

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira

Faculté des Sciences Exactes

Département De Mathématique

# Mémoire de Master

en Mathématiques

*Option : Analyse Mathématique*



## Thème

---

*Introduction au calcul stochastique.*

*Application à l'étude de l'équation de la chaleur stochastique*

---

Réalisé par

BENBELAID Faouzi

Devant le jury

---

Président	Mr. BOUHMILA Fateh	M.C.A
Encadreur	Mme. BAICHE Leila	M.C.B
Examinatrice	Mme. BOURAINE Louiza	Professeur
Examinatrice	Mme. MEDJBAR Sonia	M.C.B

---

# Remerciements

Je témoigne toute ma gratitude à tout ceux qui ont contribué à ma formation, et je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématique.

Mes vifs remerciements vont à :

Mme L.BAICHE pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ces précieuses remarques.

Mr F.BOUHMILA pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.

Mme L.BOURAINE et Mme S.MEDJBAR pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions sur la théorie des probabilités</b>	<b>6</b>
1.1	Rappel sur la théorie générale de la mesure . . . . .	6
1.1.1	Notion de Tribus . . . . .	6
1.1.2	Applications Mesurables . . . . .	8
1.1.3	Mesures . . . . .	8
1.1.4	Intégrale d'application mesurable . . . . .	11
1.2	Introduction a la théorie générale des probabilités . . . . .	13
1.2.1	Indépendance . . . . .	16
1.2.2	Fonction caractéristique . . . . .	17
1.2.3	Vecteurs Gaussiens . . . . .	19
1.2.4	Espérance conditionnel . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Calcul Stochastique</b>	<b>24</b>
2.1	Processus Stochastiques . . . . .	24
2.2	Temps d'arrêt . . . . .	28
2.3	Martingales . . . . .	31
2.3.1	Quelque propriétés topologique . . . . .	35
2.4	Variation quadratique . . . . .	37
2.5	Processus de Wiener . . . . .	39
2.5.1	Variation du processus de Wiener . . . . .	46
2.6	Champs aléatoires . . . . .	46
2.7	Intégration stochastique . . . . .	48
2.7.1	L'intégrale Stochastique d'Itô . . . . .	48
2.7.2	Formule d'Itô et Applications . . . . .	53

<b>3 Étude de l'équation de la chaleur stochastique</b>	<b>57</b>
3.1 Les équations différentielle stochastique . . . . .	57
3.2 Équation Parabolique classique . . . . .	59
3.2.1 Équation de la chaleur stochastique . . . . .	60

# Introduction

L'histoire du calcul stochastique a débuté avec le mouvement Brownien avec les travaux de L. Bachelier à Paris qui a créé un modèle de ce mouvement en étudiant le comportement dynamique de la bourse Parisienne dans les années 1900. Un modèle du mouvement Brownien a été aussi proposé par Einstein en 1905, décrivent le mouvement de particule suspendue dans un liquide, malgré l'influence de son article, Einstein n'a pas pu prouver mathématiquement l'existence d'un tel objet, il a fallu attendre le développement de la théorie de la mesure par Borel et Lebesgue pour pouvoir avoir les outils nécessaires à une telle construction.

C'est N. Wiener qui en 1923 a donné la première construction rigoureuse du mouvement Brownien qui est défini comme un processus stochastique à trajectoires continues et suivant la loi normale, et a donné par la suite beaucoup de ses propriétés, deux des plus notables : les trajectoires du mouvement Brownien ont une variation quadratique non nulle, les variations totales de ses trajectoires est infinie. Il a aussi défini une sorte d'intégrale par rapport au mouvement Brownien : l'intégrale de Wiener.

Une avancée importante dans le domaine du calcul stochastique a été apportée par Kolmogorov par son développement rigoureux de la théorie des probabilités en utilisant la théorie de la mesure, et ces travaux sur le processus de Markov.

Un peut être des plus importantes figures dans le domaine de l'intégration stochastique est sans doute Kiyosi Itô, non seulement par ces nombreuses contributions à la théorie des processus stochastiques en générale mais aussi comme pionnier du domaine de l'intégration stochastique et conséquemment la théorie des équations différentielles stochastiques, Itô avait réussi en 1944 à généraliser l'intégrale de Wiener pour inclure des intégrales stochastiques, par la suite, il a donné dans un article daté de 1951, sa première démonstration d'une formule qui est analogue au développement de Taylor d'une fonction de classe  $C^2$  composée avec un processus stochastique, cette formule est souvent appelée formule d'Itô. Le développement de la théorie a continué avec

Doob qui a généralisé la classe d'intégrants des intégrales stochastique, et qui donne son premier théorème de décomposition de sous-martingale a temps discret, puis vient P.A Meyer, qui a donné une décomposition des sous-martingale a temps continue en utilisant la théorie du potentielle, généralisant ainsi celle de Doob, Meyer a aussi fait une étude approfondie des  $L^2$ -martingale qui est être importante par la suite

La théorie des équations différentielle stochastique s'est vite développée depuis les travaux d'Itô en raison de son utilité dans différent domaines comme la biologie, la physique, les finances..., le traitement des équations différentielles partielles stochastiques a commencé bien après et a été motivé par les mêmes applications, le premier traitement de ces équations a commencé avec Baklan, qui a donné un théorème d'existence de solution d'EDPs stochastiques paraboliques dans les espaces de Hilbert, sa méthode a consisté a réécrire l'équation en question sous forme intégrale avec l'aide des fonctions de Green.

En réécrivant ces équations sous forme intégrale par rapport a la variable temporelle, on donne une formulation variationnelle du problème associé a cette équation, l'existence et unicité de ces solutions variationnel a été abordé pour la première fois par Bensoussan et Temam, puis par Pardoux, Krylov et Rozonvskii et bien d'autres.

En contraste aux EDPs classique, la théorie des EDPs stochastiques a très vite eu une transition de l'étude de problèmes concrets a une théorie générale, la plus part de ces équation traité comme des équations d'évolution dans un espace de Hilbert ou de Banach n'ont pas de connexions spécifique aux équations trouvés dans les domaines d'applications.

Ce mémoire a pour objectif de donner une introduction à la théorie du calcul stochastique, le premier chapitre introduit certain aspect de la théorie des probabilité, le deuxième aborde le calcul stochastique, et pour finir dans le troisième chapitre on étudie une équation différentielle stochastique de type parabolique : l'équation de la chaleur.

# Chapitre 1

## Notions sur la théorie des probabilités

### 1.1 Rappel sur la théorie générale de la mesure

#### 1.1.1 Notion de Tribus

On donnera dans cette section un petit sur la théorie de la mesure, qui sera utile par la suite pour introduire la théorie des probabilités.

**Définition 1.1** ( $\sigma$ -algèbre, Tribu). soit  $X$  un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de ces parties, on dit que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  est une  $\sigma$ -algèbre ou tribu si :

- (1).  $X \in \mathcal{A}$ .
- (2). si  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ .
- (3). pour toutes  $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$  avec  $I$  dénombrable nous avons  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ .

les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelées les parties mesurable de  $X$ , on dit que  $(X, \mathcal{A})$  est un **espace mesurable**.

**Remarque 1.1.** D'après la définitions d'une tribu, on peut montrer facilement les propriétés suivante

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , en effet par la propriété (1) et (2)  $X \in \mathcal{A} \implies X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ , en effet d'après (2) on a  $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c \in \mathcal{A}$ .

**Exemple 1.1.** Donnons certaine exemples de tribus :

1.  $\mathcal{P}(X)$  est trivialement une tribu sur  $X$ .
2. Si  $B \in \mathcal{P}(X)$  alors l'ensemble  $\{B, B^c, \emptyset, X\}$  est une tribu sur  $X$ , c'est d'ailleurs la plus petit tribu sur  $X$  contenant  $B$

**Définition 1.2.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application, mon munit  $Y$  d'une tribu  $\mathfrak{B}$ , on définit l'ensemble suivant

$$\mathcal{A} := f^{-1}(\mathfrak{B}) := \{f^{-1}(B), B \in \mathfrak{B}\}$$

c'est une tribu sur  $X$ , appelé tribu image réciproque.

Le lemme suivant donne une propriété importante portant sur l'intersection quelconque de tribu

**Lemme 1.1** ([Rud87]). Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de  $\sigma$ -algèbres sur  $X$ , alors  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est aussi une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ .

**Démonstration :** (1) On a  $X \in \mathcal{A}_i, i \in I$  donc  $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ , (2) Si  $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in I$  alors  $A^c \in \mathcal{A}_i, i \in I$ , donc  $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ , (3) Si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_i, i \in I$  alors  $A_k \in \mathcal{A}_i, \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in I$  donc  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$  ce qui implique  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

Avec le lemme précédent on peut définir la notion de tribu engendré par une famille de parties :

**Définition 1.3 (Tribu engendré par une famille de parties).** Soit  $F \subset \mathcal{P}(X)$  on définit :

$$\sigma(F) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-algèbre}, F \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

alors  $\sigma(F)$  est une  $\sigma$ -algèbre appelé la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $F$ , c'est la plus petite tribu sur  $X$  qui contient  $F$ .

**Remarque 1.2.** (a) Si  $\mathfrak{M}$  est une tribu sur  $X$  alors on a trivialement  $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ .

(b) Si  $A, B \subset \mathcal{P}(X)$  alors on a  $A \subset \sigma(B)$  et par définition de la tribu engendré par une partie  $\sigma(A) \subset \sigma(B)$ .

(c) Si  $A \subset \mathfrak{M}$ , avec  $\mathfrak{M}$  une tribu sur  $X$ , alors  $\sigma(A) \subset \mathfrak{M}$ .

On passe maintenant à définir une tribu important qui va être utilisée dans beaucoup d'instance.

**Définition 1.4.** Soit  $\tau$  une topologie sur  $X$  on appelle **tribu de Borel** sur  $X$  la plus petite tribu engendrée par  $\tau$  et on note :  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$

On se place à présent dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.5.** On définit l'ensemble des pavés ouverts de  $\mathbb{R}^n$  par

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{]a_1, b_1[ \times \dots \times ]a_n, b_n[ : a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$$



**Proposition 1.1** ([Sch11]). Soit  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des pavés ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , alors on a  $\sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 1.2** ([Bal17]). L'ensemble  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est engendré par les familles suivante :  $\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}$

### 1.1.2 Applications Mesurables

On passe maintenant à la notion d'application mesurables  $X$  :

**Définition 1.6 (Application mesurable).** Soit  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  deux espaces mesurables, on dit qu'une application  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  est mesurable ou  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}$  mesurable) si :

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

**Définition 1.7 (Tribu engendrée par une famille d'applications).** Soit  $X$  un ensemble non vide et  $(Y, \mathcal{B})$  un espace mesurable, soit  $H = \{f_i, i \in I\}$  une famille d'applications de  $X$  vers  $Y$ , on définit la tribu  $\sigma(H)$  comme la plus petite tribu sur  $X$  rendant tout les  $\xi \in H$  mesurables :

$$\sigma(H) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{M}_j, \quad \mathcal{M}_j, j \in J \text{ tribu sur } X \text{ et } \forall j \in J, \forall i \in I : f_i \text{ est } (\mathcal{M}_j - \mathcal{B} \text{ mesurable})$$

**Exemple 1.2.** Si  $(Y, \mathcal{B})$  est un espace mesurable,  $X$  ensemble non vide,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $H = \{f\}$  alors on a :

$$\sigma(H) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

c'est la tribu image réciproque.

### 1.1.3 Mesures

**Définition 1.8.** Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable, on appelle mesure positive sur  $X$  toute application  $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$  vérifiant :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  avec  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  alors :

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

on dit alors que  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré.

**Proposition 1.3 (Propriété élémentaire d'une mesure positive,[Rud87]).** .

1. **Monotonie** : Si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \subset B$  alors :  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. **Sous-additivité** : Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$
3. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  et si  $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  alors :  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$
4. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  et si  $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  avec  $\mu(A_0) < \infty$  alors :  $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

**Exemple 1.3.** Soit  $(X, \mathfrak{M})$  un espace mesurable, on donne certain exemple de mesures

- (1). **(mesure de Dirac)**, Soit  $x \in X$  alors l'application  $\delta_x : \mathfrak{M} \rightarrow \{0, 1\}$  définit comme suit ,  
 $\forall A \in \mathfrak{M}$

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est une mesure appelé mesure ou masse de Dirac.

- (2). **(Mesure de comptage)** L'application définit sur  $\mathfrak{M}$  suivante

$$|A| := \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infinie} \end{cases}$$

est une mesure, appelé mesure de comptage.

**Définition 1.9 (Partie négligeable, Mesure complète).** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

- On dit qu'une partie  $N \subset X$  est **négligeable** si :  $\exists D \in \mathcal{A} : N \subset D$  et  $\mu(D) = 0$
- On dit qu'une la mesure  $\mu$  est **complète** si toutes partie négligeable est mesurable

**Définition 1.10.** Soit  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  un espace mesuré, on dit que la propriété  $P$  est vrai *presque-partout* (on  $P$  est vrai écrit  $p.p$ ) si elle est vrai sur un ensemble mesurable  $A \in \mathfrak{M}$  de complémentaire  $A^c$  négligeable.

**Remarque 1.3.** La propriété d'égalité presque partout entre deux applications mesurables est une relation d'équivalence sur l'espace des applications mesurables.

**Proposition 1.4 (Complétion des mesures,[Rud87]).** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, soit

$$\mathcal{A}^* = \{E \subset X \mid \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ et } \mu(B \cap A^c) = 0\}$$

On définit alors  $\mu^* : \mathcal{A}^* \rightarrow [0, +\infty]$  par : pour  $E \in \mathcal{A}^*$   $\mu^*(E) = \mu(A)$ , ainsi  $\mathcal{A}^*$  est une tribu sur  $X$  appelé la  $\mu^*$ -**complétion de  $\mathcal{A}$** , et  $\mu^*$  est une mesure complète sur  $\mathcal{A}^*$  qui prolonge  $\mu$ .

On énonce maintenant un théorème fondamentale sur l'existence d'une mesure positive sur  $\mathbb{R}$  (plus précisément sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ).

**Théorème 1.1 (Mesure de Lebesgue, [Rud87]).** *Il existe une **unique** mesure positive sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , notée  $\lambda$  telle que :*

$$\lambda(]a, b[) = b - a, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

**Remarque 1.4.** Cette mesure coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles bornés, en dimension 2, la mesure de Lebesgue d'un ensemble convexe borné sera égale à la surface délimité par la frontière de cette ensemble, en dimension 3, cette mesure coïncide avec la notion de volume.

**Remarque 1.5.** une question qu'on pourrait se poser est la complétude de la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , la réponse est négative, il suffit de considérer les ensembles de Cantor  $C$  qui est de mesure nulle : ( $\lambda(C) = 0$ ) mais qui contient des sous ensemble qui ne sont pas mesurables (qui ne sont pas dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ).

**Définition 1.11 (Tribu de Lebesgue).** On appelle **tribu de Lebesgue** dans  $\mathbb{R}$  noté  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  la tribu qui complète  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  pour la mesure  $\lambda$ . On appelle encore **mesure de Lebesgue** la mesure complétée

$$\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$$

On peut étendre cette définition sur  $\mathbb{R}^d$  pour la mesure et tribu de Lebesgue :

**Théorème 1.2 (Mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , [Rud87]).** *Il existe une **unique** mesure positive sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$  noté  $\lambda$  telle que pour tout pavé ouvert  $P = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times \dots \times ]a_d, b_d[ \subset \mathbb{R}^d$  on ait :*

$$\lambda(P) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

**Proposition 1.5 ([Rud87]).** *Pour tout  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  on a :*

- $\lambda(A) = \inf \{ \lambda(V) \mid V \text{ ouvert}, V \supset A \}$  (régularité extérieure)
- $\lambda(A) = \sup \{ \lambda(K) \mid K \text{ compact}, K \subset A \}$  (régularité intérieure)
- $\lambda$  est invariante par translation et rotation.

### 1.1.4 Intégrale d'application mesurable

On va maintenant définir la notion d'intégrale d'une application mesurable par rapport à une mesure positive, on commence par la définition des application **simple** :

**Définition 1.12 (Application Simple).** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesurée, et  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  On dit que  $s$  est application simple si son image consiste en un nombre finie de point ,si on suppose que  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  sont les valeurs que prend  $s$  et en notant  $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$  alors :

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

**Remarque 1.6.** Une conséquence de la définition des applications mesurables est le fait que  $s$  est mesurable si et seulement si les  $A_i$  sont mesurables.

On notera par la suite  $\mathcal{E}^+(X)$  l'ensemble des applications simple positive

**Définition 1.13 (Intégrale d'une application simple,application mesurable).** soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesurée, et  $s : X \rightarrow [0, +\infty[$  une application simple mesurable, on définit l'intégrale de  $s$  sur  $X$  comme suit :

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

si  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  une application mesurable, on définit l'intégrale de  $f$  sur  $X$  comme suit :

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \leq f, s \in \mathcal{E}^+(X) \right\}$$

on définit aussi l'intégrale de  $f$  sur une partie mesurable  $A \subset X$  comme suit

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A d\mu$$

**Remarque 1.7.** Si  $f$  est une application mesurable quelconque (non nécessairement positive) alors on peut l'écrire sous la forme suivante

$$f = f^+ - f^- \text{ avec } f^+ := \max(f, 0) \text{ et } f^- := \max(-f, 0)$$

**Définition 1.14 (Application intégrable).** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application mesurable, on dit que  $f$  est *intégrable* si

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

dans ce cas on définit l'intégrale de  $f$  sur une partie  $A \subset X$  mesurable comme suit :

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \int_X f^+ \mathbf{1}_A d\mu - \int_X f^- \mathbf{1}_A d\mu$$

Si  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est une application mesurable on dit que  $f$  est *intégrable* si avec la notation  $f = f_1 + if_2, f_1 = \Re(f), f_2 = \Im(f_2)$  on a

$$\int_X |f_1| d\mu < \infty \text{ et } \int_X |f_2| d\mu < \infty$$

on définit l'intégrale de  $f$  sur une partie mesurable  $A \subset X$  comme suit

$$\int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + i \int_A f_2 d\mu$$

**Proposition 1.6 ([Rud87]).** Soit  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  deux application intégrables, alors on a les propriétés suivante :

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  on a  $(\alpha f + \beta g)$  est intégrable de plus

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

2. On a la propriété suivante :  $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$

3. Si  $f$  et  $g$  prennent leur valeur dans  $\mathbb{R}$ , et  $f \leq g$  alors  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

4. Si  $f = g$  presque partout alors  $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$

**Définition 1.15.** Soit  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  un espace mesuré,  $p \in [1, +\infty]$ , on définit l'espace suivant

$$L^p(\mu) := \left\{ [f], f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

avec  $[f] = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : f = g \text{ p.p.}\}$ , ces espaces sont appelés espaces de Lebesgue.

**Proposition 1.7 ([Rud87]).** Soit  $p \in [1, +\infty]$  alors l'espace  $L^p(\mu)$  est un espace de Banach pour la norme  $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, f \in L^p(\mu)$ .

**Théorème 1.3 ([Rud87]).** Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonction intégrable telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\mu < \infty$$

alors la série  $(\sum f_n)_n$  converge absolument pour presque tout  $x \in X$  vers une fonction  $f$  intégrable de plus :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

## 1.2 Introduction a la théorie générale des probabilités

La théorie des probabilités a été formalisée par Kolmogorov dans les années 30, en se basant sur la théorie de la mesure.

**Définition 1.16 (Espaces de probabilité).** une probabilité sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une mesure positive  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

le triplet est appelé **espace de probabilité**, pour des raisons historiques a une terminologie spécifique :

- Une partie  $A \in \mathcal{A}$  s'appelle un **événement**.
- Un point  $\omega \in \Omega$  s'appelle une **observation**, ou une expérience, quand  $\omega \in A$  on dit que  $\omega$  est une réalisation de l'événement  $A$ .
- L'ensemble vide  $\emptyset$  est l'événement impossible, et l'ensemble  $\Omega$  est l'événement certain.
- Si  $A \in \mathcal{A}$  est événement on dit que :
  - $A$  est presque impossible si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
  - $A$  est presque certain ou presque sur si  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- Le terme "presque partout" (pour la mesure  $\mathbb{P}$ ) se traduit par l'expression **presque sur-ement**, abrégé (*p.s.*)

Dans tout ce qui suit on prend  $E$  un espace topologique, on choisira souvent  $E = \mathbb{R}^d$

**Définition 1.17 (Variables aléatoires).** On appelle **variable aléatoire** (abrégé : *v.a*) toute application  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$  qui soit  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(E)$  mesurable, si  $E = \mathbb{R}^d$  on appelle  $X$  un **vecteur aléatoire**.

pour  $d = 1$ , on dit **variable aléatoire réelle** (*v.a.r*)

Dans tout ce qui suit on note pour  $x \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$  la norme Euclidienne du vecteur  $x$ .

**Définition 1.18 (Espérance, Variance, Covariance).** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité on appelle **Espérance** de la v.a.r  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la quantité :

$$E[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

dans le cas où  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  est un vecteur aléatoire on définit l'espérance de  $X$  comme suit :

$$E[X] = \left( \int_{\Omega} X_1 d\mathbb{P}, \int_{\Omega} X_2 d\mathbb{P}, \dots, \int_{\Omega} X_p d\mathbb{P} \right)$$

On appelle la **variance** du vecteur aléatoire  $X$  la quantité :

$$Var[X] = \int_{\Omega} |X - E[X]|^2 dP = E[(X - E[X])^2]$$

On appelle *covariance* de deux variables aléatoires réels  $X, Y$  la quantité :

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

**Proposition 1.8.** *On a la propriété que*

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

**Démonstration** En notant  $m_X = E[X]$  on développe  $Var[X]$  :

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 + (m_X)^2 - 2m_X E[X]] \\ &= E[X^2] + m_X^2 E[\mathbf{1}_{\Omega}] - 2m_X E[X] = E[X^2] + m_X^2 - 2m_X^2 = E[X^2] - m_X^2 \end{aligned}$$

**Définition 1.19 (Loi d'une variable aléatoire).** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et  $X$  une v.a, on appelle **loi ou distribution d'une variable aléatoire**  $X$  la **mesure image** de  $\mathbb{P}$  par  $X$ .

On la note  $\mu_X$ , on dit alors que  $X$  suit la loi  $\mu_X$ , et l'on note  $X \sim \mu_X$ .

Par définition donc on a :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

de plus :  $\mu_X(\mathbb{R}^d) = 1$  donc  $\mu_X$  est une probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ .

On passe maintenant a un théorème important nous permettons de calculer les intégrales de fonction dépendant d'une variable aléatoire  $X$  en ne connaissant que la loi que suit  $X$  :

**Théorème 1.4 (Théorème de transfert, [Kry02]).** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une v.a,  $\mu_X$  la loi de  $X$   
Alors pour une fonction  $\varphi : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  on a la propriété suivante :  $\varphi$  est  $\mu_X$ -intégrable si et seulement si  $\varphi \circ X$  est  $\mathbb{P}$ -intégrable de plus on a la formule

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu_X(dx) = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega)$$

**Remarque 1.8.** On remarque que l'on peut reformuler le théorème précédant en utilisant la fonction  $E$  :

$$E[\varphi \circ X] = E[\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu_X(dx)$$

en particulier pour une v.a.r  $X$  on a :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \mu_X(dx) \text{ et } E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu_X(dx)$$

on a précédemment vu dans la première partie que certain mesure peuvent être défini comme une intégrale d'une certaine fonction (mesurable) positive par rapport a une autre mesure, en supposant que  $\mu_X$  soit une mesure possédant une densité  $f_X$  on peut écrire :

$$\mu_X = f_X \cdot \lambda \implies \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ on a : } \mu_X(B) = \int_B f_X d\lambda$$

Avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue, on dit alors que  $f_X$  est la *densité* la v.a  $X$ , ou que  $X$  est a *densité*  $f$ .

l'expression de  $\mu_X$  peut s'écrire sous la forme suivant :  $d\mu_X = f_X d\lambda$ .

En supposant que  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable on aura l'expression de l'espérance de la v.a  $\varphi(X)$  :

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f_X(x) dx$$

en particulier si on travaille sur  $\mathbb{R}$  :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

**Définition 1.20 (Moment d'ordre  $|\alpha|$ ).** soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une v.a suivant la loi  $\mu_X$ , et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  un multi-indice on dit que  $X$  est a moment d'ordre  $|\alpha|$  si :  $\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \mu_X(dx) < \infty$ , et est a moment absolu d'ordre  $\alpha$  si :  $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\alpha \mu_X(dx) < \infty$  avec la notation  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$  et  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ .

**Définition 1.21 (Fonction de distribution).** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une v.a, pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d), y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note

$$x \leq y \text{ voulant dire : } x_i \leq y_i \forall i = 1, \dots, d$$

avec cette notation on définit la fonction  $F_X : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  comme suit :

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}^d$$

**Remarque 1.9.** Si la v.a  $X$  est a densité  $f_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  on aura alors l'expression de la fonction de distribution de  $X$  comme suit :

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_X(y_1, y_2, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_d$$

On va maintenant s'intéresser a un certain type de variable aléatoire suivant une lois a densité particulière appelé lois Gaussienne :



**Définition 1.22 (Variable Gaussienne).** Soit  $X$  une v.a.r, on dit que  $X$  est **Gaussienne** de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ , (avec  $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ) si  $X$  est a densité  $p_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

et on écrit  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

### 1.2.1 Indépendance

La notion d'indépendance est fondamentale en théorie de probabilité, et c'est ce qui qui la distingue comme entant bien plus qu'une simple modification de la théorie de la mesure.

**Définition 1.23 (Indépendance de v.a).** Les  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a prenant leur valeurs dans les espace mesurables  $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$  respectivement, sont dites indépendante si  $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

ou plus explicitement :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X^{-1}(A_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X^{-1}(A_i))$$

**Définition 1.24 (Indépendance d'événements).** Les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  sont dit indépendant si pour tout  $1 \leq l \leq n$  et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i_l} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{i_l} \mathbb{P}(A_{i_k})$$

**Définition 1.25 (Indépendance de sous tribus).** Soit  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$  des tribus incluse dans la même tribu  $\mathcal{F}$ , on dit que les  $\mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n$  sont indépendantes si pour tout  $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$  on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

**Remarque 1.10.** On peut facilement démontrer que les v.a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si les tribus  $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots, \sigma(X_n)$  sont indépendantes.

**Définition 1.26.** Soit  $X$  une v.a, et  $\mathcal{D}$  une tribu, on dit que  $X$  est indépendante de  $\mathcal{D}$  si les deux tribus  $\sigma(X)$  est  $\mathcal{D}$  sont indépendantes.

**Remarque 1.11.** Il est facile de monter que  $X$  est indépendante de  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $X$  est indépendante de toutes  $\mathcal{D}$ -mesurable v.a  $W$ .

**Théorème 1.5.** Soit  $X, Y$  deux variable Indépendantes aléatoires prenant leur valeur dans  $(E, \mathcal{B}(E))$  et  $(G, \mathcal{B}(G))$  respectivement, soit aussi  $\varphi : (E, \mathcal{B}(E)) \rightarrow (E', \mathcal{B}(E'))$ ,  $\psi : (G, \mathcal{B}(G)) \rightarrow (G', \mathcal{B}(G'))$  deux fonctions mesurables, alors les variables aléatoires  $\varphi(X)$  et  $\psi(Y)$  sont indépendantes.

**Démonstration** Pour  $C' \in \mathcal{B}(E')$ ,  $D' \in \mathcal{B}(G')$  on a  $C = \varphi^{-1}(C') \in \mathcal{B}(E)$  et  $D = \psi^{-1}(D') \in \mathcal{B}(G)$  et donc on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varphi(X) \in C', \psi(Y) \in D') &= \mathbb{P}(X \in C, Y \in D) \\ &= \mathbb{P}(X \in C)\mathbb{P}(Y \in D) \\ &= \mathbb{P}(\varphi(X) \in C')\mathbb{P}(\psi(Y) \in D') \end{aligned}$$

### 1.2.2 Fonction caractéristique

On introduira dans cette bref section une fonction importante dans le domaine des probabilités, la fonction caractéristique associé a un vecteur aléatoire :

**Définition 1.27 (Fonction caractéristique).** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire on définit la fonction  $\varphi_X$  comme suit :

$$\varphi_X(\theta) = E[e^{i\langle \theta, X \rangle}] \quad (\theta \in \mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est le produit scalaire usuelle de } \mathbb{R}^d)$$

qu'on appelle **fonction caractéristique** de  $X$ .

**Remarque 1.12.** Puisque  $|e^{ir}| \leq 1 \forall r \in \mathbb{R}$  alors  $\varphi_X$  existe pour tout vecteur aléatoire  $X$ , de plus par continuité de la fonction exponentielle sur les complexe, on aura par le théorème de convergence dominée : la continuité de  $\varphi_X$ .

**Théorème 1.6 ([Kry94]).** Soit  $\mu, \nu$  des mesure finie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , on suppose de plus que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x \rangle} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x \rangle} \nu(dx)$$

alors :  $\mu = \nu$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , en particulier si  $\mu(dx) = g(x)dx$  et  $\nu(dx) = h(x)dx$  alors  $g = h$  presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Ce dernier théorème est ce qui justifie le nom de fonction "caractéristique" : la loi d'une v.a est déterminé par sa fonction caractéristique.

On passe maintenant a un théorème sur la dérivation de la fonction caractéristique

**Proposition 1.9 ([Kun19]).** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , si le vecteur aléatoire  $X$  suivant la loi  $\mu_X$  a un moment d'ordre  $n = |\alpha|$  avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , alors sa fonction caractéristique  $\varphi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d)$ , de plus pour tout  $j \in \mathbb{N}^d$ ,  $|j| \leq n$  on a

$$\partial^j \varphi_X(\theta) = i^{|j|} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \theta, x \rangle} x^j \mu_X(dx) \quad (1.1)$$

$$\text{avec } \partial^j f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_d^{j_d}} \text{ ou } j = (j_1, j_2, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d \text{ et } |j| = \sum_{k=1}^d j_k$$

**Remarque 1.13.** Si  $X$  est une variable aléatoire réel suivant la loi  $\mu_X$  et admet un moment d'ordre 2 alors :

$$\varphi'_X(0) = iE[X] \text{ et } \varphi''_X(0) = -E[X^2]$$

**Théorème 1.7 ([Kry94]).** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_m$  des vecteurs aléatoires de dimension  $d_1, d_2, \dots, d_m$  respectivement définis sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , alors

$$X_1, X_2, \dots, X_m \text{ sont indépendantes} \iff \forall \theta_j \in \mathbb{R}^{d_j} E[\exp(i \sum_{j=1}^m \langle \theta_j, X_j \rangle)] = \prod_{j=1}^m \varphi_{X_j}(\theta_j)$$

**Remarque 1.14.** Le théorème précédent est équivalent à dire que les vecteurs aléatoires  $X_1, \dots, X_m$  sont indépendants si et seulement si la fonction caractéristique du vecteur  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{R}^{\bar{d}}$  avec  $\bar{d} = \sum_{j=1}^m d_j$  est égale au produit des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires  $X_j$ .

On énoncera certaines propriétés des variables Gaussiennes réelles en utilisant la fonction caractéristique :

**Proposition 1.10.** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable Gaussienne telle que  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ) alors on a

$$\varphi_X(\theta) = \exp(i\theta m - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2) \quad (1.2)$$

et par conséquent :  $E[X] = m$  et  $\text{Var}[X] = \sigma^2$

**Démonstration.** Puisque la v.a.r  $X$  admet comme densité  $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$  on aura :

$$\varphi_X(\theta) = E[e^{i\theta X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} p_X(x) dx = \frac{e^{i\theta m}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

en mettant

$$u(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} u'(\theta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ixe^{i\theta x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (-i\sigma^2) e^{i\theta x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\sigma^2\theta}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= -\sigma^2\theta u(\theta) \end{aligned}$$

donc  $u'(\theta) = -\sigma^2\theta u(\theta) \implies u(\theta) = c.e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$   $c \in \mathbb{R}$  en remarquons que  $u(0) = 1$  on aura  $c = 1$  d'où  $u(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$  et par conséquent :

$$\varphi_X(\theta) = \exp(i\theta m - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

on a donc :

$$\varphi'_X(\theta) = (im - \sigma^2\theta) \exp(i\theta m - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

et aussi :

$$\varphi''_X(\theta) = -\sigma^2 \exp(i\theta m - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2) + (im - \sigma^2\theta)^2 \exp(i\theta m - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

donc d'après la remarque 1.13 on a :

$$\varphi'_X(0) = im \implies E[X] = m$$

et par conséquent

$$\varphi''_X(0) = -\sigma^2 - m^2 \implies E[X^2] - m^2 = \sigma^2 \text{ c.a.d } Var[X] = \sigma^2$$

### 1.2.3 Vecteurs Gaussiens

On a déjà rencontré la notion de variable aléatoire réel Gaussienne, on maintenant définir ce qu'est un vecteur Gaussien, pour cela on va utiliser la fonction caractéristique :

**Définition 1.28 (Vecteur Gaussien).** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur aléatoire, soit  $m \in \mathbb{R}^d$  et  $R$  une  $d \times d$  matrice symétrique définie positive, on dit alors que  $X$  est *normalement distribué* avec les paramètres  $(m, R)$  si

$$\varphi_X(\theta) = \exp(i\langle m, \theta \rangle - \frac{1}{2}\langle R\theta, \theta \rangle)$$

on dira par la suite que le vecteur  $X$  est *Gaussien* et on écrit  $X \sim \mathcal{N}(m, R)$ .

On énoncera un théorème qui porte sur la fonction densité de la loi d'un vecteur Gaussien :

**Théorème 1.8 ([Gal16]).** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur Gaussien telle que  $X \sim \mathcal{N}(m, R)$  alors  $X$  suit une loi  $\mu_X$  a densité  $p$  avec

$$p(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det R)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle R^{-1}(x - m), x - m \rangle\right)$$

On énonce a présent u théorème fondamentale sur les vecteurs Gaussiens

**Théorème 1.9.** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  un vecteur Gaussien,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $v \in \mathbb{R}^k$  et  $Q$  une  $k \times d$ -matrice, alors  $v + QX$  est un vecteur Gaussien de dimension  $k$ .

**Démonstration** On va montrer que la fonction caractéristique de la nouvelle variable aléatoire  $\eta = v + QX$  est de la forme présenté dans 1.28, on a d'une part pour tout  $t \in \mathbb{R}^k$  :

$$E[e^{i\langle \eta, t \rangle}] = E[e^{i\langle v, t \rangle} e^{i\langle QX, t \rangle}] = e^{i\langle v, t \rangle} E[e^{i\langle QX, t \rangle}]$$

En utilisant le fait que pour toute matrice carré  $A$  on a la propriété :  $\langle AU, V \rangle = \langle U, A^*V \rangle$  où  $A^*$  est la matrice transposé de  $A$  et  $U, V$  sont des vecteur du même espace, on aura

$$e^{i\langle v, t \rangle} E[e^{i\langle QX, t \rangle}] = e^{i\langle v, t \rangle} E[e^{i\langle X, Q^*t \rangle}] = e^{i\langle v, t \rangle} \varphi_X(Q^*t) \implies \varphi_\eta(t) = e^{i\langle v, t \rangle} \varphi_X(Q^*t)$$

en supposant que  $X \sim \mathcal{N}(m, R)$  on aura

$$\varphi_\eta(t) = e^{i\langle v, t \rangle} e^{i\langle m, Q^*t \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle RQ^*t, Q^*t \rangle} = e^{i\langle v, t \rangle} e^{i\langle Qm, t \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle QRQ^*, t \rangle} = e^{i\langle v+Qm, t \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle QRQ^*, t \rangle}$$

il est facile de montrer que la matrice  $QRQ^*$  avec  $R$  symétrique définit positive est aussi symétrique définit positive, d'où on a l'existence de  $m' = v + Qm \in \mathbb{R}^k$  et  $R' = QRQ^*$  une  $(k \times k)$ -matrice définit positive, d'où  $\eta$  est un vecteur Gaussien.

On dit alors que toutes transformation affine de vecteur Gaussien et aussi un vecteur Gaussien, on passe maintenant a un théorème concernant la convergence de suite de vecteurs Gaussien.

**Théorème 1.10 ([Kry94]).** Soit  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une suite de vecteurs Gaussiens telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  (p.s) alors  $X$  est aussi un vecteur Gaussien, de plus on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$

Avant d'énoncer le théorème sur la non-corrélation des vecteurs Gaussien, on définit la notion de non-corrélation :

**Définition 1.29 (Non-corrélation).** On dit que deux vecteurs aléatoire  $X, Y$  (possiblement de dimension différente) sont non-corrélés si  $E[|X|^2] < \infty, E[|Y|^2] < \infty$  et  $Cov[X_i Y_j] = 0$  pour tout les  $i, j$  possible.

**Théorème 1.11 (Non corrélation Normale,[Kry94]).** Soit  $d_j \in \mathbb{N}^*$  et  $X_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_j} \quad j = 1, \dots, k$  des vecteurs Gaussien, soit alors  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  un  $\mathbb{R}^d$  vecteur Gaussien avec  $d = \sum_{j=1}^k d_j$  alors

Les vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sont indépendants  $\iff$  Ils sont deux a deux non-corrélés

On passe maintenant au dernier théorème de cette section

**Théorème 1.12 ([Kry94]).** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des vecteurs Gaussiens indépendants (possiblement de dimension déférente). Alors le vecteur  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est aussi un vecteur Gaussien

## 1.2.4 Espérance conditionnel

La notion d'espérance conditionnel joue un rôle important dans la théorie des probabilité, une de ces application les plus importante est son utilisation dans la théorie de martingales qu'on verra dans le prochain chapitre.

**Définition 1.30 (Espérance conditionnel).** Soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$  une tribu  $X, Z$  deux v.a.r, tell que  $Z$  soit  $\mathcal{D}$ -mesurable, on suppose que  $E[|X|] < \infty, E[|Z|] < \infty$ , et que :

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{D}$$

on dit alors que  $Z$  est une *espérance conditionnel* de  $X$  sachant  $\mathcal{D}$ .

On définira l'*espérance conditionnel* de  $X$  sachant  $\mathcal{D}$  comme le classe d'équivalence  $[Z]$  (avec la relation = (p.s.)) et on écrit :

$$E[X|\mathcal{D}] = [Z] \text{ avec : } E[X\mathbb{1}_A] = E[Z\mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{D}$$

**Remarque 1.15.** On associera très souvent la classe d'équivalence  $E[X|\mathcal{D}]$  a un de ces repré-sentant.

**Remarque 1.16.** Si  $A \in \mathcal{F}$  et  $X = \mathbb{1}_A$  on dit que  $E[\mathbb{1}_A|\mathcal{D}]$  est la *probabilité conditionnel* de  $A$  sachant  $\mathcal{D}$  et on écrit :  $E[\mathbb{1}_A|\mathcal{D}] = \mathbb{P}(A|\mathcal{D})$

**Théorème 1.13 (Existence).** Si  $E[|X|] < \infty$  alors  $E[X|\mathcal{D}]$  existe.

**Démonstration.** On considère sur  $(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$  la mesure  $\mu(A) = E[X^+ \mathbf{1}_A]$   $A \in \mathcal{D}$ , on remarque que  $\mu \geq 0$  et que  $\mu(\Omega) < \infty$  de plus  $\mu \ll \mathbb{P}$  alors d'après le théorème de Radon-Nikodým il existe une fonction  $\mathcal{D}$ -mesurable  $Z_1 \geq 0$  telle que :  $E[X^+ \mathbf{1}_A] = E[Z_1 \mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{D}$

Le même raisonnement se fera sur  $X_-$  pour trouver l'existence d'une fonction  $Z_2$   $\mathcal{D}$ -mesurable telle que :  $E[X^- \mathbf{1}_A] = E[Z_2 \mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{D}$

On aura donc  $\exists Z = Z_1 - Z_2$  une fonction  $\mathcal{D}$ -mesurable telle que :

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Z d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{D}$$

**Théorème 1.14 (Unicité).** Si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des espérances conditionnelles ( $Z_1, Z_2 \in E[X|\mathcal{D}]$ ) alors  $Z_1 = Z_2$  (p.s.)

**Démonstration.** Par définition de l'espérance conditionnel on a pour tout  $A \in \mathcal{D}$  :

$$E[Z_1 \mathbf{1}_A] = E[Z_2 \mathbf{1}_A] \implies E[(Z_1 - Z_2) \mathbf{1}_A] = 0$$

Puisque  $Z_1 - Z_2$  est  $\mathcal{D}$ -mesurable alors on peut prendre  $A = \{\omega \in \Omega : (Z_1 - Z_2)(\omega) > 0\}$  on aura alors  $\mathbb{P}(A) = 0$  d'où  $Z_1 \leq Z_2$  (p.s.), de la même manière on montre que  $Z_2 \leq Z_1$  (p.s.).

**Proposition 1.11** ([Kry02]). Soit  $X$  une v.a.r telle que  $E[|X|] < \infty$  alors on a :

1. Pour tout constance  $c$  on a  $E[cX|\mathcal{D}] = cE[X|\mathcal{D}]$  (p.s.)
2. On a  $E[E[X|\mathcal{D}]] = E[X]$ .
3. Si  $E[|X_1|], E[|X_2|] < \infty$  alors  $E[X_1 + X_2|\mathcal{D}] = E[X_1|\mathcal{D}] + E[X_2|\mathcal{D}]$  (p.s.)
4. Si  $X$  est  $\mathcal{D}$ -mesurable alors  $E[X|\mathcal{D}] = X$  (p.s.)
5. Si  $X$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{D}$  alors  $E[X|\mathcal{D}] = E[X]$
6. Si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$  est une tribu alors :

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[E[X|\mathcal{D}]] = E[X] \quad (\text{p.s.})$$

Nous allons énoncer maintenant des propriétés de l'espérance conditionnel pourtant sur des inégalités et des limites analogue a celle trouvée en théorie de l'intégration classique.

**Proposition 1.12** ([Kry02]). 1. Si  $E[|X_1|], E[|X_2|] < \infty$  et  $X_1 \leq X_2$  (p.s.) alors  $E[X_1|\mathcal{D}] \leq E[X_2|\mathcal{D}]$  (p.s.)

2. (Théorème de convergence monotone) Si  $E[|X|] < \infty$  et  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r telle que  $E[|X_n|] < \infty$ ,  $X_n \leq X_{n+1}$  (p.s.)  $\forall n \in \mathbb{N}$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  (p.s.) alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n | \mathcal{D}] = E[X | \mathcal{D}] \quad (\text{p.s.})$$

3. (Théorème de Fatou) Si  $X_n \geq 0$ ,  $E[X_n] < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty$  alors :

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{D}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n | \mathcal{D}] \quad (\text{p.s.})$$

4. (Théorème de convergence dominée) Si  $|X_n| \leq Z \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $E[Z] < \infty$  et on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n | \mathcal{D}] = E[X | \mathcal{D}] \quad (\text{p.s.})$$

5. (Inégalité de Jensen) Si  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, et  $E[|X|] + E[|\Phi(X)|] < \infty$  alors :

$$\Phi(E[X | \mathcal{D}]) \leq E[\Phi(X) | \mathcal{D}] \quad (\text{p.s.})$$



# Chapitre 2

## Calcul Stochastique

Dans ce chapitre on va définir la notion importante de processus stochastique, ensuite on introduit les temps d'arrêts et les différentes propriétés de ces derniers, ensuite on introduit la notion de martingales, puis la variation quadratique des martingales, après on donne une construction du processus de Wiener et pour finir on introduit les champs aléatoires stochastiques.

### 2.1 Processus Stochastiques

Un processus stochastique est un objet mathématique qui sert à modéliser l'évolution d'un phénomène aléatoire à travers le temps, on commence donc à donner sa définition :

**Définition 2.1 (Processus Stochastiques).** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable, et  $I$  une famille d'indices quelconque, un processus stochastique (indexé par  $I$ )  $(X_t)_{t \in I}$  est une famille de v.a qui prennent leur valeurs sur  $E$ . plus explicitement :

$$(X_t)_{t \in I} = \{X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E}) : X_t \text{ est } \mathcal{F} - \mathcal{E} \text{ mesurable } \forall t \in I\}$$

le plus souvent on prend  $I = \mathbb{R}_+$  ou un autre intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

**Définition 2.2 (Trajectoires d'un processus stochastique).** Soit  $I \subset \mathbb{R}_+$  un intervalle, et  $X = (X_t)_{t \in I}$  un processus stochastique, les trajectoires de  $X$  sont les applications  $t \mapsto X_t(\omega)$  obtenu en fixant  $\omega$ . Les trajectoires constituent donc une famille indexée par  $\omega \in \Omega$  d'applications de  $I$  dans  $E$ , on dira par la suite que  $X$  est **continu** si les applications  $t \mapsto \gamma_\omega(t) = X_t(\omega)$  sont continues pour tout  $\omega \in \Omega$ .

**Remarque 2.1.** Les notions de continuité à droite et de continuité (p.s.) se définissent de la même manière en considérant les trajectoires de processus stochastiques.

On s'intéressera par la suite aux trajectoires continue, mais avant cela commençant par certains définitions :

**Définition 2.3 (Modification).** Soit  $X = (X)_{t \in T}$  et  $\tilde{X} = (\tilde{X})_{t \in T}$  deux processus stochastiques, on dit que  $\tilde{X}$  est une modification de  $X$  si :

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$$

**Définition 2.4 (Indistinguabilité).** les deux processus  $X$  et  $\tilde{X}$  sont dit indistinguables si il existe un sous ensemble négligeable  $N \subset \Omega$  :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N \quad \forall t \in T \quad X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$$

ou bien d'une manière un peut différente :  $X$  et  $\tilde{X}$  sont indistinguables si :

$$\mathbb{P}(\forall t \in T, X_t = \tilde{X}_t) = 1$$

Deux processus indistinguables sont nécessairement des modification de l'un de l'autre, mais l'inverse n'est pas toujours vrai, en effet si on prend par exemple :  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), dx)$

$$X_t(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{X}_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(t)$$

il est clair que  $\tilde{X}$  est une modification de  $X$  car  $\{X_t \neq \tilde{X}_t\} = \{t\}$  mais les deux processus ne sont pas indistinguables, car  $\{\omega, X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega), \forall t\} = \emptyset$

**Définition 2.5 (Processus Gaussien).** Un processus stochastique  $X_t, t \geq 0$  est dit Gaussien si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  le vecteur  $\Gamma = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur Gaussien.

On peut se poser des question de mesurabilité sur un processus  $X$ , ces prochaine définitions abordent ce sujet :

**Définition 2.6 (Filtration).** Une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est une collections  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de tribus telle que :  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall t \in [0, +\infty[$  et  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  pour tout  $s \leq t$ , on définit  $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$  on aura par la suite pour tout  $s \leq t$  :

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$$

on dit alors que  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  est un espace de probabilité *filtré*.

**Définition 2.7 (Filtration Canonique, Filtration complète).** Si  $X$  est un processus stochastique indexée sur  $\mathbb{R}_+$  la *filtration canonique* de  $X$  est défini comme  $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ , on va aussi définir certaine tribus d'intérêt :  $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s\right)$  et  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ , on dit alors que :

- $(\mathcal{F}_t)$  est *continue a droite* si  $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$
- $(\mathcal{F}_t)$  est *continue a gauche* si  $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$

Pour  $(\mathcal{F})_t$  une filtration, et soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des partie négligeable de  $(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ , la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  est dite *complète* si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ .

**Définition 2.8.** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique, la tribu suivant

$$\mathcal{F}^X = \sigma(X_t, t \geq 0)$$

est appelé *historique globale* du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

**Définition 2.9 (Indépendance des processus stochastique).** On dit que les deux processus stochastiques  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$  respectivement, sont indépendants si les tribus  $\mathcal{F}^X$  et  $\mathcal{F}^Y$  son indépendantes.

**Définition 2.10 (Filtration admissible).** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique, une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est dite admissible si

- (a).  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$  pour tout  $t \geq 0$ .
- (b). pour tout  $0 \leq s \leq t$  le processus  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_t$  dans le sens ou pour tout  $0 \leq s \leq t$  les tribus  $\mathcal{G}_t = \sigma(X_t - X_r, 0 \leq s \leq r)$  et  $\mathcal{F}_s$  sont indépendantes.

**Définition 2.11 (Processus mesurable).** On dit que que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est **adapté** si pour tout  $t \geq 0$   $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Le processus stochastique  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est dit *mesurable* si l'application :

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

est mesurable.

On dit que  $X$  est *progressif* ou bien *progressivement mesurable* par rapport a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  si pour tout  $t \geq 0$  l'application :

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

est mesurable.

**Remarque 2.2.** Si un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  est adapté a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  alors pour tous  $s \leq t$  on a  $X_s$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable car  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , par conséquent  $\mathcal{F}_t$  contient nécessairement  $\sigma(X_s, s \leq t) = \mathcal{F}_t^X$  c.a.d :  $\forall t \in \mathbb{R}_+ \mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ .

**Proposition 2.1 ([Mey66]).** Soit  $X$  un processus stochastique, si  $X$  est mesurable et adapté a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  alors  $X$  a une modification progressivement mesurable.

**Proposition 2.2.** Soit  $X$  un processus stochastique a valeurs dans un espace métrique  $(E, \mathcal{B}(E))$ , on suppose que  $X$  est adapté a une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et a trajectoires continue a droite (resp a gauche) alors  $X$  est progressive.

**Démonstration.** Fixons  $t > 0$ , pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $s \in [0, t]$  définissons une variable aléatoire  $X_s^n$  en posant :

$$X_s^n(\omega) = \begin{cases} X_{\frac{kt}{n}}(\omega) & \text{si } \frac{(k-1)t}{n} \leq s < \frac{kt}{n}, k \in \{1, \dots, n\} \\ X_t(\omega) & \text{si } s = t \end{cases}$$

la continuité a droite des trajectoires assure que pour tout  $s \in [0, t]$  et  $\omega \in \Omega$  :

$$X_s(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_s^n(\omega)$$

Pour  $A \in \mathcal{B}(E)$  on a :

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A\} = (\{t\} \times \{X_t \in A\}) \cup \left( \bigcup_{k=1}^n \left( \left[ \frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n} \right] \times \{X_{\frac{kt}{n}} \in A\} \right) \right)$$

qui est dans la tribu  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ , donc  $\forall n \geq 1$ , l'application  $(s, \omega) \mapsto X_s^n(\omega)$  est mesurable pour la tribu  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ , puisque  $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$  est la limite simple de la suite d'application  $(X_s^n(\omega))_n$ , cette applications est aussi mesurable pour  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ , d'où  $X$  est un processus progressif.

On passe a la définition d'une classe de processus important, celle des processus simples :

**Définition 2.12 (Processus simple sur  $\mathbb{R}_+$ ).** Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de réels positive, telle que  $t_0 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ , soit aussi  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires telle que  $\exists C > 0 : \forall \omega \in \Omega \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n(\omega)| \leq C$ , on suppose aussi que  $\forall n \in \mathbb{N} \xi_n$  est  $\mathcal{F}_{t_n}$ -mesurable, on dit que le processus  $X_t$  est *simple* si il est écrit sous la forme

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \quad t \geq 0, \omega \in \Omega$$

**Lemme 2.1 ([Ioa91]).** Soit  $X$  un processus bornée ( $\exists l > 0 \forall \omega \in \Omega \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |X_t(\omega)| \leq l$ ), mesurable et  $(\mathcal{F}_t)_t$ -adapté, alors il existe une suite  $(X^{(n)})_n$  de processus simple telle que :

$$\sup_{\alpha > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^\alpha |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt \right] = 0$$

## 2.2 Temps d'arrêt

**Définition 2.13 (Temps aléatoire).** Une application  $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  est un temps aléatoire si  $T$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable.

**Définition 2.14.** Soit  $X$  un processus stochastique, et  $T$  un temps aléatoire, on définit la fonction  $X_T$  sur  $\{T < \infty\}$  par :

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) \quad , \omega \in \Omega$$

on s'intéressera maintenant a un type très important de temps aléatoire , les temps d'arrêt :

**Définition 2.15 (Temps d'arrêt).** un temps aléatoire  $T$  est un *temps d'arrêt* pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  si pour tout  $t \geq 0$ ,  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

**Définition 2.16 (Temps optionnel).** Un temps aléatoire  $\tau$  est un *temps optionnel* pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  si  $\forall t \geq 0 \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ .

on remarque que  $\{T = \infty\} = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq n\} \right)^c \in \mathcal{F}_\infty$

**Proposition 2.3.** *Tout temps d'arrêt est optionnel et les concepts coïncides si la filtration en question est continue a droite.*

**Démonstration.** Soit  $T$  un temps d'arrêt on a alors pour  $t \geq 0$  :  $\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t - \frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ , d'où  $T$  est un temps optionnel.

pour le deuxième point on suppose que  $T$  est optionnel pour la filtration continue a droite  $(\mathcal{F}_t)_t$ , on a  $\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{T < t + \varepsilon\}$ , donc  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$  d'où  $\{T \leq t\} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \quad \forall t \geq 0$  qui se traduit par :  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$

**Lemme 2.2.** *Si  $\tau$  est un temps optionnel et  $C$  une constante positive, alors  $\tau + C$  est un temps d'arrêt.*

**Démonstration** Si  $0 \leq t < C$  alors  $\{\tau + C \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ , si  $t \geq C$  alors :

$$\{\tau + C \leq t\} = \{\tau \leq t - C\} \in \mathcal{F}_{(t-C)^+} \subset \mathcal{F}_t$$

**Lemme 2.3.** Si  $T, S$  sont des temps d'arrêt, alors  $T \wedge S = \min(T, S)$ ,  $T \vee S = \max(T, S)$  et  $T + S$  sont aussi des temps d'arrêt.

**Démonstration** On a d'un coté, pour  $t \geq 0$  :

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

pour la troisième assertion on utilise le fait que temps aléatoire égale a une constante positive est un temps d'arrêt donc pour  $t = 0$  on aura :  $\{T + S \leq 0\} = \{T = 0\} \cap \{S = 0\} \in \mathcal{F}_0$

pour  $t > 0$  on a :

$$\{T + S > t\} = (\{T = 0\} \cap \{S > t\}) \cup (\{T > t\} \cap \{S = 0\}) \cup (\{T \geq t\} \cap \{S > 0\}) \cup (\{0 < T < t\} \cap \{T + S > t\})$$

les trois premier événements a droite sont dans  $\mathcal{F}_t$ , pour le quatrième nous avons pour  $t > 0$  :

$$(\{0 < T < t\} \cap \{T + S > t\}) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+, 0 < r < t} (\{r < T < t\} \cap \{S > t - r\})$$

nous avons a droite de l'égalité une réunion dénombrable d'événement qui appartiennent a  $\mathcal{F}_t$  donc l'événement a gauche lui aussi est dans  $\mathcal{F}_t$ .

**Définition 2.17 (Tribu associé a un temps d'arrêt).** Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  on définit la tribu *du passé avant  $T$*  comme suit :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

**Lemme 2.4.** Soit  $T, S$  deux temps d'arrêt, alors pour tout  $A \in \mathcal{F}_S$  on a :  $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$ , en particulier si  $S \leq T$  alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

**Démonstration** On a pour tout  $t \geq 0$  les applications  $T \wedge t$  et  $S \wedge t$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, de plus pour tout  $A \in \mathcal{F}_S$  on a :

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}$$

les événements a droite sont dans  $\mathcal{F}_t$ .

**Lemme 2.5.** Soit  $T, S$  des temps d'arrêt, alors  $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ , de plus chacun des événement :

$$\{T < S\}, \{S < T\}, \{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{S = T\}$$

sont tous dans  $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ .

**Démonstration** On a d'après la lemme précédente que  $\mathcal{F}_{T \wedge S} \subset \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ , on va montrer l'autre inclusion, soit  $A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$  on observe que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} A \cap \{S \wedge T \leq t\} &= A \cap (\{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}) \\ &= (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

d'où  $A \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$ .

pour les événement on a pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t \\ \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} &= \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

on obtiendra donc  $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$  en permutant  $S$  et  $T$  dans les égalités plus haut nous aurons  $\{T \leq S\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$  et par conséquent aussi  $\{S > T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ ,  $\{T > S\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$  et  $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $T$  un temps d'arrêt, alors on peut définir une suite de temps d'arrêt  $T_n$  qui est décroissante et convergente simplement vers  $T$

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on prend :

$$T_n = \begin{cases} \frac{m+1}{2^n} & \text{si } \frac{m}{2^n} < T \leq \frac{m+1}{2^n} \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \infty & \text{si } T = \infty \end{cases}$$

Par suite on aura pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$T_n(\omega) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{2^n} \mathbb{1}_{D_m}(\omega) + \infty \cdot \mathbb{1}_{\infty} \quad \text{avec } D_m = \{\omega : \frac{m}{2^n} < T \leq \frac{m+1}{2^n}\}$$

on vérifiera que  $(T_n)_n$  est bien une suite décroissante de temps d'arrêt qui converge simplement vers  $T$ .

**Proposition 2.4 (Processus arrêté).** Soit  $X$  un processus mesurable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  et  $T$  un temps d'arrêt pour la même filtration, alors la variable aléatoire  $X_T$  définit sur  $\{T < +\infty\}$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, et le processus  $X_{T \wedge t}$  est progressivement mesurable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$ .

**Démonstration.** Pour montrer que  $X_T$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, on doit montrer que pour tout  $B \in \mathcal{B}(E)$  et  $t \geq 0$   $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  mais on a  $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T \wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\}$ , donc il suffira de prouver que le processus  $X_T$  est progressivement mesurable.

Pour cela on observe que  $f : (s, \omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega) : ([0, t] \times \Omega) \rightarrow [0, t] \times \Omega$  est  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable, et par hypothèse, l'application

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

est mesurable, alors la composée avec  $f$  est aussi mesurable :

$$(s, \omega) \mapsto X_{T(\omega) \wedge s}(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E)).$$

d'où le résultat.

## 2.3 Martingales

Dans cette partie on donnera une idée générale sur la notion de martingales qui ont été introduit en 1939 par J.Ville.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilité,  $I \subset \mathbb{R}_+$ , et Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  une filtration sur  $\mathcal{F}$ , si  $X = (X_t)_{t \in I}$  est un processus stochastique, on notera par  $X = ((X_t)_{t \in I}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  le processus stochastique adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ .

**Définition 2.18 (Martingale).** Soit  $M = ((M_t)_{t \in I}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  un processus stochastique réel càdlàg, on dit que  $M$  est une :

- *martingale* si  $\forall t \in I : E[|M_t|] < \infty$  et  $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \forall s \leq t$
- *sur-martingale* si  $\forall t \in I : E[|M_t|] < \infty$  et  $E[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s \forall s \leq t$
- *sous-martingale* si  $\forall t \in I : E[|M_t|] < \infty$  et  $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s \forall s \leq t$

**Proposition 2.5.** L'ensemble des martingale sur  $I$  adapté à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  forme un  $\mathbb{R}$  espace vectorielle.



**Démonstration** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\{M_t, t \in I\}, \{N_t, t \in I\}$  deux martingale adapté a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  on a pour tout  $s \leq t$

$$E[aM_t + bN_t | \mathcal{F}_s] = aE[M_t | \mathcal{F}_s] + bE[N_t | \mathcal{F}_s] = aM_s + bN_s$$

de plus du fait que  $L^1$  soit lui même un espace vectorielle alors  $\forall t \in I$  on a  $E[|aM_t + bN_t|] < \infty$ .

On commence par traiter le cas discret  $I = \mathbb{N}^*$  :

**Proposition 2.6** ([Kun19]). *Soit  $X = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  une martingale, et  $T, S$  des temps d'arrêt alors :*

1. *Le processus arrêtee  $\{Y_n = X_{T \wedge n}, n \in \mathbb{N}^*\}$  est aussi un martingale.*
2. *On a  $E[X_{n \wedge T} | \mathcal{F}_S] = X_{n \wedge T \wedge S}$  (p.s.) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

**Proposition 2.7.** *Soit  $X = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  une martingale et  $N \in \mathbb{N}^*$  alors pour tout  $\alpha > 0$  :*

$$\alpha \mathbb{P}(A_\alpha) \leq \int_{A_\alpha} |X_N| d\mathbb{P} \quad \text{avec } A_\alpha = \{\omega : \sup_{n \leq N} |X_n(\omega)| > \alpha\}$$

**Démonstration.** Pour  $\alpha > 0$  donné on prend :  $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : |X_n| > \alpha\}$  (avec la convention  $\inf\{\dots\} = \infty$  si  $\{\dots\} = \emptyset$ ), alors  $T$  est un temps d'arrêt, en effet on a  $\{T \leq k\} = \bigcup_{i \leq k} \{|X_i| > \alpha\} \in \mathcal{F}_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors par la proposition précédente , on a  $E[|X_N| | \mathcal{F}_T] \geq |X_{N \wedge T}|$  d'où :

$$\alpha \mathbb{P}(T \leq N) \leq \int_{T \leq N} |X_{N \wedge T}| d\mathbb{P} \leq \int_{T \leq N} |X_N| d\mathbb{P}$$

Puisque  $\{T \leq N\} = A_\alpha$ , on aura l'inégalité voulue.

**Proposition 2.8 (Inégalité de Doob-version discrète).** *Soit  $X = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  une  $L^p$ - martingale avec  $p > 1$ , en prenant  $q = \frac{p}{p-1}$  alors on a :*

$$E[\sup_{n \leq N} |X_n|^p] \leq q^p E[|X_N|^p] \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

**Démonstration.** On prend  $Y = \sup_{n \leq N} |X_n|$  et  $F(\lambda) = \mathbb{P}(Y > \lambda)$  alors on a :

$$E[Y^p] = - \int_0^{+\infty} \lambda^p dF(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(\lambda) d(\lambda^p) - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^p F(\lambda) \Big|_0^\lambda \leq \int_0^{+\infty} F(\lambda) d(\lambda^p)$$

Puisque  $\lambda \mathbb{P}(Y > \lambda) \leq \int_{\{Y > \lambda\}} |X_N| d\mathbb{P}$  alors par la proposition précédente on a :

$$\begin{aligned}
 E[Y^p] &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \left( \int_{\{Y>\lambda\}} |X_N| d\mathbb{P} \right) d(\lambda^p) = \int |X_N| \left( \int_0^Y \frac{1}{\lambda} d(\lambda^p) \right) d\mathbb{P} \\
 &\leq \frac{p}{p-1} \int |X_N| Y^{p-1} d\mathbb{P} \leq q E[|X_N|^p]^{\frac{1}{p}} E[Y^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq q E[|X_N|^p]^{\frac{1}{p}} E[Y^p]^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

En divisant par  $E[Y^p]^{\frac{1}{q}}$  des deux coté nous aurons :

$$E[Y^p]^{1-\frac{1}{q}} \leq q E[|X_N|^p]^{\frac{1}{p}}$$

et puisque  $q = \frac{p}{p-1}$  on aura  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ , d'où résultat voulu.

On va passer maintenant au cas continu (i.e.  $I \subseteq \mathbb{R}_+$  est un intervalle) et montrer des résultats analogues a ceux présenté précédemment, les démonstrations du cas continue reposent en grande partie sur les propriétés des martingales sur  $\mathbb{N}^*$

**Théorème 2.2 ([Kun19]).** Soit  $X = ((X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  une martingale alors nous avons les propriétés suivantes :

1. Si  $T$  est un temps d'arrêt pour  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  alors le processus arrêté  $\{Y_t = X_{t \wedge T}, t \in \mathbb{R}_+\}$  est aussi une martingale.
2. Si  $T, S$  sont deux temps d'arrêt alors on a :  $\forall t \in \mathbb{R}_+ E[X_{t \wedge S} | \mathcal{F}_T] = X_{t \wedge T \wedge S}$  (p.s.).

**Théorème 2.3 (Inégalité de Doob).** Soit  $X$  est une  $L^p$ -martingale continue avec  $p > 1$  alors en prenant  $q = \frac{p}{p-1}$  alors on a :

$$E[\sup_{0 \leq r \leq t} |X_r|^p] \leq q^p E[|X_t|^p] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \tag{2.1}$$

**Démonstration.** On fixe  $t > 0$  et considère un ensemble  $D$  dénombrable dense de  $\mathbb{R}_+$  telle que  $0 \in D$  et  $t \in D$  (par exemple  $\mathbb{Q}_+ \cup \{t\}$ ) alors on a :  $D \cap [0, t] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} D_m$ , avec  $D_m = \{t_0^m, t_1^m, \dots, t_m^m\}$  avec :  $0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_m^m = t$ , en appliquant l'inégalité de Doob dans le cas discret (Proposition 2.8) on obtiendra :

$$E[\sup_{s \in D_m} |X_s|^p] \leq q^p E[|X_t|^p] \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{2.2}$$

En effet : si on prend  $X_{t_n^m} = Y_n, n \in \{1, 2, \dots, m\}$  nous aurons alors  $\sup_{s \in D_m} |X_s|^p = \sup_{n \leq m} |Y_n|^p$  avec  $Y_m = X_t$ , on remarque ensuite que la suite d'applications mesurables  $Z_m = \sup_{n \leq m} |Y_n|^p$  qui

est positive et croissante, en appliquant le théorème de convergence monotone a  $(Z_m)_m$  nous aurons :

$$E\left[\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s|^p\right] \leq q^p E[|X_t|^p] \quad (2.3)$$

et puisque la continuité a droite des trajectoires et le fait que  $t \in D$  nous aurons

$$\sup_{s \in D \cap [0, t]} |X_s| = \sup_{s \in [0, t]} |X_s|$$

d'où le résultat souhaité.

**Définition 2.19 (Martingale locale).** Si  $X = ((X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  un processus càdlàg, on dit que  $X$  est une *martingale locale* (resp une  $L^p$  *martingale locale*) si il existe une suite *croissante*  $(T_n)_n$  de temps d'arrêts telle que :

1.  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{T_n < \varepsilon\}) = 0$  et
2. Chaque processus arrêté  $\{X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}, t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$  est une martingales (resp une  $L^p$  martingale)

**Remarque 2.3.** D'après le théorème précédent, on déduit que tout martingale (resp  $L^p$ -martingale) est une martingale locale (resp  $L^p$ -martingale locale) .

**Proposition 2.9.** *L'ensemble des martingales locale adapté a une filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectorielle.*

**Démonstration** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}, \{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  deux martingales locales on a alors l'existence de deux suite de temps d'arrêt croissante  $(T_n^{(1)})_n, (T_n^{(2)})_n$  telle que  $\{X_{t \wedge T_n^{(1)}}, t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{Y_{t \wedge T_n^{(2)}}, t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$  soit des martingales avec  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{T_n^{(i)} < \varepsilon\}) = 0 \quad i = 1, 2$  en notant  $Z_t = aX_t + bY_t, t \in \mathbb{R}_+$  nous allons montrer qu'il existe une suite de temps d'arrêt  $(S_n)_n$  telle que  $Z_{t \wedge S_n}, t \in \mathbb{R}$  soit une martingale, et  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{S_n < \varepsilon\}) = 0$ , il suffit de prendre  $S_n = T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}$ , en effet nous aurons  $Z_{t \wedge S_n} = aX_{(t \wedge T_n^{(1)}) \wedge T_n^{(2)}} + bY_{(t \wedge T_n^{(2)}) \wedge T_n^{(1)}}$  en utilisant 2.5 et 2.2 nous obtiendrons que  $Z_{t \wedge S_n}, t \in \mathbb{R}_+$  est une martingale, de plus du fait que  $\{S_n < \varepsilon\} \subset \{T_n^{(1)} < \varepsilon\} \cup \{T_n^{(2)} < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ , nous aurons  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{S_n < \varepsilon\}) = 0$ , d'où le résultat.

**Définition 2.20 (Variation bornée).** Soit  $c > 0, f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et  $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c\}$  une partition de  $[0, c]$  on définit la *variation* de  $f$  sur  $\Pi$  comme la quantité :

$$V_f(\Pi, [0, c]) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

Si on note par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des partitions de  $[0, c]$  alors on dit que  $f$  est a *variation bornée* sur  $[0, c]$  si :

$$\sup_{\Pi \in \mathcal{P}} V_f(\Pi, [0, c]) < +\infty$$

Par la suite pour une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  on dira qu'elle est a variation bornée sur  $\mathbb{R}$  si elle est a variation bornée sur tout intervalle de la forme  $[0, c], c > 0$

**Théorème 2.4.** [Bar76] Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors on :

$$f \text{ est a variation bornée} \iff \exists f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ monotones croissantes} : f = f_1 - f_2,$$

On passe maintenant la la définition d'une classe très importantes de martingales, celle des semi-martingales sur les quelles se base la théorie de l'intégration stochastique.

**Définition 2.21 (Processus croissant).** Soit  $A = ((A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  un processus càdlàg, on dit que :

1.  $A$  est un *processus croissant* si  $t \mapsto A_t$  est croissante (p.s.) est  $A_0 = 0$  (p.s.).
2.  $A$  est a *variation bornée* si  $\{A_t = A_t^1 - A_t^2, t \in \mathbb{R}_+\}$  avec  $A^1, A^2$  des processus croissants.

Si de plus le processus  $A$  est continue on dit que  $A$  est un *processus croissant continue*, (respectivement *processus a variation bornée continue* si le  $A^1, A^2$  sont continues).

**Définition 2.22 (Semi-martingale).** Soit  $M = ((M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  une martingale locale, et  $A = ((A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  un processus continue a variation bornée, si  $\{X_t = M_t + A_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  alors le presseuse  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est appelé *semi-martingale*.

Si de plus le processus  $M = (M_t)_t$  est continue alors  $X = (X_t)_t$  est dit *semi-martingale continue*.

**Remarque 2.4.** En utilisant toujours les notations de la définition précédente, si  $\{X_t = M_t + A_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ , est une semi-martingale, on appelle la martingale locale  $M$  la *partie martingale* de  $X$ .

### 2.3.1 Quelques propriétés topologique

Pour tout ce qui suit on travaille sur un intervalle  $I = [0, \alpha]$ , les notion se filtration et de temps d'arrêt se définissent de la même manière que dans le cas de  $\mathbb{R}_+$ .

On s'intéresse maintenant aux aspects topologiques des certains espaces et les relations entre eux, ces propriétés nous serons utiles par la suite :

On définit l'espace vectorielle suivant :

$$\mathcal{L}_c = \{X_t : X_t \text{ un processus stochastique réel } (\mathcal{F}_t)_t\text{-adapté continue} \}$$

On introduit la distance suivante sur  $\mathcal{L}_c$  : pour  $X, Y \in \mathcal{L}_c$  on prend  $\rho(X, Y) = E \left[ \frac{\sup_t |X_t - Y_t|^2}{1 + \sup_t |X_t - Y_t|^2} \right]^{\frac{1}{2}}$  la topologie induite par cette distance est équivalente a la topologie de la convergence uniforme en probabilité :

$$\text{Une suite } (X_t^{(n)})_n \text{ de } \mathcal{L}_c \text{ est de Cauchy} \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_t |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| > \varepsilon) = 0$$

On introduit une norme sur l'espace  $\mathcal{L}_c$  défini comme :  $\|X\| = E[\sup_t |X_t|^2]^{\frac{1}{2}}$  et par suite on définit un sous espace vectorielle de  $\mathcal{L}_c$  :

$$\mathcal{L}_c^2 = \{X \in \mathcal{L}_c : \|X\| < \infty\}$$

On dit que la topologie de  $\mathcal{L}_c^2$  est celle de la convergence uniforme dans  $L^2$ , puisque  $\rho(X) \leq \|X\|$  on peut montrer que l'espace  $\mathcal{L}_c^2$  est *dense* dans  $\mathcal{L}_c$ .

On définit l'espace vectorielle suivant :

$$\mathcal{M}_c = \{M_t : M_t \text{ est une } L^2\text{-martingales continue avec } M_0 = 0\}$$

on remarque en utilisant l'inégalité de Doob que  $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{L}_c^2$ .

On introduit un autre sous espace vectorielle de  $\mathcal{L}_c$  :

$$\mathcal{M}_c^{loc} = \{M_t : M_t \text{ est une martingale locale continue avec } M_0 = 0\}$$

On donnera un théorème qui regroupe les propriétés topologiques de ses espaces :

**Théorème 2.5 ([Kun97]).**  $\mathcal{M}_c$  est fermé dans  $(\mathcal{L}_c^2, \|\cdot\|)$ ,  $\mathcal{M}_c^{loc}$  est un fermé de  $(\mathcal{L}_c, \rho)$ , de plus  $\mathcal{M}_c$  est dense dans  $\mathcal{M}_c^{loc}$ .

On donne maintenant certaines définition de convergence

**Définition 2.23.** Soit  $(X_t^{(n)})_n, t \in I$  une suite de processus réels  $\mathcal{F}_t$ -adapté on dit que

1.  $(X_t^{(n)})_n$  converge uniformément en  $t$  en probabilité vers un processus  $X_t$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_{t \in I} |X_t^{(n)} - X_t| > \varepsilon) = 0$$

2.  $(X_t^{(n)})_n$  converge uniformément en  $t$  en norme  $L^2$  vers un processus  $X_t$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sup_{t \in I} |X_t^{(n)} - X_t|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

## 2.4 Variation quadratique

Dans cette section on travaillera sur les semi-martingales définies sur un intervalle  $I = [0, \alpha]$  de  $\mathbb{R}_+$ , les notions de filtration et de temps d'arrêt se définissent de la même manière comme dans le cas de  $I = \mathbb{R}_+$ , dans tout ce qui suit on utilisera la notation  $\{X_t, t \in I\}$  se référant aux processus stochastiques  $X = ((X_t)_{t \in I}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ , avec  $I = [0, \alpha]$ .

On commence par la définition de la variation quadratique d'un processus càdlàg  $X = (X_t)$  :

**Définition 2.24 (Variation quadratique).** Soit  $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \alpha\}$  une partition de  $I = [0, \alpha]$  et soit la quantité  $|\Pi| = \max_{0 \leq m \leq n} |t_m - t_{m-1}|$ .

On appelle la variation quadratique du processus  $\{X_t, t \in I\}$  associée à la partition  $\Pi$  la famille :

$$\langle X \rangle_t^\Pi = \sum_{m=1}^n (X_{t \wedge t_m} - X_{t \wedge t_{m-1}})^2, t \in I \quad (2.4)$$

On s'intéresse par la suite à la limite de variation quadratique  $\langle X \rangle_t^\Pi$  quand  $|\Pi| \rightarrow 0$ , si la convergence a lieu uniformément en  $t$  en probabilité vers un processus stochastique, sa limite noté par  $\langle X \rangle_t, t \in I$  est appelé la *variation quadratique* de  $\{X_t, t \in I\}$ .

On va montrer par la suite que si  $\{X_t, t \in I\}$  est une semi-martingale continue, la variation quadratique existe.

**Proposition 2.10 ([Kun19]).** Soit  $\{X_t, t \in I\}$  est une  $L^2$ -martingale, alors

1.  $E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E[X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s]$  pour tout  $0 \leq s < t \leq \alpha$
2.  $E[(X_v - X_u)(X_t - X_s) | \mathcal{F}_s] = 0$  pour tout  $0 \leq s < t \leq u < v \leq \alpha$
3. Pour tout  $0 \leq s < t \leq \alpha$  on a

$$E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E[\langle X \rangle_t^\Pi - \langle X \rangle_s^\Pi | \mathcal{F}_s] \quad (2.5)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit une partition  $\Pi_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = \alpha\}$  de l'intervalle  $I = [0, \alpha]$ , on dira par la suite que  $(\Pi_n)_n$  est régulière si  $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

**Lemme 2.6 ([Kun19]).** Soit  $\{X_t, t \in I\}$  une  $L^4$ -martingale, Soit  $\{\langle X \rangle_t^{\Pi_n}, t \in I\}$  la variation quadratique de  $\{X_t, t \in I\}$  associée à la partition  $\Pi_n$ . Si  $(\Pi_n)_n$  est régulière et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Pi_n| = 0$

alors la séquence  $\{\langle X \rangle_t^{\Pi_n}, t \in I\}$  converge uniformément en  $t$  dans  $L^2$  vers un processus croissant  $\{\langle X \rangle_t, t \in I\}$ , de plus le processus  $\{X_t^2 - \langle X \rangle_t, t \in I\}$  est une  $L^2$ -martingale.

**Théorème 2.6** ([Kun19]). Si  $\{X_t, t \in I\}$  une martingale locale continue, alors sa variation quadratique  $\{\langle X \rangle_t, t \in I\}$  existe, elle est un processus croissant, de plus le processus  $\{X_t^2 - \langle X \rangle_t, t \in I\}$  est aussi une martingale locale.

**Corollaire 2.1** ([Kun19]). Soit  $\{X_t, t \in I\}$  une martingale locale continue, alors sa variation quadratique  $\{\langle X \rangle_t, t \in I\}$  est un processus croissant continue, de plus si  $\{A_t, t \in I\}$  est un autre processus croissant telle que  $\{X_t^2 - A_t, t \in I\}$  soit une martingale locale, alors on a

$$A_t = \langle X \rangle_t \quad \forall t \in I \text{ (p.s.)}$$

On passe a la définition de la *covariation quadratique*

**Définition 2.25 (Covariation quadratique associé a une partition).** Soit  $\{X_t, t \in I\}, \{Y_t, t \in I\}$  deux processus càdlàg, soit  $\Pi$  une partition de  $I$ , on définit alors la *covariation* de  $X, Y$  par le processus suivant

$$\langle X, Y \rangle_t^\Pi = \sum_{m=1}^n (X_{t_m \wedge t} - X_{t_{m-1} \wedge t})(Y_{t_m \wedge t} - Y_{t_{m-1} \wedge t}), t \in I \quad (2.6)$$

On donne maintenant les propriétés principale de la covariation quadratique de martingales locales :

**Théorème 2.7.** Soit  $\{X_t, t \in I\}, \{Y_t, t \in I\}$  deux martingales locale continuent, alors la covariation quadratique  $\{\langle X, Y \rangle_t^\Pi, t \in I\}$  converge vers un processus  $\{\langle X, Y \rangle_t, t \in I\}$  quand  $|\Pi| \rightarrow 0$  uniformément en  $t$  en probabilité, de plus  $\{X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t, t \in I\}$  est une martingale locale.

Le processus  $\{\langle X, Y \rangle_t, t \in I\}$  est appelé *covariation quadratique* de  $\{X_t, t \in I\}$  et  $\{Y_t, t \in I\}$ .

**Démonstration** Si  $X_t = Y_t, t \in I$  le résultat est équivalent a l'existence de la variation quadratique, on considère le cas où  $X_t \neq Y_t$ , on remarque de la définition de la covariation quadratique associée a une partition que c'est une sorte de produit scalaire, il n'est pas difficile de montrer alors que

$$\langle X, Y \rangle_t^\Pi = \frac{1}{4} (\langle X + Y \rangle_t^\Pi - \langle X - Y \rangle_t^\Pi)$$

en tendant  $|\Pi|$  vers 0 on obtiendra la convergence du terme a droite de l'équation précédente vers  $\frac{1}{4} (\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t)$ , la convergence étant uniforme en  $t$  en probabilité, on aura alors

l'existence de la limite du terme a gauche, on notera cette limite par  $\langle X, Y \rangle_t$ , c'est un processus a variation bornée car il est la différence de de processus croissant, puisque ce processus satisfait

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} (\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t) \quad , t \in I$$

on aura donc pour tout  $t \in I$

$$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} [(X_t + Y_t)^2 - \langle X + Y \rangle_t - ((X_t - Y_t)^2 - \langle X - Y \rangle_t)]$$

en utilisant le théorème 2.6 et la proposition 2.9 on obtiendra que le processus  $\{X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t, t \in I\}$  est une martingale locale.

on passe maintenant au cas des semi-martingales :

**Théorème 2.8 (Covariation quadratique de semi-martingales).** *Soit  $\{X_t, t \in I\}$  une semi-martingale continue, et  $\{Y_t, t \in I\}$  une semi-martingale continue, telle que  $X_t = M_t + A_t$  et  $Y_t = N_t + B_t$  avec les  $M_t, N_t$  sont des martingales locales et les  $A_t, B_t$  sont des processus continue a variation bornée, alors pour tout partition  $\Pi$  de  $I$  le processus  $\{\langle X, Y \rangle_t^\Pi, t \in I\}$  converge vers un processus continue a variation bornée  $\{\langle X, Y \rangle_t, t \in I\}$  quand  $|\Pi|$  cette convergence est uniforme en  $t$  en probabilité de plus*

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \langle X, Y \rangle_t^\Pi = \langle X, Y \rangle_t = \langle M, N \rangle_t \quad , t \in I \quad (2.7)$$

**Démonstration** On a du fait que  $\langle X, Y \rangle_t^\Pi$  est un produit scalaire :

$$\langle X, Y \rangle_t^\Pi = \langle M, N \rangle_t^\Pi + \langle M, B \rangle_t^\Pi + \langle A, N \rangle_t^\Pi + \langle A, B \rangle_t^\Pi$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} |\langle M, B \rangle_t^\Pi| &\leq (\langle M \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} (\langle B \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} \\ |\langle A, N \rangle_t^\Pi| &\leq (\langle A \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} (\langle N \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} \\ |\langle A, B \rangle_t^\Pi| &\leq (\langle A \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} (\langle B \rangle_t^\Pi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Puisque  $\langle A \rangle_t^\Pi, \langle B \rangle_t^\Pi \xrightarrow{|\Pi| \rightarrow 0} 0$  uniformément en  $t$  en probabilité (ce sont des processus a variation bornée) et que  $\langle M, N \rangle_t^\Pi \xrightarrow{|\Pi| \rightarrow 0} \langle M, N \rangle_t$  aussi uniformément en  $t$  en probabilité on aura 2.7.

## 2.5 Processus de Wiener

Dans cette section, on étudie un exemple particulier de processus stochastique : le processus de Wiener, aussi appelé *mouvement Brownien*, du botaniste anglais R.Brown qui a été le premier a



avoir observé que des particules microscopiques suspendues sur un liquide suivent un mouvement aléatoire, il a été découvert par la suite que ce mouvement est causé par les collisions entre les molécules de pollen et celles d'eau.

Le mouvement Brownien a été étudié par Einstein, Smolukhovskii et Bachelier, mais aucun n'a réussi à donner une description exacte du phénomène, cela devait attendre le développement des mathématiques, plus précisément l'invention de la théorie de la mesure. La construction d'un modèle mathématique rigoureux du mouvement Brownien a été réalisée en 1923 par Wiener, c'est de cette construction que l'on tire le Processus stochastique qui suit le nom de son inventeur : le processus de Wiener.

On commence avec le processus de Wiener en dimension 1 :

**Définition 2.26.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  posons  $I = [0, \alpha]$  ou  $I = [0, +\infty[$ , On dit que le processus stochastique  $(w_t)_{t \in I}$  est de Wiener si :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$  le vecteur  $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$  est Gaussien (processus Gaussien) et  $E[w_t] = 0, E[w_t w_s] = t \wedge s$  pour tout  $t, s \in I$ .
2. Le processus  $w_t$  est continue (à trajectoire continue) et  $w_0 = 0$ .

**Théorème 2.9.** la condition (1) de la définition est équivalente à :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, t_i \in I$  les variables aléatoires  $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$  sont Gaussiens et indépendantes de plus
- $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$  pour tout  $t, s \in I$  et  $w_0 = 0$  (p.s).

**Démonstration** On commence par l'implication directe

$\implies$  :

On suppose que le vecteur  $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$  est Gaussien alors par 1.9 et en prenant pour tout  $1 \leq i \leq n$  :  $m_i = 0, Q_i = (q_j^{(i)})_{1 \leq j \leq n}^*$  avec  $q_i^{(j)} = 1$  si  $j = i, q_i^{(j)} = -1$  si  $j = i - 1$  et  $q_i^{(j)} = 0$  si  $(j \neq i$  ou  $j \neq i + 1)$  on aura donc  $w_{t_1}, w_{t_j} - w_{t_{j-1}}, 2 \leq j \leq n$  sont des vecteurs Gaussiens, pour montrer l'indépendance de ces derniers on va transformer le vecteur  $X = (w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$  en un vecteur  $Y = (w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$  par la transformation affine suivante :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{t_1} \\ w_{t_2} \\ w_{t_3} \\ \vdots \\ w_{t_n} \end{pmatrix}$$

on aura donc toujours par 1.9 que  $(w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$  est un vecteur Gaussien, maintenant pour montrer l'indépendance il suffit de montrer la non-corrélation entre les composantes du vecteurs précédant (d'après 1.11), soit donc  $1 \leq i, j \leq n$  avec  $i < j$  on aura du fait que  $E[w_t] = 0$ , et  $E[w_t w_s] = t \wedge s$ ,  $t, s \in I$  :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(w_{t_{j+1}} - w_{t_j})] &= E[(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(w_{t_{j+1}} - w_{t_j})] \\ &= E[w_{t_{i+1}}w_{t_{j+1}} - w_{t_{i+1}}w_{t_j} - w_{t_i}w_{t_{j+1}} + w_{t_i}w_{t_j}] \\ &= t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

de plus pour  $1 \leq i \leq n$  on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}[w_{t_1}(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})] &= E[w_{t_1}(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})] \\ &= E[w_{t_1}w_{t_{i+1}} - w_{t_1}w_{t_i}] = t_1 - t_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

on obtient donc la non-corrélation des variables aléatoires réels  $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ , d'où d'après 1.11 ces variables sont indépendantes.

Il reste à montrer que  $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$  pour tout  $t, s \in I$  et que  $w_0 = 0$ , d'après ce qui précède pour  $s \leq t$  la variable aléatoire  $w_t - w_s$  est Gaussien, son espérance  $E[w_t - w_s] = 0$  (par linéarité de l'espérance), il reste à calculer sa variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}[w_t - w_s] &= E[(w_t - w_s)^2] = E[w_t^2 + w_s^2 - 2w_t w_s] \\ &= E[w_t^2] + E[w_s^2] - 2E[w_t w_s] \\ &= t + s - 2s = t - s \end{aligned}$$

on a donc montré que  $w_t - w_s$  est une v.a Gaussienne de plus  $E[w_t - w_s] = 0$  et  $\text{Var}[w_t - w_s] = t - s$  si  $s \leq t$  d'où  $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$   $t, s \in I$ , pour montrer que  $w_0 = 0$  (p.s) il suffit de remarquer que  $E[w_t^2] = t$  ce qui implique que  $E[w_0^2] = 0 \implies w_0 = 0$  (p.s).

Passant maintenant à l'implication inverse :

$\Leftarrow$  :

Par hypothèse les variables aléatoires réels  $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$  sont Gaussiennes indépendantes, donc par 1.12 le vecteur  $X = (w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$  est Gaussien, par une transformation affine du vecteur  $X$  on obtiendra un vecteur  $Y$  avec

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{t_1} \\ w_{t_2} - w_{t_1} \\ w_{t_3} - w_{t_2} \\ \vdots \\ w_{t_n} - w_{t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

donc d'après 1.9 le vecteur  $Y = (w_{t_1}, w_{t_2}, \dots, w_{t_n})$  est Gaussien, et puisque  $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$   $t, s \in I$  et  $w_0 = 0$  (p.s) on aura d'une part  $w_t \sim \mathcal{N}(0, t) \implies E[w_t] = 0$  et  $Var[w_t] = E[w_t^2] = t, t \in I$ .

Il reste a montrer que pour  $s, t \in I$   $E[w_t w_s] = t \wedge s$ , pour cela calculons la variance de  $w_t - w_s$  pour  $s \leq t$  :

$$\begin{aligned} Var[w_t - w_s] &= E[w_t^2] + E[w_s^2] - 2E[w_t w_s] \\ &= t + s - 2E[w_t w_s] \end{aligned}$$

par hypothèse on a  $Var[w_t - w_s] = t - s$  donc  $t + s - 2E[w_t w_s] = t - s \implies E[w_t w_s] = s = t \wedge s$

On va passer maintenant a la construction du processus de Wiener, pour cela nous allons commencer par une lemme :

**Lemme 2.7 ([Kry94]).** *Il existe sur  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$  une suite de  $(\eta_n)_n$  variables aléatoires indépendantes telle que :  $\forall n \in \mathbb{N} \eta_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .*

On va procéder a la construction du processus de Wiener sur l'intervalle  $[0, 1]$ , après cela on faire une extension sur  $\mathbb{R}_+$ .

On va commencer par choisir une base Hilbertienne de  $L^2([0, 1])$  adéquate, nous allons prendre la suite de fonctions  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit comme suit :

$$\varphi_0(t) = 1 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$  on prend :

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce sont les fonctions de Haar (ou bien les ondelette de Haar) qui forment un système orthonormée complet de  $L^2([0, 1])$  (voire [Pin01]), nous définissons aussi la suite de fonctions  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  avec :

$$\psi_k(t) = \int_0^t \varphi_k(s) ds = \langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \varphi_k \rangle \quad (2.12)$$

nous avons de plus  $\|\psi_k\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\psi_k(t)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$

Nous allons maintenant énoncer le théorème d'existence du processus de Wiener :

**Théorème 2.10 (Construction du processus de Wiener).** *Soit  $(\eta_n)_n$  une suite de variable aléatoires indépendante Gaussienne  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ . On définit la suite aléatoire  $(w_t^{(k)})_k$  comme suit :*

$$w_t^{(n)} = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \eta_k \quad (2.13)$$

Alors cette suite converge uniformément en  $t$  (p.s) vers un processus Gaussien  $w_t$  de plus on a

$$- E[w_t] = 0, E[w_t w_s] = t \wedge s \text{ pour tout } t, s \in [0, 1]$$

**Démonstration** On a d'une part  $\sup_{t \in [0,1]} |w_t^{(n)} - w_t^{(n-1)}| \leq \|\psi_n\|_\infty |\eta_n|$  de cela on aura pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^N E[\sup_{t \in [0,1]} |w_t^{(n)} - w_t^{(n-1)}|] \leq \sum_{n=1}^N \|\psi_n\|_\infty E[|\eta_n|] \leq C \sum_{n=1}^N \|\psi_n\|_\infty$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant le théorème 1.4 sur les variables Gaussienne  $\eta_k, k \in \mathbb{N}^*$  ie  $E[|\eta_k|] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty, k \in \mathbb{N}^*$ , en tendant  $N$  vers  $\infty$  on aura

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\sup_{t \in [0,1]} |w_t^{(n)} - w_t^{(n-1)}|] < \infty$$

en utilisant le théorème 1.3 on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in [0,1]} |w_t^{(n)} - w_t^{(n-1)}| < \infty \text{ (p.s)}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on prend  $s_n = \sum_{k=1}^n (w_t^{(k)} - w_t^{(k-1)})$ , d'après le résultat précédent cette suite converge uniformément en  $t$  (p.s), et puisque  $s_n = w_t^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$  on obtiendra la convergence uniforme en  $t$  (p.s) de la suite  $(w_t^{(n)})_n$ , puisque cette convergence est (p.s) on aura l'existence de  $\Omega' \in \mathcal{F}$  telle que  $\mathbb{P}(\Omega') = 1$  et la suite  $(w_t^{(n)})_n$  converge uniformément en  $t \forall \omega \in \Omega'$  on définit  $w_t$  comme suit :

$$w_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} w_t^{(n)}(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega' \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega' \end{cases}$$

La continuité de  $w_t$  découle de la convergence uniforme et  $t$  de suite de fonctions continue en  $t$  (la continuité des  $\psi_k$  est une conséquence de sa définition comme intégrale de fonction localement intégrable ), il reste a montrer que c'est un processus Gaussien, pour cela on commence par observer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$  avec  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  on a pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_1) & \psi_2(t_1) & \dots & \psi_m(t_1) \\ \psi_1(t_2) & \psi_2(t_2) & \dots & \psi_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(t_n) & \psi_2(t_n) & \dots & \psi_m(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{t_1}^{(m)} \\ w_{t_2}^{(m)} \\ \dots \\ w_{t_n}^{(m)} \end{pmatrix}$$

puisque les variables aléatoires  $\eta_k$   $k = 1 \dots m$  sont Gaussiens indépendantes alors le vecteur  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  est Gaussien( par 1.12), donc le vecteur  $X_m = (w_{t_1}^{(m)}, w_{t_2}^{(m)}, \dots, w_{t_n}^{(m)})$  Gaussien comme transformation affine de vecteurs Gaussiens (par 1.9), en faisant tendre  $m$  vers  $\infty$  on aura  $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = (w_{t_1}, w_{t_2}, \dots, w_{t_n})$  est un vecteur Gaussien par 1.10, il reste donc a montrer que  $E[w_t] = 0$ ,  $E[w_t w_s] = t \wedge s$ ,  $t, s \in I$  la première propriété est facile car on a pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on a  $E[w_t^{(m)}] = 0$  et en utilisant le théorème de convergence dominée on aura  $E[w_t] = 0$ , montrons doc que  $E[w_t w_s] = t \wedge s$ , on a pour  $s, t \in I$

$$\begin{aligned} E[(w_t^{(n)} - w_s^{(n)})^2] &= E \left[ \left( \sum_{k=1}^n (\psi_k(t) - \psi_k(s)) \eta_k \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\psi_i(t) - \psi_i(s)) (\psi_j(t) - \psi_j(s)) \eta_i \eta_j \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (\psi_k(t) - \psi_k(s))^2 E[\eta_k^2] \quad , \quad (\eta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n (\psi_k(t) - \psi_k(s))^2 \end{aligned}$$

En passant a la limite on aura

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[(w_t^{(n)} - w_s^{(n)})^2] &= E[(w_t - w_s)^2] = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k(t) - \psi_k(s))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \varphi_k \rangle - \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \varphi_k \rangle)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbb{1}_{[0,t]} - \mathbb{1}_{[0,s]}, \varphi_k \rangle^2 \\ &= \int_0^1 (\mathbb{1}_{[0,t]} - \mathbb{1}_{[0,s]})^2 dx \quad (\text{Parseval}) \\ &= t + s - 2 \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t] \cap [0,s]} dx \end{aligned}$$

En prenant  $s = 0$  on aura  $E[w_t^2] = t$  on obtiendra donc pour  $s, t \in I$   $E[w_t w_s] = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t] \cap [0,s]} dx$ ,

on pourra facilement vérifier que cette intégrale est égale à  $t \wedge s$ , d'où  $E[w_t w_s] = t \wedge s$ .

On énonce un théorème qui assure l'existence du processus de Wiener sur l'intervalle  $[0, +\infty[$

**Théorème 2.11** ([Ioa91]). *Soit  $(B_t^{(k)})_{k \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]}$  une suite de processus de Wiener indépendants définis sur le même espace probabilisé, alors le processus*

$$w_t := \begin{cases} B_t^{(0)}, & t \in [0, 1[ \\ B_1^{(0)} + B_{t-1}^{(1)}, & t \in [1, 2[ \\ \sum_{j=1}^{k-1} B_1^{(j)} + B_{t-k}^{(k)}, & t \in [k, k+1[, k \geq 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

est un processus de Wiener indexé sur  $I = [0, +\infty[$ .

On peut étendre la définition du processus de Wiener en dimension  $d$ , on se place toujours sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Définition 2.27 (Processus de Wiener dans  $\mathbb{R}^d$ ).** Un processus stochastique  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(d)})$ ,  $t \geq 0$  avec  $X_t^{(j)}, 1 \leq j \leq d, t \geq 0$  des processus réels est un processus de Wiener si il vérifie les propriétés suivantes

- (a).  $X_0 = 0$  (*p.s*)
- (b). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  les vecteurs  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendants.
- (c). Pour tout  $t, s \geq 0$  et tout  $1 \leq j \leq d$  on a  $X_t^{(j)} - X_s^{(j)} \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$
- (d). L'application  $t \rightarrow X_t(\omega)$  est continue pour tout  $\omega \in \Omega$

**Proposition 2.11** ([Ioa91]). *Un processus stochastique  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(d)})$ ,  $t \geq 0$  avec  $X_t^{(j)}, 1 \leq j \leq d, t \geq 0$  des processus réels, est de Wiener si et seulement si les composantes  $X_t^{(j)}, 1 \leq j \leq d$  sont des processus de Wiener réels indépendants.*

**Proposition 2.12.** *Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener  $d$ -dimensionnel, et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une filtration admissible par rapport à ce processus, alors  $(w_t)_{t \geq 0}$  est une  $L^2$ -martingale par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .*

**Démonstration** D'un côté on a pour tout  $t \geq 0$   $E[w_t^2] = t < \infty$ , de plus pour  $0 \leq s \leq t$  on a aussi

$$E[w_t | \mathcal{F}_s] = E[w_t - w_s | \mathcal{F}_s] + E[w_s | \mathcal{F}_s]$$

puisque la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est admissible alors  $E[w_t - w_s | \mathcal{F}_s] = E[w_t - w_s]$ , et puisque  $w_t - w_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , et  $w_s$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable alors

$$E[w_t | \mathcal{F}_s] = w_s$$

### 2.5.1 Variation du processus de Wiener

Avant d'aborder la variation du processus de Wiener, nous allons introduire certaines notations,

**Définition 2.28 (Variation d'ordre  $p$  par rapport a une partition).** Soit  $p > 0$ ,  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction, et  $\Pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = t\}$  une partition de l'intervalle  $[0, t]$ , on définit la variation d'ordre  $p$  de la fonction  $f$  la somme

$$S_p^\Pi(f, [0, t]) = \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \quad (2.15)$$

**Définition 2.29 (Variation totale).** Soit  $p > 0$ , on définit la  $p$ -variation totale de la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  sur l'intervalle  $[0, t]$  la quantité

$$VAR_p(f, [0, t]) := \sup\{S_p^\Pi(f, [0, t]), \Pi \text{ partition de } [0, t]\} \quad (2.16)$$

Si  $\Pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = t\}$  est une partition de l'intervalle  $[0, t]$  on définira le module de cette partition noté  $|\Pi|$  par  $|\Pi| := \max_{1 \leq j \leq m} (t_j - t_{j-1})$

**Définition 2.30 (Variation d'ordre  $p$ , par rapport a une suite de partitions).** Soit  $p > 0$ ,  $(\Pi_n)_n$  une suite de partitions de l'intervalle  $[0, t]$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Pi_n| = 0$ , on définira la Variation d'ordre  $p$ , par rapport a une suite de partitions  $(\Pi_n)_n$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, t]$  la quantité

$$var_p(f, [0, t]) := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_p^{\Pi_n}(f, [0, t]) \quad (2.17)$$

**Théorème 2.12.** Soit  $(w_t)_{t \geq 0}$  un processus de Wiener réel, et  $(\Pi_n)_n$  une suite de partitions telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Pi_n| = 0$  alors

$$var_2(w, [0, t]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_2^{\Pi_n}(w, [0, t]) = t \text{ en norme } L^2 \quad (2.18)$$

## 2.6 Champs aléatoires

On généralise la notion de processus stochastique en considérant une cette fois des processus dépendant d'un paramètre additionnelle appartenant a  $\mathbb{R}^d$  appelé paramètre spatiale.

**Définition 2.31 (Champ aléatoire).** Soit  $\Phi : (x, t, \omega) \mapsto \Phi(x, t, \omega)$ ,  $t \in I, x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega$  une application qui prend ces valeurs dans un espace  $(E, \mathcal{B}(E))$  on dit que  $\Phi$  est un champ aléatoire stochastique ou plus simplement un champ aléatoire si  $\forall (x, t) \in I \times \mathbb{R}^d$   $\Phi(x, t)$  est une variable aléatoire a valeurs dans  $(E, \mathcal{B}(E))$ .

**Définition 2.32.** Soit  $(\mathcal{F}_t)_t$  une filtration de  $\mathcal{F}$ , et  $\Phi$  un champ aléatoire, on dit que

- $\Phi$  est dite  $\mathcal{F}_t$ -adapté si  $\forall x \in \mathbb{R}^d \Phi(x, \cdot)$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté.
- $\Phi$  est dite une *martingale (respct martingale locale,semi-martingale) dépendante de paramètres spatiale* si  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  le processus  $\Phi(x, \cdot)$  est une une martingale (respct martingale locale,semi-martingale).

On considère par la suite un exemple important celui de champ de Wiener,mais avant cela on introduit l'opérateur  $R : H \rightarrow H$  avec  $H$  un espace de Hilbert et  $R$  définit comme suit

$$(R\varphi)(x) = \int_D r(x, y)\varphi(y)dy \quad x \in D$$

en supposant que  $r(x, y) = r(y, x) \forall x, y \in D$  et que  $\int_D \int_D |r(x, y)|^2 dx dy < \infty$  alors  $R$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt compact auto-adjoint avec la propriété que les valeurs propres  $\mu_k$  de  $R$  sont positives et vérifie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty$$

Dans le cas ou les valeurs propres tends plus rapidement vers 0 dans le sens où

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$$

on dit que  $R$  est un opérateur *trace*, la norme d'un telle opérateur est donné par :

$$\|R\|_{Tr} = Tr(R) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \int_D r(x, x)dx$$

**Définition 2.33 (Champ aléatoire de Wiener).** Soit  $(w_t^{(k)})_k$  une suite de processus de Wiener standard unidimensionnel indépendants identiquement distribué, on suppose que l'opérateur  $R$  est du type trace sur  $H$ , et soit  $e_k, k = 1, 2, \dots$  les vecteurs propres associé aux valeurs propres  $\mu_k, k = 1, 2, \dots$  de  $R$ , on définit le champ aléatoire

$$W_t^{(n)} = W^{(n)}(\cdot, t) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} w_t^{(k)} e_k \quad (2.19)$$

On obtiendra alors que  $W^{(n)}(x, t)$  est un champ aléatoire Gaussien dans le sens où  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  le processus  $W(x, \cdot)$  est un processus Gaussien d'espérance  $E[W^{(n)}(x, t)] = 0$  et de covariance

$$E[W^{(n)}(x, t)W^{(n)}(y, s)] = r_n(x, y)(t \wedge s) \quad (2.20)$$



avec

$$r_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k(x) e_k(y) \quad x, y \in D$$

On remarque aussi que pour  $n > m \geq 1$  on a

$$\|W_t^{(n)} - W_t^{(m)}\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \mu_k (w_t^{(k)})^2$$

donc le processus a droite est sous-martingale alors , en appliquant l'inégalité 2.15 on aura l'existence de  $C > 0$  telle que

$$E[\sup_{0 \leq t \leq \alpha} \|W_t^{(n)} - W_t^{(m)}\|^2] \leq CE[\|W_\alpha^{(n)} - W_\alpha^{(m)}\|^2] = \alpha C \sum_{k=m+1}^n \mu_k$$

la quantité a gauche tend vers 0 quand  $n, m \rightarrow \infty$ , on aura alors la convergence de la suite  $(W_t^{(n)})$  des processus de Wiener a valeur dans  $H$  en norme  $L^2$  vers une limite noté  $W_t$  donné par

$$W_t = \lim_{n \rightarrow \infty} W_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k} w_t^{(k)} e_k$$

On aura de plus la convergence de la suite  $R_n$  de noyau  $r_n$  vers un opérateur  $R$  en norme  $\|\cdot\|_{Tr}$ . On dit alors que le  $W_t$  est un  $R$  processus de Wiener.

**Théorème 2.13 ([Cho14]).** *Le  $R$  processus de Wiener  $W_t$  est continue a valeur dans  $H$  avec  $W_0 = 0$  telle que*

1. pour tout  $t, s \geq 0$  et  $g, h \in H$

$$E[\langle W_t, g \rangle] = 0, \quad E[\langle W_t, g \rangle \langle W_s, h \rangle] = (t \wedge s) \langle Rg, h \rangle$$

2.  $W_t$  a des incréments stationnaire indépendant
3.  $W_t$  est une  $L^2$ -martingale a valeur dans  $H$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$E[\sup_{0 \leq t \leq \alpha} \|W_t\|^2] \leq \alpha C (Tr(R)) \quad \forall \alpha > 0$$

4.  $W(x, t)$  est un champ aléatoire continue pour  $x \in D, t \geq 0$  si la fonction covariance  $r(x, y)$  est continue sur  $D \times D$ .

## 2.7 Intégration stochastique

### 2.7.1 L'intégrale Stochastique d'Itô

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  une filtration de  $\mathcal{F}$  avec  $I = [0, \alpha]$ , avant de définir l'intégrale au sens d'Itô, on va introduire la notion de *tribu prédictive* :

**Définition 2.34 (Tribu prévisible, Processus prévisible).** Une tribu prévisible  $\mathcal{P}$  par rapport a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  est la tribu sur  $I \times \Omega$  engendré par les processus continus a gauche et qui son  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ -adapté.

un processus  $\varphi_t$  est dit *prévisible* si l'application  $(t, \omega) \mapsto \varphi_t(\omega)$  est  $\mathcal{P}$ -mesurable sur  $I \times \Omega$ .

**Remarque 2.5.** Il est claire que tout processus continue a gauche  $(\mathcal{F}_t)_t$ -adapté est prévisible

**Définition 2.35.** Soit  $A_t, t \in I$  un processus continue croissant,  $p \geq 1$ , on définit l'ensemble

$$\mathbb{L}^p(A) = \left\{ X_t \text{ prévisible} : E \left[ \int_0^\alpha |X_s|^p dA_s \right] < \infty \right\}$$

Dans ce qui suit on utilisera deux notation différente pour les processus stochastique ,celle où le processus est considérée comme fonction de la variable  $t$  ( $\varphi(t)$ ) et celle vu précédant ou le  $t$  est écrit comme indice ( $\varphi_t$ ).

**Définition 2.36 (Processus prévisible simple).** Soit  $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \alpha\}$  une partition de  $I$ ,  $(\varphi_m)_{0 \leq m \leq n}$  une suite de variable aléatoire réel telle que  $\forall 0 \leq m \leq n : \varphi_m$  est  $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$ -mesurable et  $\exists l > 0 : \forall \omega \in \Omega \sup_{0 \leq m \leq n} |\varphi_m(\omega)| \leq l$ , On dit que le processus  $\varphi(t)$  est un processus *simple prévisible* si il est il de la forme :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{m=1}^n \varphi_m \mathbb{1}_{]t_{m-1}, t_m]}(t) \quad (2.21)$$

**Remarque 2.6.** Il est claire que tout processus prévisible simple est un processus simple.

Soit  $X_t$  une  $L^2$  martingale adapté a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$ , et soit  $\langle X \rangle_t$  sa variation quadratique, on va donner une lemme sur l'approximation des processus prévisible par des processus simple prévisible

**Lemme 2.8 ([Kun19]).** Pour tout  $\varphi \in \mathbb{L}^2(\langle X \rangle)$  il existe une suite  $(\varphi_n)_n$  de processus prévisible simple telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^\alpha |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 d\langle X \rangle_t \right] = 0 \quad (2.22)$$

**Remarque 2.7.** On définira par la suite la norme d'un processus prévisible par

$$\|\varphi\| = E \left[ \int_0^\alpha \varphi^2(t) d\langle X \rangle_t \right]^{\frac{1}{2}}$$

On va définir maintenant l'intégrale d'un processus simple prévisible

**Définition 2.37 (Intégrale d'un processus simple prévisible).** Soit  $\varphi(t)$  un processus simple prévisible, et soit  $X_t$  une  $L^2$  martingale, on définit le processus

$$M_t = \sum_{m=1}^n \varphi_m(X_{t_m \wedge t} - X_{t_{m-1} \wedge t}), \quad t \in I \quad (2.23)$$

ce processus est appelé l'intégrale de  $\varphi(t)$  par  $dX_t$  et on le note :  $\int_0^t \varphi(s) dX_s$ .

**Lemme 2.9.** Soit  $\varphi(t)$  un processus prévisible simple,  $M_t$  son intégrale, c'est une  $L^2$  martingale et sa variation quadratique est égale à

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\varphi(s)|^2 d\langle X \rangle_s \quad (2.24)$$

donc on a

$$\left\langle \int_0^t \varphi(s) dX_s \right\rangle = \int_0^t |\varphi(s)|^2 d\langle X \rangle_s$$

**Démonstration** On prend comme précédant  $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \alpha\}$  une partition de  $I$ , et

$$M_t = \sum_{m=1}^n \varphi_m(X_{t_m \wedge t} - X_{t_{m-1} \wedge t}), \quad t \in I$$

Nous aurons alors pour  $t, s \in I$  avec  $s < t$  :  $E[M_t - M_s | \mathcal{F}_r] = 0$  (p.s), pour la bornitude on a du fait que  $\varphi(t)$  est un processus simple (donc bornée) et que  $X_t$  est une  $L^2$  martingale, nous aurons  $M_t$  comme la somme de processus dans  $L^2$ , cela impliquera que  $M_t$  est une  $L^2$ -martingale.

Soit  $s, t \in I$  avec  $s < t$  on a alors :

$$\begin{aligned} E[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \sum_{m:t_{m-1} \geq s} E[(M_m - M_{m-1})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E\left[\sum_m \varphi_m^2 (X_{t_m} - X_{t_{m-1}})^2 | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \sum_m E[\varphi_m^2 E[(X_{t_m} - X_{t_{m-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{m-1}}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_m E[\varphi_m^2 E[\langle X \rangle_{t_m} - \langle X \rangle_{t_{m-1}} | \mathcal{F}_{t_{m-1}}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E\left[\sum_m \varphi_m^2 (\langle X \rangle_{t_m} - \langle X \rangle_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\int_s^t \varphi(r)^2 d\langle X \rangle_r | \mathcal{F}_s\right] \quad (p.s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Puisque l'égalité précédente est vrai pour tout  $s < t$  on en déduit que le processus  $M_t^2 - \int_0^t \varphi^2(r) d\langle X \rangle_r$  est une martingale, alors par la proposition 2.1 la variation quadratique de  $M_t$  est le processus  $\int_0^t \varphi^2(r) d\langle X \rangle_r$ , on a ainsi montré que :

$$\left\langle \int_0^t \varphi(r) dX_r \right\rangle = \int_0^t \varphi^2(r) d\langle X \rangle_r \quad (p.s) \quad (2.26)$$

On va maintenant définir l'intégrale d'un processus prévisible :

**Définition 2.38 (Intégrale par rapport a une  $L^2$  martingale).** Soit  $\varphi(t)$  un processus prévisible telle que  $\|\varphi\| < \infty$ , d'après la lemme 2.8 on aura l'existence d'une suite de processus simple prévisible  $(\varphi_n(t))_n$  telle que  $\|\varphi_n - \varphi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , en utilisant l'inégalité de Doob (pour  $p = 2$ ), on aura pour  $n, m \in \mathbb{N}$

$$E \left[ \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \varphi_n(r) dX_r - \int_0^t \varphi_m(r) dX_r \right|^2 \right] \leq 4E \left[ \left| \int_0^\alpha (\varphi_n(r) - \varphi_m(r)) dX_r \right|^2 \right]$$

En prenant  $s = 0$  dans 2.25 on aura pour tout  $0 < t \leq \alpha$  :

$$E \left[ \left| \int_0^t \varphi(r) dX_r \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^t \varphi^2(r) d\langle X \rangle_r \right] \leq \|\varphi\|^2$$

d'où

$$E \left[ \sup_{t \in I} \left| \int_0^t \varphi_n(r) dX_r - \int_0^t \varphi_m(r) dX_r \right|^2 \right] \leq 4\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alors la suite  $\int_0^t \varphi_n(r) dX_r$  est de Cauchy dans l'espace  $\mathcal{M}_c$  qui est un fermé de l'espace complet  $\mathcal{L}_c^2$ , d'où elle converge vers un processus de ce même espace, on définit cette limite comme l'intégrale de  $\varphi(t)$  par  $dX_t$ , cette limite est une  $L^2$  martingale est vérifie 2.26.

On va maintenant étendre la classe d'intégrante pour inclure les martingales locales continues :

**Définition 2.39 (Intégrale par rapport a une martingale locale continue).** Soit  $X_t$  une martingale locale continue,  $\langle X \rangle_t$  sa variation quadratique, soit aussi  $\varphi \in \mathbb{L}^2(\langle X \rangle)$ , pour  $N \in \mathbb{N}^*$  on définit la suite de temps d'arrêt suivant :

$$\begin{aligned} T_N &= \inf \{ t \in I : |X_t| + \int_0^t \varphi^2(r) d\langle X \rangle_r > N \} \\ &= \infty \text{ si } \{ \dots \} = \emptyset \end{aligned}$$

alors le processus arrêté  $X_t^{(N)} = X_{t \wedge T_N}$  est une martingale continue bornée, et on aura  $\langle X^{(N)} \rangle_t = \langle X \rangle_{t \wedge T_N}$ , puisque par hypothèse  $E[\int_0^t \varphi^2(r) d\langle X^{(N)} \rangle_r] < \infty$  la suite d'intégrales stochastique

$M_t^{(N)} := \int_0^t \varphi(r) dX_r^{(N)}$  sont des  $L^2$  martingales continues. Soit  $N' > N$  et considéreront la martingale  $M_t^{(N')} := \int_0^t \varphi(r) dX_r^{(N')}$  alors on aura  $M_{t \wedge T_N}^{(N')} = M_t^{(N)}$ , on obtiendra de cela l'existence d'une martingale locale continue  $M_t$  telle que :

$$M_{t \wedge T_N} = \int_0^t \varphi(r) dX_r^{(N)}, \quad N \in \mathbb{N}^*$$

On prendra alors cette martingale locale continue  $M_t$  est définir :

$$M_t = \int_0^t \varphi(r) dX_r$$

Et l'on appelle l'intégrale d'Itô de  $\varphi(t)$  par  $dX_t$ , on a de plus l'égalité  $\left\langle \int_0^t \varphi(s) dX_s \right\rangle = \int_0^t \varphi^2(s) d\langle X \rangle_s$  pour tout  $0 < t \leq \alpha$ .

On passe maintenant a la définition de l'intégrale stochastique par rapport a une semi-martingale continue

**Définition 2.40 (Intégrale stochastique par rapport a une semi-martingale continue).** Soit  $\varphi(t)$  un processus prévisible,  $X_t = M_t + A_t$  une semi-martingale continue, avec  $X_t$  une martingale locale continue, et  $A_t$  un processus continue a variation bornée, en notant  $|A|_t$  sa variation totale, et en supposant que  $E[\int_0^\alpha \varphi^2(t) d\langle X \rangle_t] < \infty$  et  $\int_0^\alpha |\varphi(t)| d|A|_t < \infty$  (p.s) on définit alors l'intégrale stochastique où d'Itô de  $X_t$  par  $dX_t$  comme suit

$$\int_0^t \varphi(s) dX_s := \int_0^t \varphi(s) dM_s + \int_0^t \varphi(s) dA_s$$

où  $\int_0^t \varphi(s) dA_s$  est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

**Proposition 2.13 ([Kun97]).** On a les propriétés suivants sur les intégrales stochastiques

(1). Pour  $\varphi, \psi \in \mathbb{L}^2(\langle X \rangle)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_0^t (a\varphi(r) + b\psi(r)) dX_r = a \int_0^t \varphi(r) dX_r + b \int_0^t \psi(r) dX_r$$

(2). Soit  $M_t$  une martingale locale continue et  $\varphi \in \mathbb{L}^2(\langle M \rangle)$  alors  $\int \varphi dM$  est aussi une martingale locale continue et satisfait

$$\left\langle \int \varphi dM, N \right\rangle_t = \int_0^t \varphi(r) d\langle M, N \rangle_r \quad \forall N \text{ martingale locale continue}$$

(3). Soit  $X_t = M_t + A_t$  une semi-martingale continue avec  $M_t$  une martingale locale continue et  $A_t$  un processus continue a variation bornée, alors pour tout  $\varphi, \psi \in \mathbb{L}^2(\langle M \rangle) \cap \mathbb{L}^1(|A|)$  et tout  $a, b \in \mathbb{R}$  on a  $(a\varphi + b\psi) \in \mathbb{L}^2(\langle M \rangle) \cap \mathbb{L}^1(|A|)$  de plus

$$\int_0^t (a\varphi(r) + b\psi(r)) dX_r = a \int_0^t \varphi(r) dX_r + b \int_0^t \psi(r) dX_r$$

(4). Soit  $\xi_t, t \in I$  un processus continue  $\mathcal{F}_t$ -adapté,  $X_t, t \in I$  une semi-martingale continue et  $\Pi = \{0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = \alpha\}$  une partition de  $I$ , alors le processus définit comme suit :

$$L_t^\Pi = \sum_{m=0}^{n-1} \xi_{t \wedge t_m} (X_{t \wedge t_{m+1}} - X_{t \wedge t_m})$$

converge uniformément en  $t$  en probabilité vers  $\int_0^t \xi_r dX_r$  quand  $|\Pi| \rightarrow 0$ .

## 2.7.2 Formule d'Itô et Applications

On dit qu'un vecteur stochastique  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$ ,  $t \in I$  est une  $d$ -dimensionnel semi-martingale continue si les  $X_t^i$ ,  $t \in I, i = 1 \dots d$  sont des semi-martingales continues, avant de donner la formule d'Itô on aura besoin d'un corollaire important que l'on va énoncer maintenant

**Lemme 2.10 ([Kun97]).** Soit  $(X_t^{(n)})_n, (Y_t^{(n)})_n, t \in I$  deux suite de semi-martingale continues telle que  $X_t^{(n)} = M_t^{(n)} + A_t^{(n)}$ ,  $Y_t^{(n)} = N_t^{(n)} + B_t^{(n)}$ , avec  $M_t^{(n)}, N_t^{(n)}$  les partie martingale locale de ces deux suites, on suppose que  $M_t^{(n)} \rightarrow M_t$  et  $N_t^{(n)} \rightarrow N_t$  sur  $\mathcal{M}_c^{loc}$  uniformément en probabilité et aussi que  $A_t^{(n)} \rightarrow A_t, B_t^{(n)} \rightarrow B_t$  uniformément en probabilité ( $A_t, B_t$  sont aussi a variation bornée) telle que  $\sup_n |A^{(n)}|_\alpha + \sup_n |B^{(n)}|_\alpha < \infty$  (p.s), en notant  $X_t = M_t + A_t, Y_t = N_t + B_t$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des partition de  $I$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\sup_{t \in I} \langle X^{(n)} - X \rangle_t^\Pi > \varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\sup_{t \in I} \langle Y^{(n)} - Y \rangle_t^\Pi > \varepsilon) = 0$$

De plus on aussi  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\sup_{t \in I} |\langle X^{(n)}, Y^{(n)} \rangle_t^\Pi - \langle X, Y \rangle_t| > \varepsilon) = 0 \quad (2.27)$$

**Théorème 2.14 (Formule d'Itô).** Soit  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , Soit  $X_t$  une  $d$ -dimensionnel semi-martingale continue, alors  $F(X_t)$  est une semi-martingale continue et on a pour tout  $0 \leq s < t \leq \alpha$

$$F(X_t) = F(X_s) + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_r) dX_r^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_r) d\langle X^i, X^j \rangle_r \quad (2.28)$$

**Démonstration** Il est suffisant de considérer le cas  $s = 0$ , Soit  $\Pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$  une partition de  $[0, t]$ , en appliquant la formule de Taylor sur  $F$  on aura

$$\begin{aligned}
 F(X_t) - F(X_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} (F(X_{t_{k+1}}) - F(X_{t_k})) \\
 &= \sum_{i=1}^d \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k^{(i,j)})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\} \\
 &= I_1 + I_2
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Avec les sommes

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i=1}^d \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \right\} \\
 I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k^{(i,j)})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\}
 \end{aligned}$$

où les  $\xi_k^{(i,j)}$  sont des variables aléatoires  $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$  mesurable vérifiant  $|\xi_k^{(i,j)} - X_{t_k}^i| \leq |X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i|$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $1 \leq i, j \leq d$ , en laissant tendre  $|\Pi|$  vers 0 on aura d'une part par 2.13-(4)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_r) dX_r^i$$

la convergence étant uniformément en  $t$  en probabilité, donc on aura la convergence de  $I_1$  vers

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_r) dX_r^i$$

Pour  $I_2$  on réécrit la somme en

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \sum_k \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k^{(i,j)}) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{t_k}) \right) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\}
 \end{aligned}$$

On prend

$$L_t^\Pi = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{t_k})(X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \quad \text{et} \quad L_t = \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_r) dX_r^i$$

Alors  $L_t^\Pi$  converge vers  $L_t$  uniformément en probabilité quand  $|\Pi|$  tends vers 0, d'après 2.10 on aura  $\langle L_t^\Pi, X_t^j \rangle^\Pi \xrightarrow{|\Pi| \rightarrow 0} \langle L_t, X_t^j \rangle$  uniformément en  $t$  en probabilité de plus

$$\langle L_t, X_t^j \rangle = \left\langle \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(X_r) dX_r^i, X_t^j \right\rangle = \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(X_r) d\langle X^i, X^j \rangle_r$$

Pour la deuxième somme nous allons montrer qu'elle tend vers 0

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(\xi_k^{(i,j)}) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(X_{t_k}) \right) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right| \\ & \leq \sup_k \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(\xi_k^{(i,j)}) - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(X_{t_k}) \right| \left\{ \sum_k (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_k (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Puisque le terme du sup a droite de l'inégalité précédente tend vers 0 en probabilité quand  $|\Pi| \rightarrow 0$  et que  $\sum_k (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)^2 \rightarrow \langle X^i \rangle_t$ ,  $\sum_k (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j)^2 \rightarrow \langle X^j \rangle_t$  en probabilité, donc 2.30 tend vers 0 en probabilité, on aura donc prouvé la formule d'Itô.

On va maintenant utiliser la formule d'Itô pour un cas spéciale de semi-martingale, Soit  $v_t, \varphi(t), t \in I$  deux processus prévisible telle que  $\int_0^\alpha |v_r| dr < \infty$  et  $\int_0^\alpha \varphi^2(r) dr < \infty$  on considère la semi-martingale suivante

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi(r) dw_r + \int_0^t v_r dr \quad t \in I \quad (2.31)$$

Avec  $w_t, t \in I$  le processus de Wiener standard.

**Corollaire 2.2.** Soit  $X_t$  une semi-martingale continue représenté par 2.31, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors on a par la formule d'Itô

$$f(X_t) = f(X_s) + \int_s^t f'(X_r) \varphi(r) dw_r + \int_s^t f'(X_r) v_r dr + \frac{1}{2} \int_s^t f''(X_r) \varphi^2(r) dr \quad (2.32)$$

**Démonstration** Il suffit de remarque que  $\langle X, X \rangle_t = \left\langle \int_0^t \varphi(r) dw_r, \int_0^t \varphi(r) dw_r \right\rangle = \int_0^t \varphi(r) d\langle w_t, w_t \rangle$ , et puisque  $\langle w_t, w_t \rangle = t$ , d'où le résultat.

**Exemple 2.1.** On donne certain exemples d'intégrale stochastique en utilisant la formule d'Itô

– On prend  $X_t = w_t$  avec  $F(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$  on aura

$$(w_t)^n = \int_0^t n(w_r)^{n-1} dw_r + \frac{1}{2} \int_0^t n(n-1)(w_r)^{n-2} dr$$

pour le cas où  $n = 2$  on aura la formule de l'intégrale du processus de Wiener par rapport au processus aux même processus

$$\int_0^t w_r dw_r = \frac{(w_t)^2 - t}{2}$$



- On prend  $F(x, y) = xy$  on a donc  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0$  on aura donc pour  $X_t, Y_t, t \in I$  deux semi-martingale

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_r dY_r + \int_0^t Y_r dX_r + \langle X, Y \rangle_t$$

cette formule est appelé formule d'intégration par partie pour les semi-martingales.

- On peut utiliser la formule précédente pour résoudre une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dw_t \quad t \in I$$

qui a un sens en utilisant la définition de l'intégrale stochastique, en d'autres termes le processus  $X_t$  vérifie

$$X_t = -a \int_0^t X_r dr + \sigma w_t$$

On considère le processus  $X_t = X_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{ar} dw_r$ , en notant  $Y_t = e^{-at}$ ,  $Z_t = \int_0^t e^{ar} dw_r$  on aura donc  $X_t = X_0 e^{-at} + Y_t Z_t$ , en appliquant maintenant la formule d'intégration par partie

$$dX_t = d(X_0 e^{-at}) + d(Y_t Z_t) = -aX_0 e^{-at} + Y_t dZ_t + Z_t dY_t + d\langle Z, Y \rangle_t$$

puisque la fonction  $t \mapsto \sigma e^{-at}$  est monotone elle est à variation bornée donc on aura  $\langle Z, Y \rangle_t = 0$  d'où

$$\begin{aligned} dX_t &= -aX_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} (e^{at} dw_t) - a\sigma e^{-at} \int_0^t e^{ar} dw_r \\ &= -a(X_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{ar} dw_r) + \sigma dw_t \\ &= -aX_t + \sigma dw_t \end{aligned}$$

Le processus  $X_t$  vérifiant l'équation précédente est appelé processus de Ornstein-Uhlenbeck.

**Théorème 2.15 (Inégalité de Burkholder, [Kun97]).** *Pour tout  $p \geq 2$  il existe des constantes  $C_1(p), C_2(p)$  positive telle que pour tout martingale continue  $M_t$  avec  $M_0 = 0$  et  $E[|M_\alpha|^p] < \infty$  on a*

$$C_1 E[\langle M \rangle_t^{\frac{p}{2}}] \leq E[|M_t|^p] \leq C_2 E[\langle M \rangle_t^{\frac{p}{2}}]$$

# Chapitre 3

## Étude de l'équation de la chaleur stochastique

### 3.1 Les équations différentielle stochastique

Avant d'aborder le thème de ce chapitre on donnera un rappel sur la théorie des EDS (les équations différentielle stochastique), fixons l'espace de probabilité associé a une filtration complété  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  et le processus de Wiener  $d$ -dimensionnel  $w_t = (w_t^1, w_t^2, \dots, w_t^d)$ .

**Définition 3.1.** Soit  $d, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{d \times m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles  $d \times m$ , Soit aussi  $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_{d \times m}(\mathbb{R})$ ,  $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  deux fonctions mesurables, On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation de la forme

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt$$

On notera cet équation par  $E(\sigma, b)$ .

**Remarque 3.1.** l'équation  $E(\sigma, b)$  n'a de sens que sous forme intégrale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(r, X_r)dw_r + \int_0^t b(r, X_r)dr$$

ou plus explicitement pour  $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ ,  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$  et l'équation  $E(\sigma, b)$  est équivalent à

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(r, X_r)dw_r^j + \int_0^t b_i(r, X_r)dr$$

Avec  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

On introduit grâce aux définition précédente le problème de valeur initiale associé a  $E(\sigma, b)$  comme suit

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dw_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 = x \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^d$ , on notera se problème par  $E_x(\sigma, b)$ .

Il existe plusieurs notion de solutions d'EDS, on va les donner dans la définition suivante

**Définition 3.2.** Pour l'équation  $E(\sigma, b)$  on dit qu'il y a

- Existence faible si pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  il existe une solution de  $E_x(\sigma, b)$ .
- Existence et unicité faible si de plus toute les solution de  $E_x(\sigma, b)$  ont la même loi.
- Unicité trajectorielle si en prenant deux solutions  $X$  et  $X'$  de  $E(\sigma, b)$  telle  $X'_0 = X_0$  on aura  $X'$  et  $X$  indistinguables.

On dit que  $X$  est une solution de  $E_x(\sigma, b)$  est une solution forte si  $X$  est adapté à la filtration canonique de  $w_t$ , si de plus toutes les solutions fortes sont indistinguables on dit qu'il ya unicité de solution forte de  $E(\sigma, b)$ .

on donnera un théorème qui relie les différentes notions d'existence et d'unicité

**Théorème 3.1 (Yamada-Watanabe, [Ioa91]).** *Existence faible et unicité trajectorielle impliquent unicité faible, De plus dans ce cas il existe pour chaque  $x \in \mathbb{R}^d$  une unique solution forte de  $E_x(\sigma, b)$ .*

On énonce un théorème d'existence et d'unicité

**Théorème 3.2 ([Gal16]).** *On considère l'équation  $E(\sigma, b)$  vue précédemment on suppose cette fois ci que  $\sigma$  et  $b$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  et satisfait les conditions de Lipschitz suivantes : il existe deux constantes  $L, K \geq 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$  on a*

$$\begin{aligned} \|b(t, x) - b(t, y)\|_d + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_{\mathcal{M}_{d \times m}} &\leq K\|x - y\|_d \\ \|b(t, x)\|_d + \|\sigma(t, x)\|_{\mathcal{M}_{d \times m}} &\leq L(1 + \|x\|_d) \end{aligned}$$

*alors il ya unicité trajectorielle pour  $E(\sigma, b)$ , de plus pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  il existe une unique solution forte de  $E_x(\sigma, b)$*

**Exemple 3.1.** On reprend l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est solution de l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t = \sigma dw_t - aX_t dt \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

On a montré grâce a la formule d'intégration par partie que on a une solution de la forme

$$X_t = x_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dw_s$$

Puisque  $\sigma(t, x) = \sigma$  et  $b(t, x) = -ax$  sont continues et lipschitzienne, alors grâce aux théorème précédent 3.2 on déduit que la solution trouvé est unique.

## 3.2 Équation Parabolique classique

On donne dans cette section un rappel sur la théorie des EDP parabolique

**Définition 3.3.** Soit  $D$  un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial D$  sa frontière que l'on supposera de classe  $\mathcal{C}^2$ , et  $H = L^2(D)$  on définit le problème aux valeur initiale suivant associé a l'équation *parabolique*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \text{ si } (x, t) \in D \times ]0, \alpha[ \\ u(x, t) = 0 \text{ si } (x, t) \in \partial D \times ]0, \alpha[ \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d b^i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u \quad (3.3)$$

On supposera par la suite que  $\forall 1 \leq i, j \leq d, a^{ij} = a^{ji}$  l'opérateur  $L$  est elliptique dans le sens où  $\exists \theta > 0$  tel que

$$\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall (x, t) \in D \times [0, \alpha] \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^d \quad (3.4)$$

On suppose de plus que foit que  $\forall 1 \leq i, j \leq d, a^{ij}, b^j, c \in L^\infty(D \times [0, \alpha]), h \in L^2(D)$  et que  $f \in L^2(0, \alpha; H^{-1}(D))$ , on définira par la suite la notion de solution faible de 3.2

**Définition 3.4.** Une fonction  $u : [0, \alpha] \rightarrow H_0^1(D)$  est une solution faible de 3.2 si

(1)  $u \in L^2(0, \alpha; H_0^1(D))$  et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \alpha; H^{-1}(D))$

(2) pour tout  $v \in H_0^1(D)$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right\rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v \rangle$$

pour presque tout  $t \in [0, \alpha]$  avec  $a$  définit comme suit

$$\begin{aligned} a(u, v; t) &= \sum_{i,j=1}^d \int_D a^{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx \\ &+ \sum_{j=1}^d \int_D b^j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) v(x) dx + \int_D c(x, t) u(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(3) \quad u(0) = h$$

**Théorème 3.3 ([Eva10]).** *Pour tout  $f \in L^2(0, \alpha; H^{-1}(D))$  et  $h \in H_0^1(D)$  il existe une unique solution  $u \in L^2(0, \alpha; H_0^1(D)) \cap C(0, \alpha; L^2(D))$  de 3.2 dans le sens de la définition 3.4*

### 3.2.1 Équation de la chaleur stochastique

Soit  $D$  un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial D$  sa frontière que l'on supposera de classe  $C^2$ , et  $H = L^2(D)$  on considère le problème aux valeur initiale pour l'équation de la chaleur perturbée :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= (\kappa \Delta - \eta)u + \dot{W}(x, t) \text{ si } (x, t) \in D \times ]0, \alpha[ \\ u(x, t) &= 0 \text{ si } (x, t) \in \partial D \times ]0, \alpha[ \\ u(x, 0) &= h(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

ou  $\Delta = \sum_{i=0}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  est l'opérateur de Laplace,  $\kappa$  et  $\eta$  sont des constantes positive,  $h$  est une fonction de  $L^2(D)$ , le bruit blanc spatiale  $\dot{W}$  est définit comme la dérive temporelle du champ de Wiener.

Avant de procéder a l'étude de ce problème on va énoncer un théorème important pour la suite

**Théorème 3.4 ([Eva10]).** *Soit  $A : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$  un opérateur différentielle définit comme suit*

$$Au = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + c(x)u$$

On considère le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} Au &= -\lambda u \quad x \in D \\ u &= 0 \quad x \in \partial D \end{cases} \quad (3.7)$$

On suppose de plus que  $A$  est coercive, alors il existe une suite de valeurs propres  $(\lambda_k)_k$  du problème 3.7 de multiplicité finie telle que

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

avec  $\lambda_k \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ , et correspondant a chaque valeur propre  $\lambda_k$  il existe une fonction propre  $e_k$  telle que l'ensemble  $\{e_k, k \in \mathbb{N}^*\}$  forment une base orthonormale complète de  $H$ , si de plus les coefficient de  $A$  sont de classe  $C^\infty$  alors les fonctions propres sont aussi de classe  $C^\infty$ .

## Construction d'une solution faible du problème 3.6

Soit  $W(., t)$  un champ de Wiener a valeur dans  $H$  ( $H$ -champ de Wiener) avec une espérance égale a zéro et une fonction de covariance  $r(x, y)$  telle que

$$E[W(x, t)] = 0, \quad E[W(x, t)W(y, s)] = (t \wedge s)r(x, y), \quad (x, t) \in D \times [0, \alpha]$$

On suppose de plus que l'opérateur  $R$  associé a la covariance, de noyau  $r(x, y)$  est de trace finie :

$$Tr(R) = \int_D r(x, x)dx < \infty$$

Pour construire une solution, on applique la méthode d'expansion des fonctions propres. Soit donc  $(\lambda_k)_k$  la suite des valeurs propres associée a l'opérateur  $(\kappa\Delta - \eta)$  avec des conditions aux bords homogènes, et soit  $(e_k)_k$  les fonctions propres associée a ces valeurs propres telle que

$$(\kappa\Delta - \eta)e_k = \lambda_k e_k, \quad e_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Ces fonctions propres forment une base orthonormale de  $H$  de plus d'après ce qui précède, on a  $\eta \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$  et  $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$  par le théorème 3.4 on sait que ces valeurs propres sont de multiplicité géométrique finie et que les  $e_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On cherche une solution de la forme suivante :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_t^{(k)} e_k(x) \quad (3.9)$$

avec  $(u_t^{(k)})_k$  une suite de processus aléatoire a déterminer, pour cela soit  $\beta_t^{(k)} = \langle W(., t), e_k \rangle$ , on supposera de plus que l'opérateur de covariance satisfait la condition  $\langle Re_j, e_k \rangle = \delta_{jk} \sigma_k^2$  avec  $\sigma_k, k = 1, 2, \dots$  des constantes positives et  $\delta_{jk}$  la fonction indicatrice de Kronecker, alors il est facile de vérifier que  $(\beta_t^{(k)})$  est formée de processus de Wiener indépendants de dimension 1 avec  $E[\beta_t^{(k)}] = 0$  et  $E[\beta_t^{(k)} \beta_s^{(j)}] = \delta_{jk} \sigma_k^2 (t \wedge s)$ , on donc écrire  $\beta_t^{(k)} = \sigma_k w_t^{(k)}$  et

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_t^{(k)} e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k w_t^{(k)} e_k(x) \quad (3.10)$$

avec  $(w_t^{(k)})$  une suite de processus de Wiener standard de dimension 1, après substitution de 3.10 et 3.9 dans 3.6 on obtient un système infinie d'équations d'Itô :

$$\begin{cases} dw_t^{(k)} &= -\lambda_k w_t^{(k)} dt + \sigma_k dw_t^{(k)} \\ w_0^{(k)} &= h_k \end{cases} \quad (3.11)$$

avec  $h_k = \langle h, e_k \rangle$ ,  $h \in H$ , la solution de 3.11 est donné par :

$$u_t^{(k)} = h_k e^{-\lambda_k t} + \sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} dw_s^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

qui sont des processus de Ornstein-Uhlenbeck indépendant avec une espérance

$$\hat{u}_t^k = E[u_t^{(k)}] = h_k e^{-\lambda_k t} \quad (3.13)$$

et de covariance

$$Cov[u_t^{(k)}, u_t^{(l)}] = \delta_{j,k} \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k|t-s|} - e^{-\lambda_k(t+s)}) \quad (3.14)$$

On veut montrer la convergence de la série 3.9 on sépare le coté stochastique et déterministe des termes de cette série, et montrer leurs convergences séparément, on écrit donc

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) + v(x, t)$$

avec le termes non stochastique égale a

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_t^{(k)} e_k(x) \quad (3.15)$$

et le terme stochastique

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_t^{(k)} e_k(x) \quad (3.16)$$

où

$$v_t^{(k)} = \sigma_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} dw_t^{(k)} \quad (3.17)$$

On peut facilement montrer que la série 3.15 converge en norme  $L^2(D)$  et est solution de problème 3.6 sans les perturbation aléatoire. Il reste a montrer donc que la série 3.16 converge dans un certain sens a une solution de 3.6 avec  $h = 0$ , pour cela on considère les somme partielle

$$v^{(n)}(x, t) = \sum_{k=1}^n v_t^{(k)} e_k(x) \quad (3.18)$$

d'après la définition des  $v_t^{(k)}$  3.17 on aura du fait que les  $e_k, k = 1, 2, \dots$  forment une base Hilbertienne de  $L^2(D)$  et en utilisant la formule de Pythagore :

$$\begin{aligned}
 E[\|v^{(n)}(\cdot, t)\|^2] &= \sum_{k=1}^n E[|v_t^{(k)}|^2] = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k} (1 - e^{-2\lambda_k t}) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

En se rappelant que  $\lambda_k \geq \eta$  et que  $\sigma_k^2 = \langle Re_k, e_k \rangle$  on aura de ce qui précède

$$\sup_{t \leq \alpha} E[\|v^{(n)}(\cdot, t)\|^2] \leq \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \leq \frac{1}{2\eta} Tr(R) \tag{3.20}$$

puisque la trace est finie par hypothèse on aura :

$$\sup_{t \leq \alpha} E[\|v(\cdot, t) - v^{(n)}(\cdot, t)\|^2] \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{2\lambda_k} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \tag{3.21}$$

et  $v(\cdot, t)$  est un processus  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté à valeurs dans  $H$ , de plus on peut même montrer que le processus composée avec la norme  $N : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  définit par

$$N(f) = E[\|f\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

est continue par rapport  $t$ , où  $G$  est l'espace des des applications  $f(x, \omega), x \in H, \omega \in \Omega$  à valeurs dans  $H$ .

En effet on calcule

$$E[\|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|^2] = \sum_{k=1}^{\infty} E[|v_t^{(k)} - v_s^{(k)}|^2] \tag{3.22}$$

Pour  $0 \leq s < t \leq \alpha$

$$\begin{aligned}
 v_t^{(k)} - v_s^{(k)} &= \sigma_k \left( \int_0^t e^{-\lambda_k(t-r)} dw_r^{(k)} - \int_0^s e^{-\lambda_k(s-r)} dw_r^{(k)} \right) \\
 &= \sigma_k \left( \int_0^s [e^{-\lambda_k(t-r)} - e^{-\lambda_k(s-r)}] dw_r^{(k)} + \int_s^t e^{-\lambda_k(t-r)} dw_r^{(k)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En prenant l'espérance des deux cotés, et considérant l'indépendance des intégrales précédents

$$\begin{aligned}
 E[|v_t^{(k)} - v_s^{(k)}|^2] &= \sigma_k^2 \left( E \left[ \int_0^s (e^{-\lambda_k(t-r)} - e^{-\lambda_k(s-r)}) dw_r^{(k)} \right]^2 + E \left[ \int_s^t e^{-\lambda_k(t-r)} dw_r^{(k)} \right]^2 \right) \\
 &= \sigma_k^2 \left( \int_0^s (e^{-\lambda_k(t-r)} - e^{-\lambda_k(s-r)})^2 dr + \int_s^t e^{-2\lambda_k(t-r)} dr \right) \\
 &\leq \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k} [1 - e^{-2\lambda_k(t-s)}] \leq 2\sigma_k^2(t-s)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$



On aura donc d'après 3.22 on aura

$$E[\|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|^2] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(t-s) = 2Tr(R)(t-s) \quad (3.25)$$

d'où le résultat voulu.

On va maintenant montrer que 3.6 admet une solution faible dans le sens où  $u(\cdot, t)$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté a valeur dans  $H$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  et pour tout  $t \in [0, \alpha]$  on a l'équation suivante

$$\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle + \int_0^t \langle u(\cdot, s), A\varphi \rangle ds + \langle W(\cdot, t), \varphi \rangle \quad (p.s) \quad (3.26)$$

On va montrer que la suite  $u^{(n)}(x, t) = \sum_{k=1}^n u_t^{(k)} e_k(x)$  converge vers cette solution faible.

En intégrant par partie et en prenant compte de 3.11, et en notant  $A = (\kappa\Delta - \eta)$  on obtient

$$\begin{aligned} \langle u^{(n)}(\cdot, t), \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^n u_t^{(k)} \langle e_k, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^n \left( h_k - \lambda_k \int_0^t u_s^{(k)} ds + \sigma_k w_t^{(k)} \right) \langle e_k, \varphi \rangle \\ &= \langle h^{(n)}, \varphi \rangle + \int_0^t \langle u^{(n)}(\cdot, s), A\varphi \rangle ds + \langle W^{(n)}(\cdot, t), \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec  $h^{(n)}$  et  $W^{(n)}$  les  $n$ -ième approximation de  $h$  et  $W$  respectivement, puisque avec  $u^{(n)}$  converge fortement pour la norme  $N$  et en passant à la limite des deux coté, on obtient 3.26.

On vérifie que cette solution est unique, on suppose que  $u_1$  et  $u_2$  sont toute deux des solutions vérifiant 3.26, alors  $\gamma = u_1 - u_2$  vérifie

$$\langle \gamma(\cdot, t), \varphi \rangle = \int_0^t \langle \gamma(\cdot, s), A\varphi \rangle ds$$

En choisissant  $\varphi = e_k$  et  $\gamma_t^{(k)} = \langle \gamma(\cdot, t), e_k \rangle$  on aura d'après ce qui précède

$$\gamma_t^{(k)} = -\lambda_k \int_0^t \gamma_s^{(k)} ds \quad k = 1, 2, \dots$$

ce qui implique d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(\gamma_t^{(k)})^2 \leq \lambda_k^2 \alpha \int_0^t (\gamma_s^{(k)})^2 ds$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall (version intégrale) on obtiendra  $(\gamma_t^{(k)}) = \langle u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t), e_k \rangle = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , puisque l'ensemble des fonction propres  $e_k$  est complet on aura :  $u_1(\cdot, t) = u_2(\cdot, t)$  (p.s) sur  $H$ , on résume les résultats précédent dans le théorème suivant

**Théorème 3.5.** *Soit le développement en fonctions propres de  $u(x, t)$  donné par 3.9, alors  $u(\cdot, t)$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté Gaussien a valeur dans  $H$ , qui est l'unique solution faible du problème 3.6 satisfaisant l'équation 3.26.*

## Conclusion

Dans ce travail on a abordé les notions fondamentale du calcule stochastique plus particulièrement l'intégrale stochastique qui a permit de donner un sens aux équations différentielle stochastique, plus particulièrement cela nous a permet d'étudier l'équation de la chaleur stochastique et donner un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

# Bibliographie

- [Bal17] Paolo BALDI. *Stochastic Calculus : An Introduction Through Theory and Exercises*. 1<sup>re</sup> éd. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [Bar76] Robert G. BARTLE. *The Elements of Real Analysis, Second Edition*. 2<sup>e</sup> éd. Wiley, 1976.
- [Cho14] Pao Liu CHOW. *Stochastic Partial Differential Equations*. 2<sup>e</sup> éd. Advances in applied mathematics. CRC Press, 2014.
- [Eva10] Lawrence C. EVANS. *Partial Differential Equations : Second Edition*. 2<sup>e</sup> éd. Graduate Studies in Mathematics. AMS, 2010.
- [Gal16] Jean-François Le GALL. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. 1st ed. 2016. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2016.
- [Ioa91] Steven E. Shreve IOANNIS KARATZAS. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2<sup>e</sup> éd. Graduate texts in mathematics. Springer, 1991.
- [Kry02] N. V. KRYLOV. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Graduate Studies in Mathematics. Amer Mathematical Society, 2002.
- [Kry94] N.V KRYLOV. *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*. Translations of Mathematical Monographs, v.142. American Mathematical Society, 1994.
- [Kun97] Hiroshi KUNITA. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [Kun19] Hiroshi KUNITA. *Stochastic Flows and Jump-Diffusions*. 1<sup>re</sup> éd. Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer, 2019.
- [Mey66] Paul Andre MEYER. *Probability and potentials*. 1st. A Blaisdell book in pure and applied mathematics. Blaisdell Pub. Co, 1966.
- [Pin01] Mark A. PINSKY. *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets (Brooks Cole Series in Advanced Mathematics)*. 1<sup>re</sup> éd. Thomson Brooks/Cole, 2001.

- [Rud87] Walter RUDIN. *Real and complex analysis*. 3<sup>e</sup> éd. McGraw-Hill, 1987.
- [Sch11] René L SCHILLING. *Measures, integrals and martingales*. 1<sup>re</sup> éd. Cambridge University Press, 2011.