

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ÉNERGÉTIQUE

PAR :

MOKRANI SOFIANE

DAOUDI HALIM

Thème

**SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE
NEWTONIEN DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE AVEC
PROPAGATION D'ONDE DE PRESSION**

Soutenu le 22/06/2017 devant le jury composé de:

Mr. NAIT BOUDA Faïçal

Président

Mr. ALLOUCHE Moussa

Rapporteur

Mr. DJEMA Amar

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017

Remerciements

*Nous remercions d'abord «**Dieu** » le tout puissant qui nous a aidé et donné le courage, la patience et la santé au cours de notre travail, c'est grâce à lui qu'on a fait ce travail malgré tous les obstacles.*

*Nous tenons à remercier fortement nos chers parents qui sont toujours à nos côtés, nous devons également remercier notre encadreur Mr **M.ALLOUCHE**, qui a contribué à l'élaboration de ce modeste travail, avec ses conseils et ses critiques et sa disponibilité qui nous ont permis d'évoluer nos connaissances acquises et de les approfondir.*

Nous adressons aussi nos remerciements les plus sincères aux membres du jury, pour avoir accepté de juger et d'examiner notre travail.

*Nous remercions aussi tous nos **enseignants** pour leurs efforts ainsi que les responsables pédagogiques.*

Enfin nous remercions tous nos amis

A vous tous on vous dit :

*« **MERCI** ».*

Par Halim et Sofiane.

Dédicaces

Que ce travail témoigne de mes respects :

A mes parents :

Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études.

Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux.

Je prie ALLAH de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

A mes sœurs.

A la famille MOKRANI et MOKHTARI.

Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.

A tous mes professeurs :

Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération.

A tous mes amis et mes collègues :

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

MOKRANI SOFIANE

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire

A ma chère MÈRE et à mon cher PÈRE que Dieu les protège et les garde

Pour nous, pour leur soutien permanent durant tout mon parcours

Leurs sacrifices illimités, leurs réconforts, eux qui ont consenti tant

D'effort pour mon éducation, et mon instruction

pour me voir atteindre ce but.

A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage.

À qui je dois de l'amour :

A ma chère sœur MANEL.

A mon cher frère FARID.

A mes grands parents.

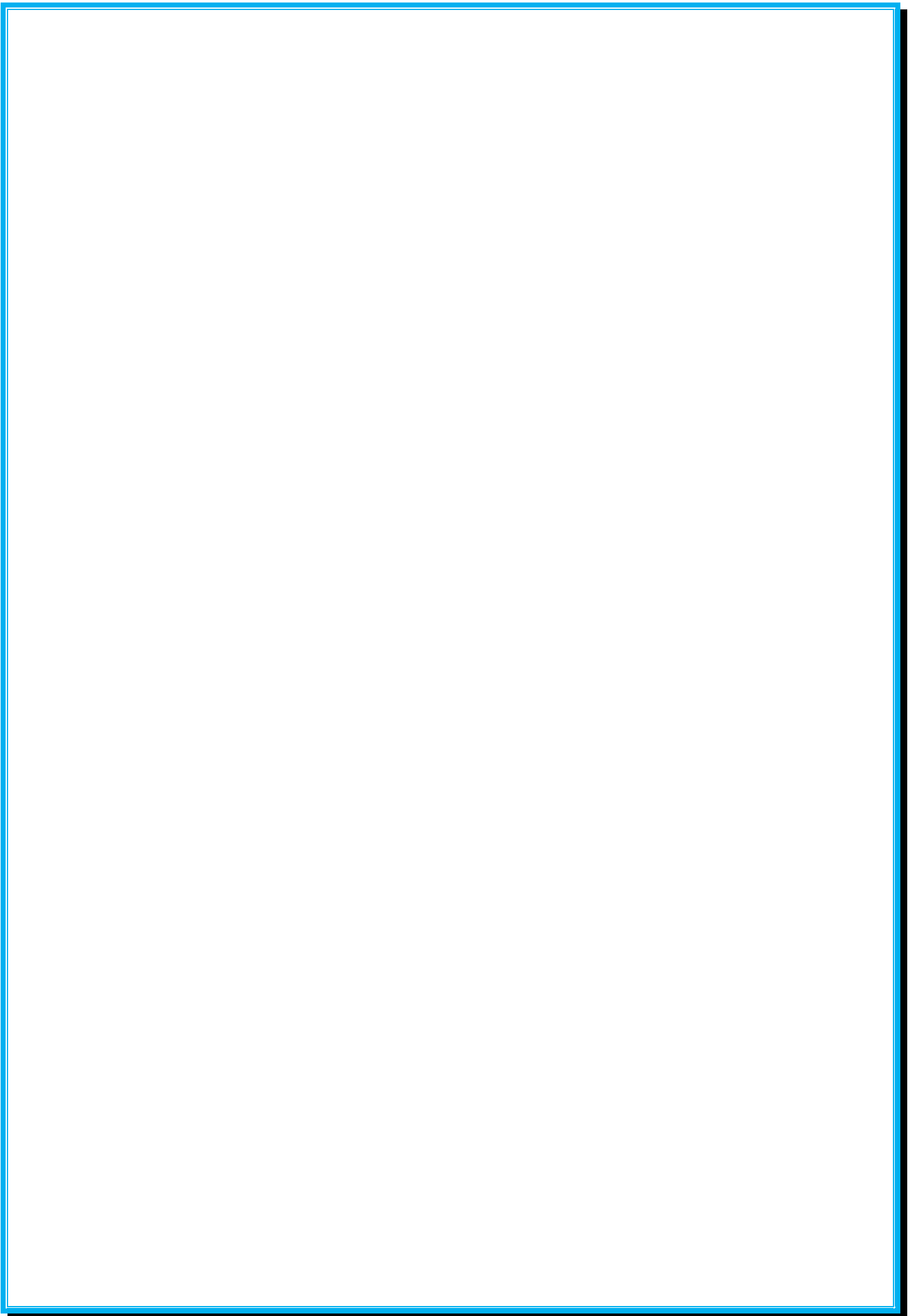
A la famille DAOUDI et MEDDOUR.

A mes oncles et tantes et leurs enfants.

A mes amis.

A tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

Halim



Sommaire

Liste des figures

Nomenclature

Introduction générale.....1

Chapitre 1 : généralités et synthèse bibliographique

1.1 Généralités:.....	4
1.1.1. Ecoulement dans les conduites et les canaux	4
1.1.1.1 Vitesse moyenne	4
1.1.1.2 Débit volumique	5
1.1.1.3 Contrainte de cisaillement	5
1.1.1.4 Coefficient de frottement	5
1.1.1.5 Nombre de Reynolds	6
1.1.1.6 Nombre de Poiseuille.....	6
1.1.1.7 Longueur de développement hydraulique	8
1.1.1.8 Siphon	8
1.1.2 Rappelle sur les écoulements pulsés :	9
1.1.2.1 introduction :.....	9
1.1.2.2 Caractéristique de l'écoulement pulsé :	9
1.1.2.2.1 Définition :	9
1.1.2.2.2 Effet annulaire (Richardson) :.....	10
1.1.3 le phénomène de propagation :	10
1.1.3.1 Notion d'onde :	10
1.1.3.2 Différents types d'ondes :	11
1.1.3.2.1 Onde longitudinale ou transversale:.....	11
1.1.3.2.2 Onde à 1, 2 ou 3 dimensions :.....	12
1.1.3.3 le milieu dispersif et non dispersif :	13
1.1.3.4 Propagation d'ondes mécaniques dans un milieu :	14
1.2 synthèses bibliographiques :	14

Chapitre 2 : positionnement du problème

2.1 Introduction	19
------------------------	----

2.2 Modèle physique	19
---------------------------	----

2.3 Position du probleme physique	19
2.4 Formulation mathematique	20
2.4.1 Hypothèses simplificatrices	20
2.4.2 Equations générales du mouvement	20
2.4.3 Mise en équations du problème	21
2.4.4 Conditions initiales est aux limites	22
2.5 Formulation adimensionnelle	22
2.5.1 Conditions initiales est aux limites	23
2.6 La fonction de courant	24
2.6.1 L'équation en Ψ	25
2.7 Conclusion	26

Chapitre 3 : Procédure Numérique

3.1 Introduction	27
3.2 Ecoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante	27
3.2.1 Discrétisation de l'équation gouvernante et des conditions initiales et aux limites	29
3.2.1.1 Maillage	29
3.2.1.2 schéma de discrétisation:	29
3.2.1.2.a Discrétisation spatiale :	30
3.2.1.2.b Discrétisation temporelle	30
3.2.1.3 Discrétisation du système d'équations :	31
3.2.1.4 Discrétisation des conditions initiales et aux limites :	31
3.3 Ecoulement stationnaire dans une conduite à section variable (sténose)	32
3.3.1 Formulation adimensionnelle :	32
3.3.2 discrétisation de l'équation en Ψ et les conditions aux limites	34
3.3.2.1 Maillage	34
3.4 principe de la méthode des volumes finis	35
3.5 Logiciel gambit	37
3.5.1 Construction de la géométrie	37

3.5.2 Le maillage	37
3.6 Le solveur Fluent.....	40
3.6.1 Simulation sous Fluent	40
Chapitre 3 : Résultats et Discussions	
4.1 Introduction :.....	42
4.2 Ecoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante.....	42
4.2.1 Etude de l'influence de la condition aux limites sur les paramètres de l'écoulement	42
4.3 Ecoulement stationnaire dans une conduite à section variable (sténose).....	47
4.3.1 Etude de l'influence de la géométrie de la sténose sur les paramètres de l'écoulement	47
Conclusion général	56

Références bibliographiques

Annexes

Résumé

Liste des figures

Fig 1.1 L'élaboration des profils de vitesse et les changements de pression à l'entrée d'un écoulement dans un conduit.	4
Fig. 1.2 : Variation du nombre de Poiseuille théorique en fonction Du rapport de forme pour une section rectangulaire.....	8
Fig. 1.3 : Siphon	9
Fig. 1.4 : Mouvement de la vague	11
Fig. 1.5 : Phénomène d'onde longitudinale.....	11
Fig. 1.6 Phénomène d'onde longitudinale dans les gaz.	11
Fig. 1.7 : Phénomène d'onde transversale.....	12
Fig. 1.8 Phénomène d'onde transversale de la corde.	12
Fig. 1.9 Mouvement de la vague.	12
Fig. 1.10 Phénomène d'onde à une dimension.....	13
Fig. 1.11 Phénomène d'onde circulaire.....	13
Fig. 1.12 Phénomène d'onde sonore.	13
Fig. 1.13 Propagation dans différents milieux.	14
Fig. 2.1 Géométrie de problème.....	19
Fig. 3.1 Représentation géométrique du domaine physique d'étude.	28
Fig.3.2 Représentation géométrique du domaine numérique d'étude.....	29
Fig.3.3 Représentation de la parabole $f(z)$	32
Fig.3.4 la géométrie de la sténose après une réadimensionalisation.	33
Fig.3.5 Le domaine numérique de la partie sténose.	34
Fig.3.6 Volume de contrôle typique bidimensionnel.	36
Fig.3.7 Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.....	36
Fig.3.8 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.006$	38
Fig.3.9 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.007$	38
Fig.3.10 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.008$	39
Fig.3.11 algorithme qui donne différent courbure de la sténose	39
Fig. 4.1 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=0.5$	43
Fig. 4.2 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=5$	43

Fig. 4.3 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=20$	44
Fig. 4.4 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=0.5$	45
Fig. 4.5 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=5$	45
Fig. 4.6 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=20$	46
Fig. 4.7 Profil de vitesse axiale à l'entrée et à la sortie de la sténose pour $r_0=0.006m$	47
Fig. 4.8 profil de vitesse axiale à l'entrée et à la sortie de la sténose pour $r_0=0.007m$	48
Fig 4.9 profil de vitesse axiale à l'entrée et à la sortie de la sténose pour $r_0=0.008m$	48
Fig 4.10 profil des vitesses axiales sur l'axe de la sténose.....	49
Fig 4.11 Profil des vitesses radiales à la sortie de la sténose.....	50
Fig 4.12 profil de pression absolue à la sténose et sur l'axe pour $r_0=0.006m$	50
Fig 4.13 Profil de pression absolue à la sténose et sur l'axe pour $r_0=0.007m$	51
Fig 4.14 Profil de pression absolue à la sténose et sur l'axe pour $r_0=0.008m$	51
Fig 4.15 distribution de la pression dans la sténose pour $r_0=0.006$	52
Fig 4.16 distribution de la pression dans la sténose pour $r_0=0.007$	52
Fig 4.17 distribution de la pression dans la sténose pour $r_0=0.008$	53
Fig 4.18 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.006$	54
Fig 4.19 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.007$	54
Fig 4.20 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.008$	54

Nomenclature :

Lettres latines :

A : section transversale.

a et b : largeur et longueur d'un rectangle.

$\frac{D}{D}$: Dérivée particulière.

∂ : Dérivée partielle.

D_h : Diamètre hydraulique de la conduite (m).

D : diamètre de la conduite (m).

f : le coefficient de frottement.

g : la gravité $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

H : profondeur de la conduite (m).

h : profondeur du réservoir (m).

k : vecteur d'onde.

L : La longueur de la conduite (m).

l : La longueur de la sténose (m).

L_e : La longueur de développement hydraulique (m).

P_{rm} : Périmètre de la section (m).

P : la pression $\left(\frac{N}{m^2}\right)$.

Q : débit volumique $\left(\frac{m^3}{s}\right)$.

R : rayon de la conduite (m).

r^* : Rapport de forme .

r_0 : rayon de la sténose(m).

S : surface (m^2).

t : temps (s).

T : période(s).

u, v, w Composantes du champ de vitesse(m/s).

V_g : célérité d'onde $\left(\frac{m}{s}\right)$.

$r \theta z$: Coordonnées cylindriques.

Lettres grecques :

τ : contrainte de cisaillement.

$\bar{\tau}_p$: La contrainte de cisaillement moyenne à la paroi.

μ : viscosité dynamique du fluide (viscosité newtonienne).

ν : viscosité cinématique du fluide.

λ : coefficient de Darcy.

ρ : Masse volumique (kg/m^3).

∇ : Opérateur de dérivation (nabla).

ω : Pulsation $\left(\frac{rad}{s}\right)$.

α : Rapport géométrique $\alpha = \frac{b}{a}$.

Ψ : fonction de courant (kg/s)

Vecteur :

$\vec{V}(U, V, W)$: Vecteur champ de vitesse.

\vec{F} : Vecteur des forces volumiques.

Nombres adimensionnels :

Re : Nombre de Reynolds.

Po : nombre de Poiseuille.

Indices

0: Composante stationnaire (initiale).

moy : composante moyen.

P : paroi.

* : Grandeur adimensionnée.

Introduction générale

Introduction générale

Introduction générale

Le régime transitoire, dans les installations hydrauliques constitue un danger permanent, qui peut survenir à tout moment suite aux diverses manipulations des éléments du réseau.

Le régime transitoire occasionne l'apparition de pressions très élevées ou très faibles, qui engendrent des conséquences désastreuses pour la survie de l'installation, il est source de plusieurs dégâts (détérioration des conduites) qui occasionnent des coûts d'équipements et d'entretien habituellement non prévus.

Son étude et sa maîtrise présentent des intérêts remarquables, lors de la conception et l'implantation des réseaux, en ce sens qu'elle permet, lors du dimensionnement d'en tenir compte pour le choix des diamètres des conduites ou pour l'installation d'éléments pouvant atténuer les effets indésirables.

La prévention du transitoire exige l'utilisation de gros diamètre et d'épaisseurs élevées, ce qui revient toujours cher mais néanmoins garantit une certaine sécurité vis-à-vis des conséquences qu'il peut entraîner.

Le transitoire est un phénomène complexe, qui prend naissance à la suite d'une variation de l'écoulement. Ce dernier possédant une certaine vitesse, qui fonction de sa masse lui communique une énergie cinétique qui peut s'annuler à la suite d'une manipulation sur le réseau.

Parmi les modes d'écoulement transitoire étudiés ; le mode oscillatoire présente un intérêt particulier sur le plan pratique : machines thermiques, pompes, valves, micro électronique (MEMS), micro fluide, le génie hydraulique et la biologie. Les effets engendrés par un écoulement soumis à des pulsations sont, l'effet annulaire dit " de Richardson ", le reversement de l'écoulement, l'augmentation des paramètres moyens de l'écoulement comparés au cas stationnaire et aussi le déphasage entre les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement avec les pulsations imposées. Ces effets sont plus apparents pour les grands nombres de Reynolds cinétiques qui sont équivalents aux fréquences d'oscillations ainsi que pour les grandes amplitudes d'oscillations.

En vertu de la loi de conservation de l'énergie, l'énergie initiale ne peut disparaître instantanément, en fait elle se transforme en énergie potentielle sous forme d'ondes de surpression et de vitesse, qui se propagent le long de la conduite avec une célérité fonction de l'élasticité du matériau et de la compressibilité du fluide.

Introduction générale

Dans les réseaux hydrauliques, figurent divers éléments qui peuvent engendrer la variation de l'écoulement, donc création d'un régime transitoire, parmi ces éléments :

- Les vannes qui occasionnent un phénomène transitoire dont la sévérité dépend des conditions de manipulation (ouverture – fermeture, brusque, continue, ou lente) et de la constitution du réseau
- Les pompes et turbines qui provoquent le transitoires par leurs démarrages, arrêt, ou pertes de puissance
- La géométrie des canalisations qui provoque le transitoire par leur variation de section le long d'une conduite.

Donc l'étude du phénomène des écoulements transitoires en charge vise à déterminer si la pression dans l'ensemble d'un système est à l'intérieur des limites prescrites, suite à une perturbation de l'écoulement.

Evidemment, en définissant l'étendue d'une étude de coup de bélier, on prévoira l'examen des variations de débit et de pression qui résultent de mauvaise opération du système, de son opération normale et des opérations d'urgence. Le concepteur d'un système de transport de liquide sous pression aura avantage à effectuer le design du réseau en ne perdant jamais de vue les considérations du coup de bélier. En effet, certains choix judicieux au stade de conception peuvent minimiser l'étendue d'un éventuel problème de coup de bélier, et donc réduire le coût du système projeté.

Dans le présent travail, nous avons fixé l'objectif de traiter le cas d'un écoulement transitoire (oscillatoire) d'un fluide newtonien dans une conduite cylindrique, en passant par l'aspect théorique ; équations de bases (équation de conservation de la masse ou équation de continuité et équation de conservation de la quantité de mouvement ou équation dynamique) et les hypothèses de base qu'on va vérifier avec les différentes méthodes d'analyses des phénomènes transitoires utilisant comme base mathématique de départ les équations citées auparavant ainsi que les équation d'état et diverses relations entre d'autres grandeurs relatives au phénomène physique.

A partir de ces équations chaque méthode emploie différentes hypothèses simplificatrices et/ou des procédures de résolutions, telle que les méthodes : analytiques, graphiques, numériques, etc. [2].

Mais compte tenu de la complexité du phénomène, ils n'existent pas vraiment de

Introduction générale

solutions analytiques complètes, permettent de résoudre le problème, Alors les méthodes numériques, ont donc pris le relais pour nous permettre de quantifier ce type de phénomène.

Parmi les méthodes numériques les plus utilisées dans ce domaine, on cite :

1. Méthode des caractéristiques (le plus robuste des algorithmes d'analyses de phénomènes transitoires (MDC)).
2. Méthode des différences finies (MDF).
3. Méthode des éléments finis (MEF).
4. Méthodes des volumes finis (MVF).
5. Méthodes combinées (éléments finis-différences finies, éléments finis-volumes finis...).
6. Méthodes de l'analyse spectrale.

A l'heure actuelle, la disponibilité croissante de la puissance de calcul des ordinateurs dont le coût est décroissant, a permis de développer des outils numériques de simulation, dont la précision et la fiabilité sont déjà fort acceptables ; d'autant que l'on respecte les conditions d'utilisations.

Pour atteindre ces différents objectifs, nous avons organisé notre travail en quatre chapitres :

- ✚ Le premier chapitre représente l'état de l'art concernant le phénomène des écoulements transitoire.
- ✚ Le deuxième chapitre représente l'état de l'art concernant l'analyse théorique puis physique du phénomène transitoire (écoulement oscillatoire, qui est un cas particulier de l'écoulement pulse) en tant que régime d'écoulement.
- ✚ Le troisième chapitre est consacré à la description de la méthode numérique basée sur une méthode de différences finies pour la première et la méthode des volumes finie pour la deuxième partie
- ✚ Le quatrième et dernier chapitre, est dédié à la présentation des différents résultats des simulations et à leur interprétation.
- ✚ Enfin, pour conclure notre travail, nous présentons les perspectives et les prolongements possibles à notre étude.

Chapitre 1

Généralités et synthèse

bibliographique

1.1 Généralités:

1.1.1. Ecoulement dans les conduites et les canaux:

Parmi les écoulements internes, qui sont des écoulements délimités par des parois fixes ou mobiles, on trouve les écoulements dans les conduites ou les canaux. C'est un important problème pratique d'ingénierie des fluides: écoulement de différents types de fluides dans les conduits avec différentes formes et de diverses vitesses. Les tuyauteries sont rencontrées dans presque tous les designs de l'ingénierie.

La figure 1.1 montre un écoulement interne dans un long conduit. En amont, on trouve une zone d'entrée (entrance flow) où un écoulement de près non visqueux qui converge et pénètre dans le tube. Une couche limite visqueuse se développe en aval, ce qui retarde l'écoulement axial $u(r, x)$ sur la paroi et accélère ainsi l'écoulement noyau du centre pour maintenir les exigences incompressibles de la continuité.

À une distance finie de l'entrée, les couches limites se fusionnent et le noyau non visqueux disparaît. La vitesse s'ajuste peu à peu jusqu'à « $x = L_e$: longueur de développement hydraulique », l'écoulement dans le tube est alors entièrement visqueux, il ne change plus avec x et on dit qu'il est pleinement développé, « $u \approx u(r)$ » seulement. En aval de « $x = L_e$ » le profil de vitesse est constant, le cisaillement à la paroi est constant et la pression baisse de façon linéaire avec x , soit pour l'écoulement laminaire ou turbulent.

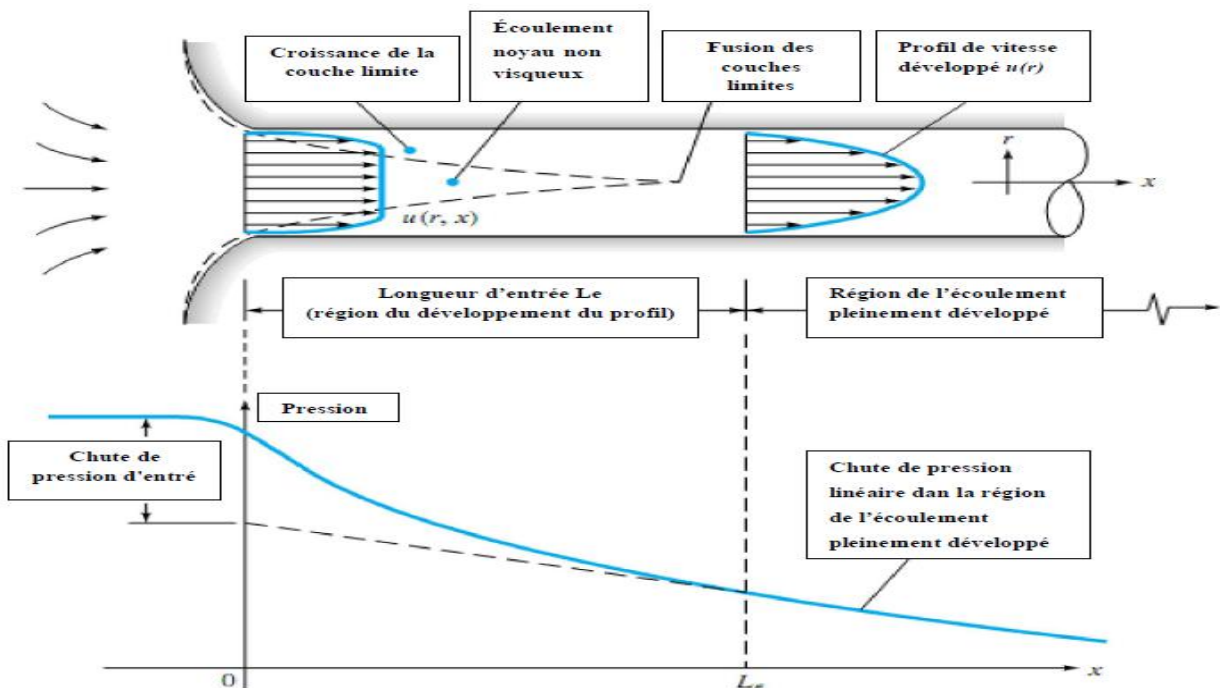


Fig. 1.1 L'élaboration des profils de vitesse et les changements de pression à l'entrée d'un écoulement dans un conduit. [28]

1.1.1.1 Vitesse moyenne

Pour déterminer toutes les caractéristiques de l'écoulement, il faut connaître en premier lieu la vitesse du fluide. Cela peut se faire expérimentalement ou par la résolution des équations de continuité et de Navier-Stokes soit analytiquement, si c'est possible, ou numériquement.

La vitesse moyenne dans une section transversale A est donnée par la relation :

$$w_{moy} = \frac{1}{A} \iint w \, ds \quad (1.1)$$

Avec w est la vitesse de l'écoulement.

1.1.1.2 Débit volumique

Le débit volumique Q à travers une surface A perpendiculaire à la direction de l'écoulement est donné par l'expression :

$$Q = \iint w \, ds \quad (1.2 \text{ a})$$

Ou bien par :
$$Q = w_{moy} \cdot A \quad (1.2 \text{ b})$$

1.1.1.3 Contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement pour un fluide Newtonien se calcul comme suit :

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.3 \text{ a})$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.3 \text{ b})$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide

Et τ_{xz} est la contrainte de cisaillement dans le plan $x y$

1.1.1.4 Coefficient de frottement

a) Coefficient de frottement de Fanning

Le coefficient de frottement de Fanning, nommé d'après J.T. Fanning (1837-1911), est un nombre sans dimension utilisé dans les calculs d'écoulement de fluide. Il est lié à la contrainte de cisaillement à la paroi comme suit:

$$f = \frac{\bar{\tau}_p}{(1/2)\rho w_{moy}^2} \quad (1.4)$$

Avec : $\bar{\tau}_p$ est la contrainte de cisaillement moyenne à la paroi.

b) Coefficient de frottement de Darcy

Appelé par certains auteurs le coefficient de frottement de Darcy-Weisbach, il est 4 fois plus grand que le coefficient de frottement de Fanning :

$$\lambda = 4 f \quad (1.5)$$

1.1.1.5 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds Re est calculé à partir de l'équation suivante

$$Re = \frac{\rho w_{moy} D_h}{\mu} \quad (1.6)$$

où D_h représente le diamètre hydraulique de la conduite. Pour la conduite circulaire il est égal au diamètre de la conduite, tandis que pour les tubes non circulaires, il est donné par :

$$D_h = \frac{4A}{P_{rm}} \quad (1.7)$$

Avec : A c'est la section du tube

P_{rm} C'est le périmètre de la section.

Pour un tube rectangulaire de dimensions $a \times b$, on aura :

$$D_h = \frac{2a.b}{(a+b)} \quad (1.8)$$

Il est à noter que certains auteurs affirment que l'utilisation de la dimension $\mathcal{L} = \sqrt{A}$ au lieu de D_h donne des résultats plus avantageux dans la prédiction du nombre de Poiseuille pour des géométries complexes. [16] [17].

1.1.1.6 Nombre de Poiseuille

Il est défini comme le rapport entre les forces de pression et les force de viscosité.

a) Nombre de Poiseuille expérimental

Lorsqu'un écoulement est étudié, les grandeurs facilement mesurables sont la pression et le débit. A partir du débit mesuré, la vitesse débitante dans la section ($w_{moy} = \frac{Q}{A}$) peut être déterminée et le nombre de Reynolds Re calculé.

La mesure de la pression permet d'obtenir le coefficient de frottement f (ou coefficient de Darcy λ) donné par l'équation :

$$f = \frac{D_h}{2 \rho w_{moy}^2} \left(-\frac{dP}{dz} \right)$$

et qui représente la forme adimensionnelle de la contrainte tangentielle moyenne à la paroi $\bar{\tau}_p$, laquelle s'exprime en fonction du gradient local de pression $\frac{dP}{dz}$ à partir d'un bilan des forces sur un élément de conduite de largeur dz par :

$$\bar{\tau}_p P_r dz = -A dp$$

Le nombre de Poiseuille expérimental est alors défini comme étant le produit entre le nombre de Reynolds et le coefficient de frottement : $Po_{exp} = f Re$. Il peut être directement déduit des relevés expérimentaux et des dimensions des canaux par l'expression suivante :

$$Po_{exp} = \frac{A D_h^2}{2 \mu Q} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (1.9)$$

pour un écoulement incompressible :

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{l}$$

avec ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités de la conduite.

et l est la longueur de la conduite.

b) Nombre de Poiseuille théorique

Pour un écoulement laminaire, en régime établi, d'un fluide newtonien incompressible, le nombre de Poiseuille théorique Po_{th} , produit du nombre de Reynolds et du facteur de frottement, est constant. Il dépend seulement de la géométrie du canal. Ainsi pour des capillaires de section circulaire, il est égal à 16, pour un écoulement entre deux plaques planes, ce nombre vaut 24. Pour des micro-canaux de sections plus complexes, il s'exprime en fonction du rapport de forme α et des angles de la section.

pour les canaux rectangulaires, trois modèles approchés ont été proposés par différents auteurs [30] et sont comparés sur la Figure I.4 :

- Tirunarayanan et Ramachandran, 1965

$$Po_{th} = 14,277 + 1402,5 \left(\frac{1+\alpha(\sqrt{2}-1)}{4(1+\alpha)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right)^{1,9} \quad (1.10)$$

- Shah et London, 1978

$$Po_{th} = 24[1 - 1,3553 \alpha + 1,9467 \alpha^2 - 1,7012 \alpha^3 - 0,9564 \alpha^4 - 0,2537 \alpha^5] \quad (1.11)$$

- Natarajan et Lakshmanan, 1967

$$Po_{th} = 8,968 \left(\frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right)^{0,75} \quad (1.12)$$

Lorsque le rapport de forme α est nul, on retrouve le nombre de Poiseuille d'un écoulement entre deux plaques parallèles ; lorsque α est égal à 1, sa valeur égale à 14,277 est celle d'un écoulement dans une canalisation de section carrée. Les formes approchées de Tirunarayanan et Ramachandran et de Shah et London donnent une valeur très proche de la solution exacte alors que la forme simple proposée par Natarajan et Lakshmanan est peu précise, notamment pour des petits rapports de forme.

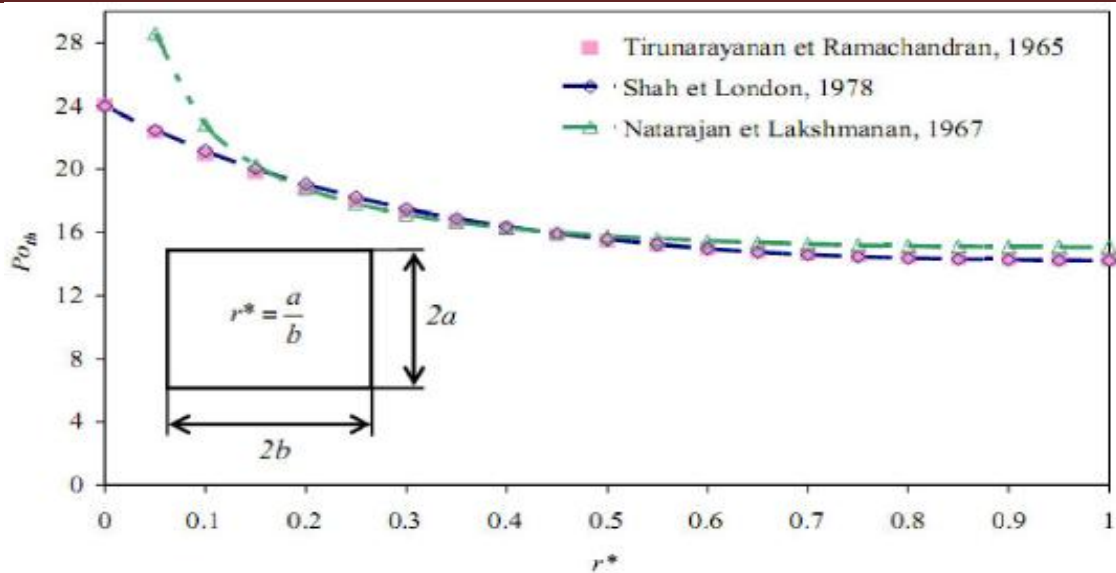


Fig. 1.2 : Variation du nombre de Poiseuille théorique en fonction Du rapport de forme pour une section rectangulaire [31].

Par commodité, lors des études expérimentales on définit fréquemment le coefficient Po^* , forme réduite du nombre de Poiseuille, comme étant le rapport entre nombre de Poiseuille expérimental et nombre de Poiseuille théorique.

$$Po^* = \frac{Po_{exp}}{Po_{th}} \tag{1.13}$$

Lorsque ce coefficient est égal à un, le modèle de Poiseuille et le résultat expérimental concordent. Pour $Po^* > 1$, le modèle de Poiseuille surestime le débit mesuré, et pour $Po^* < 1$, il sous-estime ce débit.

1.1.1.7 Longueur de développement hydraulique

La longueur de développement hydraulique L_e (appelée aussi longueur d'entrée) pour le régime laminaire est donnée par l'équation bien acceptée suivante:

$$\frac{L_e}{D_h} = 0,05 Re \tag{1.14}$$

1.1.1.8 SIPHON

Dans son traité, Blaise pascal fait aussi mention d'un outil spéciale, le SIPHON. Prenons deux réservoirs contenant un même liquide, mais a des niveaux différents. Entrer les deux réservoirs, en installe un tuyau flexible reliant les liquides contenues dans chacun. Si le tuyau est plein de liquide, on constate alors que l'état d'équilibre est brisé est qu'un transfert de liquide

s'amorce jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre s'établisse, soit lorsque les deux surfaces liquides atteignent le même niveau (figure 1.3).

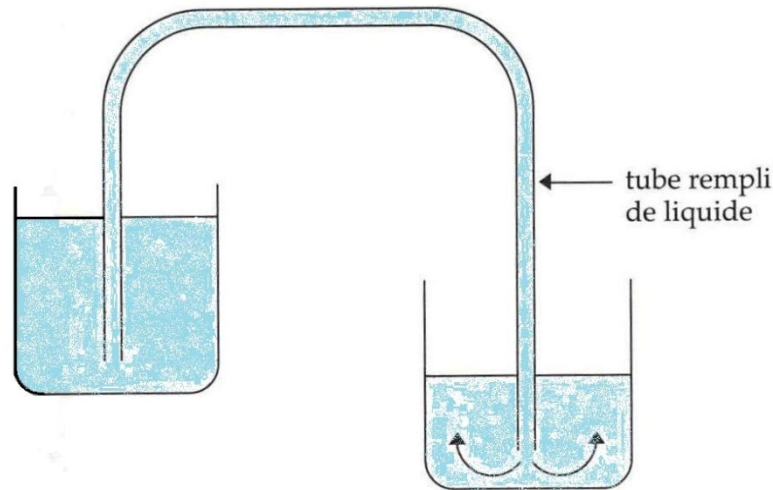


Fig. 1.3 : Siphon [29]

Pascal confirmait ainsi une loi fondamentale de l'hydrostatique en démontrant qu'il ne peut exister de différence de niveau entre les surfaces de volumes communicants d'un même liquide à l'équilibre et ce, peu importe par où les vases communiquent.

1.1.2 Rappel sur les écoulements pulsés :

1.1.2.1 introduction :

L'étude hydrodynamique des écoulements pulsés est loin d'être nouvelle, comme c'est souvent le cas pour de nombreux types d'écoulements elles datent, de début du 20^{ème} siècle. On peut rencontrer des écoulements oscillants ou plus généralement "périodiques" à l'entrée d'une conduite d'eau par exemple ou bien à l'échappement de certaines machines thermiques (moteurs), dans ce cas il s'agit plutôt d'écoulements qu'il faudrait qualifier de "pulsés" avec une vitesse moyenne non nulle. Il convient en premier lieu de définir exactement ce que sous entend cette terminologie.

1.1.2.2 Caractéristique de l'écoulement pulsé :

1.1.2.2.1 Définition :

Il s'agit donc d'un écoulement, laminaire ou turbulent, où la composante stationnaire de l'écoulement moyen de Poiseuille superpose avec la composante oscillatoire, et dont l'amplitude dépend de la vitesse instantanée qui fluctue autour de la valeur stationnaire.

1.1.2.2 Effet annulaire (Richardson) :

L'oscillation d'un fluide engendre plusieurs effets: effet annulaire dit «Richardson» sur les profils de vitesse et de la température, augmentation artificielle de la conductivité thermique équivalente, déphasage entre les flux thermiques échangés et les écarts de température fluide-paroi, entre les coefficients de frottements et la vitesse du fluide.

L'effet annulaire est sensible surtout pour les nombres de Stokes/Womersley importants. Il se caractérise par la présence d'un maximum de la vitesse près de la paroi et n'est pas au centre de l'écoulement comme c'est le cas pour l'écoulement laminaire stationnaire. Il en résulte une structure particulière de couche limite dont l'épaisseur dépend de la fréquence d'oscillation.

1.1.3 le phénomène de propagation :**1.1.3.1 Notion d'onde :**

Un milieu élastique est un milieu qui reprend sa forme (ou son état initial) après avoir subi une déformation. Exemples : corde tendue pincée en un point, ressort dans une spire est déplacée, air perturbé par un son.

Si un point du milieu subit une brusque déformation d'amplitude, il aura tendance à revenir à l'équilibre en affectant son voisinage. On a ainsi une transmission de proche en proche de la perturbation d'un élément du milieu aux éléments voisins.

Si la déformation entretenue d'une manière périodique dans le temps, on dit qu'il y a création et propagation d'une onde dans le milieu.

Exemple : ressort dont une extrémité est excitée par un diapason entretenu électriquement. [32], Pendant le passage de l'onde, le milieu ne se déplace pas dans son ensemble, mais on observe une variation temporaire d'une ou plusieurs grandeurs physiques :

Ressort : déplacement des spires.

Son dans l'air : variation de pression.

Houle : variation du niveau de la mer.

Nerf : transmission d'une différence de potentielle

En même temps que la quantité de mouvement, l'énergie cinétique est transmise d'un élément au suivant, si bien que l'énergie se propage avec l'onde et cela, sans aucun transport de matière elle-même.

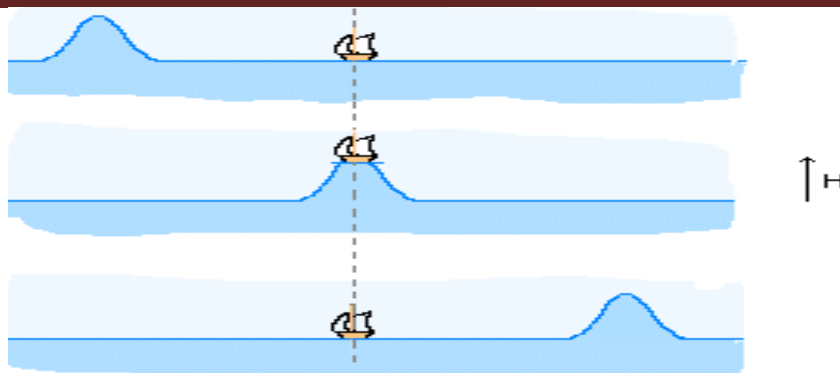


Fig. 1.4 : Mouvement de la vague

1.1.3.2 Différents types d'ondes :

1.1.3.2.1 Onde longitudinale et transversale:

- ❖ **onde longitudinale** : le déplacement est parallèle à la direction de propagation.

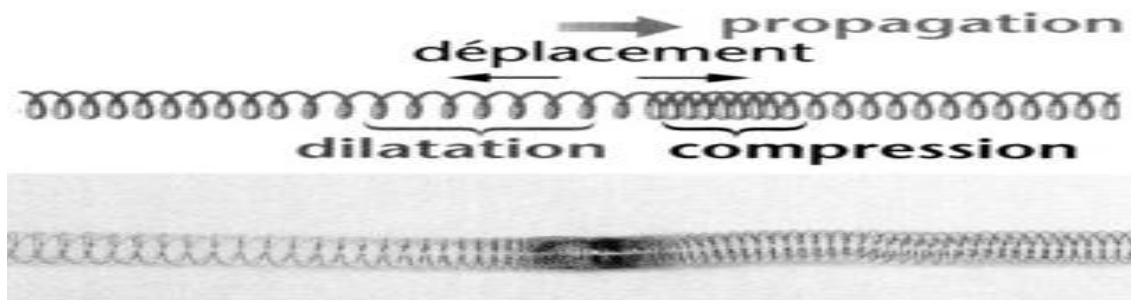


Fig. 1.5 : Phénomène d'onde longitudinale.



Fig. 1.6 Phénomène d'onde longitudinale dans les gaz.

- ❖ **onde transversale** : le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation.

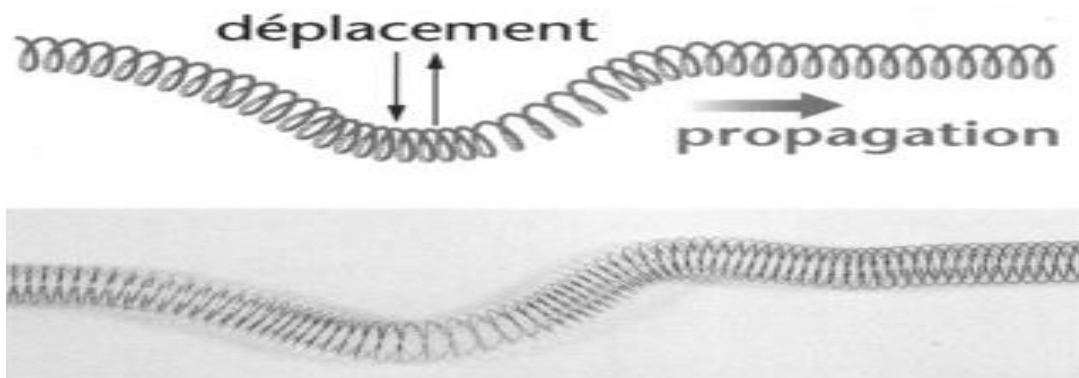


Fig. 1.7 : Phénomène d'onde transversale

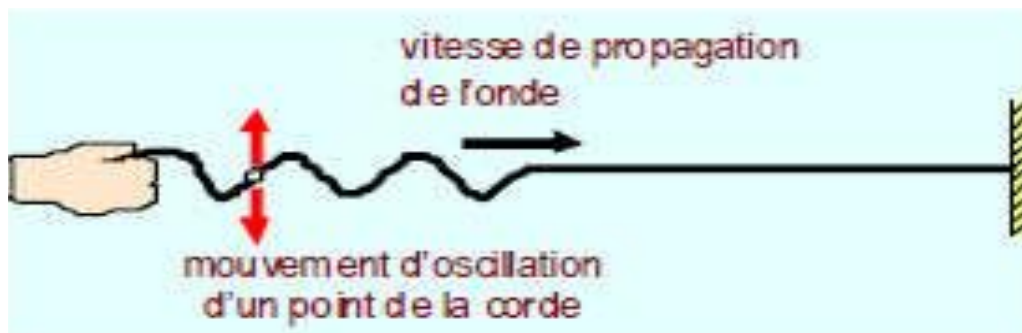


Fig. 1.8 Phénomène d'onde transversale de la corde.

Il y a des ondes qui ne sont pas transversale ni longitudinale comme par exemples les vagues comme le montre les figures :

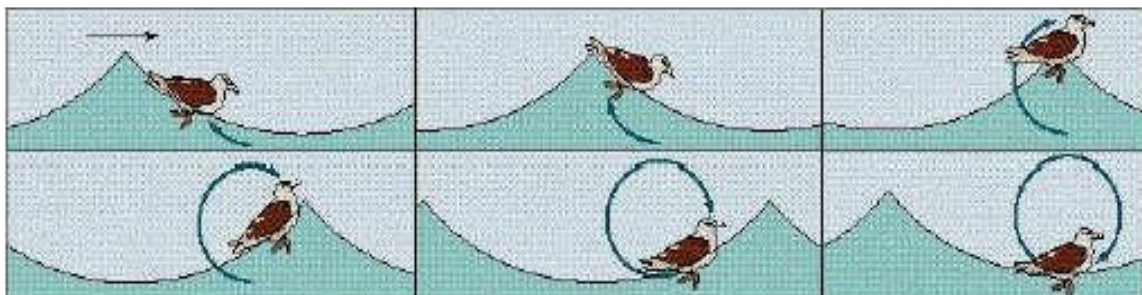


Fig. 1.9 Mouvement de la vague.

1.1.3.2.2 Onde à 1, 2 ou 3 dimensions :

L'onde mécanique se propage à partir d'une source sous différentes formes, il s'agit du nombre de dimension suivant les quelles on peut décrire la propagation du déplacement ou de l'énergie :

- A une dimension : Mouvement le long d'une corde, d'un ressort.

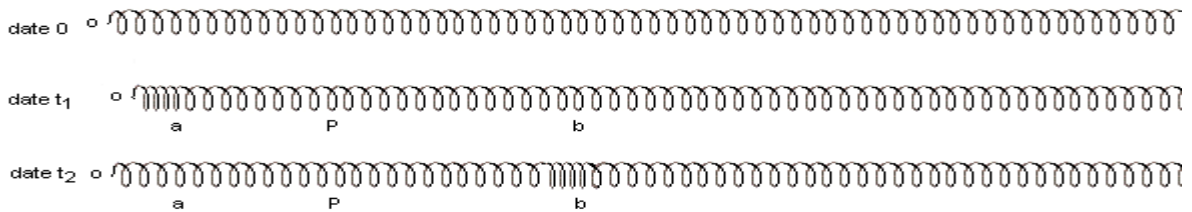


Fig. 1.10 Phénomène d’onde à une dimension.

- A deux dimensions : Mouvement circulaire à la surface d’eau.



Fig. 1.11 Phénomène d’onde circulaire.

- A trois dimensions : Ondes sonores.



Fig. 1.12 Phénomène d’onde sonore.

1.1.3.3 le milieu dispersif et non dispersif :

Il existe deux types de milieux :

- **Milieu dispersif :**

La célérité de l’onde dépend des caractéristiques du milieu et de la longueur d’onde, telle que $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, Les composantes se propagent avec des vitesses de phase différentes. Toute fois si le signal de l’onde n’est pas déformé il se compose d’un groupe d’ondes dont les fréquences se situent dans une bande très étroite. Nous avons dans ce cas, la vitesse du groupe v_g avec laquelle se déplace le groupe d’onde. [33]

- **Milieu non dispersif :**

La célérité dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation, telle que : $k(\omega) = \frac{\omega}{v} = \text{constante}$, Elle ne dépend pas de la fréquence, c'est le cas de la propagation des ondes sonores dans l'air, toutes les composantes d'un son, quelque soient leurs fréquences, se déplacent à la même vitesse. C'est ainsi qu'on peut écouter de la musique sans déformation exécutée par un orchestre. [33]

1.1.3.4 Propagation d'ondes mécaniques dans un milieu :

On définit une propagation d'onde dans un milieu matériel comme étant une perturbation évolutive du milieu sous l'action d'une excitation. Puisque le milieu est constitué de plusieurs particules en interaction entre elles, les forces internes sont responsables du déplacement de la perturbation. Cette propagation dépend des propriétés physiques du milieu où l'onde se propage. [33]

Onde mécanique		
Tremblement de terre	Son d'un haut-parleur	Vague
		
Milieu : terre	Milieu : air	Milieu : eau

Fig. 1.13 Propagation dans différents milieux.

1.2 synthèses bibliographiques :

L'étude de l'écoulement **écoulement pulsé** ou oscillant à l'intérieur d'une conduite, dont l'importance est dictée par le rôle que joue ce dernier dans divers secteurs industriels, a conduit à une importante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années.

Les premiers pas dans l'étude semblent commencer au 19eme siècle, ceci apparait bien dans les travaux de **Stokes (1851)** [1,3], **E. Hagenbach (1860)** [1,4] et **H. Lamb (1879)** [5]. Depuis cette époque les travaux réalisés sur le sujet n'ont pas cessé d'être publiés jusqu'à nos

jours. Les études analytiques, numériques et expérimentales s'y rattachant sont en fait si nombreuses et variées qu'il devient difficile de les citer tous. De plus malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé.

E.G. Richardson et E. Tyler (1929) [6] : ont été les premiers à mettre en évidence par des mesures expérimentales l'existence de l'une des principales caractéristiques des écoulements oscillatoires ; l'effet annulaire (dit de **Richardson**) sur les profils des vitesses. Ceci est caractérisé par la présence d'un maximum près de la paroi et non pas au centre comme c'est le cas pour l'écoulement laminaire permanent (écoulement de Poiseuille). Par la traversée d'un anémomètre à fil chaud à travers le tube, ils ont fait une comparaison de l'écoulement oscillatoire et direct de l'air près de l'embouchure de tubes de différentes sections. Ils ont comparé les gradients théoriques et observés de la vitesse moyenne à travers les sections. Dans l'écoulement oscillatoire un maximum de la vitesse moyenne est trouvé à proximité des parois du conduit, mais dans un écoulement moyen (*way flow*) ce pic annulaire est absent, la vitesse chute en continu du centre du tube jusqu'à une courte distance des murs . Ils ont pu démontrer l'existence d'une couche d'écoulement laminaire près des murs, lorsque le corps principal de l'air est en mouvement turbulent.

G. Szymanski (1932) [7] a présenté une étude analytique d'un écoulement visqueux d'un fluide incompressible à travers une conduite cylindrique lorsque le gradient de pression axiale est une fonction arbitraire de temps. Il a pu aboutir à une solution exacte de l'équation du mouvement.

J.R. Womersley (1955) [8] et S. Uchida (1956) [10] ont étudié, séparément, l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux et incompressible à l'intérieur d'une conduite cylindrique horizontale, à section transversale circulaire. Le gradient de pression est considéré comme une fonction périodique du temps. Ils ont pu aboutir à une solution exacte des équations du mouvement : Ils ont obtenu une expression de vitesse écrite sous forme d'une série de fonction de Bessel de première espèce. Et en fonction de la vitesse , ils ont déterminé le flux massique traversant la section perpendiculaire à la direction de l'écoulement , les contraintes de cisaillement qu'exerce le fluide sur les parois , le coefficient de frottement et d'autres paramètres caractérisant l'écoulement. Ils ont montré qu'il existe une phase de décalage entre le mouvement du liquide et le gradient de pression qui le provoque (déphasage entre le gradient de pression et la vitesse).

C. Fan et B. T. Chao (1965) [11] Ont présenté une étude analytique d'un écoulement parallèle, visqueux, incompressible à travers de longs des conduits rectangulaires lorsque le

gradient de pression axiale est une fonction arbitraire de temps. La solution pour un gradient de pression impulsif est d'abord cherchée en rendant l'équation gouvernante le mouvement homogènes avec les modifications appropriées dans les conditions initiales. Des solutions pour d'autres gradients de pression dépendants de temps sont ensuite obtenues grâce à l'intégration appropriée de la réponse impulsionnelle. La méthode utilisée est celle des fonctions de Green pour le calcul de l'écoulement sous un gradient de pression arbitraire, où la réponse transitoire de la vitesse d'un gradient de pression d'impulsion a été définie comme sa fonction de Green et sa solution en vertu d'un gradient de pression arbitraire peut être obtenue par convolution. D'autres caractéristiques de l'écoulement telles que le taux de dissipation d'énergie par unité de longueur du conduit et le coefficient de frottement sont déduites.

A.J. Majdalani et H. A. Chibli (2002) [13] ont mené une étude de caractérisation de l'écoulement pulsé avec un gradient de pression arbitraire. Ils ont déterminé une solution exacte des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un canal (à section transversale rectangulaire) sous l'influence d'une pression pulsatile. Une généralisation est poursuivie pour une répartition arbitraire de la pression exprimée en termes de coefficients de Fourier. L'écoulement est caractérisé par deux principaux paramètres: le paramètre de pulsation en fonction de gradient de pression périodique, et le nombre équivalent de Stokes, de Womersley, ou de Reynolds cinétique basé sur la fréquence pulsatile. Pour un nombre de Reynolds cinétique élevé, l'écoulement de Poiseuille est facilement récupéré. Inversement, la solution purement oscillatoire présentée par Rott est retrouvée pour un paramètre de pulsation grand. Pour des pulsations sinusoïdales, le débit induit par un mouvement pulsatile est calculé et comparé à son analogue de l'écoulement stationnaire ayant le même gradient de pression. Le montant de l'atténuation d'écoulement est déterminé en fonction de la fréquence et du paramètre de la pulsation. Pour des fréquences élevées, l'écoulement maximal possible est obtenu pour un paramètre donné de pulsation. En caractérisant la vitesse, la vorticité, et les distributions des contraintes de cisaillement, des cas d'inversion de l'écoulement sont identifiés. Les conditions conduisant à l'inversion d'écoulement sont quantifiés pour les petits et les grands nombres de Reynolds cinétiques. Pour un taux de pulsation appréciable, ils ont constaté que l'écoulement s'inverse lorsque le paramètre de pulsation est augmenté au point de dépasser le nombre de Stokes. En caractérisant les coefficients de frottement et sa valeur limite, les critères de conception pour minimiser les pertes visqueuses sont rendues possibles. Pour mieux comprendre l'effet de courbure ou de l'absence de celui-ci, des comparaisons entre les résultats des écoulements plans et ceux des écoulements axisymétriques sont réalisées.

M. Emin Erdogan (2002, 2003) [14 ,15] a réalisé une étude analytique de la solution des équations de Navier-Stokes de quelques écoulements laminaires d'un fluide Newtonien, visqueux et incompressible dans des canaux. Il a donné Certaines propriétés pour des écoulements non stationnaires impulsivement commencé du repos par l'application soudaine d'un gradient de pression constant ou par le mouvement d'impulsion d'une frontière ou deux frontières. Il a illustré cinq exemples, à savoir : l'écoulement non stationnaire dans un cylindre circulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur, le départ de l'écoulement dans un tube circulaire, l'écoulement non stationnaire dans un cylindre tournant, le départ de l'écoulement dans un canal à section rectangulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur et l'écoulement non stationnaire dans un canal à section rectangulaire. Il a trouvé que les expressions des quantités telles que la vitesse, le débit volumique et le coefficient de frottement sont en formes de séries qui peuvent être rapidement convergentes pour les grandes valeurs du temps, mais lentement convergentes pour les petites valeurs du temps, ou vice versa. Il a démontré que si leurs expressions peuvent être trouvées pour l'un des cas : les grandes valeurs du temps ou les petites valeurs du temps, ces expressions peuvent être utilisées pour l'autre cas.

M. Emin Erdogan et C. Erdem Imrak (2004, 2009) [18-20] ont examiné analytiquement quelques propriétés de plusieurs écoulements non stationnaires et unidirectionnels des fluides visqueux. Ces écoulements sont : l'écoulement provoqué par le mouvement impulsif d'une plaque, l'écoulement dû à l'oscillation d'une plaque, l'écoulement induit par une accélération constante de la plaque, l'écoulement imposés par une plaque qui applique une contrainte tangentielle constante sur le fluide, l'écoulement de Couette non stationnaire, l'écoulement non stationnaire entre deux plaques parallèles soudainement mises en mouvement avec la même vitesse et l'écoulement non stationnaire dans un cylindre circulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur. Pour résoudre les quatre premiers cas, ils ont utilisé des transformations en sinus et en cosinus, et ils ont obtenu des solutions exactes pour la distribution de vitesse en termes d'intégrales définies. Les cas pour lesquels le temps tend vers l'infini et la distance entre les deux parois latérales tend vers l'infini sont comparées avec les cas pour les écoulements sur une paroi plane en l'absence des parois latérales. Ceux-ci les ont amenés à connaître le temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire et quelle est la distance entre les parois latérales dont la valeur mesurée de la vitesse ou de la contrainte ne serait pas affectée par la présence des parois latérales. Ils ont étudié aussi les effets des parois latérales sur l'écoulement non stationnaire dans une conduite de section rectangulaire pour deux cas différents. L'un d'eux est l'écoulement transitoire en raison d'un gradient de pression appliqué dans un conduit de section transversale rectangulaire. L'autre est l'écoulement non stationnaire dans un conduit de

section transversale rectangulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur. Ils ont montré que ces effets dépendent de la valeur du rapport d'aspect géométrique. Les variations de la vitesse et le débit volumique en fonction du rapport d'aspect géométrique montre qu'il s'agit d'effets appréciables des parois sur l'écoulement. Il se trouve que le temps nécessaire pour atteindre l'état permanent pour l'écoulement avec des parois latérales est plus court que celui de l'écoulement sans parois latérales.

Hadj Ali, Ghezal et al. (2006)[22] ont étudié analytiquement et numériquement l'influence d'un débit pulsé sur le comportement dynamique d'un écoulement de fluide autour d'un cylindre horizontal se trouvant dans une conduite cylindrique. L'étude analytique a permis d'établir une expression théorique qui détermine le maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et du temps. Le résultat a été validé et confirmé numériquement, il montre, d'une part, que l'effet annulaire s'accroît avec la fréquence et diminue avec la phase, et d'autre part, l'influence des oscillations commence à partir d'une fréquence située au delà de $Re_\omega = 150$. Ces résultats ont été aussi comparés au cas d'un écoulement plan dans une conduite rectangulaire où l'effet annulaire n'est présent que pour certaines phases, contrairement au cas cylindrique.

Ali Tamayol et Majid Bahrami (2010) [24] ont présenté des solutions analytiques pour un écoulement laminaire complètement développé dans des micro-/mini-canaux de sections régulières hyper elliptiques et polygonales sous forme d'expressions compactes. Les géométries considérées couvrent un large éventail de formes communes simplement connexe, y compris cercle, ellipse, rectangle, rectangle avec coins-rond, losange, forme d'étoile, triangle équilatéral, carré, pentagone, et l'hexagone. Une technique d'harmonisation du point (*point matching technique*) est utilisée pour calculer des solutions de forme fermée pour les distributions de vitesse dans les sections des canaux mentionnés ci-dessus. L'approche était basée sur l'utilisation de la solution générale de l'équation de Poisson sous forme de développement en série trigonométrique. Par conséquent, les coefficients nécessaires ont été déclarés pour une large gamme de géométries. En utilisant la solution développée pour la distribution des vitesses, des chutes de pression et des nombres de Poiseuille ont été déterminées pour une variété de coupes transversales. Les relations développées pour la distribution de vitesse et les chutes de pression sont comparées avec succès avec les solutions analytiques et les données expérimentales recueillies auprès de différentes sources pour diverses géométries, y compris des sections polygonales, rectangulaires, circulaires, elliptiques, et rhombiques. Les solutions compactes obtenues constituent un outil pratique et de puissance pour effectuer des analyses hydrodynamiques dans une variété d'applications fondamentales et l'ingénierie tels que de la micro fluidique, les phénomènes de transport, et les milieux poreux.

Chapitre 2

Positionnement du problème

Positionnement du problème

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en équations du problème physique considéré en utilisant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces dernières expriment des principes fondamentaux de la physique.

On commence par l'écriture des équations sous leurs formes générales, puis on passera aux différents traitements de ces équations pour les adapter au cas étudié. Pour cela on doit prendre en considération les hypothèses simplificatrices nécessaires ainsi que les conditions aux limites associées.

2.2 Modèle physique

Le modèle physique étudié est représenté sur la Figure (2.1), c'est une conduite cylindrique à l'intérieur de laquelle circule de l'eau de mer destiné au dessalement.

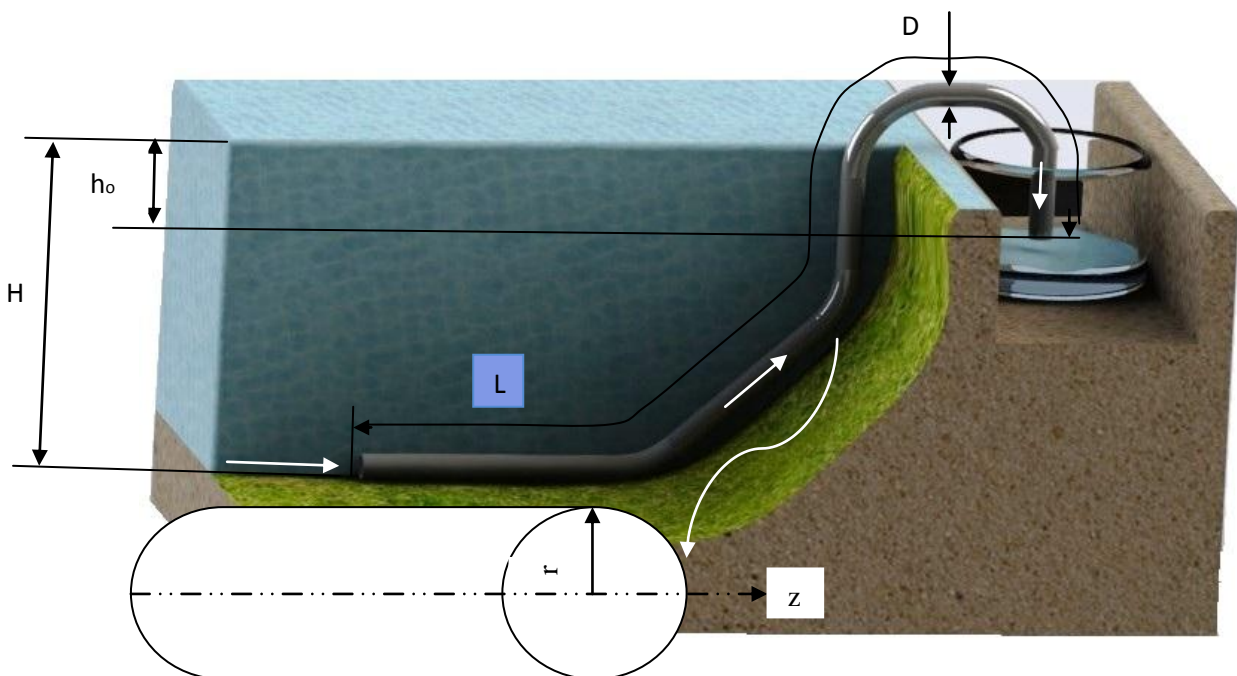


Figure 2.1 : Géométrie du problème.

2.3 Position Du Problème Physique

On se propose d'étudier le comportement dynamique d'un fluide visqueux newtonien et incompressible dans une conduite circulaire, de diamètre D (de rayon R), et de longueur L . La conduite est immergée dans la mère à une profondeur ($H = \text{constante}$).

Elle débite dans un réservoir qui se situe à une profondeur h_0 au dessous du niveau de la mer, en utilisant le principe de fonctionnement du siphon.

Après une certaine durée de fonctionnement de l'installation, les techniciens ont remarqué une diminution du débit de l'eau de mer au niveau du réservoir (due à la diminution de la pression de sortie de l'eau de mer, à cause des pertes de charge à l'intérieure de la conduite). Ces techniciens ont fait varier sinusoidalement la hauteur du réservoir ($h(t) = h_0(1 + \sin \omega t)$), pour rétablir le débit initial de l'installation (vaincre les pertes de charge et rétablir le gradient de pression initiale dans la conduite).

Parmi ces pertes de charge, la sténose, qui se manifeste par un rétrécissement du diamètre de la conduite, ce phénomène apparait à une distance x de l'entre de la conduite ($0 < x < \frac{L}{2}$), il est causé par l'encrassement et les algues.

2.4 Formulation mathématique

Dans cette section, nous allons exposer les différentes étapes de la formulation mathématique nécessaire pour aboutir aux équations finales régissantes.

2.4.1 Hypothèses simplificatrices

- Le fluide est newtonien, visqueux
- L'écoulement est transitoire, laminaire, incompressible et a propriétés physiques constantes, et sans transfert de chaleur.
- Les forces de gravités sont négligeables, ce qui impose la symétrie axiale du problème (axisymétrique).

2.4.2 Equations générales du mouvement

Le traitement du comportement dynamique du fluide envisagé fait appel aux équations du mouvement déduites des principes de conservation de la masse, et de la quantité de mouvement. Nous rappelons brièvement leur forme générale tout en insistant sur la signification des différents termes et sur les mécanismes auxquels ils correspondent.

- **Conservation de masse**

Du point de vue lagrangien, le fluide est conservatif, sa masse reste constante dans le cas d'absence de sources ou de puits de matière. L'équation de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

- **conservation quantité de mouvement**

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{F} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

Où p est la pression, \vec{F} représente le vecteur des forces extérieures appliquées au fluide (forces volumiques).

2.4.3 Mise en équations du problème

On exprimera les équations dans un système de coordonnées cylindriques :

- coordonnées (r, θ, z) ;
- vitesse (u, v, w) ;

❖ projection des équations sur les axes (r, θ, z) :

- **équation de continuité**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r U)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

- **Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes):**

Suivant R :

$$\rho \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V^2}{r} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r U)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (2.4)$$

Suivant θ :

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{U V}{r} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r V)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (2.5)$$

Suivant Z :

$$\rho \left[\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (2.6)$$

Compte tenu de l'ensemble des hypothèses énoncées précédemment et après projection des équations suivant les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , Les équations de conservation qui régissent l'écoulement s'écrivent comme suit :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r U)}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

- **Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes):**

Suivant R :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \quad (2.8)$$

Suivant Z :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \quad (2.9)$$

2.4.4 Conditions initiales et aux limites

- **Condition initiale**

$$W(r, z, t=0) = w_0(r) \quad (2.10.a)$$

$$U(r, z, t=0) = 0 \quad (2.10.b)$$

- **Condition aux limites**

$$U(r=R, z, t)=0 \quad (2.10.c)$$

$$W(r=R, z, t) = 0 \quad (2.10.d)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.10.e)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.10.f)$$

$$P(r,z=0,t) = P_H = \rho g H \quad (2.10.g)$$

$$P(r,z=L,t) = P_h = \rho g h(t) = \rho g h_0 (1 + \sin(\omega t)) \quad (2.10.h)$$

2.5 Formulation adimensionnelle

Afin de rendre les équations mathématiques régissant notre problème sous forme adimensionnelle et d'étudier les propriétés de similitude de cet écoulement, il est nécessaire de réécrire toutes les équations et les conditions aux limites en fonction des grandeurs adimensionnelles.

Le choix des nombres adimensionnels se fait à partir des paramètres de référence qui caractérisent l'écoulement ou le fluide. Dans notre cas, ces grandeurs caractéristiques sont :

Longueur : rayon du cylindre R .

Vitesse : vitesse initiale à l'entrée W_0 .

Pression : pression dynamique ρW_0^2 .

Temps : $\frac{R}{W_0}$.

Nous caractérisons les variables adimensionnelles par un indice (*), et en disposant (*) sur les variables on obtient :

$$U^* = \frac{U}{W_0} ; W^* = \frac{W}{W_0} ; P^* = \frac{P}{\rho W_0^2} ; t^* = \frac{t W_0}{R} ; z^* = \frac{z}{R} ; r^* = \frac{r}{R}.$$

Les équations de conservation qui régissent l'écoulement deviennent :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

- **Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes):**

Suivant R :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \quad (2.12)$$

Suivant Z :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \quad (2.13)$$

Nous avons un système à 3 équations et 3 inconnus (U^* , W^* , P^*), caractérisé par les nombres adimensionnels suivants :

$Re = \frac{W_0 R}{\nu}$: Nombre de Reynolds qui exprime le rapport entre les forces d'inertie et forces visqueuses.

2.5.1 Conditions initiales et aux limites adimensionnelles :

- **Condition initiale**

$$W(r, z, t=0) = w_0(r) / W_0 = 2(1 - r^{*2}) \quad (2.14.a)$$

$$U(r, z, t=0) = 0 \quad (2.14.b)$$

- **Condition aux limites**

$$U(r=1, z, t)=0 \quad (2.14.c)$$

$$W(r=1, z, t=0) \quad (2.14.d)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.14.e)$$

$$P(r^*, z=0, t) = \frac{gH}{W_0^2} \quad (2.14.f)$$

$$P(r, z=\frac{L}{R}, t = \frac{g h_0}{W_0^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\omega R}{W_0} t^*\right)\right) \quad (2.14.g)$$

2.6 La fonction de courant :

On a introduit la fonction de courant pour réunir les équations de continuité et de quantité de mouvement, pour passer d'un système de trois équations à trois inconnues à un système d'équations à une seule équation et une seule inconnue qui est la fonction de courant.

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) + \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(ru) + \frac{d}{dz}(-rw) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{d\Psi}{dr}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ru = \frac{d\Psi}{dz} \\ -rw = \frac{d\Psi}{dr} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dz} \\ w = -\frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \end{array} \right.$$

Après la deuxième adimensionalisation :

$$u = \frac{1}{rfz} \frac{d\Psi}{dz}$$

$$w = -\frac{1}{r^2 f^2} \frac{d\Psi}{dr}$$

2.6.1 L'équation en Ψ

Nous avons introduit la fonction de courant dans les deux équations (2.12) et (2.13) et après une deuxième adimensionalisation ($z^* = z^{**}l, r^* = r^{**}f^*$ Avec $f^* = \frac{f}{R}$), et pour éliminer les termes de pression nous avons dérivé (2.12) par rapport à z et (2.13) par rapport à r puis nous avons réuni les deux équations, on a abouti à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f^5 l^4 r^4 Re} \left(- \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial r} \Psi(r, z) \right) Re f^2 l r^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} \Psi(r, z) \right) Re l^3 r^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} \Psi(r, z) \right) Re f^2 l r^2 \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial z \partial r^2} \Psi(r, z) \right) Re l^3 r^2 + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial r^2} \Psi(r, z) \right) f^2 l^2 r^3 \\ & + \left(\frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi(r, z) \right) f^4 r^3 + \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} \Psi(r, z) \right) l^4 r^3 \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z) \right) Re f^2 l r \\ & + 3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi(r, z) \right) Re l^3 r - \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, z) \right) Re l^3 r \\ & - 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial r} \Psi(r, z) \right) f^2 l^2 r^2 - 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} \Psi(r, z) \right) l^4 r^2 \\ & - 3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, z) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, z) \right) Re l^3 + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi(r, z) \right) - 3 \left(\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, z) \right) l^4 \\ & = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

- **Conditions aux limites :**

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{z=0} = 2f_z^2(r^3 - r)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{z=1} = 2f_z^2(r^3 - r)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$$

$$\Psi(r = 1, z) = 0$$

2.7 Conclusion

Les deux phénomènes physiques cités auparavant (la perte de charge représentée par la sténose et la variation de la hauteur de refoulement h_0 qui a causé la propagation des ondes de pression dans la conduite) ont causé la détérioration d'une partie de la conduite (située à une distance x de l'entrée).

L'objectif de notre travail est d'étudier la répartition de la vitesse et de la pression dans la conduite et plus précisément dans la zone où la conduite s'est détériorée, afin de mieux dimensionner la conduite pour éviter sa détérioration.

Pour cela on doit résoudre les équations de continuité et de quantité de mouvement, la solution analytique s'avère difficile et très compliquée, donc on va résoudre ces équations numériquement en utilisant la méthode des différences finies, schéma semi-implicite de Crank-Nicholson et on va développer un algorithme de résolution de ces équations et on va l'implanter dans le logiciel Matlab et Maple, pour obtenir les répartitions de pression et de vitesse, ce qui fera l'objectif de notre étude dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Procédure Numérique

3.1 Introduction

Les écoulements instationnaires des fluides incompressibles dans une géométrie complexe, sont gouvernés par les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes. Ces équations sont non linéaires, et pour lesquelles une solution analytique reste difficile à obtenir. Cela impose le recours aux méthodes de résolutions numériques.

Dans la simulation numérique, la première étape consiste à définir le modèle géométrique représentant le domaine sur lequel la solution numérique devra être calculée. On procède ensuite à la discrétisation du domaine, c'est-à-dire le maillage du domaine suivant les propriétés de la géométrie et de l'écoulement. Par la suite, on choisit un schéma de discrétisation approprié pour chaque terme du système. Une fois les équations sont discrétisées, on cherche la méthode convenable pour la résolution du système d'équations algébriques résultant.

Pour ce qui concerne notre cas, nous allons étudier d'abord l'écoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante (c'est le cas particulier), par la suite on passe à l'étude de l'écoulement à l'intérieure d'un tronçon de la conduite à section variable (c'est le cas général, qui se manifeste par la présence d'une sténose).

3.2 Ecoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante

Du fait que l'écoulement à l'intérieure de la conduite est à section constante (représentée sur la figure 3.1), et nous allons prendre en considération les hypothèses simplificatrices citées au paravent, supposant que $\vec{U} = \vec{0}$ (la vitesse radiale est nulle).

Les paramètres qui définissent l'écoulement sont comme suite :

$$g=9.81 \text{ ms}^{-2}$$

$$L=10 \text{ m}$$

$$\text{Re}=12.529376$$

$$W_0=0.6264 \text{ ms}^{-1}$$

$$H=0.3 \text{ m}$$

$$h_0=0.2 \text{ m}$$

$$R=0.01 \text{ m}$$

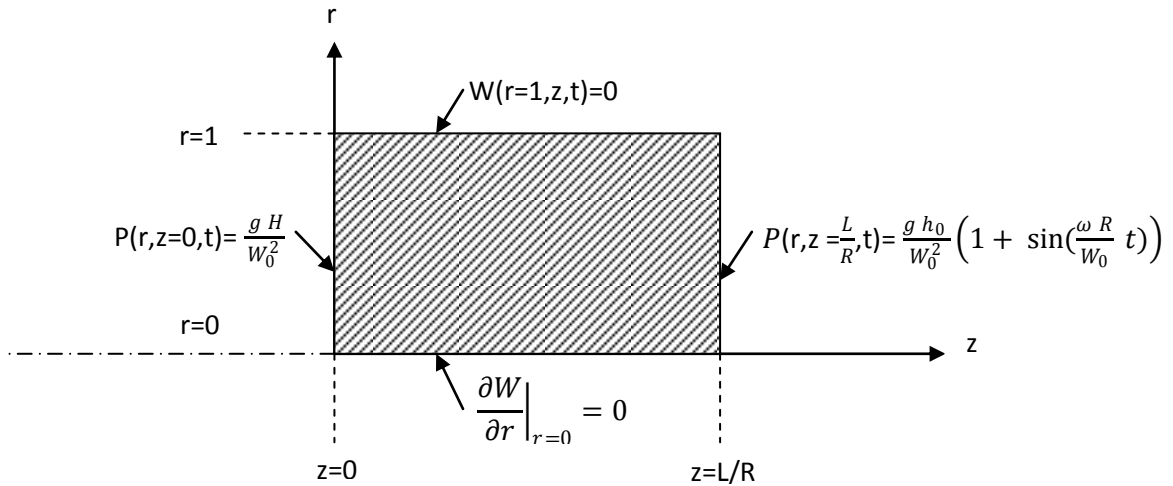


Fig.3.1 Représentation géométrique du domaine physique d'étude.

L'équation régissant l'écoulement peut s'écrire selon la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial W^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right] \quad (3.1)$$

Tel que : $W=W(r,t)$ et $P=P(z,t)$

On suppose que : $-\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{\Delta P(t)}{\Delta z}$

Donc
$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta z} = \frac{R g}{L W_0^2} \left[H - h_0 \left(1 + \sin \left(\frac{\omega R}{W_0} t \right) \right) \right]$$

$$-\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{\Delta P(t)}{\Delta z} = \underbrace{E}_1 - \underbrace{F \sin(G t)}_2 \quad (3.2)$$

Tel que

1 : partie stationnaire (ΔP_0)

2 : partie instationnaires (qui crée le phénomène transitoire)

$$E = \frac{R g (H - h_0)}{L W_0^2}$$

$$F = \frac{R g h_0}{L W_0^2}$$

$$G = \frac{\omega R}{W_0}$$

Donc l'équation (3.1) devient

$$\frac{\partial W}{\partial t} = E - F \sin(G t) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \quad (3.3)$$

3.2.1 Discrétisation de l'équation gouvernante et des conditions initiale et aux limites

3.2.1.1 Maillage

La spécification du maillage dépend de la complexité de la géométrie. Si cette dernière est cylindrique, comme c'est le cas de notre problème, il est recommandé d'utiliser un maillage rectangulaire (figure 3.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow i \\ t \rightarrow n \end{array} \right. \quad W(r,t) \rightarrow W_n^i \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} r = i \Delta r \\ t = n \Delta t \end{array} \right.$$

$$N = 1/\Delta r \quad ; \quad n_{\max} = t_{\max} / \Delta t$$

$$0 \leq r \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq t \leq t_{\max}$$

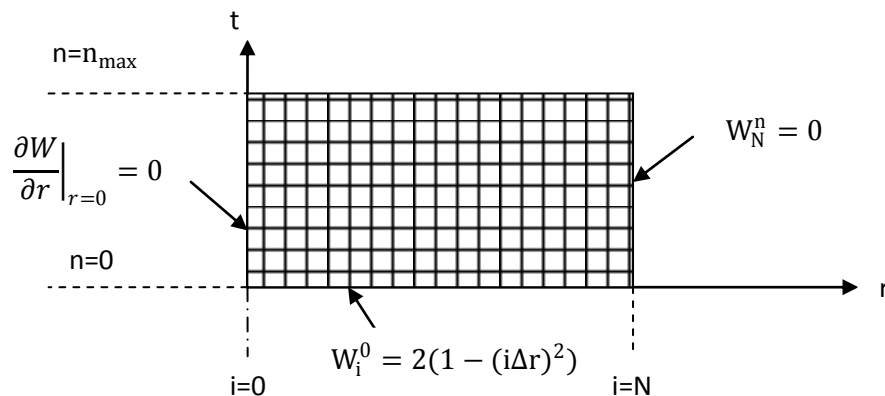


Fig.3.2 Représentation géométrique du domaine numérique d'étude.

3.2.1.2 Schéma de discrétisation

L'objectif de la discrétisation des termes des équations du système est de parvenir à un système matriciel : $Ax = b$

Où A est une matrice, x est le vecteur inconnue recherché et b le vecteur non homogène.

Les termes du système d'équations aux dérivées partielles (3.3) ne sont pas discrétisés de la même manière. On note l'utilisation de deux types de discrétisation ; spatiale et temporelle.

Les équations de Navier-Stokes relatives à cette étude sont de type parabolique suivant le temps; leur résolution se fait par une discrétisation du premier ordre dans le temps.

3.2.1.2 .a Discrétisation spatiale :

Le traitement spatial des différents termes fait appel aux différentes formes des dérivées afin d'assurer la stabilité et la convergence du schéma numérique.

La discrétisation du système (3.3) par rapport aux variables spatiales est donnée comme suit :

➤ Précision d'ordre deux $O(h^2)$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n}{\Delta r^2} \quad \text{Opérateur centré}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{W_{i+1}^n - W_{i-1}^n}{2 \Delta r} \quad \text{Opérateur centré}$$

3.2.1.2 .b Discrétisation temporelle

Dans le cas des problèmes transitoires, deux types de schéma sont utilisés :

- Schéma explicite
- Schéma implicite

- **Schéma explicite**

Un schéma est dit explicite si la solution discrète est connue explicitement en fonction du temps. L'inconvénient du schéma explicite réside dans le fait qu'il est conditionnellement stable, c'est-à-dire que le choix du pas de temps est limité par des contraintes de stabilité numérique.

- **Schéma implicite**

Un schéma est implicite si la grandeur inconnue à l'instant $(t+\Delta t)$ est exprimée en fonction des grandeurs à l'instant t aussi bien des grandeurs inconnues correspondant à l'instant $(t+\Delta t)$. Cette méthode est inconditionnellement stable et permet d'utiliser un pas de temps assez grands, mais leur mise en œuvre conduit souvent à des calculs compliqués.

Il demeure, cependant, nécessaire de rechercher une méthode intermédiaire, c'est-à-dire, un schéma qui est inconditionnellement stable et qui ne demande pas un temps de calcul élevé. Parmi ces schémas, on cite le schéma de Crank-Nicholson.

a. Le schéma de Crank-Nicholson

Cette méthode consiste à combiner la précision du schéma explicite avec la stabilité du schéma implicite. Sa schématisation est plus difficile à réaliser. Elle présente, cependant, l'avantage d'être précise à l'ordre $O(\Delta t^2)$ sur le demi-intervalle de temps et elle est inconditionnellement stable. Les variations d'un instant t vers un instant $(t+\Delta t)$ se font linéairement et donnent des résultats plus exacts pour un Δt faible relativement aux méthodes complètement implicites, Patankar [1980].

3.2.1.3 Discrétisation du système d'équations :

Pour la discrétisation des dérivés partiels par rapport au temps, on a utilisé une méthode aux différences finies semi-implicite du type Crank-Nicholson. Elle est très proche de celle utilisée par R.Peret [1976] et d'autres auteurs. Les équations du système (3.3) sont réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} = & E - \frac{F}{2} (\sin(Gn\Delta t) + \sin(G(n+1)\Delta t)) \\ & + \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \left(\frac{W_{i+1}^{n+1} - 2W_i^{n+1} + W_{i-1}^{n+1} + W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n}{\Delta r^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{i\Delta r} \frac{W_{i+1}^{n+1} - W_{i-1}^{n+1} + W_{i+1}^n - W_{i-1}^n}{2\Delta r} \right) \end{aligned}$$

$$\gamma + (\alpha + \beta)W_{i+1}^{n+1} - (2\alpha + 1)W_i^{n+1} + (\alpha - \beta)W_{i-1}^{n+1} + (\alpha + \beta)W_{i+1}^n - (2\alpha - 1)W_i^n + (\alpha - \beta)W_{i-1}^n = 0 \tag{3.4}$$

Tel que : $i=1, \dots, N-1$ et $n=0, \dots, n_{\max}$

$$\gamma = E - \frac{F}{2} (\sin(Gn\Delta t) + \sin(G(n+1)\Delta t))$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{2 \operatorname{Re} \Delta r^2} \quad ; \quad \beta = \frac{\Delta t}{4 \operatorname{Re} i \Delta r^2}$$

3.2.1.4 Discrétisation des conditions initiales et aux limites :

- **condition initiales**

$$W_i^0 = 2(1 - (i\Delta r)^2)$$

- **conditions aux limites**

$$W_N^n = 0$$

$$\frac{W_{i+1}^n - W_{i-1}^n}{2 \Delta r} \Big|_{i=1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_2^n = W_0^n$$

3.3 Ecoulement stationnaire dans une conduite à section variable (sténose)

Présentation de la géométrie de la conduite en présence de la sténose avant la réadimensionalisation :

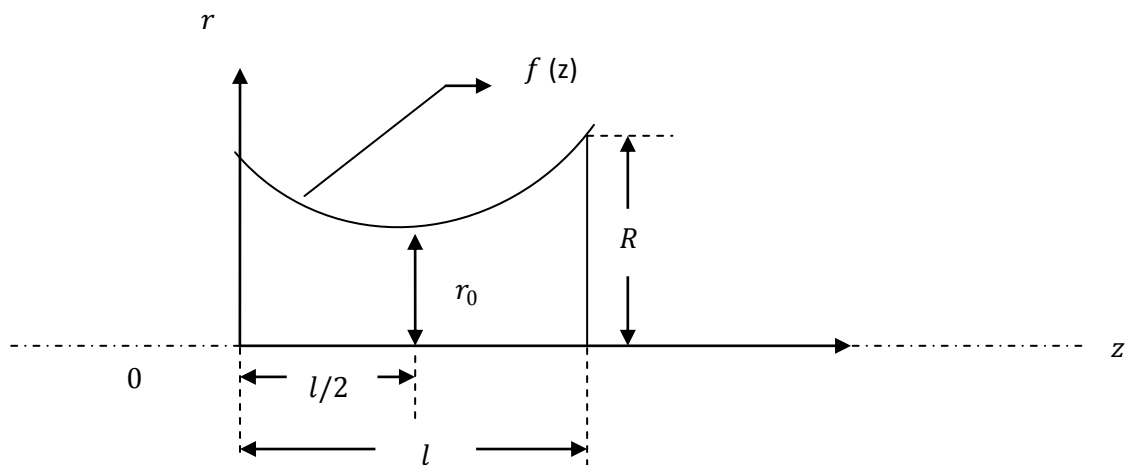


Fig.3.3 Représentation de la parabole f(z).

La géométrie de la sténose est représentée par la parabole f(z) tel que :

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

Calcule les paramètres a b et c de f(z) :

Avec $f(z=0) = R$

$$f(z=l) = R$$

$$f(z=\frac{l}{2}) = r_0$$

$$f(z) = \frac{4(R-r_0)}{l^2} z^2 + \frac{4(r_0-R)}{l} z + R$$

3.3.1 Formulation adimensionnelle :

❖ Réadimensionalisation des paramètres géométriques des équations de continuité et de quantité de mouvement (NAVIER STOKS), ainsi que f(z) :

On a opté à une deuxième adimensionalisation pour amener le domaine de d'étude dans l'intervalle [0 1]

$$z^* = z^{**} l \quad r^* = r^{**} f^* \quad \text{Avec} \quad f^* = \frac{f}{R}$$

- Après une deuxième adimensionnement et on disposant (**) sur les variable on obtien(Fig.):

$$f^*(z) = \frac{f(z)}{R} = 4(1 - h_0/R)z^2 + 4(h_0/R - 1)z + 1 \quad (3.5)$$

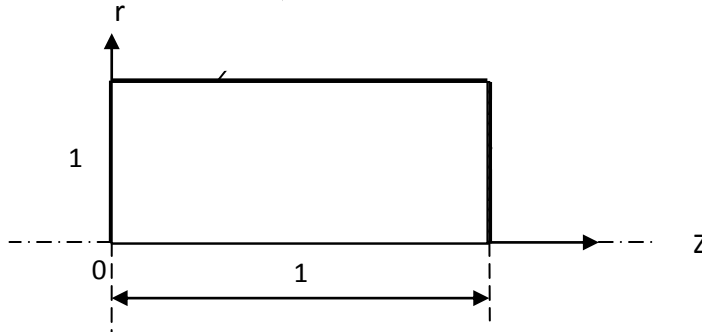


Fig.3.4 la géométrie de la sténose après une réadimensionnement.

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U^*}{\partial r^*} + \frac{U^*}{r^*} + \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = 0 \quad (3.6)$$

Après une deuxième adimensionnement :

$$\frac{1}{f} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{rf} + \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

- **Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :**

Suivant R :

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + W^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} - \frac{U^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (3.8)$$

Après une deuxième adimensionnement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{f} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{l} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{f} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{f^2 r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2 f^2} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \quad (3.9)$$

Suivant Z :

$$\frac{\partial W^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + W^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial z^{*2}} \right]$$

Après une deuxième adimensionnement :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{U}{f} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{l} \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{1}{l} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{f^2 r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \quad (3.10)$$

3.3.2 Discrétisation de l'équation en Ψ et les conditions aux limites :

3.3.2.1 Maillage

La spécification du maillage dépend de la complexité de la géométrie. Si cette dernière est cylindrique, comme c'est le cas de notre problème, il est recommandé d'utiliser un maillage rectangulaire (figure).

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow i \\ z \rightarrow j \end{array} \right. \quad \Psi(r,z) \rightarrow \Psi_{i,j} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} r=i \Delta r \\ z=j \Delta z \end{array} \right.$$

$$M=1/\Delta r \quad ; \quad N = 1/\Delta z$$

$$0 \leq r \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq z \leq 1$$

Le domaine numérique:

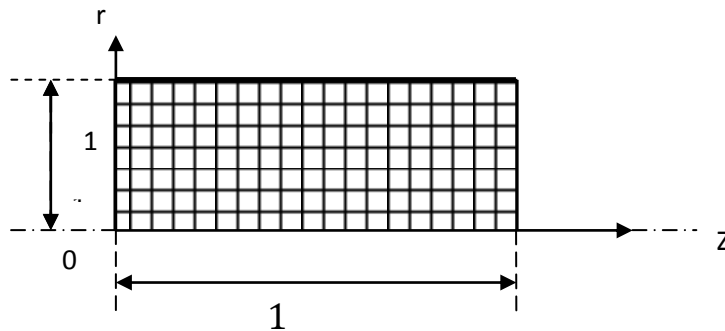


Fig.3.5 Le domaine numérique de la partie sténose

L'équation en Ψ : voire l'annexe A4

- Les conditions aux limites

$$-\frac{\Psi_{i,j}}{h_z} + \frac{\Psi_{i,j+1}}{h_z} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{i,j+1}}{h_z} - \frac{\Psi_{i,j}}{h_z} &= 0 \\ -\frac{\Psi_{i,j}}{h_r} + \frac{\Psi_{i+1,j}}{h_r} &= 2f_z^2 RR_i^3 - 2f_z^2 RR_i \\ -\frac{\Psi_{i-1,j}}{h_r} + \frac{\Psi_{i,j}}{h_r} &= 2f_z^2 RR_i^3 - 2f_z^2 RR_i \\ -\frac{\Psi_{i,j}}{h_z} + \frac{\Psi_{i,j+1}}{h_z} &= 0 \\ -\frac{\Psi_{i-1,j}}{hr^2} - \frac{2\Psi_{i,j}}{hr^2} + \frac{\Psi_{i+1,j}}{hr^2} &= 0 \\ -\frac{\Psi_{i-1,j}}{hr} - \frac{\Psi_{i,j}}{hr} &= 0 \\ \Psi_{M+2,j} &= 0 \end{aligned}$$

Par manque de temps, nous n'avons pas pu finaliser le code servant à la résolution de l'équation (3.11), et comme nous disposons d'un logiciel puissant comme FLUENT, donc nous avons opté pour résoudre la deuxième partie du problème en utilisant ce code de calcul qui utilise des schémas numériques, de type volumes finis adaptés à la simulation.

Dans ce qui suit nous utilisons les paramètres sous leur forme dimensionnelle.

3.4 principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébriques, qui peuvent être résolus numériquement elle consiste à intégrer les équations de transport ou aux dérivées partielles (EDP) sur chaque volume de contrôle, couvrant ainsi tout le domaine physique. Pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (V_c).

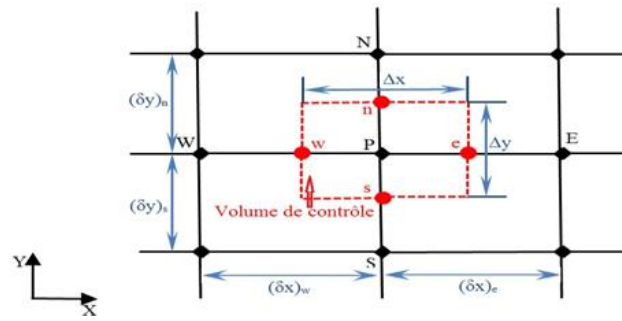


Fig.3.6 Volume de contrôle typique bidimensionnel.

❖ **Volume de contrôle typique** : ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires. Les faces de ce volume sont localisées au point e, w, n, s.

Avec p le centre du volume de contrôle. E, W, N, S, sont les centres des volumes de contrôle adjacents. (Figure.3.6)[34]

Pour un nœud principal P, les points E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôle adjacents, situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud du point P. Le volume de contrôle P est montré par les lignes discontinues, et ces faces sont localisées aux points e et w dans la direction x, n et s dans la direction Y.

La subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection présente un nœud, où on trouve la variable P et les composantes u et v du vecteur vitesse qui se trouve au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents qui se séparent par les incréments de distance ($\Delta y, \Delta x, \delta y_n, \delta y_s, \delta x_w, \delta x_e$) sont définis sur la (Figure.3.6). Les scalaires ϕ sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u et v sont stockées dans des nœuds décalés (Figure.3.7). L'emploi de tels maillages entrelacés permet de calculer les gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses, cette technique nous permet d'éviter l'instabilité [35]. Dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

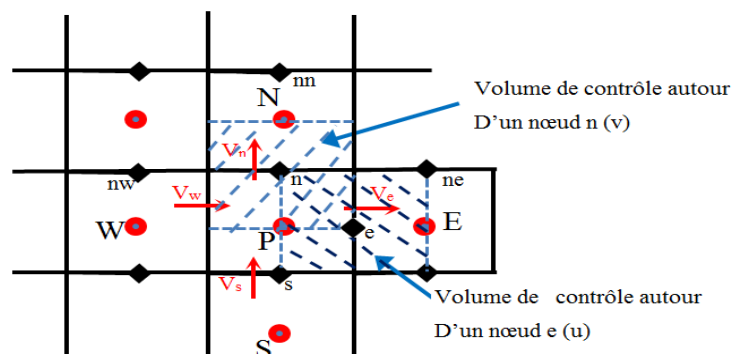


Fig.3.7 Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.

- ❖ **Volume de contrôle décalé** : ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des grandeurs vectorielles (par exemple on peut utiliser ce type de volume de contrôle pour calculer les vitesses u et v) (Figure 3.7). [34]

3.5 Logiciel gambit

C'est un pré processeur intégré pour l'analyse en CFD (Computation Fluide Dynamics). Il permet à l'utilisateur de construire la géométrie du domaine de calcul et de subdiviser ce dernier en petits volumes de contrôle ou cellules de calcul. L'ensemble de ces volumes élémentaires constitue le maillage. La définition des conditions aux limites appropriées, au niveau des cellules qui coïncident ou touchent la frontière du domaine de calcul, se fait également à ce niveau. Il permet de créer plusieurs types de maillage suivant la géométrie et de spécifier le type de matériau (fluide ou solide). Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outil de création, génération, vérification de maillage du modèle étudié [36].

3.5.1 Construction de la géométrie

La finalité de la construction de la géométrie est de définir le domaine de calcul qui sera caractérisé par des faces dans un problème en deux dimensions, pour ce la on a tracé trois différentes géométries qui dépendent uniquement du rayon de rétrécissement r_0 .

3.5.2 Le maillage

Étant donné que la géométrie du problème est régulière (rectangulaire ou circulaire par exemple), le choix de maillage est simple. Les lignes du maillage suivant souvent les directions de coordonnées cartésiennes. Pour les géométries complexes, le choix n'est pas tout à fait simple où le maillage est souvent sujet de contraintes imposées par la méthode de discrétisation.

Si l'algorithme désigné pour un maillage curviligne et orthogonal, le maillage non orthogonal ne peut pas être utilisé. Si les volumes de contrôle sont exigés pour être quadrilatères ou hexaèdres, les mailles constituées par des triangles ne peuvent pas être utilisées quand la géométrie est complexe et les contraintes ne peuvent pas être accomplies nous rencontrerons bien sûr des compromis.

Après avoir énumérer les différents types de maillage on a opté pour un maillage rectangulaire, et on a utilisé trois géométries pour trois différentes courbures ($f(z)$) de la sténose (Figure 3.10, 3.11, 3.12), ces courbures on les a obtenues en utilisant un algorithme MATLAB (Figure 3.13).

Soit les données des géométries étudiées comme suit :

$$l = 0.02 \text{ m} \quad ; \quad R = 0.01 \text{ m}$$

$$\mu = 0.01 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-1} \quad ; \quad w_0 = 0.2664 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{Re} = 1252,64$$

- Les géométries :

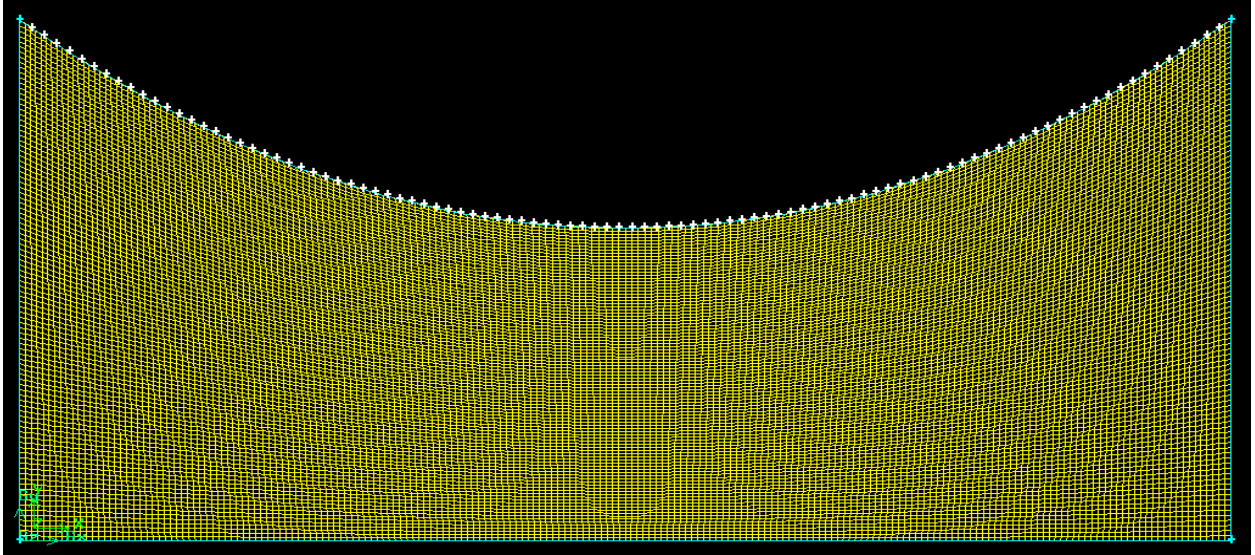


Fig.3.8 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.006$

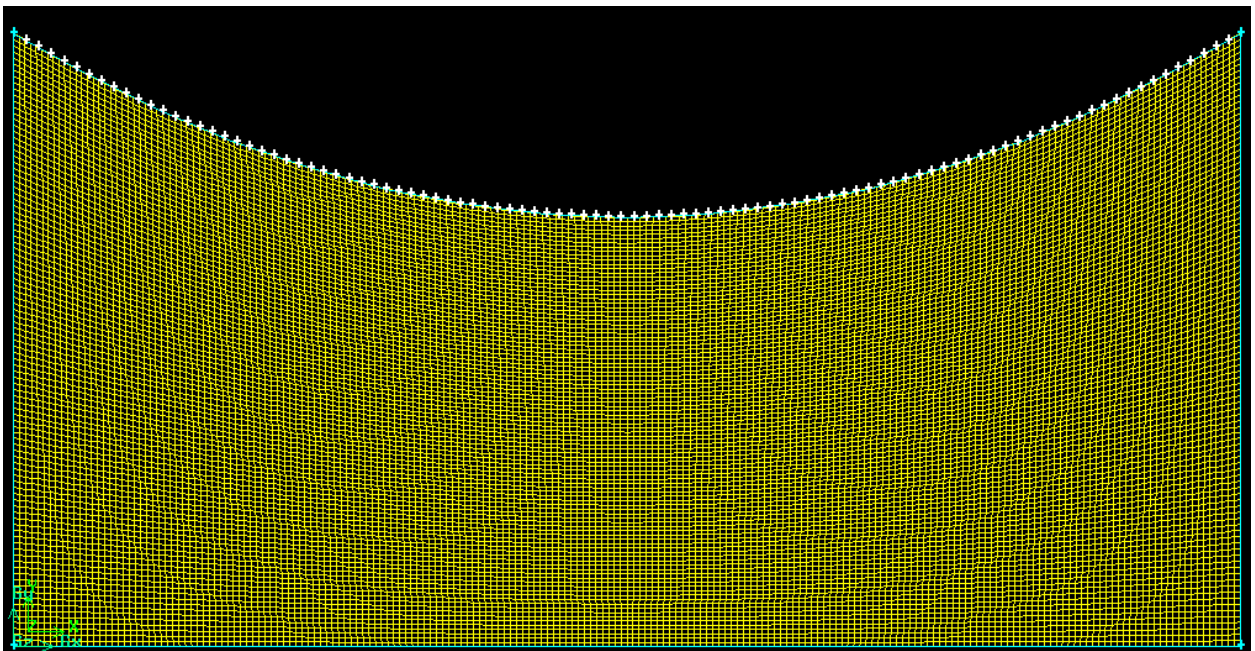
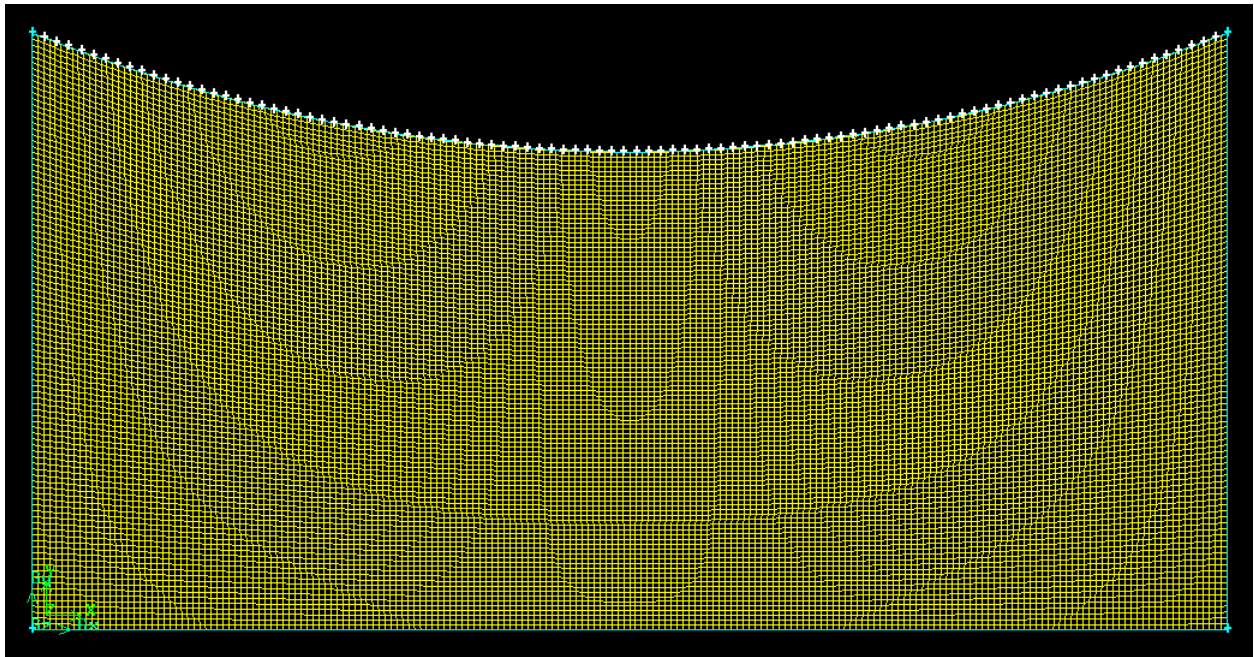


Fig.3.9 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.007$ Fig.3.10 géométrie de la sténose maillée pour $r_0=0.008$

```

clear all
clc
R=0.01; % rayon de a conduite
ro=0.006; % rayon de la sténose
l=0.02; % longueur de la sténose
x=linspace(0,0.02,100)
%la fonction qui donne la courbure de la sténose
y=(4*(R-ro)/(l^2)).*x.^2-(4*(R-ro)/l).*x+R ;
plot(x,y)
x=x' ; y=y';
z=zeros(100,1);
m=[x,y,z]
xlswrite('C:\Users\user\Desktop\stenose',m) %enregistrer les donnee sous Excel

```

Fig.3.11 algorithme qui donne différent courbure de la sténose

3.6 Le solveur Fluent

L'interface de FLUENT est relativement simple dans sa prise en main. Il faut commencer par importer un maillage sur lequel travailler. Une fois le maillage en place, on définit les paramètres nécessaires pour le calcul. On choisit le modèle physique du problème. On donne les paramètres initiaux. On règle les conditions initiales et aux limites. Selon le modèle. Puis on lance le calcul.

FLUENT contient également un outil de visualisation des résultats qui permet d'afficher les champs de pression, vitesse et autres autour de la paroi.

3.6.1 Simulation sous Fluent

La génération du calcul dans «Fluent» passe par les étapes suivantes :

1-Démarrer la version 2d de Fluent

2- Charger la géométrie par Fluent. **File** → **Read** → **Case**

3- Vérification du maillage. **Grid** → **Check**

4- Afficher le maillage. **Display** → **Grid**

5- Définir le Model de solution. **Define** → **Solver**

6- Définir la Matière. **Define** → **Materials**

7-introduire une condition au limite variable (UDF). **Define** → **user-Defined** → **functions** → **interprete**

8- Définir les conditions aux limites. **Define** → **Boundary** → **Conditions**

9- Choix du control de solution. **Solve** → **Controls** → **Solution**

10-Enregistrer les informations liées au problème. **File** → **write Case & dat**

Le fichier Case (regroupe toutes informations liées à la géométrie).

Le fichier dat (contient tous les paramètres et données des calculs).

11-Initialiser le calcul. **Solve** → **Initialize** → **Initialize**

12-Vérifier les résidus des calculs. **Solve** → **Monitors** → **Residual**

13-Choisir du nombre des itérations et lancer les calculs. **Solve** → **Iterate**

14-Post traitement des résultats. (**Display, Plot, Repport** etc.)

Chapitre 4

Résultats et Discussions

Résultats et Discussions

4.1 Introduction :

Ce chapitre fera l'objet de la présentation des différents résultats obtenus et leurs interprétations. Ces résultats concernant essentiellement la distribution de la pression, le champ de vitesse axial et radial, et la répartition des fonctions de courant.

Pour ce qui concerne la première partie (l'écoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante), on va étudier l'influence de la condition aux limites instationnaires (pression sinusoïdale à la sortie), sur les paramètres de l'écoulement

Dans la deuxième partie (l'écoulement à l'intérieure d'un tronçon de la conduite à section variable, qui se manifeste par la présence d'une sténose), on va étudier l'influence de la géométrie de la sténose sur les paramètres de l'écoulement.

Pour satisfaire les hypothèses simplificatrices citées auparavant (régime laminaire ainsi que La symétrie axiale du problème), nous avons travaillé en échelle de laboratoire (on a pris les grandeurs spatiale en centimètre au lieu de mètre).

4.2 Ecoulement à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante

4.2.1 Etude de l'influence de la condition aux limites sur les paramètres de l'écoulement

Pour étudier l'influence de la condition aux limites instationnaires (gradient de pression oscillant) sur les résultats numériques, on a procédé aux choix de trois différentes pulsations ($\omega=0.5$; $\omega=5$; $\omega=20$).

- **La variation temporelle de la pression**

Du fait qu'on a supposé que le fluide est soumis à un gradient de pression périodique, les figures ci-dessous montre la variation de la pression en fonction du temps adimensionnel, pour différentes pulsations.

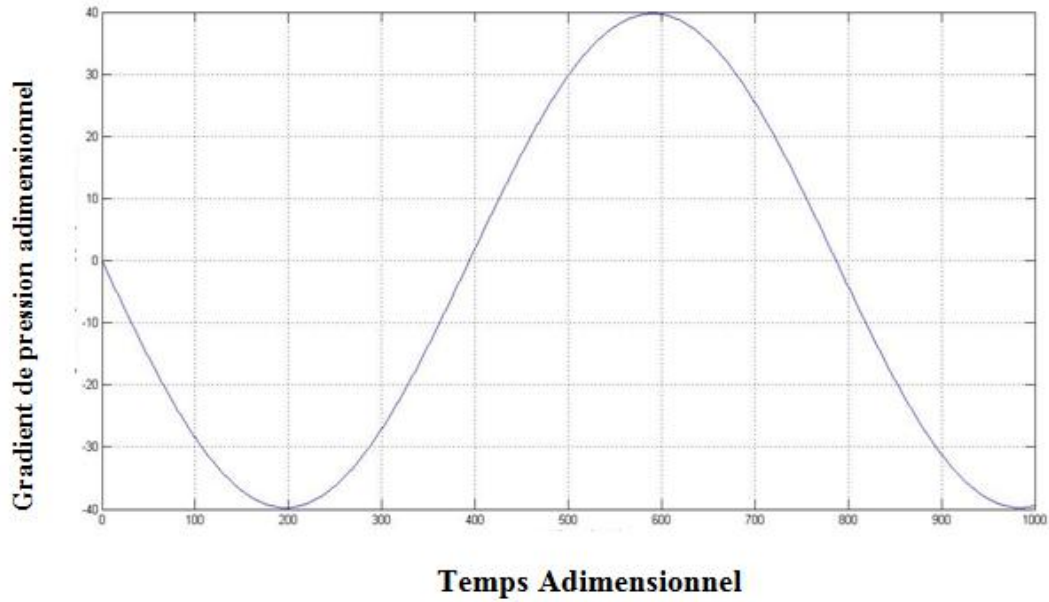


Fig. 4.1 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=0.5$

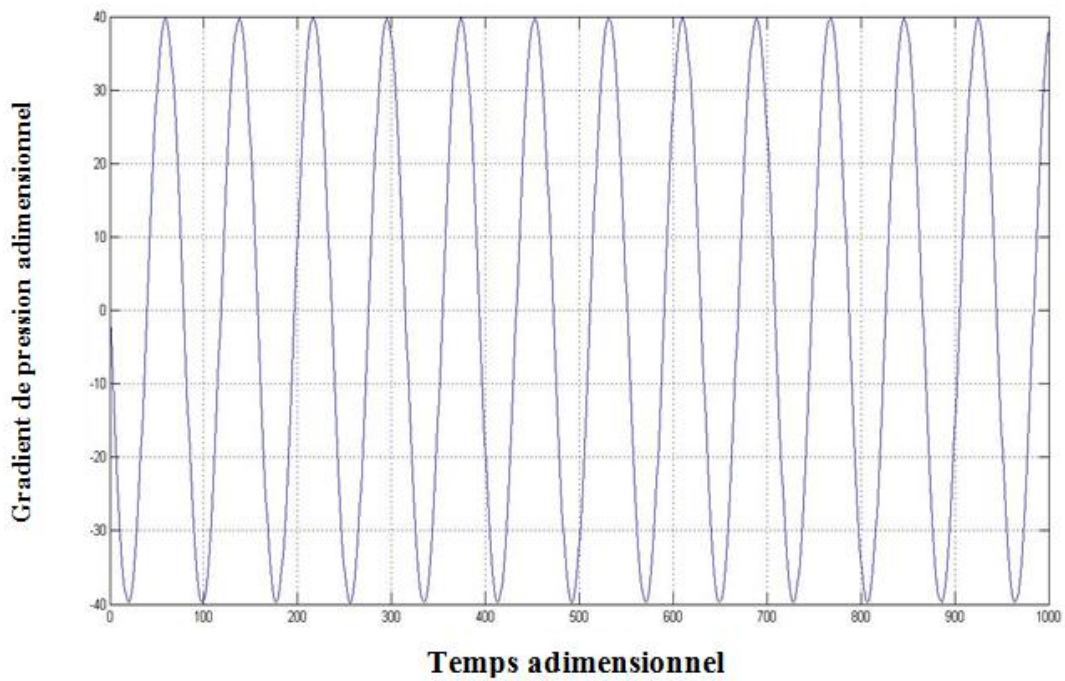


Fig. 4.2 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=5$

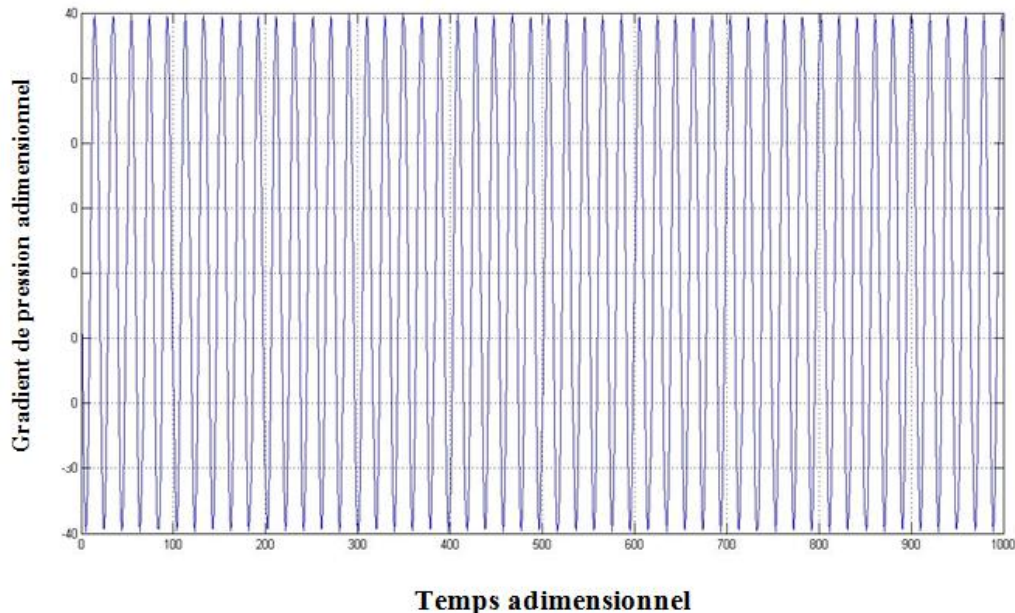


Fig. 4.3 Variation de la pression adimensionnelle en fonction du temps adimensionnel pour $\omega=20$

Commentaire :

On remarque que à chaque fois qu'on augmente la pulsation(ω) de l'écoulement instationnaire, la période (T) diminue, et les ondes de pression se rapprochent dans le temps, ce qui fait que le nombre d'oscillations augmente en fonction du temps adimensionnel.

La variation du gradient de pression a une influence directe sur le champ dynamique, du fait que les équations qui régissent le mouvement du fluide sont couplées par un terme qui contient la vitesse.

- **La variation spatio-temporelle de la vitesse**

Les figures ci-dessous, représentent respectivement les résultats numériques obtenus en utilisant notre code de calcul, qui représente la distribution radiale de la vitesse d'un écoulement oscillatoire dans une conduite.

On note que ces profils de vitesse sont obtenus pour trois différentes pulsations, Ces profils de vitesses ont une forme parabolique, similaire à celle obtenue en écoulement laminaire.

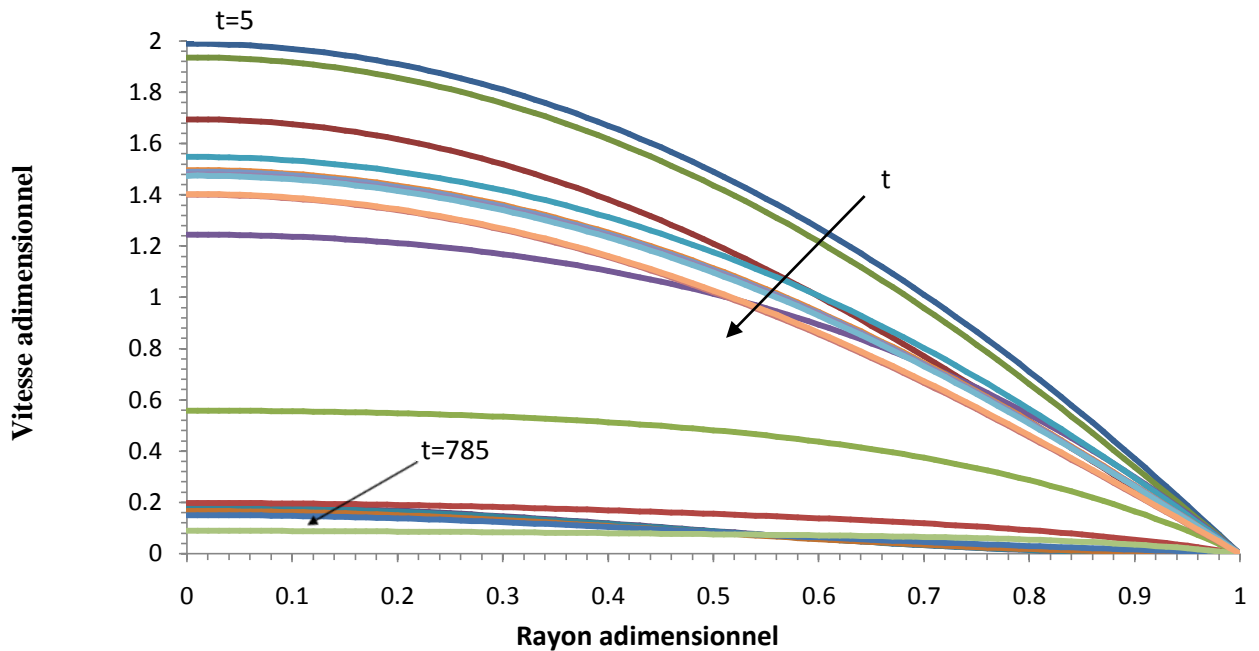


Fig.4.4 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=0.5$

Commentaire :

On remarque que le profil radial de la vitesse axiale a une forme Parabolique caractérisée par un maximum au centre, similaire à celle obtenue en écoulement laminaire. la variation temporelle de ce profil de vitesse pour $\omega=0.5$ est caractérisé par l'étirement et le rétrécissement à partir d'une valeur maximale ($w=1.98$) qui correspond à une valeur du temps adimensionnel ($t=5$), à partir de ce temps le profil de vitesse se rétrécit jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur minimale ($w=0.1$) à $t=790$, cette vitesse adimensionnel fluctue autour de $w=1.5$ et $w=0.1$ avec une période $T=785$.

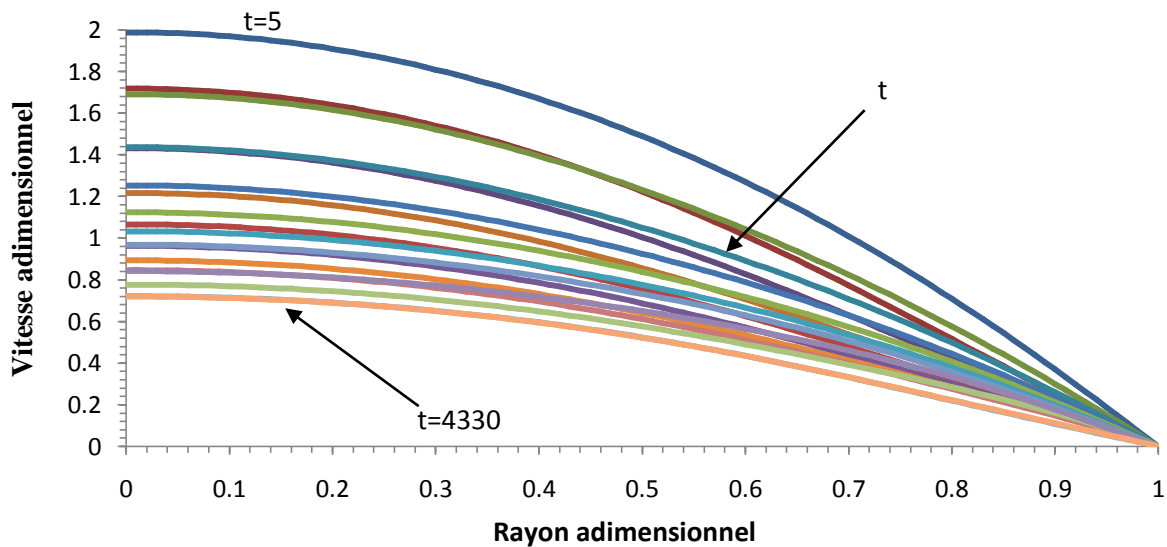


Fig.4.5 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=5$

Commentaire :

On remarque que le profil radial de vitesse la axiale a une forme Parabolique caractérisée par un maximum au centre, similaire à celle obtenue en écoulement laminaire. La variation temporelle de ce profil de vitesse pour $\omega=0.5$ est caractérisé par l'étirement et le rétrécissement à partir d'une valeur maximale ($w=1.98$) qui correspond à une valeur du temps adimensionnel ($t=5$), à partir de ce temps le profil de vitesse se rétrécit jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur minimale ($w=0.719$) à $t=4330$. Cette vitesse adimensionnelle fluctue autour de ces valeurs, avec une période $T=80$.

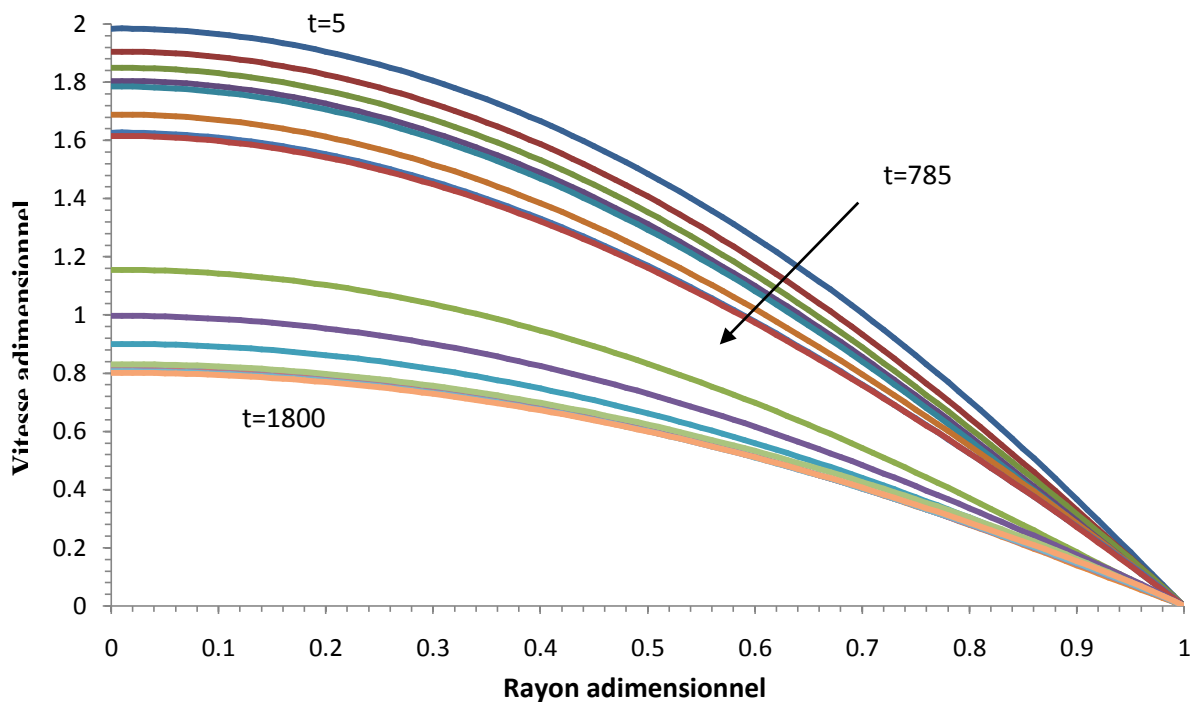


Fig.4.6 Profil radial de la composante axiale de vitesse pour $\omega=20$

Commentaire :

On remarque que le profil radial de la vitesse axiale a une forme Parabolique caractérisée par un maximum au centre, similaire à celle obtenue en écoulement laminaire. La variation temporelle de ce profil de vitesse pour $\omega=20$ est caractérisé par l'étirement et le rétrécissement à partir d'une valeur maximale ($w=1.98$) qui correspond à une valeur du temps adimensionnel ($t=5$), à partir de ce temps le profil de vitesse se rétrécit jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur minimale ($w=0.8$) à $t=1800$. Cette vitesse adimensionnelle fluctue autour de ces valeurs, avec une période $T=20$.

Comparaison :

On constate que à chaque fois qu'on augmente la pulsation(ω), l'intervalle de fluctuation du profil de vitesse diminue (valeur minimale de la vitesse adimensionnelle augmente), et la période du temps diminue.

4.3 Ecoulement stationnaire dans une conduite à section variable (sténose)**4.3.1 Etude de l'influence de la géométrie de la sténose sur les paramètres de l'écoulement**

Pour étudier l'influence de la géométrie de la sténose sur les résultats numériques, on a procédé aux choix de trois différentes rayon de la sténose ($r_0=0.006\text{m}$; $r_0=0.007\text{m}$; $r_0=0.008\text{m}$).

- **vitesse axiale à l'entrée et à la sortie de la sténose:**

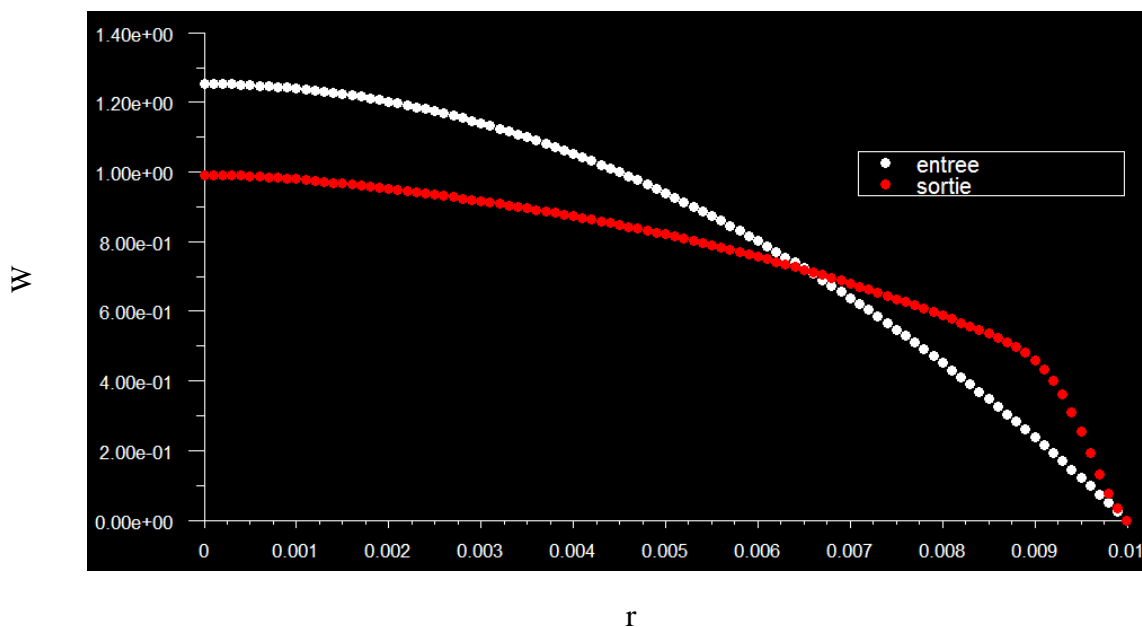


Fig.4.7 Profil de la vitesse axiale à l'entrée et la sortie de la sténose pour $r_0=0.006\text{ m}$

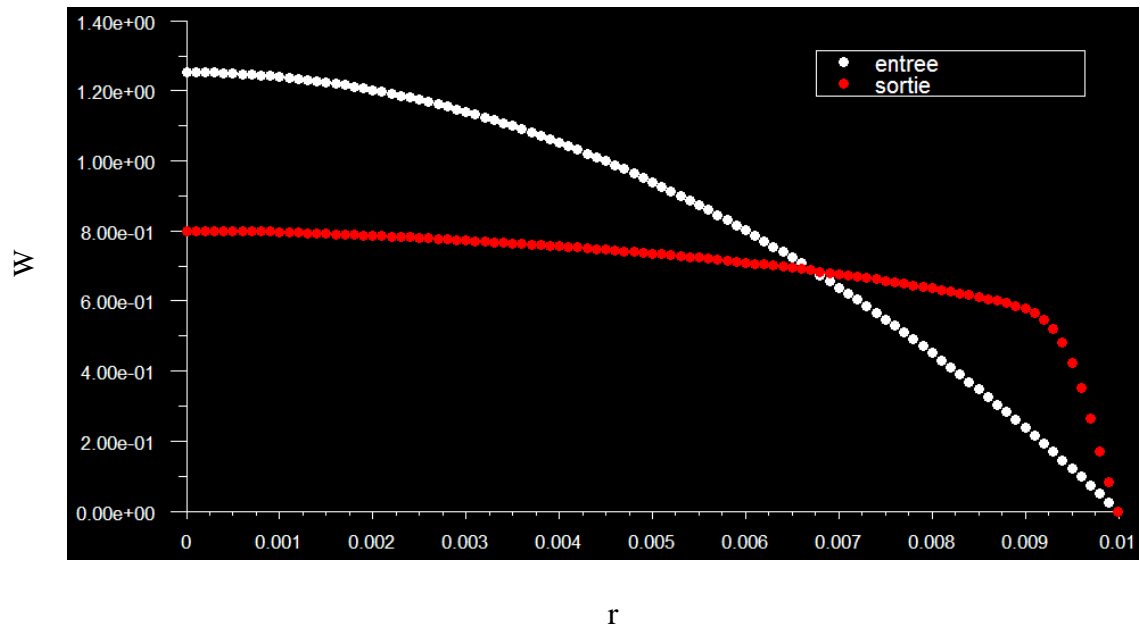


Fig.4.8 Profil de la vitesse axiale à l'entrée et la sortie de la sténose pour $r_0=0.007$ m

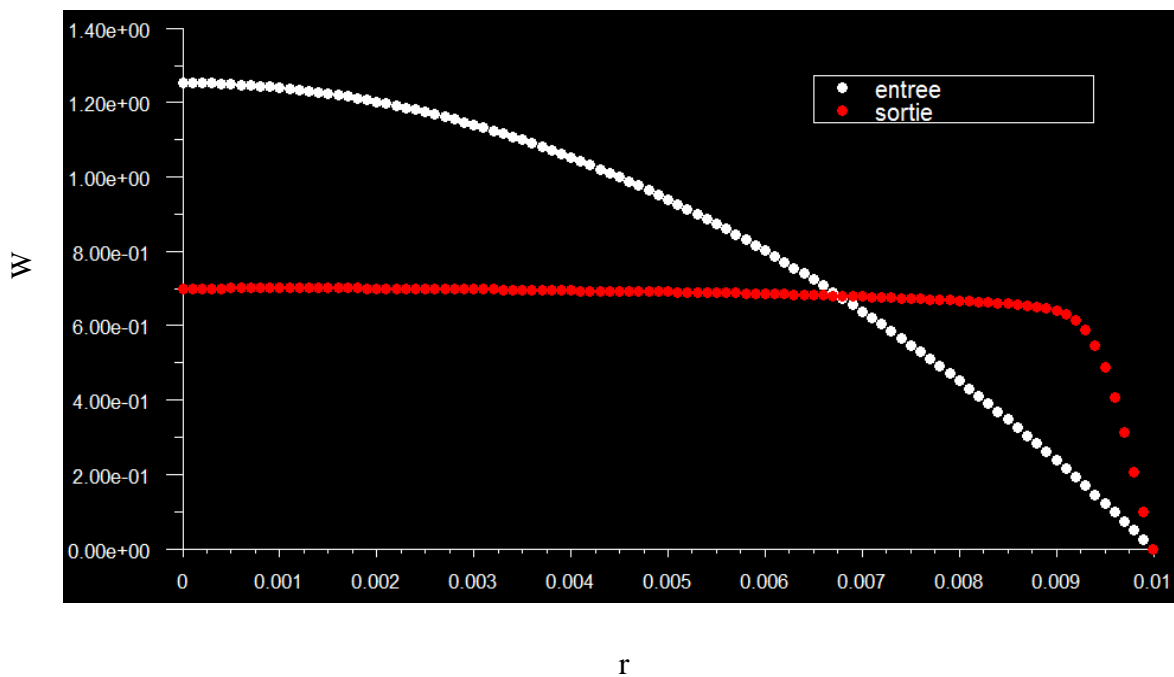


Fig.4.9 Profil de la vitesse axiale à l'entrée et la sortie de la sténose pour $r_0=0.008$ m

Commentaire :

On remarque que le profil de vitesse à l'entrée de la sténose est identique pour les trois cas de géométrie, tel que la vitesse est maximale au centre de la sténose et elle diminue en fonction de rayon (r) jusqu'à ce qu'elle s'annule à la paroi ($r=R$), ce profil de vitesse parabolique

qu'on a imposé nous permis d'éviter la présence d'une longueur d'établissement à l'entrée de la sténose.

A la sortie de la sténose la vitesse est maximale sur l'axe de la sténose et elle diminue progressivement jusqu'à ($r=0.09$), à partir de cette valeur, la vitesse diminue brusquement jusqu'à ce qu'elle s'annule à $r=R$,

On constate que Lorsque l'on diminue le rayon r_0 de la sténose, le maximum de la vitesse axiale à la sortie augmente.

- **vitesse axiale sur l'axe de la sténose :**

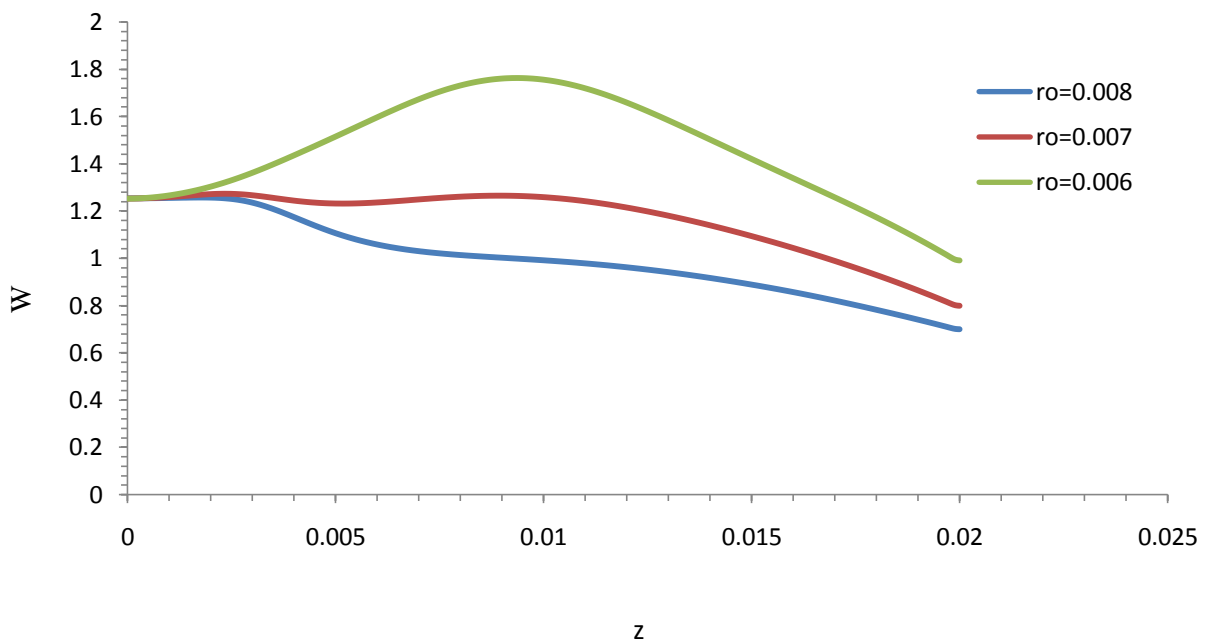


Fig. 4.10 profil de vitesse axiale sur l'axe de la sténose.

Commentaire :

On observe que pour $r_0=0.006$ m la vitesse axiale sur l'axe de la sténose augmente progressivement en fonction de z Jusqu'à ce qu'elle atteigne son maximum à $z=L/2$ au niveau du rétrécissement, puis elle diminue dans la partie divergente de la sténose, pour $r_0=0.007$ m et $r_0=0.008$ m, on remarque que la vitesse reste constante à l'entrée de la sténose puis elle diminue à partir de $z=0.0025$ m, tel que plus r_0 diminue plus la vitesse axiale augmente.

- vitesse radiale à la sortie de la sténose :

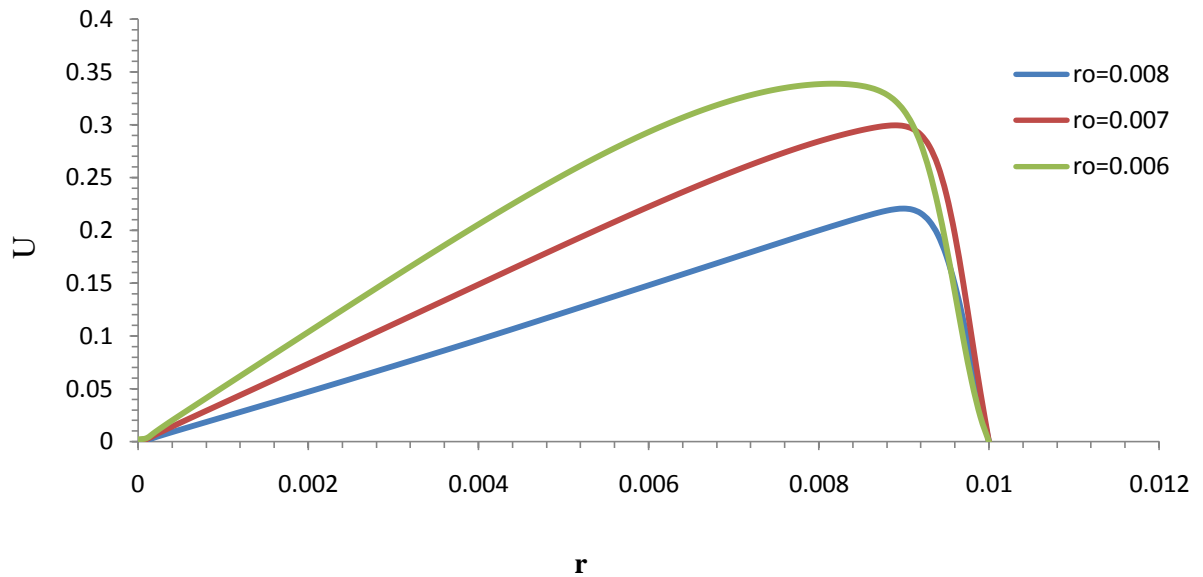


Fig. 4.11 Profile de vitesse radiale à la sortie de la sténose

Commentaire :

La vitesse radiale a la sortie de la sténose augmente progressivement en fonction de rayon, elle atteint son maximum près de la paroi à $r=R$, puis elle s’annule brusquement au niveau de la paroi, le rétrécissement de la sténose influe aussi sur la vitesse radial, tel que on marque une vitesse plus importante pour un rayon de rétrécissement plus petit.

- Profile de pression absolue à la paroi et sur l’axe de la sténose

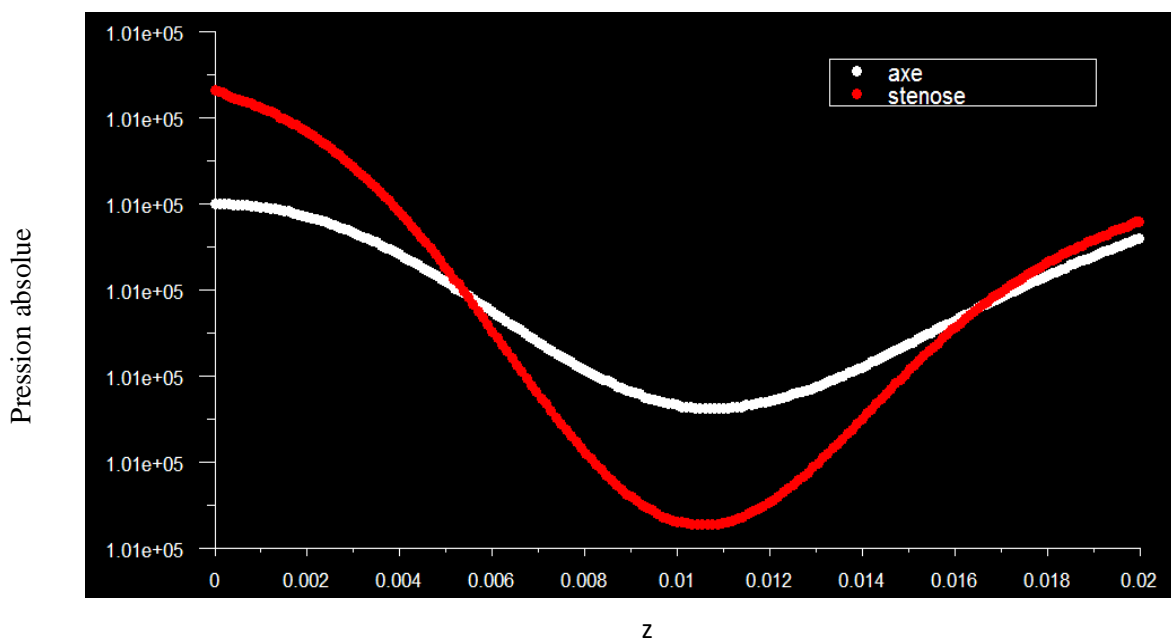


Fig. 4.12 Profile de pression absolue à la sténose et sur l’axe pour $r_0=0.006$ m

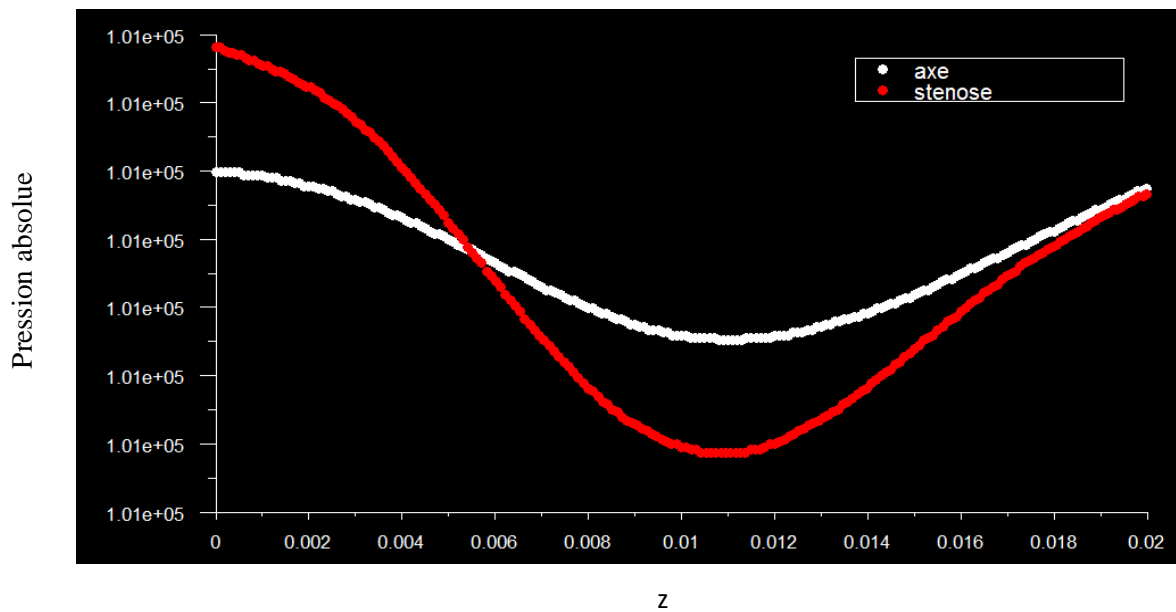


Fig. 4.13 Profile de pression absolue à la sténose et sur l’axe pour $r_0=0.007m$

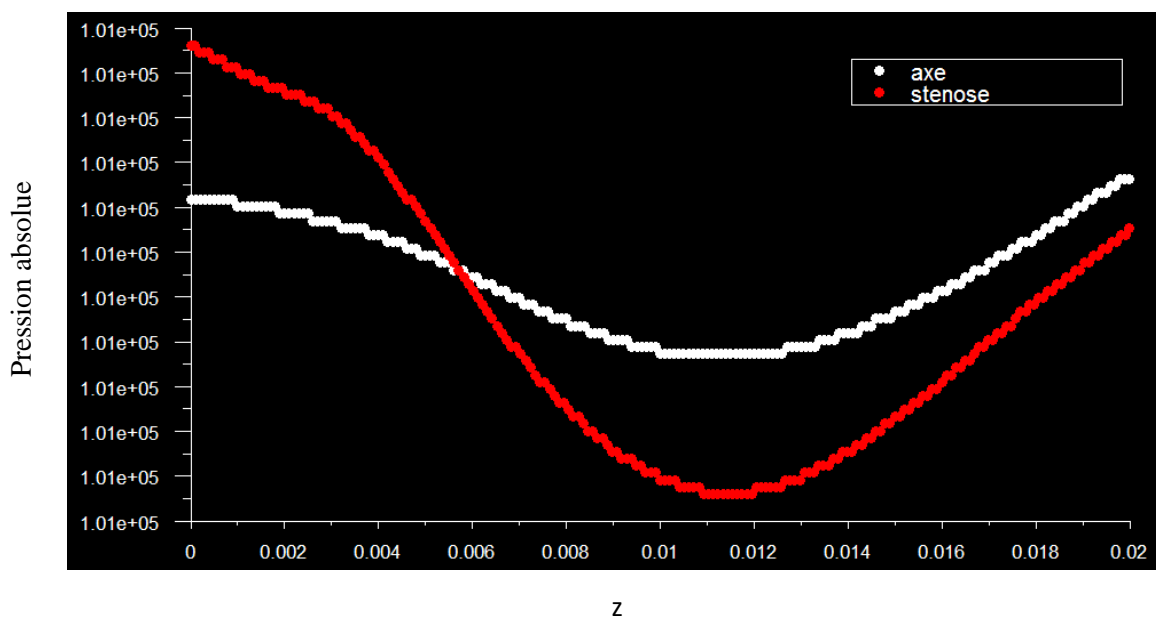


Fig. 4.14 Profile de pression absolue à la sténose et sur l’axe pour $r_0=0.008m$

Commentaire

On remarque que la différence de pression ($\Delta p(r)=p_{axe}-p_{paroi}$) entre l’axe et la paroi de la sténose est de plus s’en plus importante lorsque on s’approche du col de la sténose, et la pression minimale pour les trois cas se trouve au centre ($z=l/2$) et au voisinage de la paroi, car la vitesse est maximale dans cette zone, et par conservation d’énergie, la pression est minimale, tel que plus r_0 diminue plus la vitesse axiale augmente, et la pression diminue.

- **La répartition de la pression dans la sténose**

Pour chaque géométrie de la sténose en variant le rayon de rétrécissement, et à l'aide de logiciel code FLUENT on a obtenu les figures suivantes :

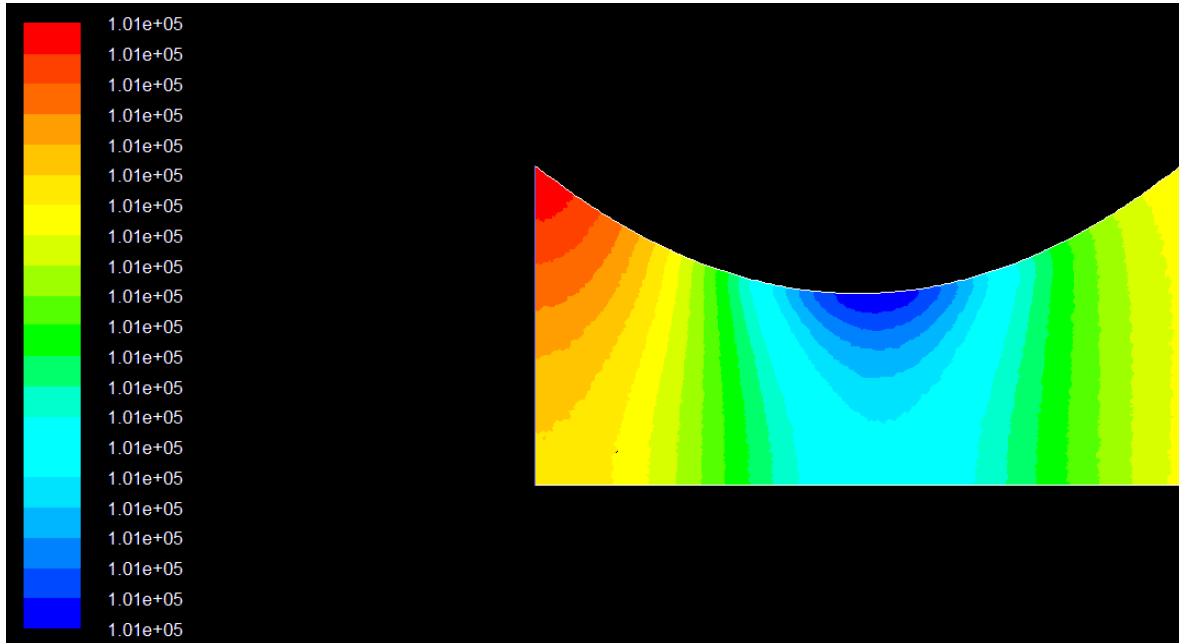


Fig. 4.15 distribution de la pression dans la sténose avec $r_0=0.006$.

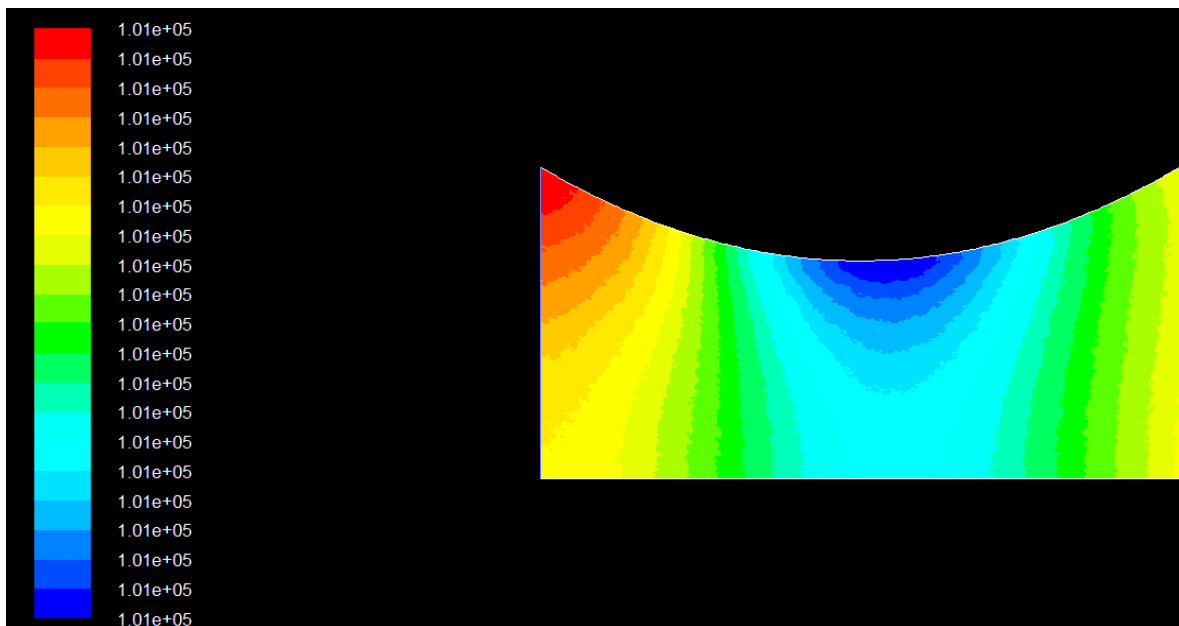


Fig. 4.16 distribution de la pression dans la sténose avec $r_0=0.007$.

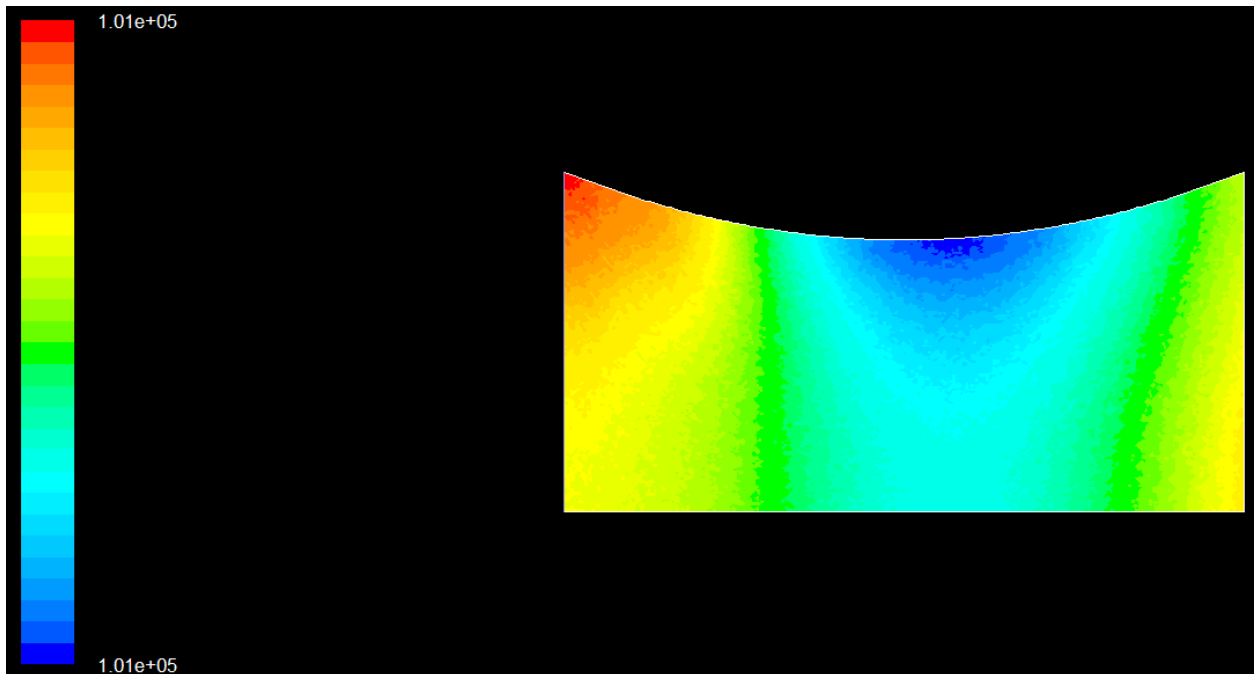


Fig. 4.17 distribution de la pression dans la sténose avec $r_0=0.008$.

Commentaire :

Dans les figures Fig. 4.15, 4.16 et 4.17 on remarque que la pression est maximale à l'entrée de la sténose ainsi qu'à la sortie, et particulièrement au niveau de la paroi à $r=R$, et on marque une chute importante de cette dernière au milieu de la sténose (rétrécissement maximum), en comparant les trois figures on constate que la pression minimale correspond à la sténose possédant un rayon minimal ($r_0=0.006$).

De plus en plus la section de passage diminue les particules fluides accélère, et plus la pression diminue.

- La distribution des fonctions de courant dans la sténose :

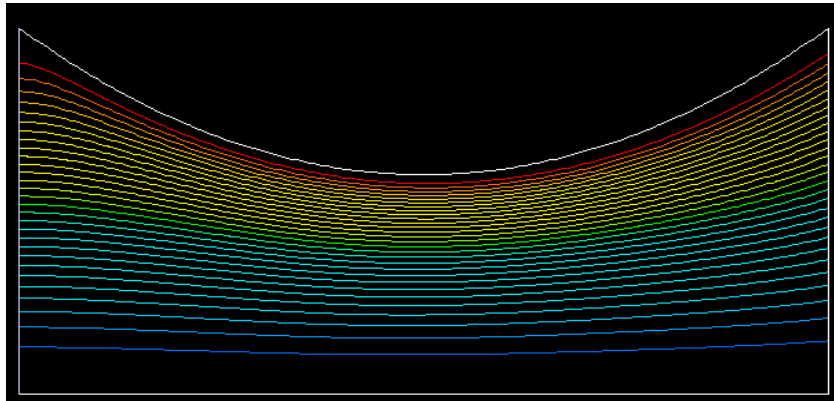


Fig. 4.18 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.006$

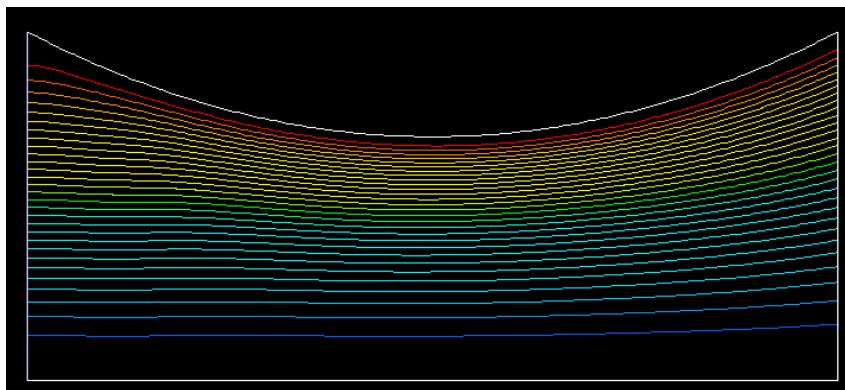


Fig. 4.19 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.007$

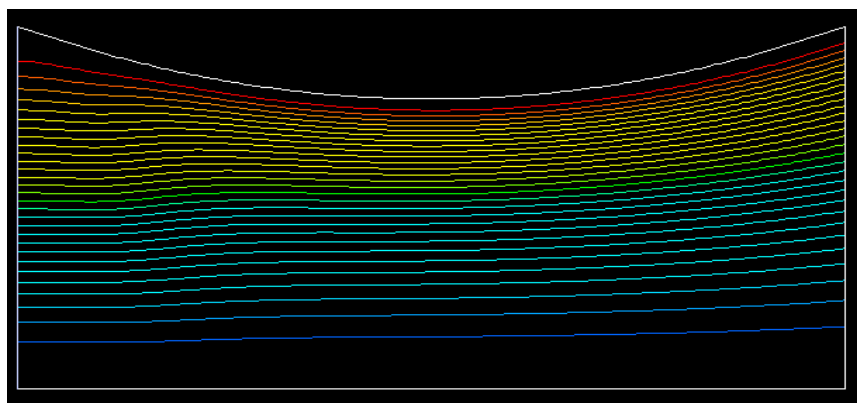


Fig. 4.20 distribution de la fonction de courant pour $r_0=0.008$

Commentaire :

Dans les trois figures précédentes, on remarque que les lignes de courant se présentent de grande quantité au près de la paroi de la sténose, ce qui nous montre que les particules fluides se manifestent d'une densité importante le long de la paroi en amont, et de plus en plus qu'on se rapproche du centre de la sténose plus la densité de fonction de courant diminue.

On remarque aussi que les fonctions de courant suivent la géométrie exigée par la sténose, et elle s'établit au milieu (à $z=l/2$), pour $r_0 \leq 0.005\text{m}$ on observe l'apparition d'une zone de recirculation causée par un gradient de pression défavorable qui suppose à l'écoulement en aval.

En comparant les trois figures, on constate que de plus en plus on diminue le rayon de la sténose, plus on marque une grande quantité de fonction de courant près de la paroi.

Conclusion

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté l'étude d'un problème de mécanique des fluides et plus précisément les écoulements visqueux instationnaires (oscillatoires).

Après la présentation du phénomène transitoire, nous avons vu, d'une part, une description physique du phénomène, et d'autre part, les causes qui produisent le problème en question.

Pour bien élaborer les causes du problème, nous avons d'abord étudié l'écoulement instationnaire à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante (c'est le cas particulier de notre étude), ensuite nous avons étudié l'écoulement stationnaire à l'intérieure d'un tronçon de la conduite à section variable (c'est le cas général, qui se manifeste par la présence d'une sténose).

Lors de cette étude, nous avons évalué l'influence du régime oscillatoire (première partie) et du changement de la géométrie de la sténose (deuxième partie) sur les propriétés de l'écoulement, la simulation a été réalisée avec les programmes de calcul numériques Maple et Matlab pour la première partie, et avec le code Fluent pour la deuxième partie.

Dans notre étude nous avons travaillé en échelle de laboratoire (nous avons pris les grandeurs spatiales en centimètre au lieu de mètre), pour satisfaire les hypothèses simplificatrice citées auparavant (régime laminaire).

Nous dressons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus :

1. Ecoulement instationnaire à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section constante:

- Les résultats numériques montrent l'existence de l'aspect périodique des champs dynamiques qui possèdent un comportement similaire aux pulsations imposées par le gradient de pression dans le plan temporel.
- L'accroissement de la pulsation (ω) de l'écoulement instationnaire, cause L'augmentation du nombre d'oscillation en fonction du temps adimensionnel, ce qui est néfaste pour la survie de la conduite (pouvant détériorer la conduite), car cela ne donne pas à l'écoulement le temps de s'établir.
- Les valeurs minimales des pressions atteintes au cour des simulations sont inférieures à celle pouvant causer la détérioration de la conduite
- L'augmentation de la pulsation (ω), cause le rétrécissement de l'intervalle de fluctuation du profil de vitesse (la valeur minimale de la vitesse adimensionnelle augmente avec l'augmentation de ω).

Conclusion générale

2. l'écoulement stationnaire à l'intérieur d'un tronçon de la conduite à section variable (sténose):

- L'approche numérique nous a fourni une bonne initiation à la méthode des volumes finis qui est l'un des outils performants et beaucoup utilisé pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles rencontrées en physique.
- Les résultats obtenus reflètent le sens physique des écoulements visqueux : la vitesse des particules fluides est nulle sur les parois et augmente en s'éloignant de ces dernières pour atteindre son maximum au milieu du tube.
- En imposant un profil de vitesse parabolique (comme condition au limite) à l'entrée de la sténose, ce qui nous évite de donner une longueur d'établissement à l'écoulement.
- Dans cette partie de notre travail, nous avons pu constater l'influence de la variation de géométrie de la sténose sur l'écoulement, nous avons aussi constaté que la pression minimale pour les trois différentes géométries se manifeste au col de la sténose, et cette valeur est inférieure à celle qui pourra causer la détérioration de la conduite.
- Pour $Re \leq 0.005$, nous avons aussi remarqué l'apparition d'une zone de recirculation au près de la paroi en aval de la sténose, qui se manifeste par un décollement des veines liquides proches de la paroi, dans cette zone, nous avons observé des recirculations à l'origine des perturbations importantes dans l'écoulement.

Concernant les perspectives à donner à ce travail, l'étude peut être approfondie et élargie pour mieux s'approcher des conditions réelles de l'écoulement. Pour cela, certains paramètres peuvent être pris en considération, tel que la turbulence, le transfert thermique (existence d'un gradient de température entre la partie immergée et la sortie de l'écoulement). Pour identifier les causes principales de la détérioration de la conduite, il faut étudier l'écoulement turbulent et instationnaire sur une longue conduite, contenant une ou plusieurs sections variables (sténoses), perturbé par une variation de pression oscillante à son extrémité.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques :

- [1] **S.P. Suter** et **R. Skalak**, *The History of Poiseuille's Law*. Ann. Rev. Fluid Mech. 25, p.1-19, 1993.
- [2] **G.BLOMMAERT** "Étude du comportement dynamique des turbines Francis "contrôle actif de leur stabilité de fonctionnement. Thèse de doctorat 2000.
- [3] **G. G. Stokes**, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*. Cambridge Philosophical Society Transactions, IX: 8-106, 1851.
- [4] **E. Hagenbach**, *Über die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausfluss aus Röhren (Sur la détermination de la résistance d'un liquide par la décharge de la canalisation)*. Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie 108: 385–426, 1860.
- [5] **H. Lamb**, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press 6th ed. 1932 (1st published 1879).
- [6] **E.G. Richardson** et **E. Tyler**, *The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established*, The Proceedings of the Physical Society 42/1 ,No 231, 1-15, 1929.
- [7] **G.Szymanski**, *Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique*, Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 11 p. 67-108, 1932.
- [8] **R. J. Womersley**, *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*. J. Physiol-London, Vol. 127, p. 553–563, 1955.
- [9] **E. GONCALVES** "Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO". Cours. INPG. Grenoble.57 pages.
- [10] **S. Uchida**, *The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe*. ZAMP Vol. 7, p. 403–422, 1956.
- [11] **C. Fan** et **B.T. Chao**, *Unsteady, laminar, incompressible flow through rectangular ducts*. ZAMP 16:351–60, 1965.
- [12] **A. N. Darus**, *Streamlike Function Formulation of Entry Flow*, Jurnal Mekanikal, Jilid II, 2000

Références Bibliographiques

- [13] **J. Majdalani et H. A. Chibllal**, *Pulsatory channel flows with arbitrary pressure gradients*. 3rd AIAA theoretical fluid mechanics meeting 24-26 juin 2002 St. Louis, MO
- [14] **M. E. Erdoğan**, *On the unsteady unidirectional flows generated by impulsive motion of a boundary or sudden application of a pressure gradient*, Int. J. Non-Linear. Mech, Vol. 37, p. 1091 – 1106, 2002.
- [15] **M. E. Erdoğan**, *On the flows produced by sudden application of a constant pressure gradient or by impulsive motion of a boundary*, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 38, p. 781 - 797, 2003.
- [16] **Y.S. Muzychka et M.M. Yovanovich**, *Laminar flow friction and heat transfer in noncircular ducts—Part I. Hydrodynamic problem*, in: G.P. Celata, B. Thonon, A. Bontemps, S. Kandlikar (Eds.), *Compact Heat Exchangers—A Festschrift on the 60th Birthday of Ramesh K. Shah*, Edi-zioni ETS, p. 123–130, 2002
- [17] **Y.S. Muzychka et M.M. Yovanovich**, *Compact models for transient conduction or viscous transport in non-circular geometries with a uniform source*, Int. J. Thermal Sciences, Vol. 45, p. 1091–1102, doi:10.1016 , 2006.
- [18] **M. E. Erdoğan et C. E. İmrak**, *On the unsteady flows generated by impulsive motion of boundary*, Mathematical and Computational Applications, vol. 9, no. 2, pp. 265–274, 2004.
- [19] **M. E. Erdoğan et C. E. İmrak**, *Effect of the side walls on the unsteady flow in A duct of rectangular cross-section*, Mathematical and Computational Applications, vol. 9, no. 3, p. 443–448, 2004.
- [20] **M. E. Erdoğan et C. E. İmrak**, *Some Effects of Side Walls on Unsteady Flow of a Viscous Fluid over a Plane Wall*, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, Article ID 725196, doi:10.1155/2009/725196, 2009.
- [21] **Yu-Tang Chen, Shung-Wen Kang, Wen-Chian Tuh et Tsung-Hsin Hsiao**, *Experimental Investigation of Fluid Flow and Heat Transfer in Micro-channels*, Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 7, No. 1, pp. 11–16, 2004.
- [22] **R. Hadj Ali, A. Ghezal**, *Hydrodynamic Study of Pulsatile Flow around a Cylinder*, International Conference on Modeling and Simulation (*MS'06*), *Konya-Turkey* (2006).

Références Bibliographiques

- [23] **A.S.R. Duartea, A.I.P. Mirandab et P.J. Oliveira**, *Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. Vol. 154, p. 153–169, (2008).
- [24] **A. Tamayol et M. Bahrami** *Laminar Flow in Microchannels With Noncircular Cross Section*. J. Fluids Eng. Vol. 132, Issue 11, 111201, 2010.
- [25] **H. Schlichting**, *Boundary Layer Theory*. 7th edition. McGraw-Hill, New York, NY, 1979.
- [26] **F.M. White**, *Viscous Fluid Flow*. 2nd edition. McGraw-Hill, New York, NY, 1991
- [27] **G.K. Batchelor**, *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1970
- [28] **F. M. White**, *Fluid Mechanics*. 4th edition. WCB McGraw-Hill, New York, NY, 1998
- [29] **J-P BEAUDRY, J-C ROLLAND**, *Mécanique Des Fluides Appliquée*, 2ème édition, BERGER, Canada
- [30] **M. ANDUZE**, *Etude expérimentale et numérique de microécoulements liquides dans les microsystèmes fluidiques*, Thèse, I.N.S.A. Toulouse, France, 2000.
- [31] **C. BARROT LATTES**, *Développement de Méthodes Expérimentales pour l'Analyse des Ecoulements de Liquides dans les Micro canaux*, Thèse, I.N.S.A. Toulouse, France, 2007.
- [32] **E. Amzallag, G. Sipriani, N. Piccioli**. "Ondes mécaniques et mécanique des fluides". édition ©Dunod, Paris, 2006.
- [33] **F. Boukli hacene.**, «ONDES MECANIKES : Rappels de Cours Problèmes posés aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles Scientifiques », Université Hassiba Benbouali De Chlef , 2014 /2015.
- [34] **SASSANE Nadjette**, "Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse ", l'Université 20 Août 55, Skikda.
- [35] **S.V.PATANKAR**, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, (1980).
- [36] **MATENE ELHACENE**, "présentation du code fluent et de la méthode numérique de prévision".

ANNEXEA1

FONCTIONNEMENT DU SIPHON

A1-1/ équations constitutives :

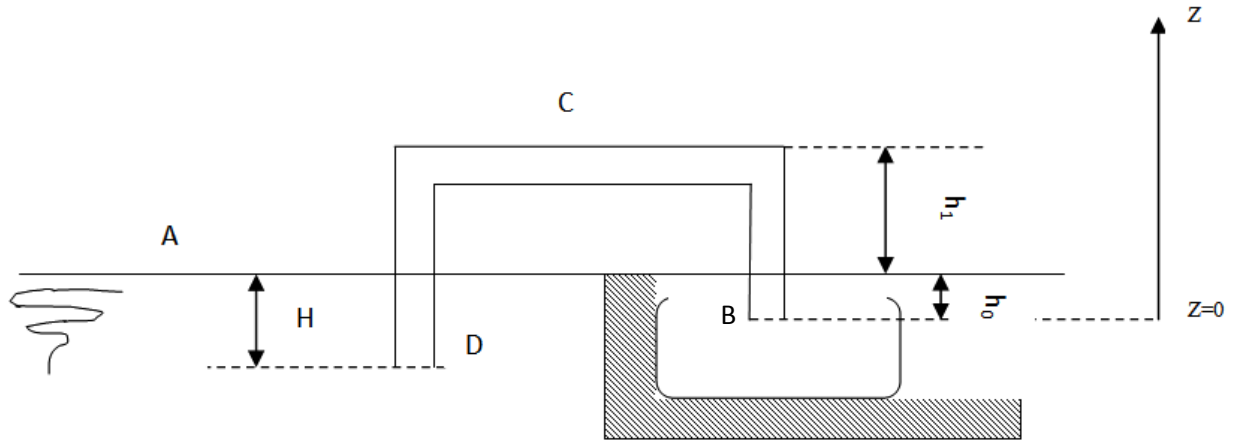


Fig. A1. Siphon

- Calcule de la vitesse de sortie pour trouver V_B :

Equation de Bernoulli entre A et B

$$P_{\text{atm}} + \rho g h_0 + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

$$Q = V_A S_A = V_B S_B \implies \frac{S_B}{S_A} = \frac{V_A}{V_B} \implies S_A \rightarrow \infty \implies V_A \rightarrow 0$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{2 g h_0}}$$

$$Q = \frac{V_B \pi D^2}{4}$$

- La relation entre h_1 , P_{atm} et h_0

Equation de Bernoulli entre A et C

$$P_c + \rho g (h_0 + h_1) + \frac{1}{2} \rho V_C^2 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

$$\boxed{P_c = P_{\text{atm}} - \rho g (h_0 + h_1)}$$

$$P_c > 0 \implies \boxed{h_1 < \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - h_0}$$

- Calcule le ΔP entre l'entrée et la sortie :

$$P_D + \rho g(h_0 - H) + \frac{1}{2} \rho V_D^2 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

$$S_D = S_B \implies V_D = V_B$$

$$\Delta P = P_D - P_{\text{atm}} = \rho g(H - h_0)$$

ANNEXE A2

Fonction de courant

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit au moyen d'une fonction analytique complexe appelée « **potentiel complexe des vitesses** ». Cette fonction complexe $f(z)$ comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses $\varphi(x, y)$ et une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant $\Psi(x, y)$. On définit ainsi :

$$f(z) = \varphi + i\Psi$$

$$\text{où } z = x + iy = re^{i\theta}$$

La définition d'une telle fonction analytique est légitime dans la mesure où le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient les relations de *Cauchy* :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\Psi}{dx}$$

L'intérêt de l'utilisation du potentiel complexe des vitesses est double :

- il réunit en une seule fonction les deux fonctions descriptives de l'écoulement ;
- il permet la construction d'écoulements évolués par simple superposition d'écoulements élémentaires :

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

Écoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule

$$f(z) = uz$$

Où u est une constante réelle.

Par identification des parties réelle et imaginaire avec respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant, on obtient :

$$f(z) = u(x + iy) = \varphi + i\Psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x, y) = ux \\ \Psi(x, y) = uy \end{cases}$$

Les lignes de courant sont alors définies par $\Psi = cte \iff uy = cte$, d'où $y = cte \forall x$: il s'agit donc de droites horizontales (toutes parallèles à l'axe x). Tandis que les équipotentiels sont définies par $\varphi = cte \iff ux = cte$, d'où $x = cte \forall y$: il s'agit alors de droites verticales (toutes parallèles à l'axe y). Comme il se doit, on remarque que les lignes de courant sont de fait orthogonales aux équipotentiels.

On peut par ailleurs en déduire le champ de vecteurs vitesses en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

$$v_x \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} = u$$

$$v_x \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\Psi}{dx} = 0$$

d'où $\vec{v} = u\vec{e}_x$ en tout point de l'écoulement, correspondant à un écoulement uniforme de vitesse u selon l'axe x , comme le montre la **figure A.1**

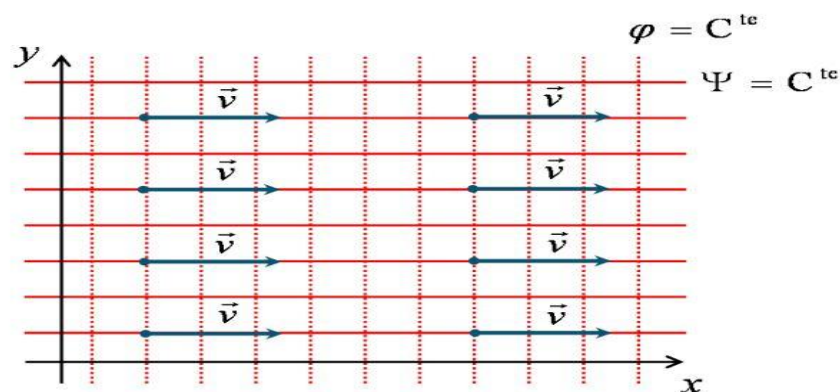


Fig A.1 lignes de courants

ANNEXE A3

Les différences finies

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x; y; z; t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x, \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x; y; z; t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x, \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x, \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + O(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $O(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx . la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre

de point nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3)$$

Quelques schémas en 1D :

Différences finies avant, ordre 1

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u_i'$	-1	1			
$\Delta x^2 u_i''$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u_i'''$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u_i'$				-1	1
$\Delta x^2 u_i''$			1	-2	1
$\Delta x^3 u_i'''$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u_i'$		-1		1	
$\Delta x^2 u_i''$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u_i'''$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u_i'$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u_i''$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u_i'''$	-1	-8	13	0	1	8	-1
$6\Delta x^4 u_i^{(4)}$	-1	12	-39	56	1	12	-1

ANNEXE A4

La discrétisation de l'équation (3.11)

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\Psi_{i,j}\Psi_{i,j-1}}{fz^3 l^3 RR_i^3 hz^3} + \frac{2\Psi_{i,j}\Psi_{i,j+1}}{fz^3 l^3 RR_i^3 hz^3} - \frac{\Psi_{i,j-2}}{fz l^4 RR_i Ree hz^4} + \frac{4\Psi_{i,j-1}}{fz l^4 RR_i Ree hz^4} \\
& - \frac{6\Psi_{i,j}}{fz l^4 RR_i Ree hz^4} + \frac{4\Psi_{i,j+1}}{fz l^4 RR_i Ree hz^4} - \frac{\Psi_{i,j+2}}{fz l^4 RR_i Ree hz^4} + \frac{\Psi_{i,j-1}^2}{fz^3 l^3 RR_i^3 hz^3} \\
& - \frac{\Psi_{i,j+1}^2}{fz^3 l^3 RR_i^3 hz^3} - \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i-1,j}}{fz^5 RR_i^4 Ree hr} - \frac{\Psi_{i-2,j}}{fz^5 RR_i Ree hr^4} + \frac{4\Psi_{i-1,j}}{fz^5 RR_i Ree hr^4} \\
& - \frac{6\Psi_{i,j}}{fz^5 RR_i Ree hr^4} + \frac{4\Psi_{i+1,j}}{fz^5 RR_i Ree hr^4} - \frac{\Psi_{i+2,j}}{fz^5 RR_i Ree hr^4} - \frac{\Psi_{i-2,j}}{fz^5 RR_i^2 Ree hr^3} \\
& + \frac{2\Psi_{i-1,j}}{fz^5 RR_i^2 Ree hr^3} - \frac{2\Psi_{i+1,j}}{fz^5 RR_i^2 Ree hr^3} + \frac{\Psi_{i+2,j}}{fz^5 RR_i^2 Ree hr^3} - \frac{3\Psi_{i-1,j}}{fz^5 RR_i^3 Ree hr^2} \\
& + \frac{6\Psi_{i,j}}{fz^5 RR_i^3 Ree hr^2} - \frac{3\Psi_{i+1,j}}{fz^5 RR_i^3 Ree hr^2} + \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i+1,j}}{fz^5 RR_i^4 Ree hr} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i+1,j-1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i-1,j+1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i+1,j+1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i-1,j+1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i+1,j+1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i-1,j-1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i+1,j-1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i-1,j-1}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hz^3 hr} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j}\Psi_{i,j-2}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hr hz^3} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j}\Psi_{i,j+2}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hr hz^3} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j}\Psi_{i,j-2}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hr hz^3} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j}\Psi_{i,j+2}}{fz^3 l^3 RR_i^2 hr hz^3} + \frac{3}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i-1,j}}{fz^5 l RR_i^4 hz hr} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i+1,j}}{fz^5 l RR_i^4 hz hr} - \frac{3}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i-1,j}}{fz^5 l RR_i^4 hz hr} + \frac{3}{4} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i+1,j}}{fz^5 l RR_i^4 hz hr} \\
& + \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i-1,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} - \frac{3\Psi_{i,j-1}\Psi_{i,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i,j-1}\Psi_{i+1,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} \\
& - \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i-1,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{3\Psi_{i,j+1}\Psi_{i,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} - \frac{3}{2} \frac{\Psi_{i,j+1}\Psi_{i+1,j}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i-1,j}\Psi_{i-1,j-1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i+1,j}\Psi_{i-1,j-1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i-1,j}\Psi_{i-1,j+1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i+1,j}\Psi_{i-1,j+1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i-1,j}\Psi_{i+1,j-1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} - \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i+1,j}\Psi_{i+1,j-1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} \frac{\Psi_{i-1,j} \Psi_{i+1,j+1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{1}{8} \frac{\Psi_{i+1,j} \Psi_{i+1,j+1}}{fz^5 l RR_i^3 hz hr^2} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1} \Psi_{i-2,j}}{fz^5 l RR_i^2 hz hr^3} \\
& -\frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j-1} \Psi_{i+2,j}}{fz^5 l RR_i^2 hz hr^3} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1} \Psi_{i-2,j}}{fz^5 l RR_i^2 hz hr^3} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i,j+1} \Psi_{i+2,j}}{fz^5 l RR_i^2 hz hr^3} \\
& -\frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j} \Psi_{i-1,j-1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j} \Psi_{i-1,j+1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j} \Psi_{i+1,j-1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i-1,j} \Psi_{i+1,j+1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j} \Psi_{i-1,j-1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j} \Psi_{i-1,j+1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j} \Psi_{i+1,j-1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} - \frac{1}{4} \frac{\Psi_{i+1,j} \Psi_{i+1,j+1}}{fz^5 l RR_i^2 hr^3 hz} + \frac{4 \Psi_{i+1,j}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} \\
& - \frac{2 \Psi_{i-1,j+1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} + \frac{4 \Psi_{i,j+1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} - \frac{2 \Psi_{i+1,j+1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} \\
& - \frac{\Psi_{i-1,j-1}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} + \frac{\Psi_{i+1,j-1}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} + \frac{2 \Psi_{i-1,j}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} \\
& - \frac{2 \Psi_{i+1,j}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} - \frac{\Psi_{i-1,j+1}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} + \frac{\Psi_{i+1,j+1}}{fz^3 l^2 RR_i^2 Ree hz^2 hr} \\
& - \frac{2 \Psi_{i-1,j-1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} + \frac{4 \Psi_{i,j-1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} - \frac{2 \Psi_{i+1,j-1}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} \\
& + \frac{4 \Psi_{i-1,j}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} - \frac{8 \Psi_{i,j}}{fz^3 l^2 RR_i Ree hz^2 hr^2} = 0
\end{aligned}$$

Résumé

Les équations de Navier-Stockes en leur forme complète sont très compliquées du fait de la présence des termes non linéaires. La résolution de ces équations exige des hypothèses spécifiques pour chaque situation. Dans cette contribution, nous avons réparti notre travail en deux parties. Dans la première partie nous avons étudié l'influence du gradient de pression oscillant sur l'écoulement instationnaire à l'intérieur de la conduite à section constante, et dans la deuxième partie nous avons étudié l'influence du changement de la géométrie sur l'écoulement stationnaire à l'intérieur de la conduite à section variable (sténose).

Pour la résolution numérique des équations qui gouvernent le problème, dans la première partie nous avons utilisé la méthode des différences finies suivant le schéma semi-implicite de Crank-Nicholson pour développer un algorithme de résolution de ces équations, et nous l'avons implanté dans le logiciel Maple, et pour la deuxième partie nous avons utilisé la méthode des volumes finis, La géométrie est construite avec le logiciel Gambit, et la simulation numérique est faite avec le code Fluent.

Mots clés : écoulement oscillatoire, sténose, différences finies, volumes finis, Fluent

Abstract

The Navier-Stockes equations in their complete form are very complicated because of the presence of non-linear terms. Solving these equations requires specific assumptions for each situation. In this contribution, we divided our work into two parts. In the first part, we studied the influence of the oscillating pressure gradient on the unsteady flow inside the pipe of constant section, and in the second part we studied the influence of the change of the geometry on the flow, Stationary flow inside the variable cross-section pipe (stenosis).

For the numerical resolution of the equations that govern the problem, in the first part we used the finite difference method following Crank-Nicholson's semi-implicit scheme to develop an algorithm for solving these equations and we have implemented it in The Maple software, and for the second part we used the finite volume method. The geometry is built with the Gambit software, and the numerical simulation is done with the Fluent code.

Keywords: Oscillatory flow, stenosis, finite difference method, finite volume, Fluent