

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique

**Mémoire de Master**

**Spécialité: Physique Théorique**

Thème

# Etude du Pendule Chaotique

Présenté par :

**M. Bensaadi Mohamed Lamine**

Soutenu le : 31/10/2021

Devant le Jury composé de :

<b>Amatousse</b>	<b>Nawel</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>
<b>Ziani</b>	<b>Lynda</b>	<b>MCB</b>	<b>Membre du jury</b>
<b>Bouchara</b>	<b>Lydia</b>	<b>MCB</b>	<b>Encadreur</b>

Année universitaire 2020/2021

# Remerciement

Ce travail a été réalisé à la Faculté des Sciences exactes à l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia, dirigé par le Docteur Bouchara Lydia que je remercie énormément pour son humanité et sa compréhension pour avoir dirigé mes travaux. Merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils et votre rigueur. Merci pour votre soutien scientifique et humain. Je voudrais aussi vous remercier d'avoir cru en mes capacités et de m'avoir fourni d'excellentes conditions me permettant d'aboutir à la production de ce mémoire. Ce projet n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail. Merci au Professeur Amatousse Nawel, d'avoir accepté d'être le président du jury, Ainsi qu'au Docteur Ziani Lynda pour avoir accepté d'examiner ce manuscrit et de faire partie du jury de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à Mouloud et Menad pour leur aide précieuse et à tous mes amis, pour leur sympathie et leur encouragement.

Toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à ma famille et ma grande famille surtout à ma Sœur Dounya et mon petit Frère Chakib.

Enfin, je ne remercierai sans doute jamais assez mes parents, qui ont su faire preuve d'une grande patience, de compréhension et qui m'ont accompagné et soutenu de façon permanente dans les moments difficiles.

Et surtout je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.

# Table des matières

Liste des figures . . . . .	vi
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Systèmes dynamiques oscillatoires et chaotiques</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Systèmes dynamiques . . . . .	4
1.2.1 Système dynamique continu et discret . . . . .	4
1.2.2 Système conservatif et dissipatif . . . . .	4
1.3 Systèmes chaotiques . . . . .	5
1.3.1 Modèle de Lorenz . . . . .	5
1.3.2 Le modèle de Hénon . . . . .	6
1.4 Système non-linéaire . . . . .	8
1.5 Comportement des systèmes dynamiques . . . . .	8
1.5.1 Point fixe ou point d'équilibre . . . . .	9
1.5.2 Solution périodique . . . . .	9
1.5.3 Solution quasi-périodique . . . . .	10

1.5.4	Solution chaotique . . . . .	10
1.6	Les systèmes oscillatoires . . . . .	10
1.6.1	Les mouvements oscillants . . . . .	12
1.6.2	Exemples de systèmes oscillatoires . . . . .	13
1.7	Techniques de caractérisation du comportement chaotique . . . . .	16
1.7.1	La section de Poincaré . . . . .	16
1.7.2	L'espace des phases . . . . .	17
1.7.3	Les exposants de Lyapunov . . . . .	18
1.7.4	Le diagramme de bifurcation . . . . .	18
1.8	Conclusion . . . . .	20
<b>Chapitre 2</b>	<b>Le système de pendule magnétique</b>	<b>22</b>
2.1	Introduction . . . . .	22
2.2	Le système expérimental . . . . .	22
2.3	Configuration du système . . . . .	23
2.4	Modèle du système . . . . .	26
2.4.1	Équations du système . . . . .	26
2.4.2	Paramétrage du système . . . . .	28
2.4.3	Potentiel des sources des forces . . . . .	28
2.5	Conclusion . . . . .	32
<b>Chapitre 3</b>	<b>Étude du pendule magnétique par simulation numérique</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Application du paramétrage . . . . .	34

3.3	Execution du programme . . . . .	35
3.4	Conclusion . . . . .	44
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Table des figures

1.1	Attracteur de Lorenz . . . . .	6
1.2	Attracteur de Henon pour $a = 1.4, b = 0.3$ . . . . .	7
1.3	Représentation d'un mouvement oscillatoire. . . . .	12
1.4	La section de Poincaré . . . . .	17
1.5	Diagramme de bifurcation: a) système de Hénon, b) Système de Rössler	20
2.1	Schéma du système de pendule magnétique . . . . .	23
2.2	Aimants et distribution du pendule dans un plan bidimensionnel . . .	24
2.3	Tracé de contour du champ potentiel du système pendulaire . . . . .	30
2.4	Tracé de surface tridimensionnel du champ potentiel . . . . .	31
3.1	Tracé des trajectoires des points fixes . . . . .	36
3.2	Limite de voisinage epsilon pour point fixe (4.0, 4.0) . . . . .	37
3.3	Limite de voisinage epsilon pour les points fixes . . . . .	38
3.4	Trajectoire pour la position de départ (0.5, 4.03), marquée par une étoile noire et trajectoire pour la position de départ (0.5, 4.031), mar- quée par une étoile rouge respectivement. . . . .	39

3.5	Trajectoire pour la position de départ $(0.5, 4.034)$ , marquée par une étoile verte et trajectoire pour la position de départ $(0.5, 4.033)$ , marquée par l'étoile bleue respectivement. . . . .	40
3.6	Graphique combiné des trajectoires pour différentes positions . . . . .	40
3.7	Séparation de trajectoire, trajectoire de référence : Trajectoire noire .	42
3.8	Séparation de trajectoire, trajectoire de référence : Trajectoire rouge .	44

# Introduction Générale



Le pendule comme modèle de système dynamique a une grande histoire en physique. En tant que mécanisme pédagogique, le pendule était un exemple mécanique standard dans les cours d'introduction à la physique et à la mécanique classique. Quatre cents ans après les premiers travaux de Galilée, le pendule fait toujours l'objet de recherches en tant que système chaotique [1]. Les systèmes dynamiques non linéaires, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Il s'agit du comportement chaotique se manifestant dans de nombreuses situations, allant de systèmes mécaniques très complexes à des événements quotidiens. Par exemple, le chaos peut-être observé dans des exemples tels que les populations d'espèces ou la météo. En fait, la théorie du chaos a commencé dans les années 1960 lorsqu'un météorologue du nom d'Edward Lorenz a omis quelques décimales lors d'un essai de son simulateur météo.

Bien qu'aucune définition mathématique formelle du mot chaos ne soit universellement acceptée, il peut-être décrit comme le comportement aperiodique à long terme d'un système déterministe qui affiche une dépendance sensible aux conditions initiales. Dans ce travail nous avons choisi d'étudier, le pendule magnétique oscillant chaotique où des aimants sont utilisés pour entraîner l'oscillation d'un pendule en mouvement libre avec une plage de mouvement essentiellement sphérique. L'équation du mouvement d'un pendule dit *chaotique* est un modèle des systèmes dynamiques non-linéaires, Nous devons donc mettre en évidence le phénomène de chaos et comprendre comment se manifeste ce dernier dans le système en mettant l'accent sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état station-

naire à long terme», ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? ».

## **Organisation du mémoire**

La représentation de notre mémoire est organisée comme suit:

- Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général et aux systèmes chaotiques et oscillatoire en particulier, ainsi que les techniques de caractérisation du comportement chaotique tels la section de Poincaré, les exposants de Lyapunov et le diagramme de bifurcation.
- Dans le deuxième chapitre et début de la partie pratique, les concepts de base du système de pendule magnétique seront introduits. Le modèle du système sera expliqué.
- Le troisième chapitre est consacré à la simulation numérique par un programme réaliser avec le logiciel *Mathematica* afin de modéliser puis étudier et analyser le comportement chaotique d'un pendule magnétique.
- Enfin, nous terminerons par une conclusion générale sur le travail réalisé.

# Chapitre 1

## Systèmes dynamiques oscillatoires et chaotiques

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous partirons de quelques définitions préliminaires associés aux systèmes dynamiques en général et aux systèmes non linéaires en particulier, ainsi que les techniques de caractérisation du comportement chaotique tels que la section de Poincaré, les exposants de *Lyapunov*, le diagramme de bifurcation afin de mieux cerner les critères théoriques nécessaires à la compréhension du comportement des systèmes oscillatoires et chaotiques.

## 1.2 Systèmes dynamiques

Un système dynamique peut-être représenté par un ensemble de variables, qui évoluent au cours du temps. Ces variables peuvent-être destinées pour l'étude des fluctuations d'état d'un phénomène ou d'un objet quelconque.

Dans ces représentations mathématiques interviennent des paramètres qui vont conditionner l'évolution de ce système, ainsi il peut avoir un comportement périodique, pseudopériodique ou chaotique[2].

### 1.2.1 Système dynamique continu et discret

Un système dynamique en temps continu peut-être modélisé mathématiquement par un système d'équations différentielles, alors qu'en temps discret on parle d'un système d'équations aux différences finies[3].

### 1.2.2 Système conservatif et dissipatif

Un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

## 1.3 Systèmes chaotiques

C'est un système dynamique qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique[4][5]. Voici ci-dessous des exemples de systèmes dynamiques chaotiques.

### 1.3.1 Modèle de Lorenz

Edward *Lorenz* fut un météorologue qui eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard[6].

Ce système différentiel s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma[y(t) - x(t)] \\ \frac{dy}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

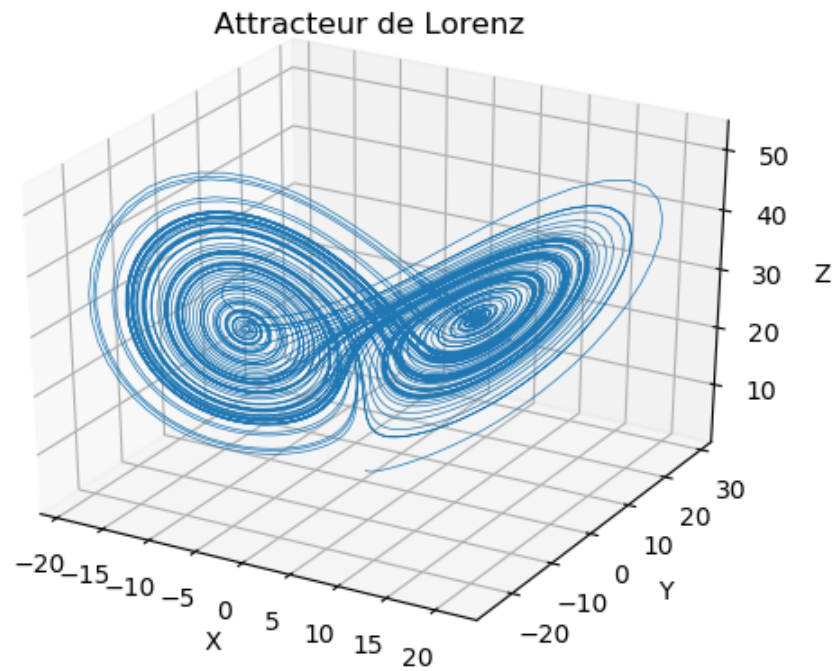


Figure 1.1 – Attracteur de Lorenz

### 1.3.2 Le modèle de Hénon

L'astronome Michel *Hénon* exploitera la suggestion de Pomeau et Ibanez, pour obtenir un système très simple qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivant :

$$H(X_n, Y_n) : \begin{cases} X_{n+1} = -aX_n^2 + Y_n + 1 \\ Y_{n+1} = bY_n \end{cases} \quad (1.2)$$

Où  $a$  et  $b$  étant deux paramètres réels, où la valeurs de la constante  $a$  controle la non-linéarité de l'itération, et celle de  $b$  traduit le rôle de la dissipation.

le raisonnement repose sur la section de Poincaré il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de *Lorenz* et son attracteur étrange[7].

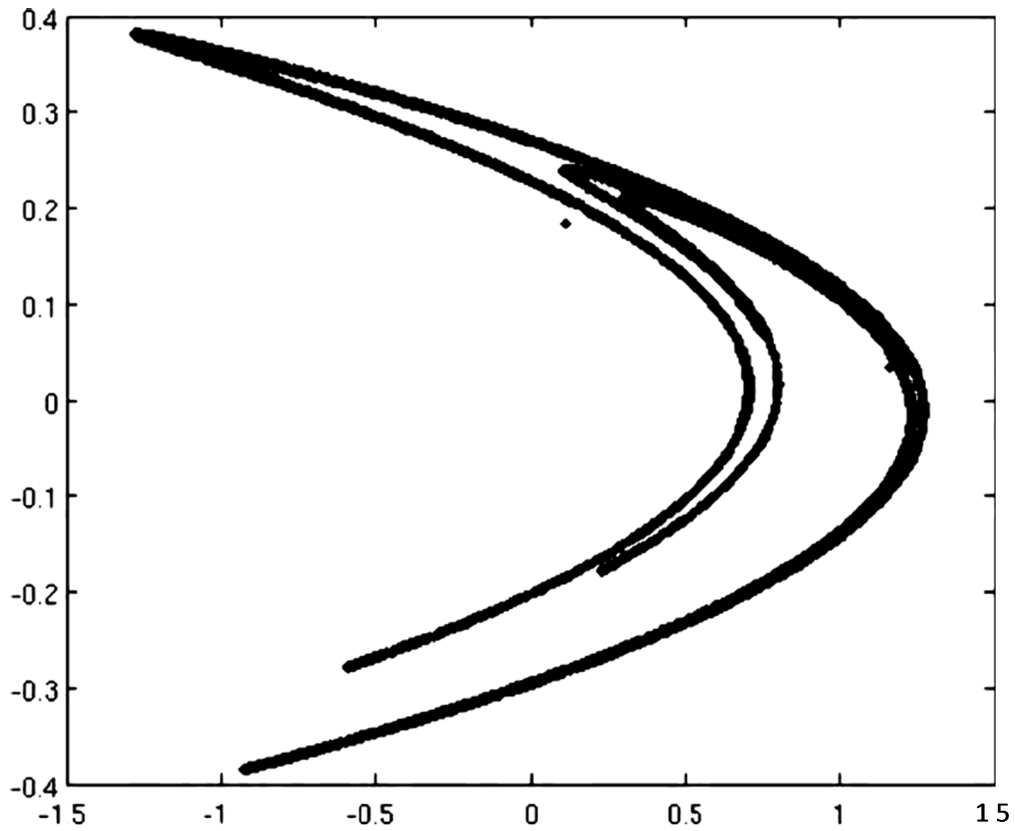


Figure 1.2 – Attracteur de Henon pour  $a = 1.4, b = 0.3$

## 1.4 Système non-linéaire

Nous prendrons l'exemple d'un pendule libre non amorti[8]. Soit un pendule composé d'une masse  $m$  soumise à un champ de pesanteur vertical d'accélération  $g$ . La masse est maintenue à un point fixe A par une tige rigide de longueur  $l$ . Celle-ci se balance dans un plan vertical et on définit l'angle  $\theta(t)$  entre la tige et la verticale. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, le système est alors décrit par l'équation 1.1[9].

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) \quad (1.3)$$

Cette équation contient un terme non linéaire  $\sin(\theta)$ . Contrairement aux courbes régulières obtenues par des équations linéaires, la représentation d'équations non linéaires comprendra des cassures, des boucles, toutes sortes de turbulences.

La non-linéarité est tout simplement une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques.

## 1.5 Comportement des systèmes dynamiques

En présence de non-linéarités, il existe une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquels[10]:

1. Les points fixes ou points d'équilibre.
2. Les solutions périodiques.
3. Les solutions quasi-périodiques.



4. Les solutions chaotiques.

### 1.5.1 Point fixe ou point d'équilibre

Un point fixe  $\vec{x}^{eq}$  est un point de l'espace des phases tel que :

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{x^{eq}} = \vec{0} \quad (1.4)$$

Par construction, les degrés de liberté d'un système dont l'état est représenté par un point fixe n'évoluent pas dans le temps ; le système est à l'équilibre, un point fixe  $x^{eq}$  est tel que :

$$f(\vec{x}^{eq}, \vec{\mu}, t) = \vec{0} \quad (1.5)$$

Comme on le verra plus tard, cet état d'équilibre peut-être stable (le système retourne à cet état après une perturbation) ou instable (il s'en éloigne) [11].

### 1.5.2 Solution périodique

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles,  $\in \mathcal{N}^+$  et la période de la solution.

Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée.

Un espace de phase de dimension supérieur à 2, une trajectoire périodique ne se situe pas nécessairement dans un même plan et elle peut se développer dans différentes formes fermées.

### **1.5.3 Solution quasi-périodique**

Il correspond à une somme de solutions périodiques, dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut-être représenté dans l'espace d'état par un tore.

### **1.5.4 Solution chaotique**

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelque soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système.

## **1.6 Les systèmes oscillatoires**

Les systèmes oscillatoires sont des systèmes mécaniques qui, lorsqu'ils sont perturbés, vont revenir à leur position d'équilibre en oscillant de part et d'autre de celle-ci. Au cours du mouvement d'un système dynamique oscillant décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.6}$$

celui-ci oscille autour de sa position d'équilibre stable. Ainsi, on peut caractériser cette oscillation par une grandeur qui dépend du temps et décrit de combien le système s'écarte de sa position d'équilibre stable:

$$x(t) = x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega_0}t + \psi_0\right) \tag{1.7}$$

où  $x(t)$  est la solution périodique de l'équation différentielle (1.4), avec:

- $x_{max}$  est la plus grande valeur que peut prendre  $x$ : c'est l'amplitude de mouvement ;
- $\omega_0$  est la fréquence de mouvement, avec une période d'oscillation donnée par:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.8}$$

- $\psi_0$  est appelée la phase à l'origine des temps et s'exprime en radian.

Cette solution générale vérifie l'équation différentielle du mouvement quelque soient les valeurs  $x_{max}$  de  $\phi_0$ , mais à chaque mouvement correspond une solution particulière et une seule qui dépend des conditions initiales[12].

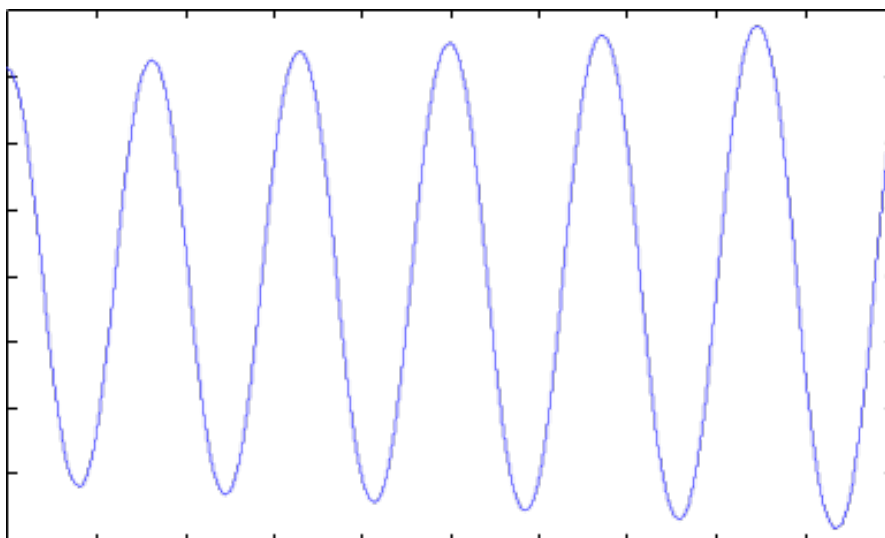


Figure 1.3 – Représentation d’un mouvement oscillatoire.

### 1.6.1 Les mouvements oscillants

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement au voisinage d’une position d’équilibre stable: oscillations d’un pendule, d’une masse attachée à un ressort, des électrons dans une antenne ou un circuit électronique, des atomes d’une molécule, des concentrations molaires dans les réacteurs chimiques, . . . ect.

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d’oscillations libres, en présence de frottement, l’amplitude des oscillations décroît et l’on a des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action de l’extérieur, on parle d’oscillations forcées [13].

## 1.6.2 Exemples de systèmes oscillatoires

### — a) Pendule simple

Il s'agit du cas le plus simple : une petite masse pouvant être assimilée à un point matériel est suspendue au bout d'un fil (ou d'une tige) inextensible et de masse négligeable. Écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée, la masse oscille dans un plan, de part et d'autre de la verticale. Cette oscillation provient de l'action de la pesanteur : il s'agit du pendule pesant simple, expression habituellement raccourcie en « pendule simple ». Cet oscillateur, bien que le plus simple, n'est pas un oscillateur harmonique : en particulier, la période des oscillations dépend de l'amplitude du mouvement.

### — b) Pendule de Foucault

Pendule simple utilisé par Jean Foucault pour mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre grâce à la longueur de son fil et sa grande masse. Une rotation du plan d'oscillation fut alors constatée. L'analyse de son mouvement nécessite de considérer le référentiel terrestre non galiléen. Deux exemplaires peuvent-être observés en fonctionnement au Deutsches Museum de Munich ou au Musée des arts et métiers de Paris.

### — c) Pendule sphérique

Une bille massive, considérée ponctuelle, peut se déplacer librement sur la surface intérieure d'une sphère. Sous l'effet de la pesanteur, elle oscille autour d'une position d'équilibre déterminée par l'impulsion initiale.

— **d) Pendule conique**

Sa dénomination n'est pas adaptée, car ce pendule n'oscille pas. Si l'on imprime un mouvement de rotation autour de l'axe vertical à un pendule simple, celui-ci s'écarte de l'axe et la masse décrit un cercle. L'angle dont s'écarte la masse et le fil dépend de la vitesse de rotation. Le nom vient de ce que le fil décrit donc un cône. C'est un cas particulier du pendule sphérique (d'où peut-être le maintien du nom pendule).

— **e) Pendule pesant/Pendule pesant composé**

Lorsque la masse accrochée n'est plus suffisamment petite et/ou si la tige qui la relie à l'axe de rotation n'est pas de masse négligeable, on doit tenir compte du moment d'inertie de l'ensemble. Un tel pendule est appelé pendule pesant (ou pendule pesant composé pour le distinguer du pendule simple). Ainsi, tout objet suspendu par un axe horizontal ne passant pas par son centre de gravité est un pendule pesant. Les propriétés du pendule pesant (composé) sont les mêmes que celles du pendule simple. En particulier, ce n'est pas un oscillateur harmonique.

— **f) Pendule balistique**

Il s'agit d'une utilisation pratique du pendule pesant : un choc sur la masse de celui-ci donne une impulsion qui détermine le mouvement ultérieur. L'étude du mouvement permet de caractériser l'impact, on peut ainsi mesurer la vitesse d'une balle de fusil.

— **i) Pendule de Mach**

En inclinant le plan d'oscillation d'un pendule pesant on modifie l'effet de la pesanteur (dont seule la composante dans le plan agit comme force de rappel). La période de ces oscillations dépend donc (pour une amplitude donnée) de l'angle imposé au pendule. La période diminue lorsqu'on incline le plan.

— **j) Pendule de Huygens**

Le pendule de Huygens n'est pas à proprement parler un pendule : la masse est contrainte de se déplacer sur une forme parabolique (morceaux de cycloïde). Le mouvement ne correspond pas à des oscillations.

— **k) Pendule cycloïdal**

Ce pendule est le seul pendule rigoureusement isochrone et a aussi été inventé par Huygens. Il est constitué d'une masse suspendue à un fil (pendule simple) mais astreinte à se mouvoir le long d'une cycloïde. Pour cela le fil est encadré à son point d'attache de deux portions de cycloïde.

## — 1) Pendule elliptique

C'est un pendule dont le point d'attache n'est pas fixe, mais libre de se mouvoir sans frottement le long d'un axe horizontal. Le mouvement en est complexe, on ne l'étudie ici que dans le cas de petites oscillations[14].

## 1.7 Techniques de caractérisation du comportement chaotique

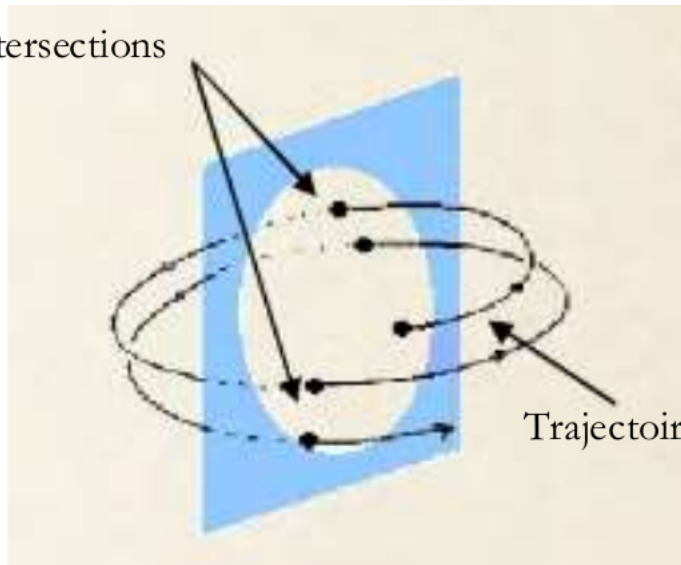
L'identification des caractéristiques des systèmes non linéaires à partir d'observations peut se faire grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que : la section de Poincaré, l'espace des phases, le diagramme de bifurcation, les exposants de *Lyapunov* [15], [16].

### 1.7.1 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.



Points d'intersections



Trajectoire du système

Figure 1.4 – La section de Poincaré

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré. Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire  $\Phi$  et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.

## 1.7.2 L'espace des phases

Dès que la dimension  $n$  du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension  $n$ . L'évolution suivant  $t$  du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

### 1.7.3 Les exposants de Lyapunov

L'exposant de *Lyapunov* sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Un système de dimension  $n$  possède  $n$  exposants de *Lyapunov* qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe [17], tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de *Lyapunov* positif (respectivement négatif) selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps [18].

### 1.7.4 Le diagramme de bifurcation

#### 1.6.4.1 Stabilité structurelle et bifurcation

Un système est dit structurellement stable sur une portion de l'espace des paramètres si une petite perturbation du système ne modifie pas le comportement global de la dynamique sur cette portion.

Tant que le système est structurellement stable, les variations de paramètres produisent des changements quantitatifs de la solution: coordonnées d'un point fixe,

amplitude ou fréquence d'une solution périodique. Cependant, on peut aussi avoir qu'une infime variation de paramètres produisant un changement qualitatif de la solution : changement de stabilité d'un ensemble limite.

À la valeur particulière du paramètre où la solution change subitement de nature, le système est structurellement instable ce qui autorise un brusque changement du type de la solution. Ce phénomène est appelé bifurcation et les points où il se produit sont les points de bifurcation.

#### **1.6.4.2 Diagramme de bifurcations**

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

1. Dans le cas d'un système autonome ces valeurs particulières peuvent-être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré. Pour un système excité par une fonction périodique, on les obtient en échantillonnant la variable à la fréquence d'excitation. On obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre la suite des états discrets de la variable lorsque le régime asymptotique est atteint.
2. Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental.

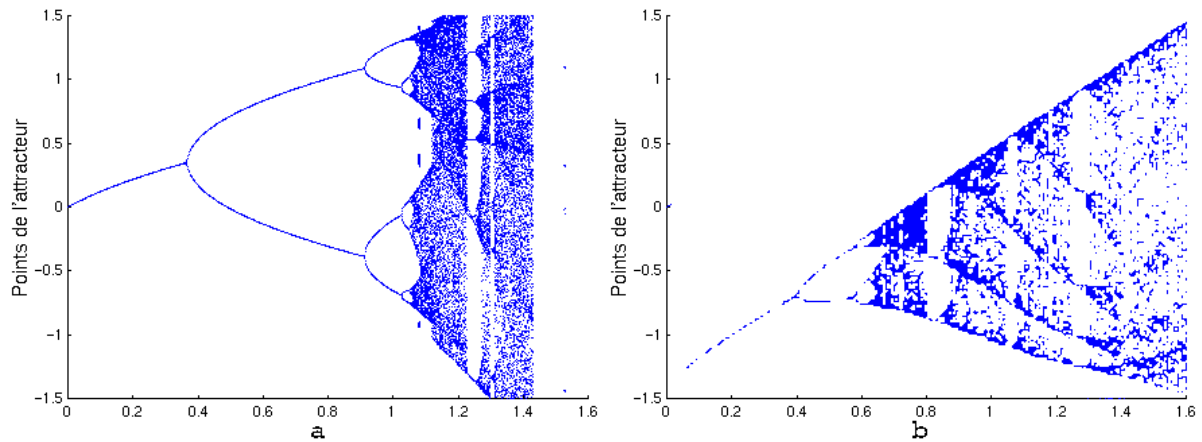


Figure 1.5 – Diagramme de bifurcation: a) système de Hénon, b) Système de Rössler

3. Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est aperiodique.

## 1.8 Conclusion

Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire ( de calculer) son évolution au cours du temps grâce aux outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique telles que la notion de sensibilité aux conditions initiales, les exposants de *Lyapunov* et les diagrammes de bifurcation : la connaissance exacte de l'état du système à un instant initial, permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Le lien entre ces deux notions paradoxales : déterminisme et imprévisibilité, se manifeste par la sensibilité aux conditions initiales. Cette impossibilité pratique à calculer

l'évolution de systèmes déterministes est la principale caractéristique des systèmes chaotiques.

# Chapitre 2

## Le système de pendule magnétique

### 2.1 Introduction

À partir des définitions précédentes du système oscillatoire et chaotique, nous abordons le système physique qui est le but de ce travail : "le pendule magnétique".

Dans ce chapitre, les concepts de base du système de pendule magnétique seront introduits. Le modèle du système sera expliqué.

### 2.2 Le système expérimental

Le pendule magnétique consiste en un pendule suspendu à une corde. Dans un plan sous le pendule, il y a trois aimants répartis également au centre. Un schéma en trois dimensions du système est illustré à la figure 2.1, dans lequel la boule noire représente le pendule et les sphères rouge, verte et bleue sont des aimants.

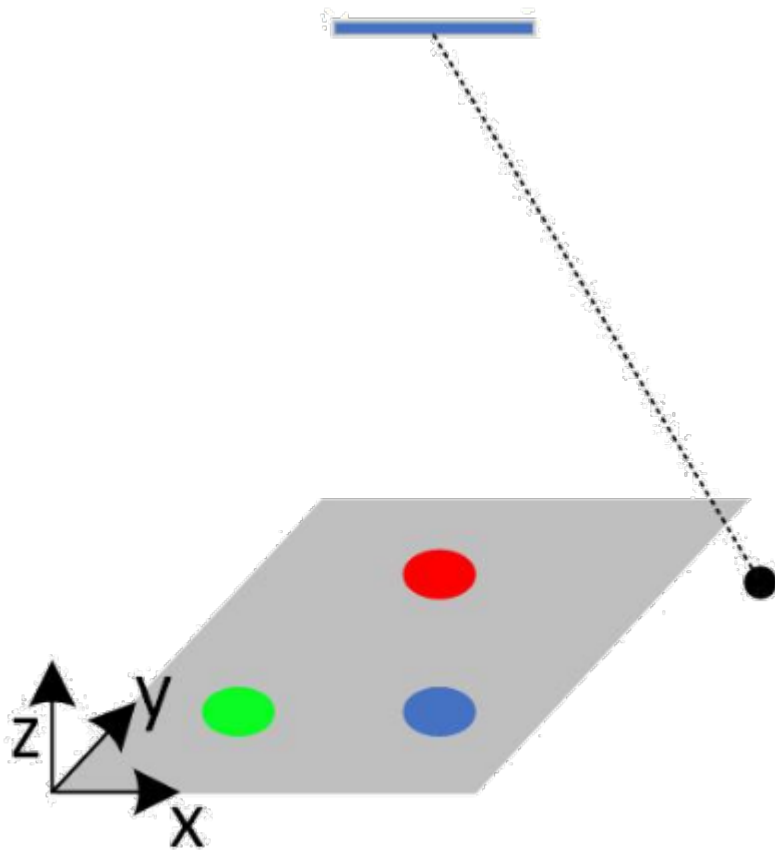


Figure 2.1 – Schéma du système de pendule magnétique

La distribution des trois aimants est illustrée à la figure 2.2. Le point  $O$  est le point d'équilibre pour que le pendule atteigne l'énergie potentielle minimale.

## 2.3 Configuration du système

Il y a quelques configurations sur le système :

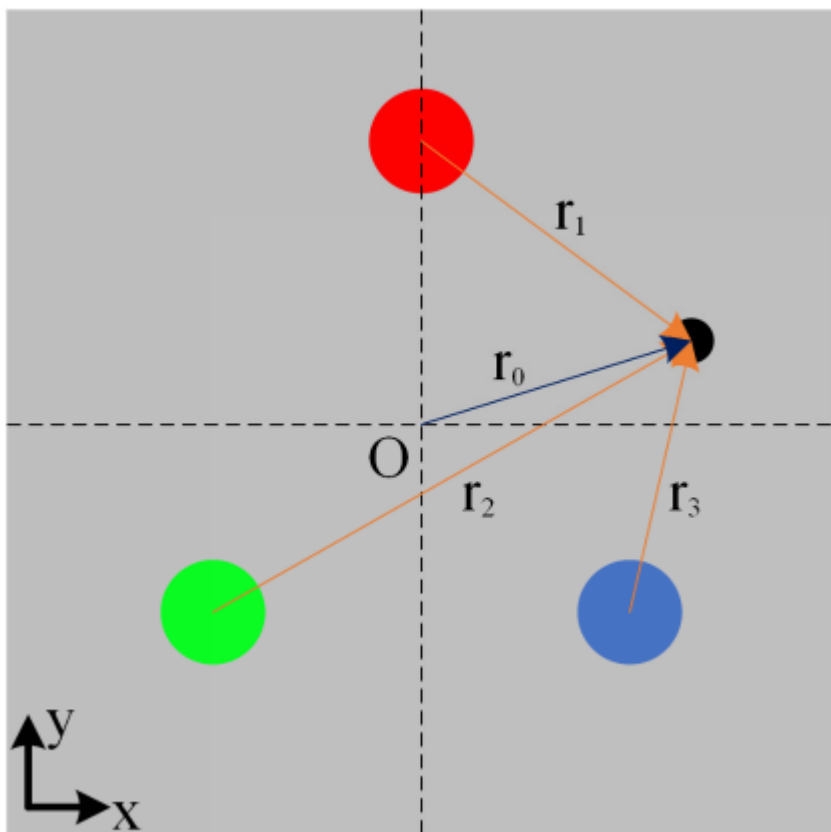


Figure 2.2 – Aimants et distribution du pendule dans un plan bidimensionnel



1. La longueur du pendule est très grande par rapport à l'espacement des aimants. Cette hypothèse permet de considérer le mouvement du pendule comme dans un plan plutôt que comme une surface de sphère.
2. Bien que les aimants soient présentés avec certains diamètres, ils sont traités comme une source ponctuelle d'attraction lors du calcul de la force.
3. La force magnétique suit la loi du carré inverse; c'est-à-dire que la force est inversement proportionnelle au carré de la distance.
4. Les trois aimants ont les mêmes pôles magnétiques ; c'est-à-dire le pôle magnétique  $N$ , et le pendule a le pôle magnétique opposé ; c'est-à-dire le pôle magnétique  $S$ , de sorte que le pendule subit l'attraction de chaque aimant.
5. Il y a une petite distance  $h$  entre le plan des aimants et celui du mouvement du pendule.

Comme le montre la figure 2.2, la distance dans le plan  $xy$  de chacun des aimants et du point  $O$  au pendule est marquée sur la figure par le vecteur  $r$ . Ici, nous les définissons comme :

1.  $r_L$ : La distance entre les aimants et le pendule.
2.  $r_0$ : La distance entre le point  $O$  et le pendule.
3.  $(x_i, y_i)$ : Les coordonnées cartésiennes pour chaque aimant.
4.  $(x, y)$ : Les coordonnées cartésiennes du pendule.
5.  $(x_0, y_0)$ : Les coordonnées cartésiennes d'origine.
6.  $h$ : La distance entre le plan des aimants et celui du pendule.

## 2.4 Modèle du système

### 2.4.1 Équations du système

Analysons maintenant la force agissant sur le pendule. En supposant que le pendule ait été éloigné de son point d'équilibre  $O$  et que les coordonnées cartésiennes actuelles soient  $(x, y)$ , trois types de forces agissent sur lui :

1. La force causée par les aimants, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, est inversement proportionnelle à la distance au carré inversé, de sorte que la force pourrait être décrite comme :

$$\vec{F}_m = k_m \frac{\vec{r}_l}{r_i^3} \quad (2.1)$$

où  $F_m$  est la force,  $k_m$  est le coefficient d'intensité de la force magnétique. Le  $r_i$  dans le plan  $xy$  est  $\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$ . Cependant, cela pourrait provoquer un point singulier lorsque  $x = x_i$  et  $y = y_i$ , d'où comme nous l'avons mentionné ci-dessus, une distance  $h$  est introduite. Par conséquent, l'équation  $\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + h^2}$  et la force magnétique d'un seul aimant est :

$$F_{m-x} = k_m \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + h^2]^{3/2}} \quad (2.2)$$

$$F_{m-y} = k_m \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + h^2]^{3/2}} \quad (2.3)$$

2. La force causée par la gravité tire le pendule vers le point d'origine  $O$ , ainsi cette force pourrait être décrite comme :

$$\vec{F}_g = k_g \vec{r}_0 \quad (2.4)$$

En convertissant cette formule en coordonnées cartésiennes, les composantes  $x$  et  $y$  de la force de gravité devraient être :

$$\vec{F}_{g-x} = k_g(x_0 - x) \quad (2.5)$$

$$\vec{F}_{g-y} = k_g(y_0 - y) \quad (2.6)$$

3. Troisièmement, nous avons introduit ici une autre force, qui est la force de friction entre le pendule et le support dans lequel se trouve l'ensemble du système. La force agit dans la direction opposée du mouvement du pendule et est proportionnelle à la vitesse du pendule. Ainsi, la force est décrite comme :

$$\vec{F}_f = -k_f \vec{v} \quad (2.7)$$

Selon la deuxième loi du mouvement de Newton, on pourrait résumer les trois types de force à l'accélération et à la masse, nous supposons ici que la masse du pendule est 1. Par conséquent, nous pourrions arriver à la formule finale du pendule sous forme d'équations (2.8) et (2.9).

Les solutions de ces deux équations seront la trace du pendule.

$$x'' + k_f x' - k_m \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + h^2]^{3/2}} - k_g(x_0 - x) = 0 \quad (2.8)$$

$$y'' + k_f y' - k_m \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + h^2]^{3/2}} - k_g(y_0 - y) = 0 \quad (2.9)$$

## 2.4.2 Paramétrage du système

Comme le montre la figure 2.2, en considérant un système de pendule magnétique en réalité et en supposant que le coin inférieur gauche est le point d'origine avec les coordonnées  $(0, 0)$ , et la limite pour les axes  $x$  et  $y$  est fixée à  $8, 00$ . Par conséquent, les coordonnées du point O sont  $(4.00, 4.00)$  et les coordonnées cartésiennes pour les magnats rouges, verts et bleus sont  $(4.00, 6.00)$ ,  $(2.27, 3.00)$  et  $(5.73, 3.00)$ , respectivement. Le point O n'est pas défini comme l'origine  $(0, 0)$  bien que l'on puisse s'attendre à une symétrie dans les coordonnées pour une compréhension directe. Nous profiterons de ce paramètre lorsque nous parlerons de la visualisation du mouvement chaotique. Il y a trois coefficients dans la formule, qui sont le coefficient de force magnétique  $k_m$  fixé à l'unité, le coefficient de gravité  $k_g$  fixé à demi-unité, et le coefficient de frottement  $k_f$  fixé à  $0.1$ .

## 2.4.3 Potentiel des sources des forces

Selon la description du système, il existe quatre sources de force situées dans le domaine, qui sont le point d'équilibre gravitationnel O et les positions des trois

aimants. Par conséquent, le pendule se déplace dans le champ potentiel compliqué des quatre sources. En ce qui concerne nos hypothèses, la force agissant sur le pendule est réservée proportionnellement au carré de la distance. Ainsi, le potentiel établi par un aimant pourrait être décrit comme :

$$V_m = -k_m \frac{1}{r_i} \quad (2.10)$$

où  $r_i$  est la distance entre le pendule et l'aimant.

Et le potentiel déposé formé par la force de gravité dans notre hypothèse est :

$$V_g = \frac{1}{2} k_g r_0^2 \quad (2.11)$$

En prenant des coefficients que nous avons fixés, la force totale du potentiel déposé pourrait être atteinte et montrée par le graphique suivant :

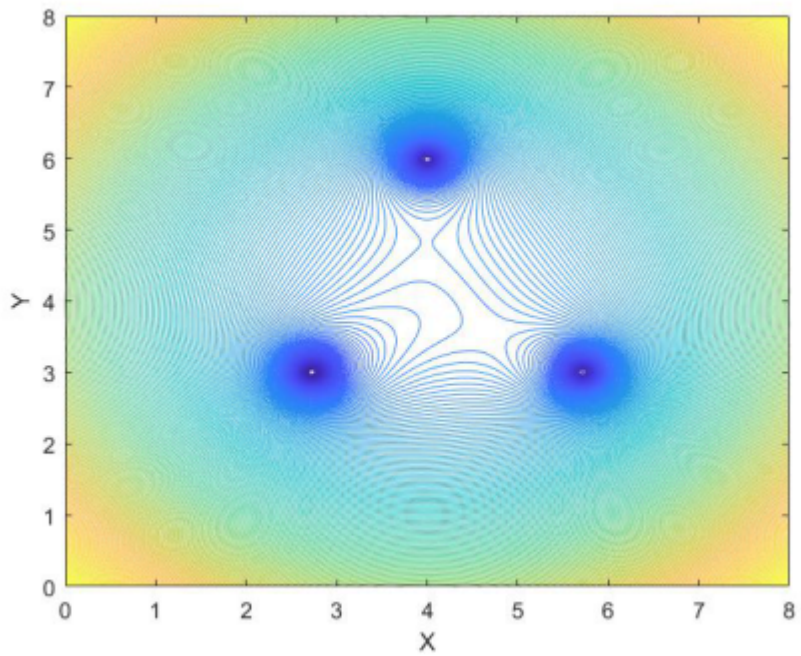


Figure 2.3 – Tracé de contour du champ potentiel du système pendulaire

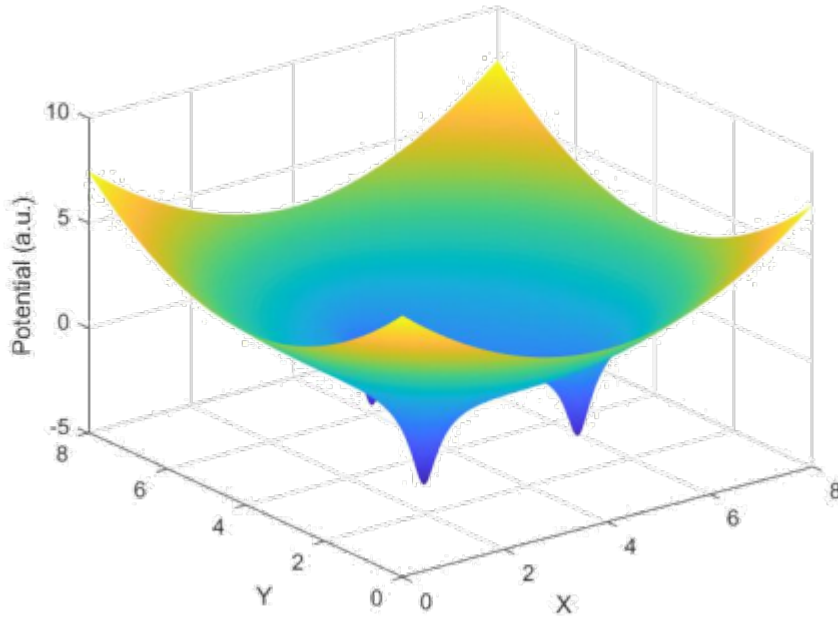


Figure 2.4 – Tracé de surface tridimensionnel du champ potentiel

À partir de ces deux tracés, premièrement, il est très clair que l'ensemble du système est dans le puits de potentiel, dans lequel tout objet du système se déplacera vers le centre du plan. On peut également observer qu'il existe trois points locaux d'énergie potentielle minimale, qui sont aussi les positions des aimants. Et ces positions devraient être les points d'équilibre stables que toute petite perturbation du pendule à ces positions ne le déplacera pas loin, et le pendule reviendra finalement à ces positions d'équilibre. De plus, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe un autre point d'équilibre local au centre de l'ensemble du plan. Cependant, il n'est pas clair si ce point est un point d'équilibre stable ou non.

## 2.5 Conclusion

Avant d'aller plus loin dans l'investigation du système, il vaut la peine de terminer un autre travail, qui est la visualisation du comportement chaotique du pendule. C'est plus simple si nous pouvions observer le mouvement du pendule. Par conséquent, dans le chapitre suivant, nous allons nous concentrer sur l'investigation numérique des propriétés du système.



# Chapitre 3

## Étude du pendule magnétique par simulation numérique

### 3.1 Introduction

Nous avons commencé par introduire le système de pendule magnétique. Désormais, nous allons parler de la mise en œuvre de la présentation du mouvement du pendule. Le programme est réalisé avec le logiciel *Mathematica*. Le code source est disponible dans le référentiel [19].

Des résultats préliminaires sont obtenus à partir de ce programme pour montrer notre approche simulation numérique pour effectuer des recherches supplémentaires sur le système de pendule magnétique.

Il a été montré que la formule du système de pendule magnétique est constituée d'équations différentielles non homogènes du second ordre. Trouver la solution analytique de ces équations est une tâche compliquée.

Dans ce travail, nous utiliserons le logiciel de simulation *Mathematica* pour trouver la solution numériquement. *Mathematica* a différentes commandes intégrées pour de telles équations avec des conditions initiales. Les fonctions principalement utilisées sont *NDSolve* pour la solution numérique et *ParametricPlot* pour le tracé des résultats. Bien que la plupart des formats et normes d'entrée aient été prédéterminés par *Mathematica*, le code utilisé dans ce travail s'inspire en grande partie des travaux mentionnés dans la Référence [19], avec cependant des paramétrages différents. Ainsi, le code dans ce travail sera omis.

## 3.2 Application du paramétrage

Pour le calcul numérique, le coefficient de force magnétique  $k_m$  est fixé à 1, le coefficient de gravité  $k_g$  est pris comme 0,5 et le coefficient de frottement  $k_f$  est pris égal à 0,1. La condition initiale  $x_0$  et  $y_0$  est la position de départ du pendule et la vitesse initiale du pendule est considérée comme 0. La plage de temps  $t$  dans le *ND-Solve* est définie sur 100 au maximum. Avec ces paramètres, *Mathematica* pourrait résoudre la position du pendule  $(x(t), y(t))$  du début au pas de temps maximum. Les solutions sont deux vecteurs, celui pour  $x$  et l'autre pour  $y$ . Nous mentionnerons ici chaque solution comme une trajectoire.

### 3.3 Execution du programme

La figure 3.1 montre 4 trajectoires avec le réglage de la position de départ comme points d'intérêt comme mentionné ci-dessus. On peut voir que les trajectoires semblent être quatre points stables, ce qui montre que le pendule partant de ces points avec une vitesse initiale de 0 restera fermement aux points d'origine. Ces points sont des points de potentiel minimum locaux. Par conséquent, ces 4 points d'intérêt sont les points fixes du système. Le statut du pendule avec ces points comme point de départ ne sera pas modifié. Comme les points fixes ont été déterminés, il vaut également la peine de vérifier si ces points sont source, puits ou selle. Ici, nous définissons une représentation en couleur pour les trajectoires en fonction de la position d'équilibre finale dans l'ensemble du tracé de phase au sein de ce travail. La couleur rouge présente toutes les trajectoires se terminant au point  $(4, 6)$ . La couleur verte est pour le point  $(2.27, 3)$ , la couleur bleue est pour le point  $(5.73, 3)$  et la couleur noire présente le point  $(4, 4)$ . Il vaut également la peine de vérifier si ces points sont source, puits ou selle, nous définissons une représentation en couleur pour les trajectoires en fonction de la position d'équilibre finale dans l'ensemble du tracé de phase au sein de ce travail. La couleur rouge présente toutes les trajectoires se terminant au point  $(4, 6)$ . La couleur verte est pour le point  $(2.27, 3)$ , la couleur bleue est pour le point  $(5.73, 3)$  et la couleur noire présente le point  $(4, 4)$ . La couleur rouge présente toutes les trajectoires se terminant au point  $(4, 6)$ . La couleur verte est pour  $(2.27, 3)$ , la couleur bleue est pour le point  $(5.73, 3)$  et la couleur noire présente le point  $(4, 4)$

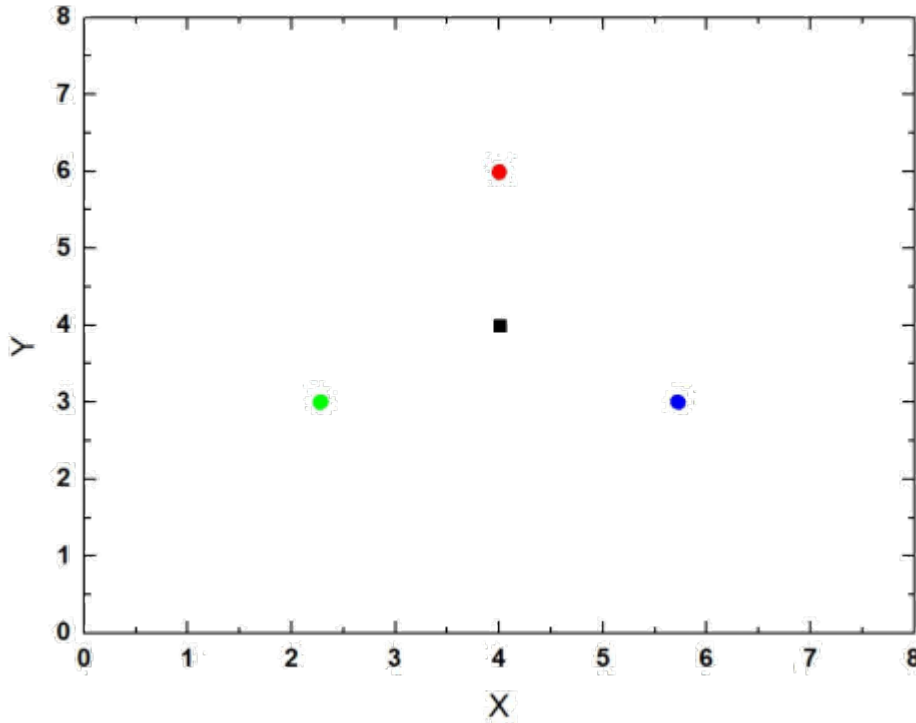


Figure 3.1 – Tracé des trajectoires des points fixes

Afin d'évaluer la propriété d'un point fixe, les régions voisines autour de ces points doivent être vérifiées. Ici, nous avons utilisé la même méthode que ci-dessus en définissant les points de départ comme ceux autour du point fixe (4,4) et en vérifiant la position finale. La figure 3.2 montre la limite de la zone pour que le pendule revienne au point fixe (4, 4), ce qui signifie que le pendule avec n'importe quel point dans la zone comme position de départ reviendra au point fixe marqué comme le point noir solide carré. Par conséquent, ce point fixe est un puits ou un point fixe attirant. Le voisinage epsilon pourrait être calculé par la distance la plus courte entre le point fixe et la limite, qui est de 0,52 unité atomique.

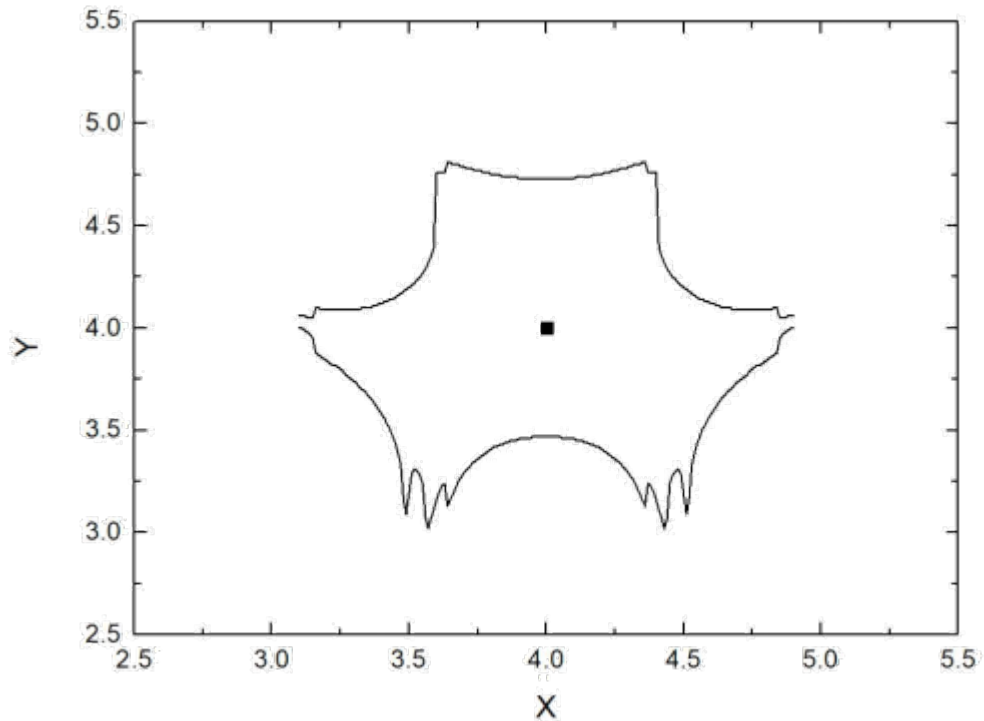


Figure 3.2 – Limite de voisinage epsilon pour point fixe (4.0, 4.0)

La même méthode pourrait être employée pour les trois autres points fixes. Leurs limites sont illustrées à la figure 3.3. Par conséquent, tous ces points fixes sont des puits ou des points fixes attractifs. Les cycles pleins rouge, vert et bleu marquaient la position des points fixes  $(4, 6)$ ,  $(2.27, 3)$  et  $(5.73, 3)$ , respectivement. Et le voisinage epsilon pour eux est de 0.4, 0.405 et 0.405, respectivement.

Examinons maintenant d'autres points éloignés des puits. Les figures ci-dessous montrent les trajectoires du pendule à partir de 4 points de départ différents. Et les positions de départ sont  $(0.50, 4.03)$  pour la ligne noire,  $(0.50, 4.00)$  pour la ligne rouge,  $(0.50, 3.99)$  pour la ligne verte et  $(0.50, 4.05)$  pour la ligne bleue. La couleur

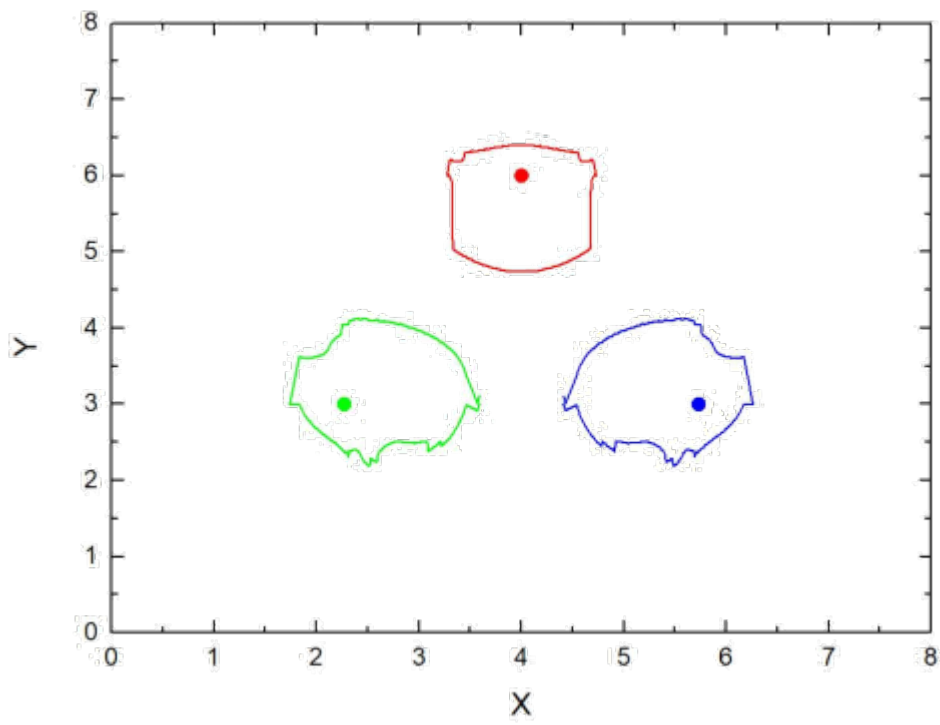


Figure 3.3 – Limite de voisinage epsilon pour les points fixes

des lignes indique également la position d'équilibre finale du pendule comme nous l'avons mentionné ci-dessus. À partir de chaque trajectoire unique, on pourrait observer que le pendule pourrait approcher ou même passer les multiples positions d'équilibre, cependant, il s'installera sur une seule position. De plus, à partir de chaque trajectoire unique, il n'est pas facile de définir n'importe quel type de courbe ou de déterminer n'importe quel comportement du système chaotique de l'autre part, en les rassemblant tous dans la figure 3.6, il est très clair que la position de repos finale est très sensible aux conditions initiales.

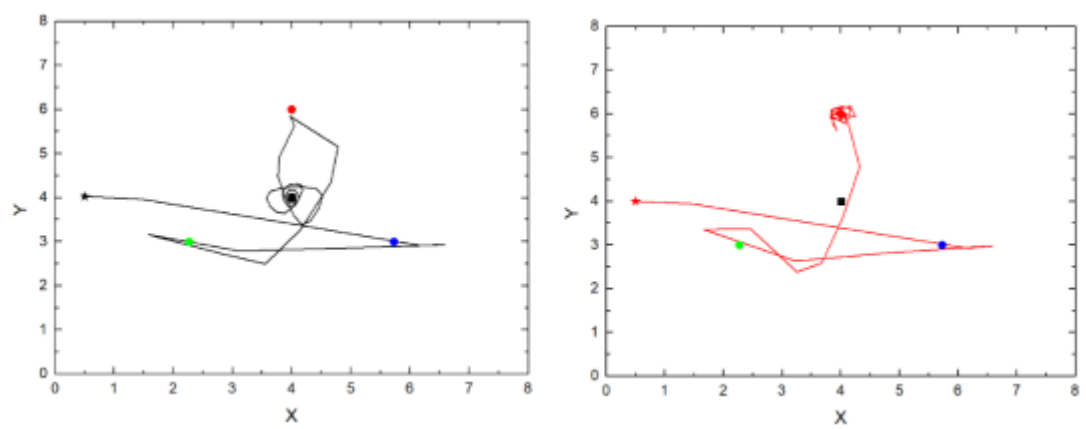


Figure 3.4 – Trajectoire pour la position de départ  $(0.5, 4.03)$ , marquée par une étoile noire et trajectoire pour la position de départ  $(0.5, 4.031)$ , marquée par une étoile rouge respectivement.

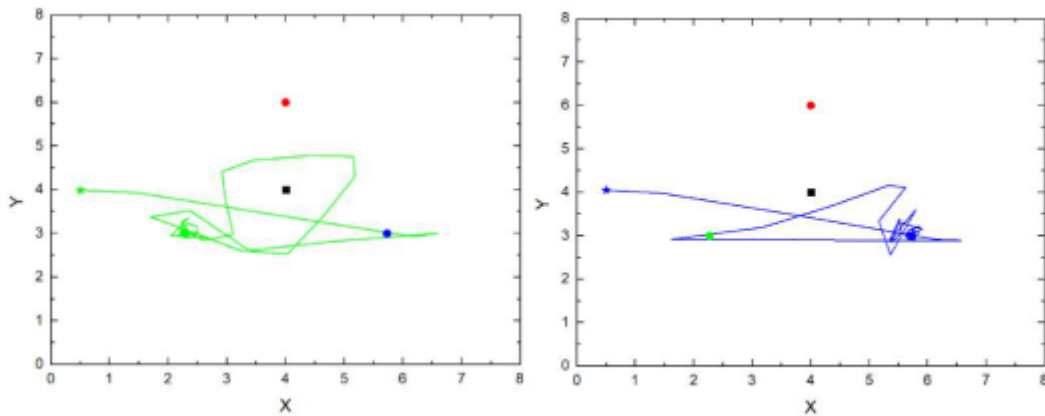


Figure 3.5 – Trajectoire pour la position de départ  $(0.5, 4.034)$ , marquée par une étoile verte et trajectoire pour la position de départ  $(0.5, 4.033)$ , marquée par l'étoile bleue respectivement.

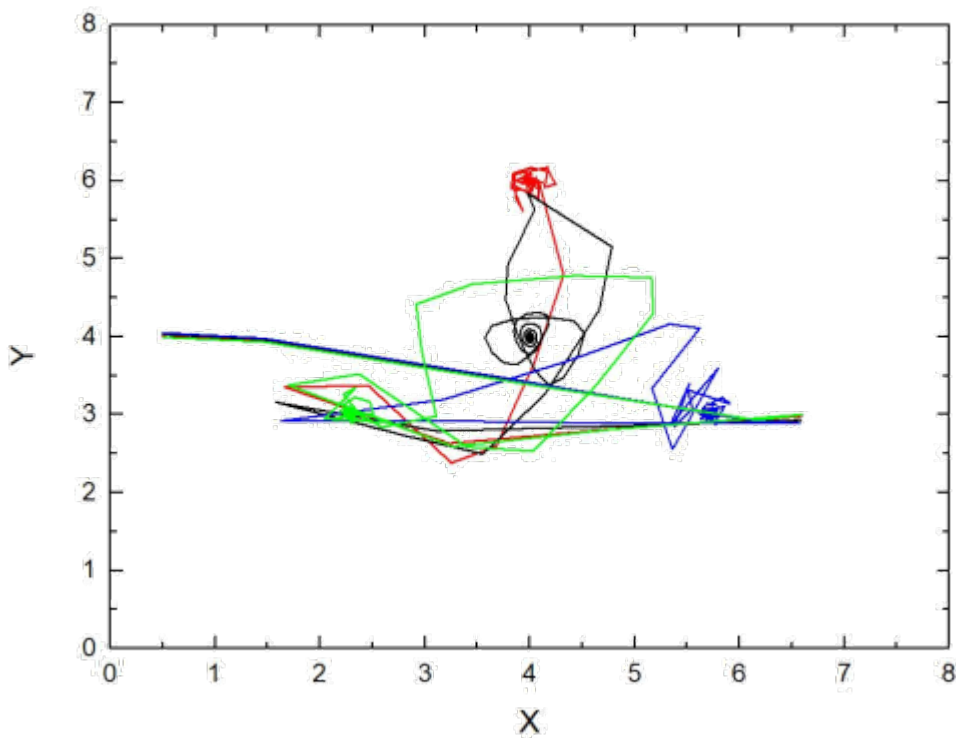


Figure 3.6 – Graphique combiné des trajectoires pour différentes positions



Jusqu'à présent, il a été montré que le comportement du pendule est sensible à la position initiale. De plus, le statut final du pendule n'est pas un seul mais un ensemble de positions. Ces caractéristiques indiquent toutes que le système est un système chaotique. Cependant, plus d'investigations devraient être faites pour déterminer les propriétés du système, en particulier sur chaque trajectoire.

Afin de décrire numériquement ce chaos, l'exposant de *Lyapunov* est généralement utilisé. Ici, nous utiliserons également cette méthode pour le système pendulaire. Il convient de mentionner que nous utiliserons alternativement la norme de séparation entre différentes trajectoires pour extrapoler l'exposant de *Lyapunov* dans ce travail. En effet, l'exposant de *Lyapunov*, selon sa définition, est la séparation lorsque le temps tend vers l'infini, ce qui est très difficile dans ce travail car nous utilisons la méthode de simulation numérique, et le temps est fini. La figure 3.7 montre les tracés de norme de séparation entre la trajectoire noire qui se trouve être la référence et les autres trajectoires rouge, verte et bleue.

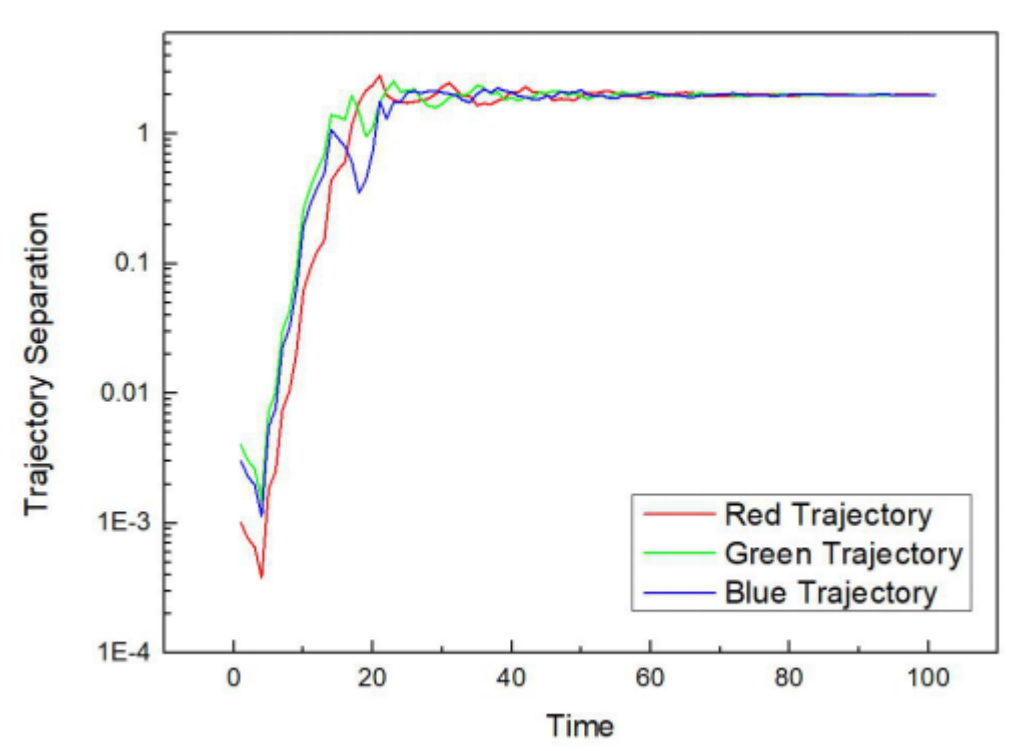


Figure 3.7 – Séparation de trajectoire, trajectoire de référence : Trajectoire noire

Les positions de départ que nous avons choisies ici sont très proches les unes des autres, on peut donc voir que les distances entre les trajectoires au départ sont assez faibles. Avec l'évolution du temps, les différences entre la trajectoire noire et les trois autres augmentent de façon exponentielle. Cela signifie que la trajectoire de deux positions proches divergera vers différentes positions séparées, ce qui indique que le système est chaotique. Les séparations finales de trois lignes semblent être la même valeur. Ceci est raisonnable, car les distances des positions finales des trajectoires rouge, verte et bleue sont les mêmes. Dans ce cas, nous avons confirmé que les positions finales des trois trajectoires sont différentes. Cependant, en général,

on pourrait déduire une conclusion erronée que les positions finales sont les mêmes. Par conséquent, cette méthode est puissante pour déterminer si le chaos est le comportement du système, mais elle est encore assez limitée pour montrer l'état final du système, en particulier lorsqu'il existe plusieurs états d'équilibre. À partir de l'équation

$$\lambda_{max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\Delta t} \sum_{i=1}^m \ln \frac{|w_i|}{|W_0|} \quad (3.1)$$

l'exposant de *Lyapunov* maximum a pu être calculé. Les valeurs de max pour les trajectoires rouge, verte et bleue sont respectivement 6.8931, 5.6970 et 5.8951. Ces valeurs positives confirment que le système est chaotique.

La figure 3.8 a étudiée les séparations de trajectoire entre la trajectoire rouge et les trajectoires noires, vertes et bleues, et la rouge est la référence. Il est à noter qu'il y a 2 valeurs lorsque le temps atteint le maximum. C'est assez simple car les distances de l'aimant rouge à l'aimant noir ou vert et bleu sont différentes. Et les valeurs de max pour les trajectoires noires, vertes et bleues sont respectivement de 6.8931, 6.4220 et 6.7547.

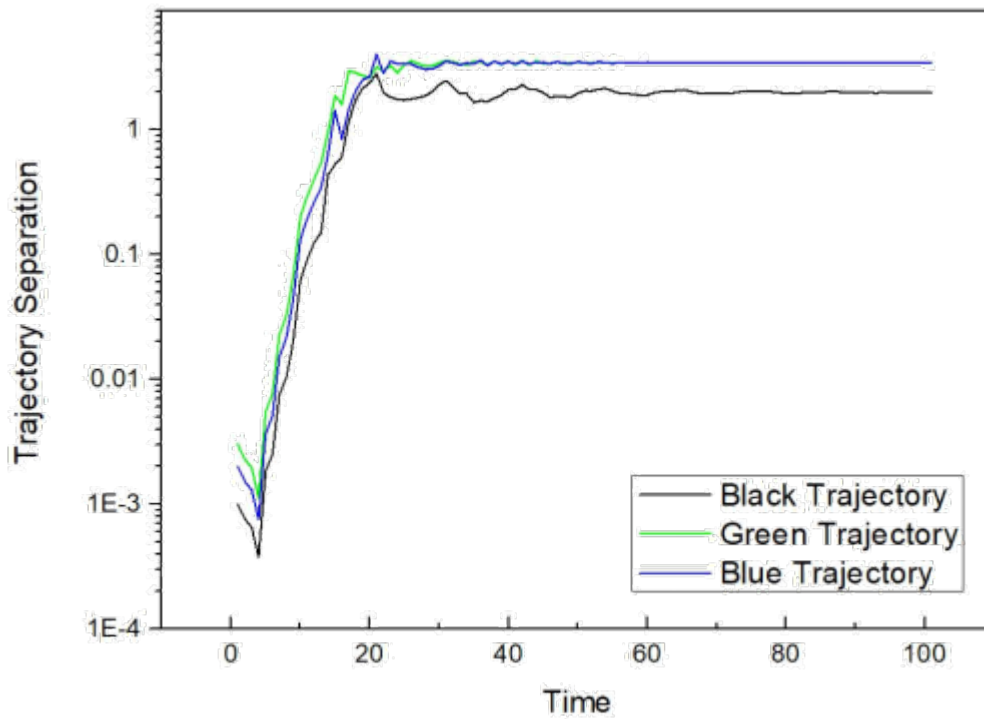


Figure 3.8 – Séparation de trajectoire, trajectoire de référence : Trajectoire rouge

### 3.4 Conclusion

Nous avons pu voir que le système est dans un état totalement chaotique, à l'exception des zones aux positions des aimants. Il est très difficile d'observer une règle ou un modèle dans la plupart des zones du plan. Il convient également de mentionner que l'état de chaque point du plan est issu d'une simulation numérique à pas de temps limité. Dans la situation pratique, ce résultat pourrait être différent, cependant, le système sera toujours chaotique.

# Conclusion Générale

Afin de mieux comprendre le comportement du pendule chaotique nous avons fait une brève revue des concepts et caractérisation du système dynamique non linéaire oscillant et chaotique, qui est le contenu principal du premier chapitre. Le chaos est le comportement temporel compliqué des systèmes simples. Selon cette définition, le chaos est un type d'évolution et de dynamique temporelle. Le monde qui nous entoure regorge de tels phénomènes qui semblent irréguliers et aléatoires à la fois dans l'espace et dans le temps. Par conséquent le système oscillatoire chaotique, pourrait être étudié à partir de ses propriétés physiques d'où on pourrait potentiellement déterminer les états intrinsèques du système. Une relation entre la condition initiale et les états finaux est obtenue par la méthode d'itération traditionnelle puis effectuer la prédétermination sur le système, qui est l'esprit clé de ce travail. Dans le second chapitre, nous avons introduit les concepts et modélisé notre système expérimental, le système de pendule magnétique. Au troisième chapitre, nous avons conçu et mis en œuvre un programme informatique pour construire une simulation numérique afin d'étudier le système de pendule magnétique. D'où nous avons prouvé que la distribution des états pouvait être utilisée comme relation entre les conditions initiales et les

états finaux. On pourrait prédéterminer l'état final de toutes les positions initiales dans le système sans tenir compte du processus intermédiaire compliqué possible.

Pour les travaux futurs, Il se pourrait que notre approche puisse être utilisée sur des données provenant du monde réel, comme les marchés boursiers. En raison de l'énorme quantité de données, certaines nouvelles technologies, telles que les méthodes de la science des données, seront également nécessaires à l'avenir.

# Bibliographie

- [1] Kengne, E. On stability of a nonlinear pendulum. *Nonlinear Oscillations*. (2003)
- [2] Luca, M. Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information. (Université de Bretagne occidentale-Brest,2006)
- [3] Sabour, A. Conception et validation d'un régénérateur de suites binaires cryptographiquement sûres base sur les algorithmes évolutionnistes. (Université Mohammed V-Agdal, Faculté des Sciences, Rabat,2007)
- [4] Moustefai, K. Tests de validation pour les crypto-systèmes chaotiques. (Universite mohamed bou-diaf'des sciences et de la technologie d'oran,2014)
- [5] Noura, H. Conception et simulation des générateurs, crypto-systèmes et fonctions de hachage basés chaos performants. (université de Nantes,2012)
- [6] Lorenz, E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal Of Atmospheric Sciences*. **20**, 130-141 (1963)
- [7] Hénon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *The Theory Of Chaotic Attractors*. pp. 94-102 (1976)
- [8] Bergé, P., Pomeau, Y. & Vidal, C. L'ordre dans le chaos (collection enseignement des sciences). *Hermann, Paris*. (1992)
- [9] Pérez, J. Mécanique : fondements et applications, 5e éd. (Masson,1997)

- [10] Luca, M. Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information. (Université de Bretagne occidentale-Brest,2006)
- [11] Olivier BONNEFOY. Systèmes Dynamiques et instabilités hydrodynamiques. Version : 1.9 du 8 avril 2021.
- [12] Boudour, R. Détermination de la région de stabilité transitoire au sens de Lyapunov d'un oscillateur non linéaire force par l'approche graphique. (Université de Boumerdès-M'hamed Bougara,2011)
- [13] Gruber, C. & Benoit, W. Mécanique générale, Presses polytechniques romandes. *Lausanne, Suisse.* (1998)
- [14] Elhadj, Z. & Sprott, J. On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications. *Frontiers Of Physics In China.* **3**, 195-204 (2008)
- [15] Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S. & Yorke, J. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D : Nonlinear Phenomena.* **13**, 261-268 (1984)
- [16] Mindlin, G., Hou, X., Solari, H., Gilmore, R. & Tufillaro, N. Classification of strange attractors by integers. *Physical Review Letters.* **64**, 2350 (1990)
- [17] Kaplan, D. & Glass, L. Understanding nonlinear dynamics. (Springer Science & Business Media,1997)
- [18] Hilborn, R. Chaos and nonlinear dynamics : an introduction for scientists and engineers. (Oxford University Press on Demand,1994)
- [19] Win, I. Math 164 Final Project :The Chaotic Oscillating Magnetic Pendulum. (2006)