrow c - \lambda \mu \rightsquigarrow ps.$$

Puisque  $\varrho > 0$ ,  $(X_t)$  devient négatif un nombre fini de fois.

### 3.1.1 Remboursements de loi exponentielle

Prenant le cas particulier du modèle de risque classique (modèle de Lundberg  $P/P$ ), ou les réclamations suivent une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right), \quad x > 0. \quad (3.1)$$

Lorsque  $F$  est de loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , on a :

$$\forall u \geq 0, \quad \psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left(\frac{-\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right). \quad (3.2)$$

On remplace  $\varrho$  dans la formule (3.2), on aura :

$$\psi(u; \lambda; \mu) = \frac{\lambda \mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c - \lambda \mu}{c \mu}\right)\right) , \quad c - \lambda \mu > 0. \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  évoqués dans la définition de la probabilité de ruine (3.3) sont incertains. Plus précisément, nous associons les deux modèles suivants pour leurs présentations :

$$\begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda(\omega) , & \varepsilon_\lambda &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ ou } \mathcal{U}[-1, 1], \\ \mu &= \bar{\mu} + \sigma_\mu \varepsilon_\mu(\omega) , & \varepsilon_\mu &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ ou } \mathcal{U}[-1, 1]. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine

Pour estimer les indices de Sobol relatifs à la probabilité de ruine introduite précédemment, nous construisons un algorithme basé sur la méthode dite de Sobol présentée dans la section (2.2.4)

Afin de modéliser l'incertitude, nous associons une perturbation pour chaque paramètre des lois qui expriment le comportement des arrivées des sinistres et les montants des sinistres.

#### 1. Perturbation du taux d'arrivée des sinistres $\lambda$

On perturbe le taux d'arrivée des sinistres  $\lambda$  :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda(\omega),$$

où  $\varepsilon$  représente la variable aléatoire modélisant l'incertitude. Dans ce travail, on considère deux modèles de perturbation, dans le premier modèle  $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , et dans le deuxième  $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{U}[-1, 1]$ .

---

#### Algorithme 3.1 : Perturbation du taux $\lambda$

---

**Entrées :**  $\bar{\lambda}$  : La moyenne de taux des arrivées des sinistres,

$\sigma_\lambda$  : L'écart-type de taux des arrivées,

$N$  : Le nombre de générations.

**Sorties :**  $\lambda$

**Pour**  $i = 1$  à  $N$  **faire**

Générer aléatoirement une réalisation de  $\mathcal{N}(0, 1)$  ou  $\mathcal{U}[-1, 1]$ , puis la stocker dans  $\varepsilon_\lambda$ .

Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de taux  $\sigma_\lambda$  et le vecteur  $\varepsilon_\lambda$ .

Additionner la moyenne de taux des arrivées  $\bar{\lambda}$ .

**Fin Pour.**

Retourner  $\lambda$ .

---

## 2. Perturbation du taux de réclamation $\mu$

On perturbe le taux de réclamation  $\mu$  :

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \varepsilon_\mu(\omega),$$

où  $\varepsilon$  représente la variable aléatoire modélisant l'incertitude. Dans ce travail, on considère deux modèles de perturbation, dans le premier modèle  $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , et dans le deuxième  $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{U}[-1, 1]$ .

---

### Algorithme 3.2 : Perturbation du taux $\mu$

---

**Entrées :**  $\bar{\mu}$  : La moyenne de taux de réclamation,

$\sigma_\mu$  : L'écart-type de taux de réclamation,

$N$  : Le nombre de générations.

**Sorties :**  $\mu$

**Pour**  $i = 1$  à  $N$  **faire**

Générer aléatoirement une réalisation de  $\mathcal{N}(0, 1)$  ou  $\mathcal{U}[-1, 1]$ , puis la stocker dans  $\varepsilon_\mu$ .

Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de taux  $\sigma_\mu$  et le vecteur  $\varepsilon_\mu$ .

Additionner la moyenne de taux des arrivées  $\bar{\mu}$ .

**Fin Pour.**

Retourner  $\mu$ .

---

### Indice de Sobol de premier ordre

Plusieurs types d'indices de sensibilité peuvent être utilisés pour étudier cette perturbation sur la probabilité de ruine. L'une des techniques classiques d'analyse de sensibilité est la sensibilité globale basée sur les indices de Sobol (Sobol 1993, Saltelli et al 2008).

Afin d'étudier l'effet de cette perturbation, nous calculons les indices de Sobol, par la méthode de Monte Carlo présenté dans le chapitre 2. Pour cela, on génère deux échantillons de réalisations des variables d'entrée  $\lambda$  et  $\mu$  par les procédures décrites ci-dessus, puis en tenant compte des variables d'entrée de cette procédure, les indices sont estimés par la formule (2.8). La répétition de cette instruction  $k$  fois permet d'obtenir les  $k$  indices de Sobol de premier ordre.

---

#### Algorithme 3.3 : Indices de 1<sup>er</sup> ordre

---

**Entrées :**  $k$  : nombre de variables,  $\tilde{\mathbf{X}}_N^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}_N^{(2)}$ ,

$\hat{f}_0^2$  : carré de l'espérance de  $Y$ ,

$\hat{V}$  : variance de  $Y$ ,

$\hat{U}_i$  : espérance du carré de l'espérance de  $Y$ .

**Sorties :**  $S_i$

**Pour**  $i = 1$  à  $k$  **faire**

$$\hat{S}_i \leftarrow \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}},$$

**Fin Pour.**

Retourner  $S_i$ .

---

#### Indices de Sobol de second ordre

Pour estimer les indices de second ordre, on utilise l'algorithme (3.3), la quantité  $\hat{U}_{ij}$  est estimée par la formule (2.9), les indices sont estimés par la formule (2.10).

---

**Algorithme 3.4 : Indices de 2<sup>ème</sup> ordre**

---

**Entrées :**  $k$  : nombre de variables,  $\tilde{\mathbf{X}}_N^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}_N^{(2)}$ ,

$\hat{f}_0^2$  : carré de l'espérance de  $Y$ ,

$\hat{V}$  : variance de  $Y$ ,

$\hat{U}_i$  : espérance du carré de l'espérance de  $Y$ ,

$\hat{S}_i$  et  $\hat{S}_j$  : indice de sensibilité de premier ordre.

**Sorties :**  $S_{ij}$ .

Estimer  $S_i$  en utilisant l'algorithme (3.3)

**Pour**  $i = 1$  à  $k$  **faire**

**Pour**  $j = i + 1$  à  $k$  **faire**

Estimer  $\hat{U}_{ij}$  par la relation (2.10)

**Fin Pour**

$$\hat{S}_{ij} \leftarrow \frac{\hat{U}_{ij} - \hat{f}_0^2}{\hat{V}} - \hat{S}_i - \hat{S}_j,$$

**Fin Pour.**

Retourner  $S_{ij}$ .

---

**. Indices Totaux**

L'objectif de la procédure est de calculer les indices totaux par la formule (2.5).

---

**Algorithme 3.5 : Indice total  $S_{T_i}$**

---

**Entrées :**  $k$  : nombre de variables,  $\hat{S}_i$ .

**Sorties :**  $S_{Tot}$ .

Estimer  $S_i$  en utilisant l'algorithme (3.3),

Estimer  $S_{ij}$  en utilisant l'algorithme (3.4).

**Pour**  $i = 1$  à  $k$  **faire**

$$\hat{S}_{T_i} \leftarrow \hat{S}_i,$$

**Pour**  $j = 1$  à  $k$  **faire**

**Si**  $j \neq i$  **alors**

$$\widehat{S}_{T_i} \leftarrow \widehat{S}_{T_i} + \widehat{S}_{ij} ,$$

**Fin si**

**Fin Pour**

**Fin Pour**

Retourner  $S_{Tot}$ .

---

Après avoir bien détaillé les étapes de chaque algorithme, nous donnons l'algorithme  $S_{Ruine}$  :

---

**Algorithme 3.6 :**  $S_{Ruine}$

---

**Entrées :**  $k$  : nombre de variables,

$c$  : Cotisations des assurés,

$N$  : Nombre de générations,

$u$  : Capital initial,

$\bar{\mu}$  : Moyenne de taux de réclamation,

$\sigma_{\mu}$  : L'écart-type de taux de réclamation,

$\bar{\lambda}$  : Moyenne de taux des arrivées des sinistres,

$\sigma_{\lambda}$  : L'écart-type de taux des arrivées des sinistres.

**Sorties :**  $S_i, S_{ij}, S_{Tot}$  .

Estimer  $S_i$  en utilisant l'algorithme (3.3),

Estimer  $S_{ij}$  en utilisant l'algorithme (3.4),

Estimer  $S_{Tot}$  en utilisant l'algorithme (3.5),

$$\rho \leftarrow \frac{\lambda}{\mu} ,$$

**Si** ( $\rho \geq 1$ ) **alors**

La condition de ruine n'est pas vérifiée.

**Sinon**

**GENERATION**

**Pour**  $i = 1$  à 2 **faire**

$\tilde{\mathbf{X}}_\lambda^{(i)}$  Algorithme 3.1 (Perturbation de  $\lambda$ )

$\tilde{\mathbf{X}}_\mu^{(i)}$  Algorithme 3.2 (Perturbation de  $\mu$ )

**Fin Pour**

### LES PERFORMENCES

$f(x, y) \leftarrow \Psi(\lambda, \mu)$  formule (3.3).

Estimer  $f_0^2$  en utilisant la relation (2.6).

Estimer  $\hat{V}$  en utilisant la relation (2.6).

Estimer  $\hat{U}_i$  par la relation (2.7).

### INDICES DE PREMIER ORDRE

$S_i, S_j \leftarrow$  Algorithme 3.3 (Indices de 1<sup>er</sup> ordre).

### INDICES DE SECOND ORDRE

$S_{ij} \leftarrow$  Algorithme 3.4 (Indices de 2<sup>ème</sup> ordre).

### INDICES TOTAUX

$S_{Tot} \leftarrow$  Algorithme 3.5 (Indices total  $S_{T_i}$ ).

**Fin Si.**

Retourner  $S_i, S_{ij}, S_{Tot}$ .

---

### Exemple d'application 3.1

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme Sobol Ruine, ce dernier a été implémenté sous l'environnement MATLAB. Les expériences ont été menées sur la formule de la probabilité de ruine dans le cas où le modèle est P/P.

Nous avons choisi d'exécuter notre algorithme avec les valeurs suivantes :

- . Le nombre de variables  $k = 20$ ;

- . L'écart-type du taux des arrivées de sinistre est  $\sigma_\lambda = 0.1$  ;
- . L'écart-type de taux de réclamation est  $\sigma_\mu = 0.1$  ;
- . Le taux des cotisations est  $c = 1.5$  ;
- . Le capital initial est  $u = [1, \dots, 10]$  ;

### **Par la Distribution Exponentielle**

- . La moyenne du taux des arrivées des sinistrés est  $\lambda = 0.8$
- . La moyenne du taux des réclamations est  $\mu = 1$  ;
- . La taille de l'échantillon est  $N = 10000$  .

**Les figures suivantes représentent les valeurs des variables de perturbation :**

- $\lambda$  : la moyenne du taux des arrivées.
- $\mu$  : la moyenne du taux des réclamations.



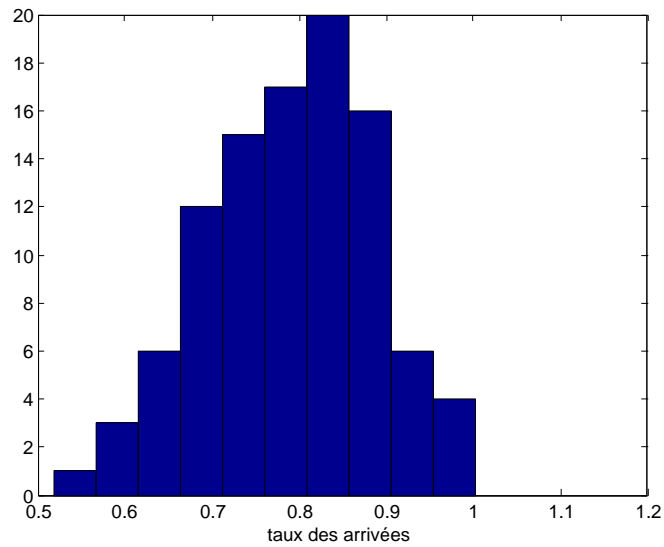


FIGURE 3.1 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi normale.

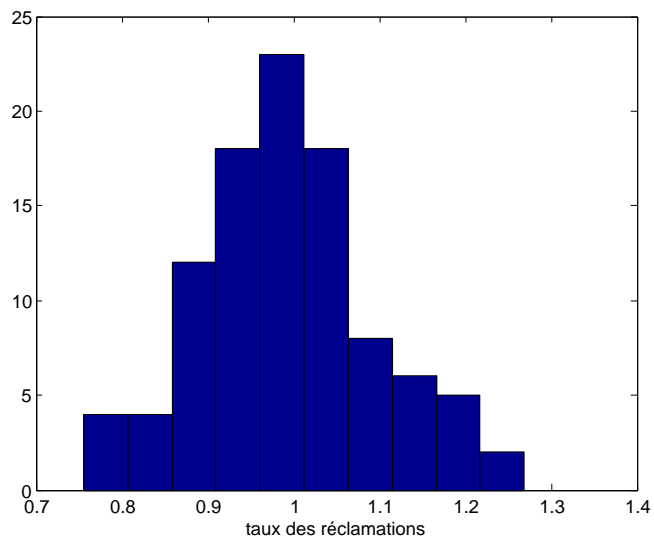


FIGURE 3.2 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi normale.

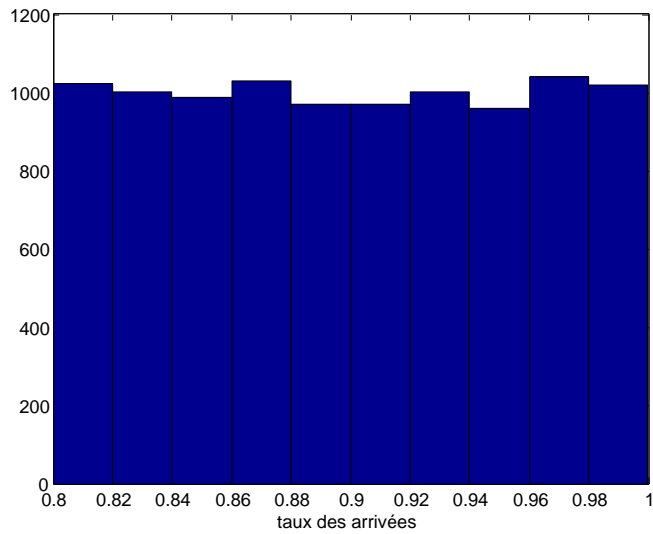


FIGURE 3.3 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi uniforme.

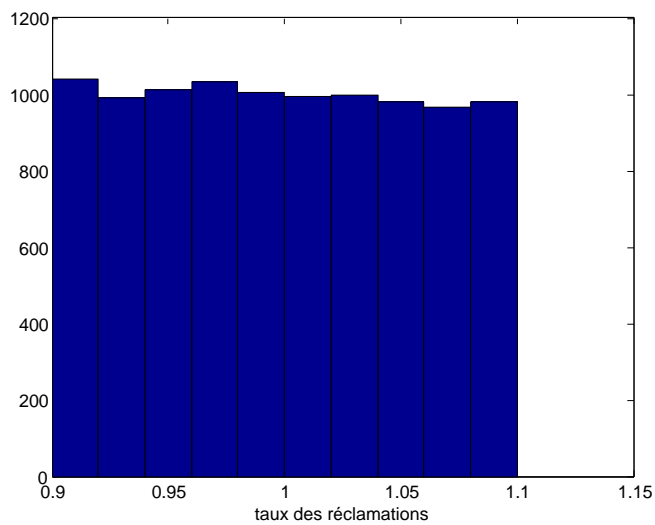


FIGURE 3.4 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi uniforme.

**Les résultats de la simulation est sur les tableaux suivants :**

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(u)$	0.4472	0.4135	0.3847	0.3601	0.3593	0.3567	0.3332	0.3093	0.2538	0.2174

TABLE 3.1 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi normale.

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(u)$	0.4232	0.3837	0.3852	0.3594	0.3424	0.3416	0.3339	0.3310	0.3292	0.3235

TABLE 3.2 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi uniforme.

**Lecture des résultats :**

On remarque que le capital initial influence directement sur la probabilité de ruine, plus il est élevé moins il y a de chance de se ruiner.

u	$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$			$\varepsilon \sim \mathcal{U}[-1, 1]$		
	$S_\lambda$	$S_\mu$	$S_{\lambda\mu}$	$S_\lambda$	$S_\mu$	$S_{\lambda\mu}$
1	0.4472	0.5277	0.0251	0.4232	0.5563	0.0205
2	0.4135	0.5475	0.0390	0.3837	0.5817	0.0346
3	0.3847	0.5564	0.0588	0.3852	0.6061	0.0087
4	0.3601	0.5383	0.1017	0.3594	0.6191	0.0215
5	0.3593	0.5080	0.1328	0.3424	0.6019	0.0557
6	0.3567	0.4852	0.1581	0.3301	0.6055	0.0644
7	0.3332	0.4586	0.2082	0.3316	0.6044	0.0640
8	0.3093	0.4843	0.2064	0.3339	0.5911	0.0750
9	0.2538	0.4486	0.2976	0.3292	0.5819	0.0888
10	0.2174	0.4213	0.3614	0.3235	0.5723	0.1042

TABLE 3.3: Les indices de sobol en temps infini pour les différentes valeurs de  $u$

### Lecture des résultats

La variable qui a le plus d'influence sur la variance de sortie est  $\mu$ , et la sortie  $\lambda$  est aussi importante mais n'influence pas.

Pour approfondir notre enquête, nous estimons la moyenne, médiane, variance, kurtosis et skewness de la probabilité de ruine, et on obtient les résultats suivants :

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
1	0.3383	0.3290	0.0088	3.6797	0.6050
2	0.2211	0.2095	0.0080	4.8951	0.9905
3	0.1443	0.1301	0.0056	5.7189	1.2676
4	0.0946	0.0803	0.0038	7.8472	1.7110
5	0.0634	0.0501	0.0025	10.4158	2.1253
6	0.0436	0.0316	0.0017	23.5002	3.1704
7	0.0298	0.0198	0.0011	74.0737	4.9113
8	0.0208	0.0122	7.1803e-004	38.9807	4.2926
9	0.0147	0.0077	5.5175e-004	279.9581	10.0483
10	0.0108	0.0049	3.6432e-004	61.7291	6.0068

TABLE 3.4: calcul de la moyenne, médiane, variance, kurtosis, skewness en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi normale.

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
1	0.4040	0.3999	0.0040	2.4150	0.2567
2	0.2731	0.2670	0.0038	2.5837	0.4192
3	0.1869	0.1803	0.0030	2.6282	0.4943
4	0.1269	0.1194	0.0022	2.8946	0.6808
5	0.0876	0.0804	0.0014	3.0385	0.7687
6	0.0601	0.0536	9.0315e-004	3.3846	0.9181
7	0.0417	0.0360	5.6980e-004	3.7395	1.0682

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
8	0.0291	0.0243	3.4674e-004	4.0746	1.1817
9	0.0201	0.0163	1.9905e-004	4.4781	1.2948
10	0.0141	0.0107	1.2381e-004	5.0659	1.4827

TABLE 3.5: calcul de la moyenne, médiane, variance, kurtosis, skewness en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi uniforme.

D'après les résultats du moments d'ordre 3 et 4, on a remarqué que la distribution est asymétrique à droite et pointue.

**La représentation graphique est donnée par :**

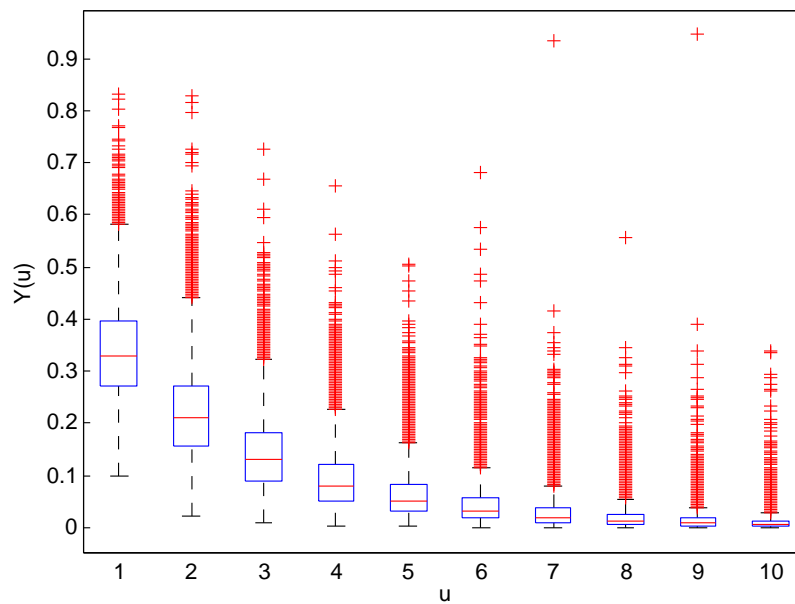


FIGURE 3.5 – Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi normale.

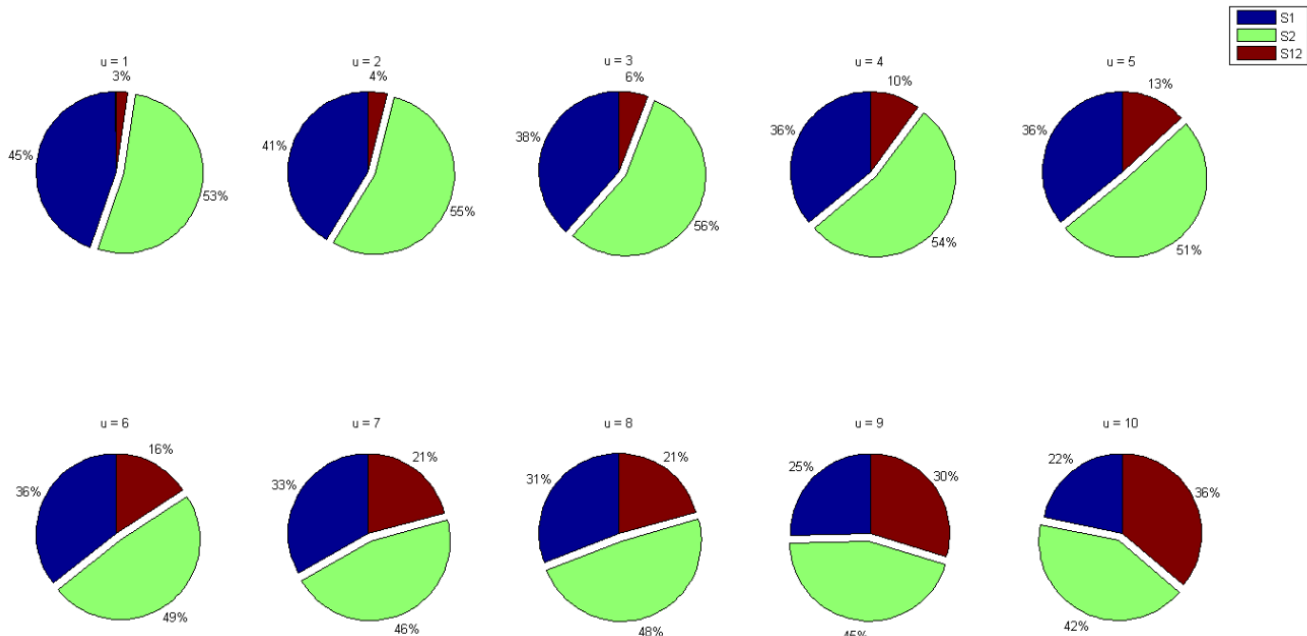


FIGURE 3.6 – Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol  $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$  avec la loi normale.

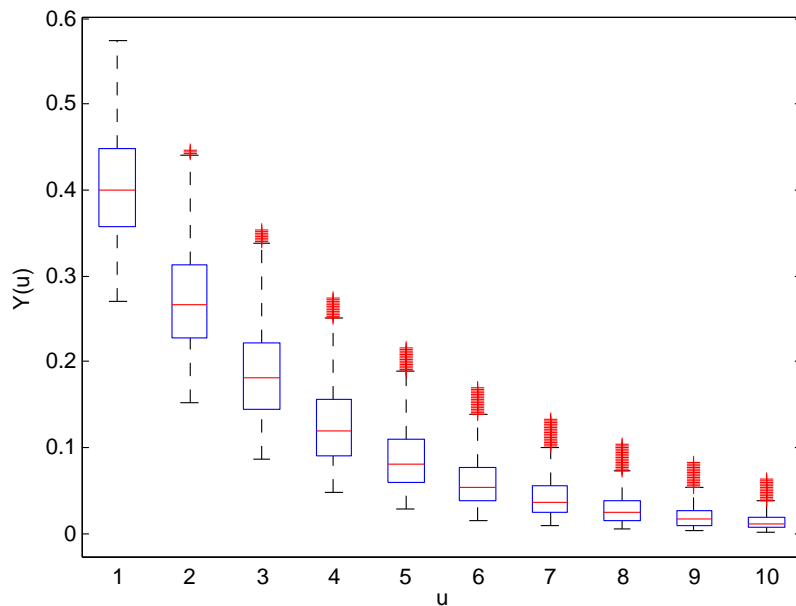


FIGURE 3.7 – Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi uniforme.

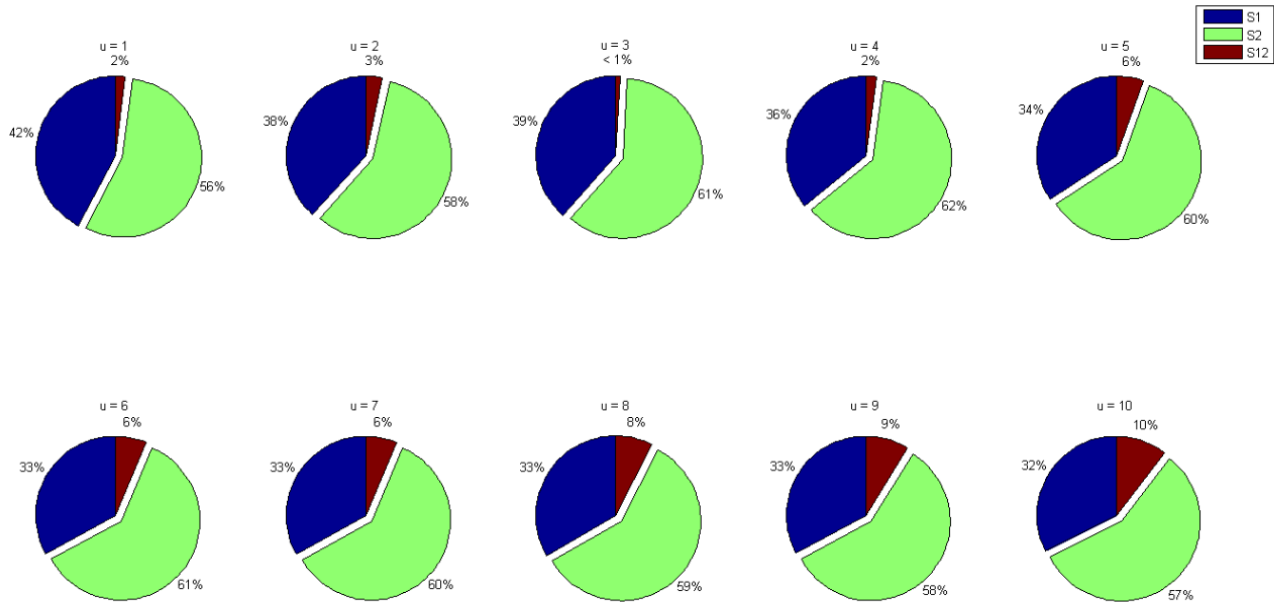


FIGURE 3.8 – Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol  $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$  avec la loi uniforme.

### 3.1.3 Approximation à queue lourde

On a généralement recours aux transformées de Laplace. Une difficulté majeure lors de l'analyse du modèles avec des distributions à queue lourde est que les transformations de Laplace de telles distributions n'ont pas une forme analytique explicite, c'est notamment le cas pour la distribution d'Abate Whitt (1999).

#### Distribution Abate Whitt

L'équation explicite pour la probabilité de ruine si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  est :

$$\psi(u) = P(M > u) = \frac{\rho}{v_1 - v_2} (v_1 \zeta(v_2^2 u) - v_2 \zeta(v_1^2 u));$$

où

$$\zeta(u) = \exp(u) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{u}}^{\infty} \exp(-x^2) dx;$$

et

$$v_{1,2} = \frac{1 + \mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2 - (1 - \rho)\mu}.$$

L'existence d'une formule exacte pour la probabilité de ruine rend cette distribution très intéressante [?].

### Exemple d'application 3.2

Comme précédemment, nous allons analyser la sensibilité de la probabilité de ruine par rapport aux paramètres d'entrée en utilisant l'algorithme  $S_{ruine}$  avec les données suivantes :

- . Le nombre de variables  $k = 2$  ;
- . La moyenne du taux des arrivées des sinistrés est  $\lambda = 1$  ;
- . La moyenne du taux des réclamations est  $\mu = 2$  ;
- . L'écart-type de taux des arrivées de sinistre est  $\sigma_{\lambda} = 0.1$  ;
- . L'écart-type de taux de réclamation est  $\sigma_{\mu} = 0.1$  ;
- . Le taux des cotisations est  $c = 1.5$  ;



- . Le capital initial est  $u = [1, \dots, 10]$  ;
- . La taille de l'échantillon est  $N = 30000$  .

**Les figures suivantes représentent les valeurs des variables de perturbation :**

- $\lambda$  : la moyenne du taux des arrivées .
- $\mu$  : la moyenne du taux des réclamations .

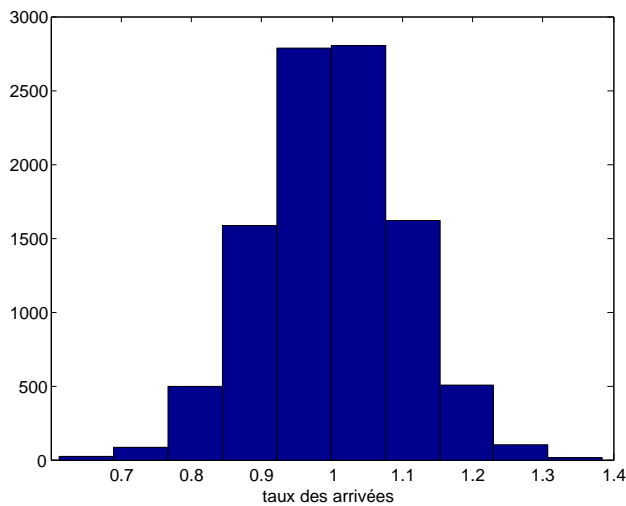


FIGURE 3.9 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi normale.

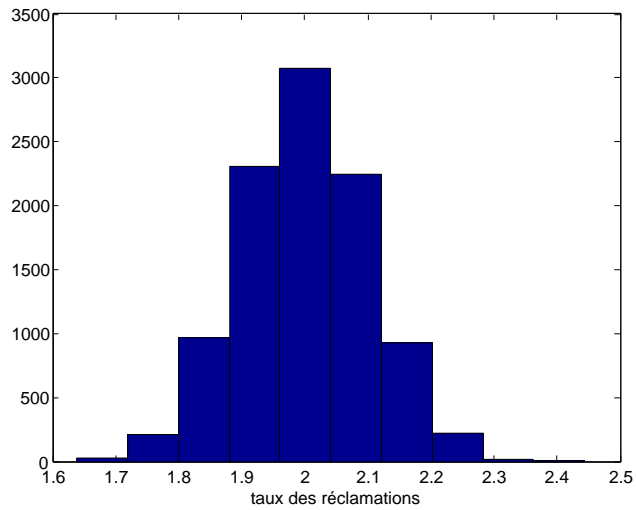


FIGURE 3.10 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi normale.

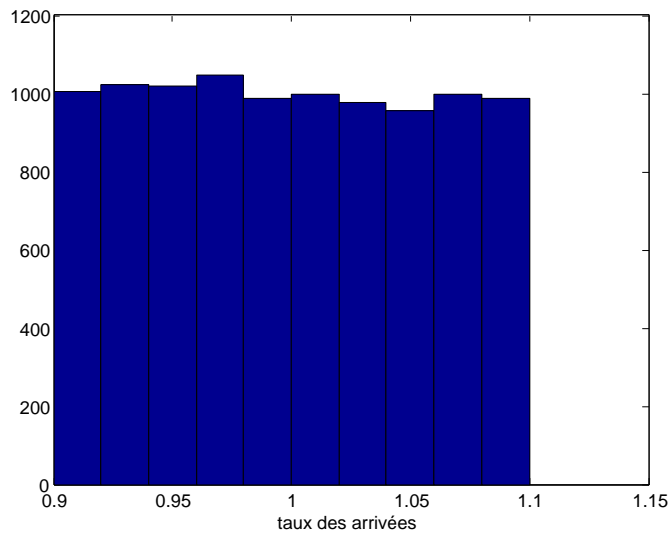


FIGURE 3.11 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des arrivées des sinistrés avec la loi uniforme.

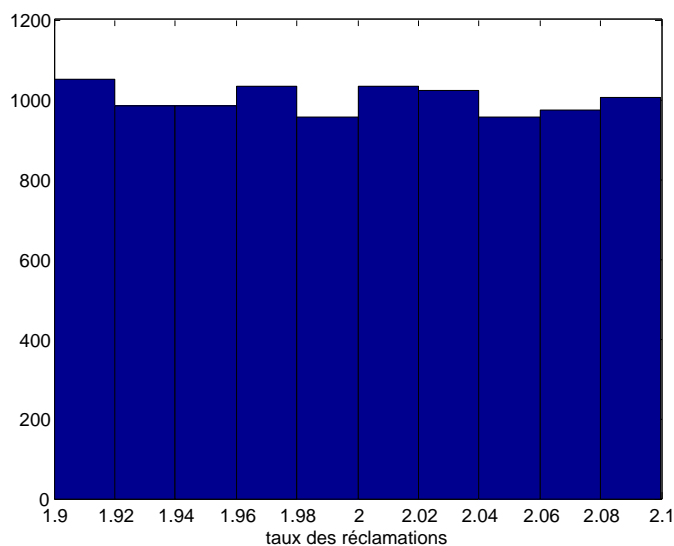


FIGURE 3.12 – Les valeurs des variables de perturbation de la moyenne du taux des réclamations avec la loi uniforme.

**Les résultats de la simulation est sur les tableaux suivants :**

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(u)$	0.7555	0.7562	0.7563	0.7459	0.7402	0.7446	0.7415	0.7344	0.7332	0.7299

TABLE 3.6 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi normale.

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(u)$	0.7687	0.7644	0.7565	0.7599	0.7555	0.7552	0.7510	0.7506	0.7432	0.7407

TABLE 3.7 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi uniforme.

**Lecture des résultats :**

On remarque que le capital initial influence directement sur la probabilité de ruine, plus il est élevé moins il y a de chance de se ruiner.

u	$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$			$\varepsilon \sim \mathcal{U}[-1, 1]$		
	$S_\lambda$	$S_\mu$	$S_{\lambda\mu}$	$S_\lambda$	$S_\mu$	$S_{\lambda\mu}$
1	0.7624	0.2342	0.0034	0.7667	0.2327	0.0007
2	0.7503	0.2398	0.0099	0.7588	0.2328	0.0084
3	0.7401	0.2514	0.0086	0.7456	0.2474	0.0070
4	0.7367	0.2496	0.0137	0.7551	0.2381	0.0068
5	0.7469	0.2486	0.0045	0.7537	0.2355	0.0108
6	0.7442	0.2490	0.0068	0.7465	0.2374	0.0161
7	0.7363	0.2615	0.0022	0.7554	0.2438	0.0008
8	0.7433	0.2519	0.0048	0.7403	0.2536	0.0061
9	0.7292	0.2578	0.0130	0.7513	0.2475	0.0012
10	0.7314	0.2563	0.0122	0.7466	0.2500	0.0034

TABLE 3.8: Les indices de sobol en temps infini pour les différentes valeurs de u

### Lecture des résultats

La variable qui a le plus d'influence sur la variance de sortie est  $\lambda$ , et la sortie  $\mu$  est aussi importante mais n'influence pas.

Pour approfondir notre enquête, nous estimons la moyenne, médiane, variance, kurtosis et skewness de la probabilité de ruine, et on obtient les résultats suivants :

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
1	0.3846	0.3820	0.0031	3.1786	0.3123
2	0.3399	0.3370	0.0028	3.3041	0.3909
3	0.3098	0.3063	0.0026	3.4160	0.4497
4	0.2884	0.2847	0.0025	3.5817	0.4884
5	0.2711	0.2675	0.0023	3.5070	0.5019
6	0.2573	0.2536	0.0022	3.5758	0.5244
7	0.2457	0.2421	0.0021	3.6581	0.5566

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
8	0.2356	0.2317	0.0020	3.6456	0.5685
9	0.2265	0.2222	0.0019	3.8436	0.6402
10	0.2189	0.2149	0.0018	3.7808	0.6106

TABLE 3.9: calcul de la moyenne, médiane, variance, kurtosis, skewness en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi normale.

u	moyenne	médiane	variance	kurtosis	skewness
1	0.3828	0.3817	0.0010	2.2882	0.1406
2	0.3370	0.3359	0.0009	2.2277	0.1523
3	0.3081	0.3066	0.0009	2.2932	0.1727
4	0.2857	0.2848	0.0008	2.2899	0.1832
5	0.2687	0.2672	0.0007	2.3080	0.2080
6	0.2546	0.2529	0.0007	2.3016	0.2091
7	0.2431	0.2416	0.0007	2.3253	0.2093
8	0.2332	0.2321	0.0006	2.3203	0.2008
9	0.2238	0.2224	0.0006	2.3128	0.2262
10	0.2163	0.2152	0.0006	2.3293	0.2277

TABLE 3.10: calcul de la moyenne, médiane, variance, kurtosis, skewness en temps infini pour différentes valeurs de  $u$  avec la loi uniforme.

D'après les résultats des moments d'ordre 3 et 4, on a remarqué que la distribution est asymétrique à droite et pointue.

**La représentation graphique est donnée par :**

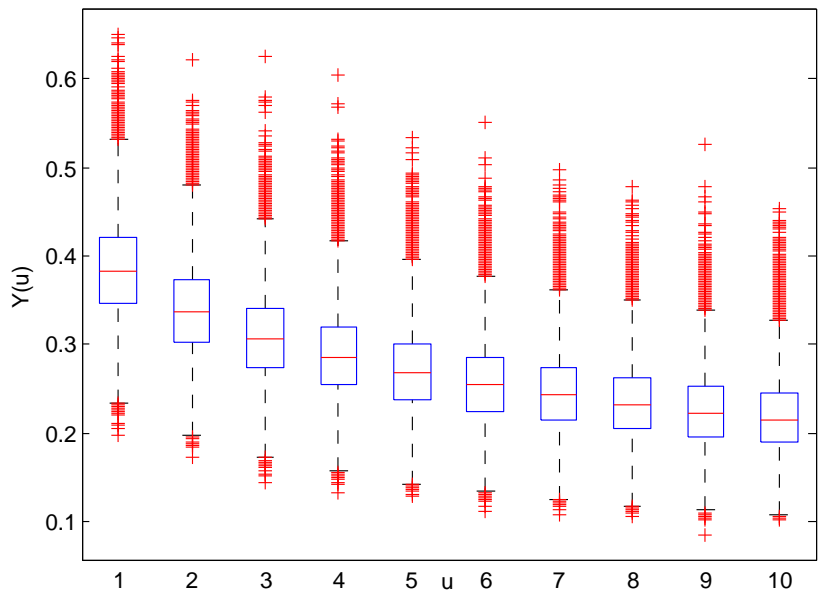


FIGURE 3.13 – Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi normale.

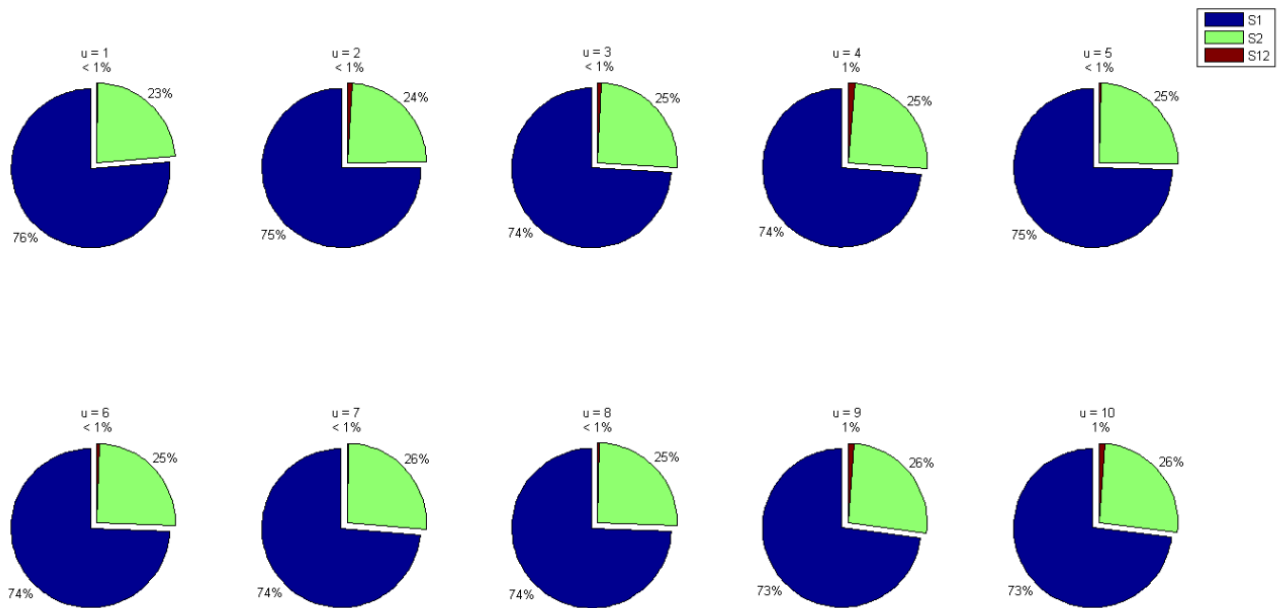


FIGURE 3.14 – Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol  $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$  avec la loi normale.

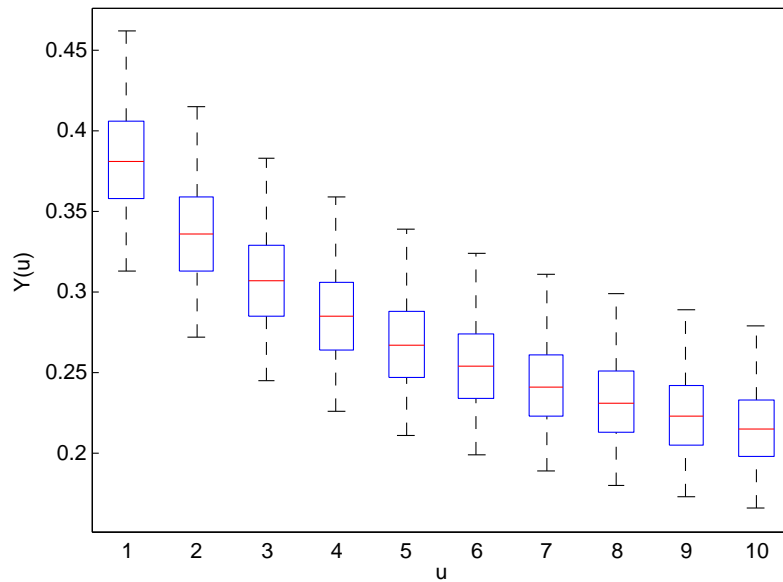


FIGURE 3.15 – Graphique en "boite à moustaches" de la probabilité de ruine avec la loi uniforme.

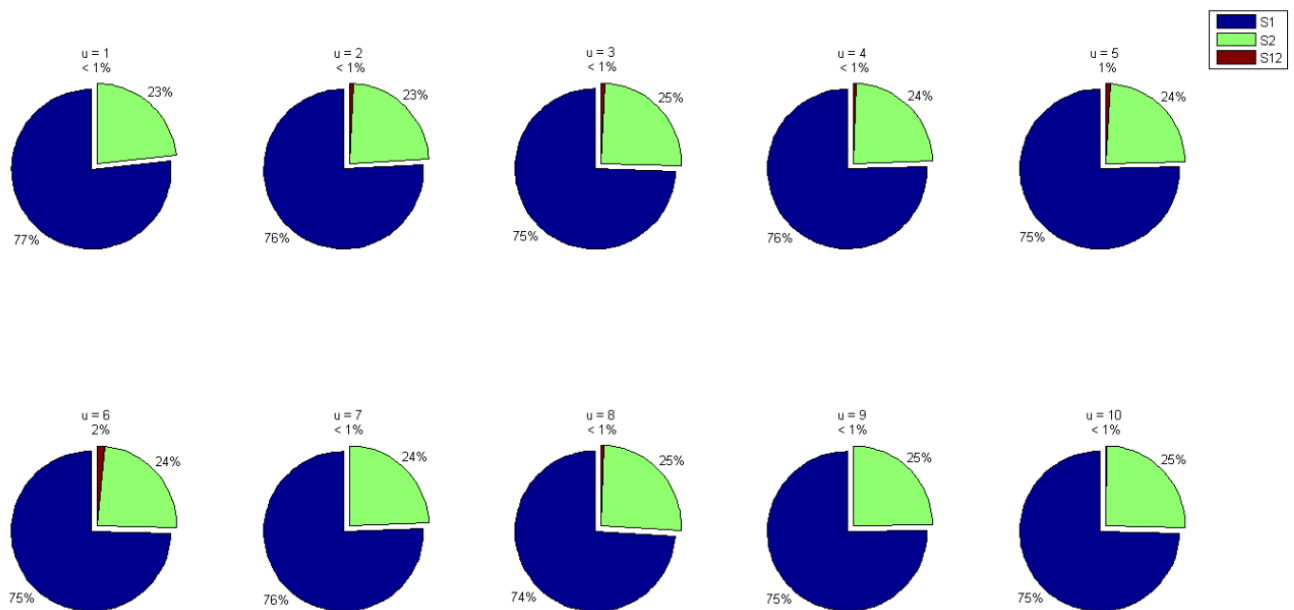


FIGURE 3.16 – Graphique en "comembert" qui représente le pourcentage des indice de Sobol  $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}$  avec la loi uniforme.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo (Sobol) pour estimer les indices de Sobol. Nous avons calculé la probabilité de ruine en tenant compte de l'incertitude infligées sur les paramètres  $\lambda$ , et  $\mu$ .

Nous avons étudié l'analyse de sensibilité des paramètres d'entrée sur les deux formules de la probabilité de ruine (la distribution Abate et la distribution exponentielle). Ce qui nous a permis de déterminer le paramètre le plus influent, et par conséquent, caractériser la probabilité de ruine, en calculant les moments d'ordre  $k$  de cette mesure.



## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le domaine actuariaire, la théorie de ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées. La théorie mathématique de l'assurance peut contribuer à promouvoir le développement de méthodes plus rationnelles dans la gestion des risques. Un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance est la modélisation stochastique. L'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond à la notion mathématique de probabilité de ruine.

La sélection des valeurs des paramètres pour le calcul de la probabilité de ruine s'appuie autant que possible sur des données statistiques, et parfois sur une simple simulation. Dans la réalité, on ne dispose pas de données statistiques suffisantes afin de bien déterminer la valeur exacte de ces paramètres. Cependant, ils sont souvent entachés d'incertitudes. Ce qui peut engendrer un important degré d'incertitude dans la valeur de la probabilité de ruine. Tenir compte de ces incertitudes est devenu indispensable dans l'étude des modèles de risque.

Dans ce mémoire, Nous avons considéré le modèle de risque classique **Lundberg** dans lequel nous avons introduit la notion d'incertitude paramétrique. Nous nous sommes intéressée à l'analyse de la sensibilité de la probabilité de ruine. En calculant l'indice de Sobol, nous avons déterminé quels sont les paramètres qui n'ont pas d'influence et quels sont ceux qui interagissent au sein du modèle. Par la suite, nous avons propagé l'incerti-

tude des paramètres influents sur la probabilité de ruine et caractérisé statistiquement cette incertitude.

A travers cette étude, nous avons établi un algorithme général basé sur la simulation de monte-carlo pour calculer la probabilité de ruine sous incertitude épistémique. Nous avons obtenu des résultats intéressants et qu'ils méritent d'être développés et améliorés par des études plus détaillées dans les prochaines recherches.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Asmussen. S and Albrecher. H (2010), Ruin probabilities. World Scientific .
- [2] Asmussen. S (1982), Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications to risk reserve processes and the GI/G/1 queue. Adv. Appl. Prob. 14,143-170.
- [3] Bechi. K (2019), Analyse Fonctionnelle de Quelques Modèles de Fiabilité par l'Approche des Développements en Séries. Thèse de Doctorat en mathématiques appliquées. Université Abderahmane Mira de Bejaia.
- [4] Benouaret. Z (1992), Stabilité dans les modèles de risque. Thèse de Doctorat en mathématiques appliquées, option Modélisation Mathématique et Techniques de Décision. Université Abderahmane Mira de Bejaia.
- [5] Cai. J (2002), "Ruin probabilities under dependent rates of interest". Journal of Applied Probability 39 :312-323.
- [6] Charpentier. A and Denuit. M (2004), Mathématiques de l'assurance non vie. Principe Fondamentaux de la Théorie de Risque, Economica .

- [7] Cheurfa. F, Takhedmit.B, Ouazine.S and Abbas.K (2021), Functional sensitivity analysis of ruin probability in the classical risk models.
- [8] Cukier. R. I, Fortuin. C. M, Shuler. K. E, Petschek. A. G and J.H (1973), Schaibly. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients - theory. *Journal Chemical Physics*, 59 : 3873-3878.
- [9] Cukier. R. I, Levine. R. I and Shuler. K. E (1978), Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal Computational Physics*, 26 :1-42.
- [10] Cukier. R. I, Shuler. K. E and Schaibly. J. H (1975), Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients - analysis of the approximations. *Journal Chemical Physics*, 63 :1140- 1149.
- [11] Devylder. F and Marceau. E (1995), Explicite Analytic Ruin Probabilites for Bounded Claims, *Insurance : Mathematics and Economics*, 79-105.
- [12] Devylder. F, Goovaerts. M, and Marceau. E (1997), The Bi-atomic Minimal Solution of Schmitter's Problem, *Insurance : Mathematics and Economics*, 59-78.
- [13] Efron. B and Stein. C (1981), The jackknife estimate of variance. *The Annals of Statistics*, pages 586-596.
- [14] Fajraou. N (2014), Analyse de sensibilité globale et polynômes de chaos pour l'estimation des paramètres : application aux transferts en milieu poreux.

- [15] Grandell. J (1991), Aspects of Risk Theory. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag.
- [16] Homma. T and Saltelli (1996), A Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models. Reliability Engineering and System Safety, 52 :1-17.
- [17] Iooss. B (2011), Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques. Journal de la Société Française de Statistique. vol. 152, (1), 1-23.
- [18] Janssen. S and Manca. R (2007), Semi-markov risk models for finance. insurance and reliability (Springer).
- [19] Jacques. J (2005), Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée (Université Joseph Fourier - Grenoble 1).
- [20] Loisel. S (2006), Gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine. Cours en ISFA 3 ème année (Université de Lyon 1).
- [21] Lundberg. F (1903), Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Akad. Af-handling. Almqvist och Wiksell, Uppsala (en Russe).
- [22] Marceau. E (2003), Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat. Modèles sur une période. Springer. Livre.
- [23] Murata. N, Yoshizawa. S and Amari. S (1991), A criterion for determining the number of parameters in an artificial neural network model. In T.Hohonen, K.Mäkisara, O.Simula and J.Hangas, editors, Artificial Neural Networks. Proceedings of ICANN-91, volume 1, pages 9-14, Amsterdam : North HolLand.

- [24] Saltelli. A and Sobol. I. M (1995), About the use of rank transformation in sensitivity analysis of model output. *Reliability Engineering System Safety*, 50(3) :225 - 239.
- [25] Saltelli. A et al (2000), *Sensitivity analysis*, volume 1. Wiley New York.
- [26] Saltelli. A (2006), *The critique of modelling and sensitivity analysis in the scientific discourse, an overview of good practices*. Institute for the protection and security of the citizen, European commission Joint research centre.
- [27] Saltelli. A and Bolado. R (1998), An alternative way to compute fourier amplitude sensitivity test (fast). *Computational Statistics Data Analysis*, 26 :445-460.
- [28] Saltelli. A, Tarantola. S, Campolongo. F and Ratto. M (2004) ,*Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models*. John Wiley and Sons.
- [29] Sato. K. I (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- [30] Schaibly. J. H and Shuler. K. E (1973), Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. applications. *Journal Chemical Physics*, 59 :3879-3888.
- [31] Sheldon. R, *Simulation, Monte Carlo* (1968), professeur au département de Génie Industriel et Recherche Opérationnelle de l'Université de Californie à Berkeley.
- [32] Schiff. J. I (1999), *The Laplace transform : Theory and applications*. Springer-Verlag, New York, Inc.

- [33] Schmidt. V, Teugels. R. J and Schmidli. H (1999), Stochastic Processes for Insurance and Finance. (Wiley).
- [34] Sobol. I. M (1990), On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models. Ma-tematicheskoe Modelirovanie, 2(1) :112-118.
- [35] Sobol. I. M (1993), Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. Mathematical Modelling and Computational Experiments, 1 :407-414.
- [36] Teugelst. J. L (1982), Estimation of the Ruin Probabilty, Inssurance : Mathematics and Economics, 169-175.
- [37] Tomassone. R, Danzard. M, Daudin. J. J, and Masson. J. P (1988). Discrimination et classement. Masson, Paris.
- [38] Turyani. T et al (2005), Similarity of local sensitivity functions, Institute of Chemistry, Eötvös University (ELTE), Budapest, Hungary.
- [39] Willmot. G. E and Lin. X. S (1997), Simplified Bounds on the Tails Compound Disrubution, Journal of Applied Probability, 127-133.
- [40] Willmot. G. E (1994), Refinements and Distributional Generalizations of Lundberg's Inequality, Inssurance : Mathematics and Economics, 49-63.
- [41] Zoubir. I and Houcine. D (2017), étude de la sensibilité de la probabilité de ruine via copule. Mémoire de Magister.

## *Résumé*

Ce travail traite l'analyse de sensibilité dans le modèle de risque classique basé sur les indices de Sobol. Cette analyse consiste à déterminer, quantifier et analyser comment réagissent les sorties d'un modèle face à des perturbations sur ses variables d'entrée. En particulier, nous avons réalisé une analyse de sensibilité de la probabilité de ruine par le calcul des indices de sobol, afin de déterminer les paramètres les plus influents. Le calcul des indices de sobol nous a permis de décider sur quels paramètres jouer en priorité pour réaliser l'analyse de l'incertitude. Pour résumer, nous avons fourni un cadre cohérent afin de caractériser la probabilité de ruine incertaine du modèle de risque classique.

**Mots-clés :** Théorie de ruine, Analyse de sensibilité et d'incertitude, Décomposition de la variance, Indices de Sobol, Simulation Monte Carlo.

## *Abstract*

This work deals with the sensitivity analysis in the classical risk model based on Sobol indices. This analysis consists in determining, quantifying and analyzing how the outputs of a model react to disturbances on its input variables. In particular, we carried out a sensitivity analysis of the probability of ruin by calculating sobol indices, in order to determine the most influential parameters. The calculation of sobol indices allowed us to decide on which parameters to prioritize to perform the uncertainty analysis. To summarize, we have provided a coherent framework to characterize the probability of uncertain ruin of the classical risk model.

**Keywords :** Ruin theory, Sensitivity and uncertainty analysis, Decomposition of variance, Sobol indices, Monte Carlo simulation