REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : **OUASLI Souad** et **ABIZA Hamza**

THÈME

Sur l'existence et l'unicité des solutions des équations aux lois de conservation : application au modèle de Saint-Venant

Soutenu publiquement, le 04 / 10/ 2021 devant le jury composé de :

Mme Halima ZEROUATI	M.C.A	Université de Bejaia	Présidente
Mme Hadjila TABTI	M.C.B	Université de Bejaia	Examinatrice
Mme Hassina TOUNSI	M.C.B	Université de Bejaia	Rapporteur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu tout puissant pour nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Nous adressons nos sincères remerciements à notre encadreur Madame **Hassina TOUNSI**, Maitre de consérances à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia qui n'a pas hésité à mettre à notre disposition ses connaissances, ses multiples conseils et instructions et qui nous a également dirigé tout au long de ce travail ainsi que pour la confiance qu'elle nous a témoignée.

Nous adressons nos remerciements à Madame **Halima ZEROUATI**, maitre de conférences à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, pour l'honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de ce mémoire, nous la remercions énormément.

Nous tenons aussi à remercier Madame **Hadjla TABTI**, maitre de conférences à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, d'avoir accepté la lourde tache de lire, de commenter et juger ce mémoire.

Merci à toutes...

Dédicaces

A la lumière de ma vie, la source de mon bonheur et le guide de mon chemin, tendre et merveilleuse maman. Elle qui m'a soutenue tout au long de mon existence.Elle a partagé avec moi mes joies et mes peines. Ma mère a toujours su garder le sourire dans les moments durs. Merci à toi chère maman merci, tu resteras à jamais présente dans mon cœur. Puisse Dieu te compter parmi les gens du Paradis.

Je dédie ce mémoire à ma deuxième mère. **Ma sœur** « **NAJET**» que Dieu la garde en très bonne santé et lui souhaite une longue vie.

Mes frères « **NADJIB**» et «**HANANE**» sont la lumière de ma vie, que Dieu les gardes en très bonne santé et leur souhaite une longue vie.

A mes grand-parents «**MOHAND ARBI**» « **DJAMILA**», qui comptent beaucoup pour moi.

A mes très chers cœurs, les enfants de mes sœurs et **LYDIA**. Tous mes amies qui occupent une trés grande place dans mon cœur.

Merci d'être toujours là pour moi

SOUAD

Dédicaces

C'est avec grande plaisir que je dédie ce travail.

A l'être le plus cher de ma vie, **ma mère.**

A celui qui a fait de moi un homme, **mon père**.

A mes chers frères et sœurs.

A tous mes amis et toute personne qui occupe un place dans mon cœur.

A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom **ABIZA**.

Merci pour votre soutient dans ces moment.

HAMZA

Table des matières

Introduction générale

Ce mémoire aborde la question, ô combien vaste et épineuse, de l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes hyperboliques aux lois de conservation.

L'étude théorique de l'existence d'une solution des problèmes hyperboliques de lois de conservation se fait en général pour les cas scalaires ou au plus pour une dimension d'espace. Dans ce dernier cas une solution classique locale, c'est à dire pour un temps fini, peut être construite par la méthode des droites caractéristiques, et ce pour une donnée initiale continue par morceaux. Pour un temps t>0 et à partir d'un seuil critique, la solution peut devenir discontinue. La recherche d'une solution globale du système est alors étendue au sens des distributions. Une condition d'entropie mathématique permet alors de sélectionner une solution unique parmi celles admissibles physiquement.

Dans le premier chapitre, nous avons jugé utile de faire un rappel sur les espaces fonctionnels de base (Espaces L^p , Espaces de Sobolev ...etc), ainsi que quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Nous y rappelons aussi les règles de classification des équations aux dérivées partielles.

Dans le deuxième chapitre nous passons en revue quelques résultats sur l'existence, l'unicité et la régularité de la solution, de problèmes aux limites, notamment hyperboliques, appliquées à la physique tels que le problème de transport, l'équation de Burgers ou encore le système de Saint venant pour les écoulements peu profonds. Dans le cas scalaire une résolution analytique de ces systèmes est possible grâce à la méthode des caractéristiques.

Dans le cas général , la question de l'unicité de la solution est abordée par l'approche de la solution faible entropique. Pour cela nous optons, dans le chapitre trois, pour la forme conservative des systèmes hyperboliques. Les critères d'Oleinik et Lax permettent d'assurer l'unicité de la solution faible parmi celles admissibles physiquement. Enfin ; un exemple type d'un système hyperbolique aux lois de conservation est donné, il s'agit du système Shallow water (dit aussi de Saint Venant) modélisant les écoulements à surface libre. La résolution analytique de ces systèmes est très difficile voire impossible. Il s'agit alors de solutions approchées par les méthodes numériques, l'unicité est garantie par l'entropie au sens de Kruzkov, par exemple.

Chapitre 1

Classification des équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre nous donnons un bref rappel sur les espaces fonctionnels utilisés ainsi que quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Nous avons aussi jugé utile de rappeler les techniques de classification des EDP.

1.1 Quelques rappels sur les espaces fonctionnels :

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ.

Définition 1.1 *[3](**Espace** $C^\infty(\Omega)$) :*
soit f une fonction définie :

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

L'espace C^∞ est un ensemble des fonctions infiniment continuement dérivables. On lui associe la norme :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in\Omega} | f(x) |$$

Définition 1.2 *[3]Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que f vaut zéro sur $\Omega \setminus K$. Nous définissions l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω :*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{ \ f \in C^\infty(\Omega) : f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K \ , \ K \quad compact \subset \Omega \ \}$$

Nous notons le support compact de f dans Ω l'ensemble :

$$supp_\Omega(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$$

1.1.1 Espace $L^p, 1 \leq p < \infty$:

Définition 1.3 *[3]Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq P < \infty$. L'espace L^p est défini par :*

$$L^p(\Omega) = \{ \ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad mesurable \ et \ \int_\Omega | f |^p \, dt < \infty \ \}$$

muni de la norme :

$$\| f \|_p = (\int_\Omega | f |^p \ dt)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.4 *[3]$L^\infty(\Omega)$ est définie comme suit :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \textit{mesurable et} \quad \exists c \quad tq : \mid f(x) \mid \leq c \textit{ presque partout sur } \Omega \ \}$$

muni de la norme :

$$\| f \|_{L^\infty} = \inf\{c; \mid f(x) \mid \leq c \quad \textit{presque partout sur } \Omega\}$$

Notation 1.1 *[3]Soit $1 \leq p \leq \infty$, on designe par q l'exposant conjugué de p c'est-à-dire :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Remarque 1.1 *[3]Espace L^q est le dual de l'espace L^p*

Définition 1.5 *[3]Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $< .,. >$ et qui est complet pour la norme $\| \, . \, \|_{L^2}$*

Définition 1.6 *[3]On dit qu'un espace de Banach si il est de Hilbert et complet.*

Théorème 1.2 *[3](**Fisher-Riez)***
L^p est de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$

1.1.2 Espace Sobolev $H^m(\Omega)$:

* Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :[6]

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ \text{ tq} \mid \alpha \mid \leq m\}$$

où

$$\mid \alpha \mid = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \text{ quand } \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ où } \ D^\alpha u = \frac{\partial^{\mid\alpha\mid} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 .... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\alpha, \mid\alpha\mid \leq m} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v} dx$$

et la norme associée est :

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{\mid\alpha\mid \leq m} \int_\Omega \mid D^\alpha u \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

* Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'espace $H^m(\Omega)$ est aussi défini par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : (1+ \mid \zeta \mid^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Et la norme associée est :

$$\| u \|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \zeta \mid^2)^m \mid \widehat{u}(\zeta) \mid^2 d\zeta)^{\frac{1}{2}}$$

Les espace $H^m(\Omega)$ et $H^m(\mathbb{R}^n)$ sont des espace de Hilbert séparables.

1.1.3 Espace Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$:

L'espace de Schwartz : l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, P_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \mid < \infty\}$$

Définition 1.7 *une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$, est une formre linéaire continue sur $S(\mathbb{R}^n)$*
on note $S'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées

* pour $s \in \mathbb{R}$, on note :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) : (1+ \mid \zeta \mid^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

on le munit du produit sclaire :

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \zeta \mid^2)^s \; \widehat{u}\, \overline{\widehat{v}} \; ds$$

et la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ est :

$$\| u \|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \zeta \mid^2)^s \mid \widehat{u} \mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.4 Espace $H_0^1(\Omega)$:

Définition 1.8 *Une distrubition sur l'ouvert Ω est une fonction linéaire $T : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue en 0 ie $< T, \varphi_n > \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ telle que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $C_c^\infty(\Omega)$.*

* Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence du sous espace $D(\Omega)$ dans $(H^m(\Omega), \| \,.\, \|_{H^m(\Omega)})$.

On dit que $u \in H_0^m(\Omega)$,s'il existe une suite $u_n \in D(\Omega)$ telle que :

$$\| u_n - u \|_{H^m(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

- si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $H_0^m(\Omega) = H^m(\Omega)$
- si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ alors $H_0^m(\Omega) \subsetneq H^m(\Omega)$

1.2 Rappel sur les équations aux derivées partielles :

Nous nous intéressons dans cette partie à la classification des équations aux dérivées partielles. Mais d'abord un petit rappel sur la définition des EDP et leurs propriétés.

La forme générale des équations aux dérivées partielles est :

$$F(x, u, Du, ..., D^\alpha u) = 0 \qquad ......(1,1)$$

où u est une fonction inconnue des N variables regroupées dans le vecteur $x = (x_1, ..., x_N)$; α est un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ et $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 .... \partial^{\alpha_N} x_N}$
avec $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$

Définition 1.9 *On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.*

Exemple 1.3 *1)° L'équation suivante est d'ordre 2 :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

2)° L'éqation suivante est d'ordre 1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Définition 1.10 *On dit que l'EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue.*

Exemple 1.4 ** L'équation suivante est linéaire :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

** L'équation suivante est non linéaire et de premier ordre :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0$$

Remarque 1.2 *L'EDP* $(1,1)$ *est équation scalaire si* $N = 1$ *et un système si* $N > 1$

Définition 1.11 *Soit* F *une fonction d'un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^m$*. Une telle fonction est définie par ses* m *fonctions composantes à valeurs réelles :*

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1....x_n) \\ : \\ f_m(x_1....x_n) \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en un point, si elles existent, peuvent être rangées dans une matrice à m *lignes et* n *colonnes.*
appelée matrice jacobienne de F :

$$J_F(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & .... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ : & : & : \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{1n}} & .... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

la case sur la ligne i *et la colonne* j *contient* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *qui est la dérivée partielle de* f_i *, selon la variable* x_j*.*

Exemple 1.5 *La matrice Jacobienne de la fonction* F *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 5x_3, 4x_2^2 - 2x_3, x_3 \sin x_1)$$

est :

$$J_F(x_1, x_2, x_3, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3 \cos x_1 & 0 & \sin x_1 \end{pmatrix}$$

1.3 Classification des EDP :

Dans cette partie nous donnons la classification dans le cas général et en dimension 2.

Les EDP d'ordre 2 s'écrivent en général sous la forme :

$$\sum_{1\leq i\ j\leq n} a_{ij}\ (x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1\leq i\leq n} f(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + g(x) = h(x) \qquad (1,2)$$

Notons $A(x)$ la martice $a_{i\ j}(x)$, c'est une matrice carrée et symetrique, elle est donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont réelles.

Notons les $(\lambda_i(x)_{i=1}^n$ les valeurs propres

$d_+(x)$ le nombre des valeurs propres positives.

$d_-(x)$ le nombre des valeurs propres négatives.

$d_0(x)$ la multiplicité de la valeur propre 0. telle que $d = d_+(x) + d_-(x) + d_0(x)$

On peut classifier les EDPs en trois grandes familles “elliptique” “parapolique” et “ hyperbolique ”

* On dit que l'EDP $(1,2)$ est **elliptique** en $x \in \Omega$ si suelement si :

$$d_+(x) = d$$

$$\text{où} \qquad d_-(x) = d$$

* On dit que l'EDP $(1,2)$ est **hyperpolique** en $x \in \Omega$ si seulement si :

$$d_+(x) = d-1 \quad \text{et} \quad d_-(x) = 1$$

$$\text{où} \quad d_+(x) = 1 \qquad \text{et} \quad d_-(x) = d-1$$

* On dit que l'EDP $(1,2)$ est **parabolique** en $x \in \Omega$ si suelement si :

$$d_0(x) > 0$$

Exemple 1.6 ** Prenons comme exemple l'équation suivante d'ordre 2 :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

La matrice correspondant à cette équation est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice identité carrée qui admet une seule valeur propre positive. La valeur propre est 1, donc l'équation est elliptique.

** L'équation des ondes en dimension 1 est de la forme suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial t^2}u(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où c est un réel quelconque. En supposant u solution de l'équation des ondes. Nous posons $U = (\partial_t u, \partial_x u)$, si la solution est suffisamment réguliere, nous avans $\partial_t U_2 = \partial_x U_1$
Ainsi, U est solution du système d'équation d'ordre 1 suivant :

$$\partial_t U + A\partial_x U = 0 \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on calcule les valeurs propres de A :
on a :

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -c^2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - c^2 = (\lambda - c)(\lambda + c)$$

dont une valeur propre vaut c et l'autre est $-c$ qui est de signe opposé, ce qui prouve que l'équation des ondes est hyperbolique.
** Un exemple classique :*
l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T + \frac{S}{\rho C_P} = 0$$

où D est le coefficient diffusion thermique et C_P la chaleur spécifique à pression constante, S désignant un terme source de production de chaleur, $T = T(t, r)$ la température au point r de l'espace et à l'instant t.
En effet :
dans ce cas la matrice A est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$$

comme A est diagonisable donc les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, donc A admet deux valeurs propres l'une est nulle, et l'autre $-D$ qui est triple et négative, telle que la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à 1.

***Cas de la dimension 2 :**

Dans ce cas, les EDP s'écrivent sous la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0 \quad ....(1,3)$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale $A, B, C..., G$ sont des constante

Le type des EDPs $(1,3)$ dépend du signe $B^2 - 4AC$:

- on dit que EDP $(1,3)$ est elliptique si $B^2 - 4AC < 0$
- on dit que EDP $(1,3)$ est parabolique si $B^2 - 4AC = 0$
- on dit que EDP $(1,3)$ est hyperbolique si $B^2 - 4AC > 0$

Exemple 1.7 *1)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$*. Est telle que :* $b^2 - ac = 1 > 0$ *donc hyperbolique sur* $\mathbb{R}^2$.

2) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$*. Est telle que :* $b^2 - ac = x^2y^2 > 0$ *donc est hyperbolique sur* $\mathbb{R}^2$.

3) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$*. Est telle que :* $b^2 - ac = 0$ *donc est parabolique sur* $\mathbb{R}^2$.

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$*. Est telle que :* $b^2 - ac = -1 < 0$ *donc est elliptique.*

1.4 Les conditions aux bords :

Nous donnons les conditions aux bords, les plus utilisées :

a) les conditions de Dirichlet non homogène $u(0,x) = u_0(x)$

elle sont de Dirichlet homogéne si $u(0,x) = 0$

b) les conditions mixte : $u(0,x) = u_0(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = v_0(x)$

1.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Les équations différentielles ordinaires interviennent naturellement pour résoudre certaines équation aux dérivées partielles.

Nombre de ces problèmes présentent dans leurs modèlisation une équation différentielle ordinaire du premièr ordre sous forme résolue (problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \qquad t \in I \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.12 *[8]Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $D = I \times \Omega$ *ou* $t \in I$, $x \in \Omega$
On dit que f *est lipschitzienne en* x *et on notera* $f \in Lip(D)$*, s'il existe* $k > 0$ *tel que :*

$$\mid f(t, y) - f(t, x) \mid \leq k \mid y - x \mid, \forall (t, x), (t, y) \in D$$

Théorème 1.8 *[8]**(Cauchy-Lipschizt)***
Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$*, Alors le problème de Cauchy admet une unique solution maximale .*

Définition 1.13 ***(Fonction convexe) :***
Soit une fonction $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$*, où* S *est un ensemble convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$*,* f *est dite convexe sur* S *si :*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2), \forall x_1, x_2 \in S, \lambda \in [0, 1]$$

Chapitre 2

Résultats d'existence et d'unicité des solutions de quelques EDP

Dans ce chapitre, nous faisons une synthèse des différents résultats d'existence d'unicité et de régularité pour quelques problèmes types de la physique mathématique.

Dans ce qui suit nous exposons la méthode des caractéristiques pour quelques problèmes types, et ceci dans le cas scalaire.

2.1 La méthode des caractéristiques :

En mathématique, la méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Dans les cas plus complexes (par exemple modélisation des systèmes physique), la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique.

Le principe de la méthode repose sur la recherche de courbes $x = x(t)$ du plan (t, x) sur lesquelles la solution u reste constante (ces courbes sont appelées courbes caractéristiques, qui seront définies plus tard).

Définition 2.1 *Soit I un intervalle ouvert de $[0, T\ [$. Une courbe caractéristique de solution u sur I est une courbe paramètrée* $\{\ (X(t)\ ,\ t)\ ,\ t \in I\}$

2.1.1 La méthode des caractéristiques pour le problème de Burgers :

Soit l'équation de Burgers qui non linéaire, avec la condition initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0 & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = x_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

supposons qu'il existe une solution régulière u de ce problème définie sur $[0, T]$, pour $T > 0$.

On a alors :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + 2u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0, \forall t > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Posons $c(t, x) = 2u(t, x), \forall t \in [0, T]\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$, u vérifie aolrs l'équation linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + 2u(t,x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0 & \forall t > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = x_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a la définition des caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = c(t, X(t,0,x)) \\ \\ X(0,0,x) = x_0 \end{cases}$$

La fonction u étant régulière, c l'est aussi.

D'aprés le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a donc l'existence locale des courbes caractéristiques associées. On a alors :

$$\frac{d}{dt}[u(t,X(t,0,x))] = \frac{\partial}{\partial t}(u(t,X(t,0,x)) + \frac{dX}{dt}(t,0,x)\frac{\partial}{\partial x}(u(t,0,x)) = 0$$

comme $\dfrac{dX}{dt}(t,0,x) = c(t,X(t,0,x))$, donc u est constante le long des caractéristiques, d'où :

$$u(t,X(t,0,x)) = u_0(X(0,0,x)) = u(0,x) = u_0(x) \ , \ \forall t > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier les courbes caractéristiques sont globales car c est bornée.

Revenons à la définition des caractéristiques :

$$\frac{dX}{dt}(t,0,x) = c(t,X(t,0,x)) = 2u(t,X(t,0,x)) = 2u_0(x)$$

Cette expression est indépendante de t, donc :

$$X(t,0,x) = 2u_0(x)t + cst = 2u_0(x)t + x_0$$

Les caractéristiques sont des droites dont la pente est $\dfrac{1}{u_0(x)}$ et u est constante le long de ces droites.

2.1.2 Méthode des caractéristiques pour le problème de transport :

Nous consérérons l'équation de transport avec la condition initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a est une vitesse donnée.

Nous supposons que u est une solution de l'équation de transport et de classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

on cherche une ligne caractéristique $(x(s), t(s))$ le long de laquelle cette équation aux dérivées parielles du premier ordre se réduit à une équation différentielle ordinaire.

Calculons la dérivée de u le long d'une telle courbe :

$$\frac{d}{ds}[u(t(s), x(s))] = \frac{dx(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{dt(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0$$

on remarquera aisément qu'en imposant :
$\dfrac{dx(s)}{ds} = 1$ et $\dfrac{dt(s)}{ds} = a$, on obtient :

$$\frac{d}{ds}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + a\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$$

La solution de l'équation reste donc constante le long de la ligne caractéristique.

Il vient aussi trois équations différentielles ordinaires à résoudre :

- $\dfrac{dx(s)}{ds} = 1$ en posant $t(0) = 0$, on obtient $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $t(s) = s$
- $\dfrac{dt(s)}{ds} = a$ en notant $x(0) = x_0$,on obtient :
$\forall s \in \mathbb{R}^+,\ x(s) = x_0 + cs = x_0 + ct$ (car $t = s$ d'aprés le résultat précédent)
- $\dfrac{du}{ds} = 0\ \forall s \in \mathbb{R}^+,\ u(s) = u(0) = u(x_0, 0) = u(x_0)$

Dans ce cas, les lignes caractéristiques sont donc des droites de pente c, le long desquelles la solution reste constante. La valeur de la solution en un point $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ peut donc être retrouvée en cherchant la valeur de la conditon initiale u_0 à l'origne $x_0 = x - ct$ de la ligne caractéristique.

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\quad u(t,x) = u_0(x - ct)$$

2.1.3 La méthode des caractéristiques pour le problème des ondes :

Nous considérons l'équation des ondes avec la condition mixte :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \ \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(0,x) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

On peut écrire l'équation hyperbolique des ondes sous forme d'équation d'ordre 1. En effet, posons :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad et \quad w = \frac{\partial u}{\partial x}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - c\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Si on introduit le vecteur U et la matrice A définies par :

$$U = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

l'équation (2.1) se met sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Le théorème suivant (la folmule D'Alembert) est utilisé pour trouver la solution de l'équation des ondes :

Théorème 2.1 ***(la Formule de D'Alembert) :***
Toute solution de l'équation des ondes homogène (2.1) *se décompose sous la forme :*

$$u(t,x) = u^+(t,x) + u^-(t,x)$$

* $u^+(t,x) = f(x-ct)$ *est une onde progressive se propageant à la vitesse* c *dans la direction* $x > 0$ *:*

$$u^+(t, x+cT) = u^+(t-c, x)$$

* $u^-(t,x) = g(x+ct)$ *est une onde progressive se propageant à la vitesse* c *dans la direction* $x < 0$:

$$u^+(t, x-cT) = u^+(t-c, x)$$

$x \pm ct = cte$ *sont des courbes caractéristiques .*

En utilisant la méthode des caractéristiques et la formule de D'Alembert on aura :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)) + \frac{1}{2}\int_{[x-ct,x+ct]} u^1(s)ds$$

qui est la solution de l'équation des ondes pour la condition mixte.

2.2 Solution faible :

Nous considérons le système suivant[11] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}(F(u(x,t)) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce système est appelée la lois de conservation dans le cas scalaire, F est une fonction de flux.

Nous définissons la solution faible et l'entropie dans ce chapitre dans le cas scalaire, dans ce qui suit :

Définition 2.2 *[11]soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *. On appelle solution faible* (2.1)*, une fonction* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *vérifiant pour toute fonction teste* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}}[u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + f(u(t,x))\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)]dxdt + \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0$$

Définition 2.3 *[11]Soit* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ *bornée et* $T > 0$*. Alors* u *est dite solution classique sur* $[0,T]$ *si* $u \in C^1([0,T[\times \mathbb{R})$*,* u *est solution faible sur* $]0,T[\times \mathbb{R}$ *et* $u(0,x) = u_0(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Solution entropique :

On va maintenant introduire la notion de solution entropique, qui permet de définir des solutions admissibles et obtenir l'unicité (il y a toujours existence globale des solutions faibles).

Définition 2.4 *[11]On dit que $(\eta\ ,\ F)$ est un couple entropie-flux et d'entropie pour* (2.2) *si $\eta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une fonction convexe et si $F' = \eta' f'$ (η est une entropie-flux , F est une fonction entropie)*
Dans le cas de solution régulières de (2.2) *, on a alors :*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u(t,x)) + \frac{\partial}{\partial t}F(u(t,x)) = 0$$

cette équation n'est plus vérifiée en présence de discontinuités.

Définition 2.5 *[11]soit $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, u est une solution faible de* (2.2)
u est une solution entropie de (2.2) *si elle vérifiant pour tout couple entropie-flux d'entropie $(\eta\ , F)$ et pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$:*

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u)\partial_t\varphi(t,x) + F(u)\partial_x\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)dx \geq 0$$

L'égalité précédant est simplement la forme au sens des distrubution de :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}F(u(t,x) = 0$$

2.4 EDP elliptique :

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et de frontière $\partial\Omega$ régulière[9]. Soient $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$ et $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ tel que $a_0 \geq 0$, nous considérons le problème aux limites suivantes :

$$\begin{cases} -\sum_{1\leq i,j\leq n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u = f & \text{dans} \quad x \in \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur} \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.6 *[9]On dit que* (2.3) *est* ***elliptique*** *si elle vérifie la condition d'ellipcité c'est-à-dire :*

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \mid \xi \mid^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$$

Théorème 2.2 (**l'inégalité Poincaré**)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné, convexe et de frontière suffisamment régulière. Alors il existe une constante $\exists\ c_p > 0, \forall u \in H_0^1$:

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \| \nabla u \|_{(L^2(\Omega))^n}$$

Définition 2.7 *[3]On appelle " formulation variationnelle " tout problème de type suivant :*

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in H \quad tel\ que\ \forall v \in H \\ \\ a(u,v) = \quad < l, v > \end{cases}$$

Théorème 2.3 *[3]**(Théorème de Lax-Milgram) :***
Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni du produit scalaire noté $< .,. >_H$, de norme $\| \cdot \|_H$.
**) $a(.,.)$ une forme bilinéaire c'est-à-dire linéaire par rapport à la première variable et seconde variable .*
a) continu sur $H \times H$: $\exists\ c > 0 \quad \forall\ u, v \in H \qquad | a(u,v) | \leq c \| u \| \| v \|$
b) coercive sur H : $\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in H$: $a(v,v) \geq \alpha \| v \|$
**) $< l, v >$ une forme linéaire continue sur H*
si les hypothèses du théorème sont satisfaites alors :
il existe un unique u de H tel que :
1)° L'équation $a(u,v) = < l, v >$ soit vérifiée pour tout v de H c'est-à-dire :

$$\exists! u \in H \quad \forall v \in H \qquad a(u,v) = < l, v >$$

2)° De plus si la forme bilinéare a est symétrique , alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonction $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - < l, v >$ pour tout v de H :

$$\exists! u \in H \quad J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Théorème 2.4 *[3]**(inégalité de Cauchy-Schwartz**)*
Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhibertien réel ou complexe. Alors pour tous vecteurs u et v de E :

$$|< u, v >| \leq \| u \| \| v \|$$

Cette inégalité s'appele inégalité de Cauchy-Schwartz

* Nous rappelons que $(E, <.,.>)$ espace préhibertien si E est espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $<.,.>$.

2.4.1 Résultat d'existence et l'unicité des solution régulières :

La formulation variationnelle du problème $(2,2)$ s'écrit : [9]

$$(D_0)\begin{cases} Trouve \quad u \in H_0^1 \quad \text{tel que } \ \forall v \in H_0^1 : \\ \\ \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\ dx + \int_\Omega a_0 uv\ dx = \int_\Omega fv\ dx \end{cases}$$

On pose

$$a(u,v) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 uvdx$$

$$< l, v >= \int_\Omega fvdx$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de u, solution de (D_0), on applique le théorème de Lax-Milgram avec :

$H = (H_0^1(\Omega), \|\ .\ \|)$ est une espace de Hilbert

$a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, l est une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

* Montrons que $a(.,.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Les fonctions a_0, a_{ij} $(i,j = 1...n)$ sont continues sur le compact $\overline{\Omega}$, donc elles sont bornées et atteignent leurs bornes.

On a :

$$\exists M_0 > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \mid a_0(x) \mid \leq M_0 \text{ et } \exists M_{ij} > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \mid a_{ij}(x) \mid \leq M_{ij}, i,j = 1,....,n$$

Soit $M = \max(M_0, M_{ij}, i,j = 1,..,n)$, pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\mid a(u,v) \mid \leq M\ (\sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \mid dx + \int_\Omega \mid uv \mid dx)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que :

$\exists\ M > 0$, $\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\mid a(u,v) \mid \leq M \parallel u \parallel_{H^1(\Omega)} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}$$

* montrons que $a(.,.)$ est coercive ?

Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(v,v) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 v^2 dx$$

comme $a_0(x) \geq 0$ et la condition d'ellipticité et d'aprés l'inégalité de Poincaré on aura :

$\exists\ \alpha > 0$, $\exists\ c > 0$ donc $\exists\ c_0 = \dfrac{\alpha}{c+1} > 0$ tel que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \ a(v,v) \geq \frac{\alpha}{c+1} \parallel v \parallel^2_{H^1(\Omega)}$$

* La continuité de l découle de l'inégalité de Cauchy-schwarz :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : |< l,v >| \leq \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgrame sont vérifiées, donc $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u,v) = < l,v > .$$

En d'autres termes, $(2,2)$ admet une solution faible unique u dans $H_0^1(\Omega)$.

D'aprés ces résultats on a prouvé l'existence et l'unicité de solution faible pour les problèmes elliptiques.

2.5 EDP parabolique :

Pour un domaine Ω ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ bornée, de frontière $\partial\Omega$ régulière et pour un temps $T > 0$ fixé,[9] nous considérons le problème aux limites suivant :

Trouver une fonction $u = u(t,x)$ avec $x \in \Omega$ et $t \in [0,T]$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \qquad (2.4)$$

le problème contient l'équation de la chaleur citée dans le chapiter 1 qui est de type parabolique.

2.5.1 Résultat d'existence et de l'unicité de solution :

Nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité pour le problème $(2,2)$[9] :

* si $f \in L^2(\Omega \times [0,T])$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ alors le problème (2.4) admet une unique solution u vérifiéent :

$$u \in L^2([0,T] \times H^2(\Omega)) \cap H_0^1(\Omega) \cap C([0,T]\,, H_0^1(\Omega)$$

$$et \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0,T]\,, L^2(\Omega))$$

* on peut généraliser les résultat d'existence et d'unicité pour le problème si $f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ alors il existe une unique solution telle que :

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon,T]) \quad \forall\varepsilon > 0$$

Pour les EDP paraboliques l'existence et l'unicité découlent de la régularité des conditions aux bords.

2.6 EDP hyperbolique :

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à quatre problèmes hyperboliques :

*L'équation de transport

*L'équation de Burgers

*L'équation des ondes

*Les équation de saint-venant

Définition 2.8 *[4](**Inégalité d'Oleinik**) :*
soit $u \in L^\infty([0,T[\times \mathbb{R})$. Nous dirons que u satisfait une inégalité d'Oleinik s'il existe une fonction $C :]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante telle que :

$$u(t,y) - u(t,x) \leq C(y-x) \quad \forall y \geq x,\ \forall t > 0$$

Définition 2.9 ** On dit que le système est dit hyperbolique si $v \in S^{\,d-1}$ (S^{d-1} ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$), la matrice $A(v)$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On note $\lambda_i(v)$, $1 \leq l \leq n$, ses valeurs propres ordonnées.*
** On dit que le système est strictement hyperbolique si les n valeurs propres sont distintes, on a alors $\lambda_1(v) < .... < \lambda_n(v)$.*

2.6.1 Différent type des problèmes hyperboliques :

* L'équation des ondes[10] est sans conteste l'une des plus importantes équations aux dérivées partielles hyperboliques et ses aplications en physique théorique sont multiples. De trés nombreux travaux lui ont été consacrés dépuis plus de deux siècles et encore aujaurd'hui elle est l'objet des recherches trés actives dans ses version linéaire et non linéaire, le problème s'écrit sous la forme avec la condition mixte suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(u(t,x)) & (t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(0,x) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.5}$$

c est la vitesse de la lumière

*Le problème de transport : permet de modéliser un phénomène de transport à vitesse constante ou bien une vitesse qui dépend du temps ou de l'espace

Le problème de transport linéaire avec condition initiale s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) + a(t,x) \dfrac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 0 & (t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R} \\ u(t,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

lorsque a est vitesse constante une solution évidente du problème est donnée par : $u(t,x) = u(0, x - at)$

*L'équation de Burgers est un modèle hyperbolique .[10] Elle intervient dans la modélisation de la dynamiques des gaz , de l'accoustique ou du trafic routier.

En notant u la vitesse, la forme de l'équation de Burgers non linéaire est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0 & (t,x) \in]0,T[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

*Les équations de saint-venant établies en 1871, sont équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires graduellement variés à surface libre, ces équations sont de type strictement hyperbolique[10]. Le système de Saint-Venant s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial h(t,x)u(t,x)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial h(t,x)u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial h(t,x)u^2(t,x)}{\partial x} + g\dfrac{h^2(t,x)}{2} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

h : la hauteur de l'eau
g : la constante de la gravité
u : vitesse moyenne horizontale.

2.6.2 Résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes hyperboliques :

Equation de transport :

Dans le chapitre 1, on a trouvé que l'équation (2.6) admet une solution d'aprés la méthode des caracréristiques et la théorème de Cauchy-Lipschizt. Elle s'écrit :

$$u(t,x) = u_0(x-at) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Donc on a l'existence de solution pour le problème de transport. Maintenent on cherche l'unicité de solution pour ce problème, on a résultat suivant :

D'aprés la méthode des caractéristiques, on obtient le système suivants :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = a(t, X(t)) \\ \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 2.5 *[10]* ***(Existence et unicité pour le problème de transport) :***
On supose que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et que $a \in C^1(\mathbb{R}^2)$ est globalemment lipschitzienne par rappport à la second variable, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{R} : \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \ \mid a(t,y) - a(t,x)| \leq k \mid y - x|$$

Alors le problème (2.6) admet une unique solution de classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. La solution u définie par : $u(t,x) = u_0(x-at)$

D'aprés le théorème précédent on a l'existence et l'unicité du problème de transport, il existe d'autres théorèmes et propositions qui montrent l'existence et l'unicité de solutions faibles du probléme de transport :

Proposition 2.1 *[10](unicité de solution de l'équation de transport) :*
Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(t,x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution faible. Elle s'écrit $u(t,x) = u_0(x - at)$

Preuve.
Nous écrivons la formulation faible du problème en posant $u(t,x) = u_0(x - at)$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\int_{t\in\mathbb{R}^+}\int_{x\in\mathbb{R}}(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)au(t,x))dxdt$$
$$= \int_{t\in\mathbb{R}^+}\int_{x\in\mathbb{R}}[u_0(x-at)(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + a\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x))]dxdt$$
$$= \int_{t\in\mathbb{R}^+}\int_{x\in\mathbb{R}} u_0(y)(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,y+at)) + a\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,y+at))dydt$$
$$= \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)\int_{t\in\mathbb{R}^+}\frac{d}{dt}(t \longrightarrow \varphi(t,y+at))dtdx$$
$$= \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)\varphi(0,y)dy$$

Donc u est solution faible. ∎

Théorème 2.6 *[10](Oleinik) :*

Soit $u \in L^\infty([0,T[\times \mathbb{R})$ solution de l'éqation de transport :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) + a(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u \in L^\infty([0,T[\times\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+$ sont données. Si a stisfait une condition d'Oleinik alors u est nulle presque partout.

D'aprés le théorème précédent et la proposition précédente on a l'existence et l'unicité de solution faible.

Equation de Burgers :

Nous considérons le problème (2.7) avec condition initiale particulière suivant [5] :

$$u^0(x) = \begin{cases} u_G & \text{si } x < 0 \\ \\ u_D & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

.Dans le chapitre 1, on a prouvé l'existence d'une solution globale (car c est bornée) pour l'équation de Burgers d'aprés la méthode des caractéristique et théorème de Cauchy-Lipschitz.

*mais nous n'avons pas l'unicité, en effet :

soit $u \in L^2(\mathbb{R} \times]0, T[)$ définie par :

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{t} \\ \\ \frac{x}{2t} & \text{si } |x| \leq \sqrt{t} \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation de Burgers pour la condition $u_0 = 0$, mais on a une autre solution $u \equiv 0$ est une solution faible de problème de Burgers .Donc pas l'unicité pour l'équation de Burgers

Remarque 2.1 *Il existe plusieurs solutions faibles du problème de Burgers, ceci dépond de la condition qui est donnée*

Comme les solutions du problème sont discontinues, les conditions de Rankine-hurgoniot permettent de savoir si une fonction définie par merceaux est , ou non , solution faible du problème .On a le théorème suivant :

Théorème 2.7 *[5]*
soit $t \longrightarrow \alpha(t)$ une courbe régulière .Soit u une fonction de classe C^1, bornée ainsi que ses dérivées , dans $\Omega_- = \{(t,x), x < \alpha(t)\}$ et de classe C^1 dans $\Omega_+ = \{(t,x), x > \alpha(t)\}$ Alors u est solution faible si et seulemment si :
- $u(0,.) = u_0$
- u vérifie l'équation au sens classique dans Ω_- et Ω_+
- u vérifie de plus la condition de saut suivante :

$$f(u(t,\alpha(t)^+)) - f(u(t,\alpha(t)^-)) = \alpha'(t)(u(t,\alpha(t)^+) - u(t,\alpha(t)^-)) \qquad \forall t \geq 0$$

Nous constatons que les solutions faibles de l'équation de Burgers ne sont pas uniques .Il existe plusieurs critères permettant de sélectionner la solution "physique" parmi toutes les solutions faibles possibles : critère d'Oleinik , critère de Lax , critère de entropie ...

Nous citons ici les critère d'Oleinik et Lax. Ils permettent d'assurer l'unicité de solutions faibles dans le cas où la fonction flux f est convexe. Le critère de Lax est défini comme suit :

Définition 2.10 *[10]une solution discontinue en translation (u_G, u_D, δ) est dite admissible au sens de Lax si elle vérifie :*

$$f'(u_G) \geq \delta \geq f'(u_D)$$

avec $\delta = \dfrac{u_G - u_D}{2}$

Le critère d'Oleinik est basé sur le fait que seule les discontinuités décroissante semblent admissibles lorsque le flux est convexe.

Si nous appliquons l'inégalité d'Oleinik, nous trouvons :

$$u(t,y) - u(t,x) \leq \frac{1}{t}(y-u) \quad \forall y \geq x$$

comme la fonction de flux $f(u) = u^2$ est convexe, alors on a existence et unicité d'une solution faible pour l'équation de Burgers.

Le systéme de Saint-Venant :

Nous considérons le problème (2.8) avec conditions : $u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

On ne peut résoudre analytiquement les équations de saint-venant. C'est pour cela on utilise approximation numérique pour construire une suite qui converge vers une solution régulière.

Pour l'unicité nous utilisons la notion de solution entropique pour sélectionner l'unique solution faible du problème.

Equation des ondes (ou des cordes) :

D'aprés le chapitre précédent il découle que la solution de l'équation (2.5) avec le condition mixte est sous la forme suivante :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)) + \frac{1}{2}\int_{[x-ct,x+ct]} u^1(s)ds$$

Donc on a assuré l'existance d'une solution pour le problème (2.5)

Montrons que cette solution est unique.

D'aprés la théorème suivant on a existence et l'unicité de solution régulièr pour le problème (2.5), qui dit que on obtient existence et unicité par régulatrité des condition aux bords c'est-à dire : $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La théorème suivant résume ceci :

Théorème 2.8 *[2]*
soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$ *, si* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *alors :*
pour $T > 0$ *, il existeune unique solution* $u(t,x)$ *pour le problème* (2.5) *telle que :*
$*$ $u(t,x) \in H^1(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$ *et* $\dot{u}(t,x) \in L^2(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$

Chapitre 3

Système de Saint-Venant et lois de conservation

En dimension d'espace $d > 0$, le problème de l'existence (au sens analytique) de la solution des systèmes hyperboliques non linéaires, reste posé.

C'est pour cela qu'on a recours aux méthodes numériques pour l'aproximation de la solution. Reste alors à garantir l'unicité de cette solution approchée.

L'approche de la solution faible entropique permet de " sélectionner ", l'une des solutions parmi celles admissibles physiquement. La forme conservative de l'EDP hyperbolique se prête à l'introduction de l'entropie mathématique.

3.1 La loi de conservation :

Dans le cas non linéaire.[11] Les systèmes hyperboliques sont généralement représentés par des lois de conservation qui s'écrivent sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Nous rappelons la définition de la loi de conservation dans le cas scalaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}(F(u(x,t)) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (3,1)$$

Le fait que cette équation soit conservative signifie que la quantité $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{[a,b]} u(t,x)dt$ se conserve au cours du temps, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]} u(t,x)dt = F(u(t,a)) - F(u(t,b))$$

Et si u intégrable et tend vers 0 en $\pm\infty$ on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]} u(t,x)dt = 0$$

Nous nous intéressons à présent à l'équation scalaire conservative (le plus souvent non linéaire) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(F(u(x,t)) = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \qquad (3,2)$$

où $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et donnée, suffisamment régulière.

Théorème 3.1 *[10](**existence et unicité pour une équation conservative)***
Soit une fonction flux $F \in C^2(\mathbb{R})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_0' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors :
$*$ si $F''(u_0(x)u_0'(x)) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le problème $(3,1)$ admet une solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
$*$ si non le problème admet une unique solution :

$$u \in C^1(\left[0, \frac{-1}{\inf_{x\in\mathbb{R}F''(u_0(x)u_0'(x))}}\right[\times \mathbb{R})$$

qui ne peut pas être prolongée pour des temps supérieurs.
Dans les deux cas, la solution vérifie $u(t, x + tF'(u_0(x))) = u_0(x)$.

3.1.1 Forme conservative des systèmes de lois de conservation :

On se place maintenant dans un cas général. On considère le système suivant [9] :

$$\frac{\partial u^\alpha(t,x)}{\partial t} + \sum_{1\leq i\leq d} \frac{\partial f_i^\alpha(u(t,x))}{\partial x_i} = g^\alpha(u(t,x)) \qquad (3.3)$$

Cette écriture s'appelle la forme conservative.

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont chaque composante u^α depend de $(x_1, ..x_i, ..x_d, t)$. On a pris comme convention de noter x le vecteur $(x_1, ..x_i, ..x_d)$. En pratique d est rarement supérieur à 3. Les fonctions f_i sont des fonctions vectorielles de $\mathbb{R}^m$, on a maintenant autant de vecteurs flux que de dimension d'espace.

Le système (3.3) est écrit pour chaque composante u_α du vecteur inconnu u. On peut aussi l'écrire sous la forme vectorielle plus compacte :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{1\leq i\leq d} \frac{\partial f_i(u(t,x))}{\partial x_i} = g(u(t,x))$$

Sous cette forme u est le vecteur inconnu de composantes $u = (u^1, ..., u^\alpha, .., u^m)^T$, chaque vecteur flux f_i a pour composantes $fi = (f_i^1, .., f_i^\alpha, .., f_i^m)^T$, il est de même pour le vecteur $g = (g^1, .., g^\alpha, .., g^m)^T$.

Exemple 3.2 *[9]Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t v + 3v^2 w \partial_x v + v^3 \partial_x w = 0 \\ \\ \partial_t w + (v+w)\partial_x v + (v+w)\partial_x w = 0 \end{cases}$$

En posant $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ *et la matrice jacobienne associée au système précédent est :*

$$A(u) = \begin{pmatrix} 3v^2 w & v^2 \\ (v+w) & (v+w) \end{pmatrix}$$

Ecrire ce système sous forme conservative revient à exhiber une fonction $f(u)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Les composants f^1, f^2 de la fonction f doivent satisfaire :

$$\partial_v f^1(u) = 3v^2 \qquad \partial_w f^1(u) = v^3$$
$$\partial_v f^2(u) = (v+w) \qquad \partial_w f^2(u) = (v+w)$$

ce qui donne à une constante additive près $f^1(u) = v^3 w$, et $f^2(u) = 1/2(v+w)^2$. Le système précédent est donc équivalent (pour les solutions régulières) au système conservatif suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x v^3 w = 0 \\ \\ \partial_t w + \partial_x (1/2(v+w)^2) = 0 \end{cases}$$

3.1.2 La notion de solution faible dans le cas générale :

Les solutions classiques (fortes) en général pas solution suffisant pour résoudre le problème (3.3), on est obligé de se tourner vers des solutions plus générals que l'on appellera **solutions faibles**. Ces dernières sont des solutions au sens des distributions qui ne seront donc plus forcément continues en tout point mais simplement continues par morceaux. Ce choix est tout à fait cohérent avec la physique de ce type de problème.

Dans le cas général d'un système de lois de conservation de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \sum_{1 \le i \le d} \frac{\partial f_i(u(t,x))}{\partial x} = 0 \qquad (3.4)$$

associé à la condition initiale :

$$u(0, x) = u_0(x)$$

avec $u(x,t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ ainsi que les flux $f_i(u)$ et on se place en dimension spatiale d, c'est 'a dire que $x = (x_1, .., x_d)$.

Définition 3.1 *[9]On dira que $u(x,t)$ est une solution faible du système (3.4) si et seulement si quelle que soit la fonction $\varphi(x,t) \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, fonction continuement différentiable à support compact on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \sum_{1 \leq i \leq d} f_i(u(t,x)\frac{\partial \varphi(u(t,x))}{\partial x}dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0$$

3.1.3 Conditions de Rankine-Hugoniot :

Dans le cas où la solution définie par morceaux vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot alors c'est une solution faible. C'est ce que montre le théorème suivant :

Théorème 3.3 *[9]Soit $u(x,t)$ une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. $u(x,t)$ est solution faible de (3.4) si et seulement si $u(x,t)$ satisfait les trois conditions suivantes :*
** $u(x,0) = u_0(x)$*
** $u(x,t)$ est solution classique de (3.4) en dehors des surfaces de discontinuité.*
** le saut de $u(x,t)$ 0 travers les surfaces de discontinuité vérifie les relations de **Rankine-Hugoniot** :*

$$(u^+ - u^-)n_t + \sum_{1 \leq i \leq d} (f_i(u^+) - f_i(u^-))n_i = 0$$

ou' $\overrightarrow{n} = (n_t, n_1, .., n_d)$ est un vecteur normal unitaire à la surface de discontinuité. On note encore cette condition sous la forme compacte :

$$[u]n_t + \sum_{1 \leq i \leq d} [fi]n_i = 0$$

avec $[u] = u^+ - u^- \qquad [fi] = f_i(u^+) - f_i(u^-)$

3.1.4 Entropie de Lax, solution entropique :

Les solutions faibles ne sont pas uniques comme nous avons vu pour l'équation de Burgers dans le cahapitre 2. Nous avons comme résultat la solution faible suivante $u \equiv 0$ est une solution pour équation de Burgers et la solution faible suivant :

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{t} \\ \\ \dfrac{x}{2t} & \text{si } |x| \leq \sqrt{t} \end{cases}$$

est aussi une solution de l'équation de Burgers.

Nous considérons l'équation de conservation comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial}{\partial x} F_i(u) = 0$$

Définition 3.2 *[7]Soit S une fonction de classe C^2 convexe de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}$ on dira que S est une* ***entropie de Lax*** *pour le système (3.4) si il existe fonction $F_1, .., F_d$ de classe C^2 de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}$ appelées flux d'entropie telles que :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \nabla S(u) \cdot Df_i(u) = \nabla F_i(u)$$

avec $\nabla S(u) = (\dfrac{\partial S}{\partial u_1}, ..., \dfrac{\partial S}{\partial u_m})^T$

On va perturber le système (3.4) par un terme diffusif $\varepsilon \Delta u$ avec $\varepsilon > 0$. Le système (3.4) est remplacé par :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t,x) + \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial f_i(u_\varepsilon(t,x))}{\partial x} = \varepsilon \Delta u_\varepsilon \qquad (3.5)$$

Nous supposons que u_ε est régulière.

Théorème 3.4 *[7]**(Lax)***
supposons que le système (3.4) admette une entropie de Lax, S de classe C^2 associée aux flux $F_i, i = 1, ..d$ et que (3.5) admette une solution u_ε de classe C^2

pour tout $u_\varepsilon > 0$ *convergeant vers* u *alors* u *est une solution faible de* (3.5) *et vérifie l'inégalité faible suivante pour toute fonction* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)dxdt+\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+}\sum_{1\leq i\leq d} f_i(u(t,x)\frac{\partial\varphi(u(t,x))}{\partial x}dxdt+\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx \geq 0 \quad (3.6$$

On dit alors que u *satisfait la condition d'entropie* (3.6) *ou encore que* u *est une solution entropique de* (3.4)
L'inégalité (3.6) *implique l'inégalité suivante au sens des distributions sur l'entropie :*

$$\frac{\partial}{\partial t}S(u) + \sum_{1\leq i\leq d}\frac{\partial}{\partial x}F_i(u) \leq 0$$

Dans le cadre des solutions continues par morceaux, la condition d'entropie de Lax est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.5 *[7]Une solution faible de*(3.5) *continue par morceaux est entropique si et seulement si sur toutes les surfaces de discontinuité on a :*

$$(S(u^+) - S(u^-))n_t + \sum_{1\leq i\leq d}(F_i(u^+) - F_i(u^-))n_i \leq 0$$

C'est l'´equivalent pour l'entropie des conditions de Rankine-Hugoniot

3.1.5 Existence et unicité de la solution faible entropie :

Le théorème ci-dessous, dû à Kruzkov (1970), assure l'existence et l'unicité de la solution entropique (au sens de Kruzkov).

Théorème 3.6 *[4]On suppose que* f *est localement lipschitzienne et que* u_0 *est bornée. Il existe alors une unique solution* $u(x,t)$ *du problème* (3.1)*vérifiant simultanément les conditions suivantes :*
** pour toute fonction convexe* η *:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta(u)) + \frac{\partial}{\partial x}(q(u)) \leq 0$$

au sens des distribution, où $q' = \eta' f'$
** dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\lim_{t \longrightarrow 0} u(t,x) = u_0(x)$$

le résultat du théorème reste valable dans le cas de la lois de conservation dans le cas scalaire.

3.2 Equations de Saint-Venant :

Le système de saint-venant a été introduit en 1871 dans un Compte Rendu à Académie des Sciences, rédigé par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémas Jean-Chaude Barré de Saint-Venant.

Les équations de Saint-Venant en bidimension sont constituées de l'équation de continuité et les équations de la quantité de mouvement [1] :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh\frac{\partial b}{\partial x} - \Omega \times hu - \tau(y,u)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(hv^2 + \frac{gh^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh\frac{\partial b}{\partial y} - \Omega \times hu - \tau(y,u)$$

3.2.1 Hyperbolicité :

En deux dimensions le système d'équation de Saint-Venant peut s'écrire, dans sa forme conservative, [1] comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_Y(U)}{\partial y} = S(U)$$

avec

$U = (h, hu, hv)^T = (h, q_x, q_y)^T$, $F_x = (q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2}, \frac{q_x q_y}{h})^T$,

$F_y = (q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2})^T$ et

$S(U) = (0, gh\ \frac{\partial b}{\partial x} - \Omega \times hu - \tau(y,u), gh\ \frac{\partial b}{\partial y} - \Omega \times hu - \tau(y,u))$

où les inconnues sont toujours la hauteur d'eau $h(t,x,y) \geq 0$ et la vitesse horizontale moyenne $u(t,x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction τ modélise les effets dissipatifs dus notamment à la friction sur les parois. Le paramètre Ω est lié à la vitesse angulaire de la rotation terrestre et la donnée $b(x,y)$ note l'altitude du fond du bassin. La quantité $\eta = h + b$ est alors la cote de la surface libre de l'écoulement.

Pour l'étude des propriétés mathématiques du système de Saint-Venant, ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} F(u) = S(U)$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ \dfrac{q_x^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2} & \dfrac{q_x q_y}{h} \\ \dfrac{q_x q_y}{h} & \dfrac{q_y^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2} \end{pmatrix}$$

où DF_x et DF_y sont les matrices Jacobiennes du flux :

$$DF_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & \frac{2q_x}{h} & 0 \\ -\dfrac{q_x q_y}{h} & \frac{q_Y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{pmatrix} \quad et \quad DF_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{q_x q_y}{h} & \frac{q_Y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ -\frac{q_y^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{2q_y}{h} \end{pmatrix}$$

Suivant les techniques habituelles, on introduit maintenant un vecteur $\zeta \in \mathbb{R}^2$ et on définit $DF(\zeta) = \zeta_x DF_x + \zeta_y DF_y$. Il vient que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^2$, la matrice $DF(\zeta)$ possède trois valeurs propres définies par :

$$\lambda_1(\zeta) = u_\zeta - c \qquad \lambda_2(\zeta) = u_\zeta \quad et \quad \lambda_3(\zeta) = u_\zeta + c$$

où $u_\zeta = \zeta_x \frac{q_x}{h} + \zeta_y \frac{q_y}{h}$ est la vitesse de l'écoulement dans la direction $\zeta \in \mathbb{R}^2$ et $c = \sqrt{gh}$ représente la célérité de l'information dans l'écoulement. Si la hauteur d'eau est non nulle, il semble clair que, pour tout ζ non nul, $\lambda_1(\zeta) < \lambda_2(\zeta) < \lambda_3(\zeta)$, ce qui démontre bien la stricte hyperbolicité du système. Les valeurs propres des équation de Saint-Venant sont appelées vitesses caractéristiques.

En considérant ces variables d'état, le modèle de Saint-Vanant se présente sous deux formes fondamentales :

3.2.2 Forme conservative :

La forme conservative est basée sur la hauteur d'eau et les composantes en (x, y) du débit spécifique $q = (qx, qy) = (hu, hv)$ pour le mouvement d'eau. Elle s'applique aux écoulements hyperboliques et ressaut hydraulique. Cette forme du système de Saint Venant est une bonne formulation pour la résolution numérique approchées des équations de conservation de type hyperbolique. Il est conseillé d'utiliser cette forme quand les solutions discontinues sont possibles.

3.2.3 Forme non conservative :

La forme non conservative se repose sur la hauteur d'eau mais aborde le mouvement à l'aide des variables primitives de vitesse (u, v). Elle s'applique aux écoulements de rivières, des estuaires ou des zones cotières, fond irregulier. En pratique, on utilise souvent cette forme afin d'échapper au problème de solution discontinue. Quand le fond est irrégulier, il est préfèrable d'utiliser cette forme.

3.2.4 Solution analytique pour les équation de Saint-venant :

Les équation de Saint-Venant ne peuvent pas être résolues analytiquement surtout[1] en présence du terme source correspondant au frottement du lit. Les équations de Saint-Venant présentent, dans le cas monodimensionnel d'un canal prismatique rectangulaire, une solution analytique connue sous le nom de la solution Ritter. Cette solution n'est valable que dans le cas de frottement nul (sur le lit et sur les berges du canal). Pour un lit aval mouillé de hauteur d'eau H_R, la solution en profondeur est donnée par :

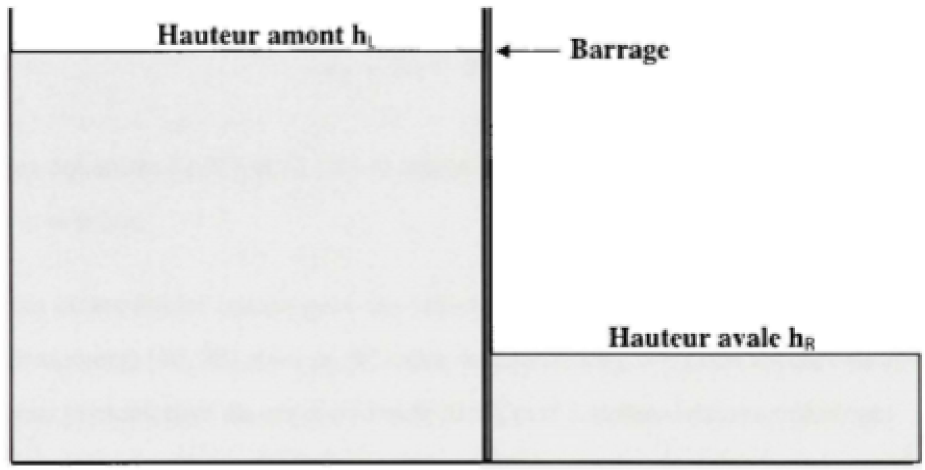

FIG. 3.1 – Conditions initiales du problème de bris de barrade en 1D

$$h(t,x) = \begin{cases} h_L & \text{si } \ x < \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \dfrac{1}{9g}(2\sqrt{2h_L - \frac{1}{2t}(2x-1)^2} & \text{si } \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} < x < (u_2 - c_2)t + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{h_R}{2}(\sqrt{1 + \dfrac{8S^2}{gh_R}} - 1 & \text{si } (u_2 - c_2)t + \dfrac{1}{2} < x \leq St + \dfrac{1}{2} \\ h_R & \text{si } x > St + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La solution en vitesse est :

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \dfrac{1}{3t} & \text{si } \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} < x < (u_2 - c_2)t + \dfrac{1}{2} \\ u_2 & \text{si } (u_2 - c_2)t + \dfrac{1}{2} < x \leq St + \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x > St + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

avec

$$u_2 = S - \frac{gh_R}{4S}(1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}}) \qquad et \qquad c_2 = \sqrt{\frac{gh_R}{2}(\sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_r}} - 1t}$$

désigne le temps et S la célérité du front. S est la racine positive de l'équation suivante :

$$u_2 + 2c_2 - 2\sqrt{gh_L} = 0$$

Dans les équations $h(t,x)$ et $u(t,x)$, le domaine est pris de longeur $1m$ et le barrage est situé à $x = 0,5$.

Conclusion générale

Nous avons tenté, dans ce mémoire, de faire un état de l'art sur les problématiques liées aux questions de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de certains systèmes aux dérivées partielles. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux modèles mathématiques évolutifs sous leurs formes conservatives. (Conservation de la masse, conservation de l'énergie, de quantité de mouvement. . . etc.

La modélisation et l'approximation numérique de systèmes EDP régissant des problèmes conservatifs présentent des difficultés spécifiques. En effet, les modèles hyperboliques, notamment, se distinguent par la présence de beaucoup d'invariants locaux. Lors du processus d'approximation numérique, ces invariants perdent leur aspect conservatif, ce qui peut entrainer une perte de stabilité et la modification des propriétés qualitatives de la solution. Nous avons constaté d'après notre étude des différents résultats exposés dans la littérature que la question de l'existence d'une solution reste posée dès que la dimension d'espace $d>1$. C'est pour cela que l'approche numérique est privilégiée pour le calcul de la solution. L'approche de la solution faible entropique permet de garantir l'unicité d'une solution parmi celles admissibles physiquement.

Bibliographie

[1] R. Ata, Dévelopemment de méthodes rapticulaires pour la résoulution des écoulemments à surface libre, thèse de doctorat, université de Québec, 26 october 2007.

[2] P. Brenner et W. Von Waht, Globale classical solutions of no linear ware equtions, Math.Z,176 (1981), 87-121.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applicattions,Masson,1983.

[4] J. Dronion et C. Imbert, Solution de viscosité et solution variationnelles pour EDP non-linéaire. Cours de DEA, université Monterpellier, 2004.

[5] N. Flor et G. Clolile, A la découverte des lois de conservation scalaires non-linéaires, Bardon de Seganzac Mathieu, 2009.

[6] C. Goulaouic, Analyse fonctionnelle et calcul différentielle. Ed de l'ecole Polytechnique, Paris, 1996.

[7] P. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the Mathematical théory of Shock waves. SIAM, 1972.

[8] F. Rouvier, Petit guide de calcul différentielle à la licence et l'agrégation. Cassini, 3^{me} edition, 2009.

[9] J. F. Scheid, Méthodes némurique pour la dynamique des fluides, université H. Pancare, Nancy 1, 2007-2008.

[10] L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. collection enseignement des sciences, Hermann (1993).

[11] D. Serre, Système de lois de conservation 2, DideroT ED, Paris, 1996.