

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. Mira de Béjaïa  
**Faculté des Sciences Exactes**  
**Département de Recherche Opérationnelle**



**Mémoire de fin de cycle**  
*en vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle*  
Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

## ***Thème***

---

# **Développement de quelques algorithmes d'analyse numérique des files d'attente**

---

**Présenté par :**

✓ *Melle.* BAZIZI Lydia.

✓ *Melle.* TOUAZI Amina.

**Devant le jury composé de :**

Présidente	M <sup>me</sup> Bouamara Z.	M.A.A.	U.A.M.Bejaia
Promoteur	M <sup>r</sup> Abbas K.	Professeur	U.A.M.Bejaia
Examinatrice	M <sup>lle</sup> Bachi K.	Doctorante	U.A.M.Bejaia
Examineur	M <sup>r</sup> Ouazine S.	M.A.B.	U.A.M.Bejaia



**Avant tout, nous remercions Dieu le tout-puissant de nous avoir donné la force et la patience de pouvoir mener ce travail à terme.**

Nous tenons vivement à remercier toute personne qui nous apporter du soutien, de l'aide dans la réalisation de ce travail.

Nous tenons particulièrement à remercier notre promoteur, Pr **K.ABASS** pour le plaisir de travailler avec, d'avoir proposé ce sujet, et d'avoir dirigé ce travail. Sans ses conseils, sa disponibilité, ses suggestions et son avis critique, on n'aurait jamais accompli ce travail. Sans oublier son soutien et son enrichissement pour notre formation de fin d'étude.

Un grand Merci pour, M<sup>r</sup> **M.SOUFIT** pour son aide précieuse, qui ne nous a pas manqué d'appui durant la préparation de ce travail.

Nous présentons nos sincères remerciements aux honorables membres de jury, d'avoir accepté d'évaluer notre travail.

À nos enseignants du département recherche opérationnelle, qui nous ont transmis leurs connaissances durant notre formation.

On ne remerciera jamais assez nos parents -Dieu qu'il les garde- pour tout ce qu'ils ont fait pour pouvoir travailler dans les bonnes conditions.

*Dieu merci.*



Avec toute mon affection que je leur dédie ce travail :

À mes très chers parents, pour leur soutiens et leur encouragements durant mon cycle d'étude.

À ma chère sœur Sonia qui m'a tout le temps soutenue moralement et encouragée dont je serai éternellement reconnaissante.

À mon très cher frère Lounes.

A ux membres de toute ma famille grand parents ,oncles, cousines et cousins.

À ma très chère collègue de travail Mina qui a su travailler dans la sérénité et la confiance.

À tous les étudiants (es) de la Recherche Opérationnelle.

À mes cher(es) amis (es) : Ziad, Nawel, Damou, Sissa, Siham , Lynda et tous ce qui j'ai pas pu citer ;

À toutes les personnes qui m'ont soutenues et participes de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

**Lydia**



Avec toute mon affection que je leur dédie ce travail :

À mes très chers parents, pour leur soutiens et leur encouragements durant mon cycle d'étude.

À ma chère sœur Katia qui m'a tout le temps soutenue moralement et encouragée dont je serai éternellement reconnaissante.

À mes très chers frères pour leur encouragement.

À ma très chère collègue de travail Lydia qui a su travailler dans la sérénité et la confiance.

À tous mes collègues de la Recherche Opérationnelle.

À mes cher(es) amis (es) : Houta, Assia, Wissam, Mounia, plus précisément Massi et Katy.

À toutes les personnes qui m'ont soutenues et participes de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

**Amina**

# TABLE DES MATIÈRES

Table des Matières	i
Introduction générale	1
<b>1 Systèmes de files d'attente</b>	<b>3</b>
1.1 Files d'attente . . . . .	3
1.1.1 Types de files d'attente . . . . .	4
1.1.2 Systèmes de files d'attente . . . . .	4
1.1.3 Classification des files d'attente . . . . .	5
1.1.4 Notation de Kandall . . . . .	6
1.2 Mesures de performances . . . . .	7
1.3 Systèmes d'attente M/M/1 et M/G/1 . . . . .	8
1.3.1 Système d'attente M/M/1/∞ . . . . .	8
1.3.2 Système d'attente M/G/1/∞ . . . . .	10
1.3.3 Systèmes d'attente à capacité finie . . . . .	13
1.4 Systèmes de files d'attente avec pannes . . . . .	16
1.4.1 Modèle d'attente M/G/1/N avec pannes . . . . .	17
<b>2 Chaînes de Markov et quelques méthodes d'analyse des files d'attente à capacité finie</b>	<b>19</b>
2.1 Processus stochastiques . . . . .	19
2.1.1 Définitions . . . . .	19
2.2 Généralités sur les chaînes de Markov . . . . .	20
2.2.1 Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ? . . . . .	20
2.3 Chaîne de Markov à temps discret . . . . .	21
2.3.1 Définitions et Propriétés . . . . .	21

2.3.2	Classification des états d'une chaîne de Markov . . . . .	22
2.4	Classification des Chaînes de Markov discrètes . . . . .	23
2.4.1	Chaînes de Markov irréductibles . . . . .	24
2.4.2	Chaînes absorbantes . . . . .	24
2.4.3	Chaînes de Markov homogènes . . . . .	25
2.5	Comportement asymptotique des chaînes de Markov irréductibles . . . . .	25
2.5.1	Comportement asymptotique . . . . .	25
2.5.2	Distribution limite . . . . .	25
2.5.3	Distribution stationnaire . . . . .	26
2.5.4	Comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques . .	26
2.6	Méthodes d'analyse . . . . .	27
2.6.1	Développement de Taylor . . . . .	27
2.6.2	Méthodes d'approximation par les bornes de perturbation . . . . .	29
2.6.3	Quelques bornes de perturbation des chaînes de Markov . . . . .	30
2.6.4	Relation entre les différentes bornes . . . . .	30
2.7	Développements limités . . . . .	31
2.7.1	Propriétés du développement limité . . . . .	32
2.7.2	Développement limité pour les chaînes de Markov . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Approximation polynomiale de la file d'attente M/G/1/N</b>	<b>34</b>
3.1	Analyse numérique de la file d'attente M/G/1/N . . . . .	34
3.2	Applications numériques . . . . .	37
3.2.1	Approche algorithmique . . . . .	37
3.2.2	Exemples numériques . . . . .	38
3.3	Analyse de sensibilité des caractéristiques stationnaires du modèle d'attente M/G/1/N . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Analyse fonctionnelle de la file M/G/1/N avec pannes du serveur</b>	<b>48</b>
4.1	Description du modèle . . . . .	48
4.2	Application numérique . . . . .	50
4.2.1	Approximation polynomiale de la distributions stationnaire . . . . .	51
4.2.2	Analyse de sensibilité de la distribution stationnaire . . . . .	55
4.3	Mesures de performance du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes . . . . .	59
4.3.1	Nombre moyen de clients dans le système d'attente M/G/1/N . . . . .	61
	<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des files d'attente occupe une place très importante en Recherche Opérationnelle, elle permet l'analyse des files d'attente et la modélisation des situations auxquelles on est confronté quotidiennement, par exemple : les caisses des supermarchés, les établissements de restauration rapide, les billetteries des aéroports, les cinémas, les bureaux de poste et les banques. Ce domaine de recherche est née lors de l'étude des équipements téléphoniques automatiques réalisée au début du  $XX^e$  siècle par l'ingénieur danois en télécommunication, Erlang. L'application de cette théorie n'a été généralisée à divers types de problèmes qu'après la seconde guerre mondiale.

Lors de la modélisation des systèmes réels, on rencontre souvent des systèmes complexes, dont la difficulté se présente dans le calcul de certaines caractéristiques de performance dûe à l'absence des expressions analytiques qui le permettent. Pour pallier à ces difficultés, plusieurs chercheurs ont fait appel aux méthodes d'approximation telles que la méthode du développement limité des chaînes de Markov [6], la méthode de développements en séries de Taylor [1, 23, 13], la méthode des bornes de perturbation [2], etc.

Lors de l'analyse de plusieurs modèles de files d'attente, on suppose souvent que la mesure de performance est fonction des paramètres du modèle. Cette forme fonctionnelle, nous permet d'étudier la dépendance de la performance en question par rapport aux paramètres de modèles. Le concept de l'analyse de perturbation des modèles stochastiques s'inscrit dans ce cadre. Il permet d'étudier particulièrement l'effet du changement des valeurs des paramètres sur le calcul des mesures de performance du modèle en question. Ce changement est motivé du point de vue statistique par le manque de données, ou par manque d'information sur les valeurs des paramètres du modèle.

Dans ce travail, nous nous intéressons à développer quelques algorithmes d'analyse de perturbation de certains systèmes de files d'attente. En particulier, nous allons utiliser l'approche basée sur les développements limités des chaînes de Markov [6] aux cas de modèles de files

d'attente. Nous considérons deux types de perturbation : perturbation distributionnelle et perturbation paramétrique. La première consiste à perturber la distribution de temps de service de la file d'attente  $M/M/1/N$  classique, la deuxième consiste à perturber le taux de pannes de la file d'attente  $M/G/1/N$ . La spécificité de l'approche utilisée, est que les coefficients de développements limités sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale relative au modèle d'attente nominal. Cette matrice nous renseigne sur la convergence de la chaîne de Markov décrivant le modèle étudié du régime transitoire vers le régime stationnaire.

L'objectif de ce travail est d'estimer les mesures de performance des modèles d'attente considérés par des approximations polynomiales, obtenues via les développements limités des chaînes de Markov [6]. Ainsi, nous développerons quelques algorithmes basés sur l'approche utilisée, ce qui nous permettra en plus de considérer des analyses de sensibilité de telles performances par rapport aux variations des paramètres des modèles en question. Dans ce sens, plusieurs exemples numériques feront l'objet de notre analyse.

Ce mémoire se compose d'une introduction générale, quatre chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

Le premier chapitre introduit les notions de base sur les systèmes de files d'attente et leurs caractéristiques de performance. Une attention particulière sera accordée aux modèles d'attente non-fiables, ainsi que les méthodes d'approximation de ce type de modèles.

Dans le deuxième chapitre, on présentera quelques généralités sur les chaînes de Markov, les méthodes d'analyse de certains files d'attente, En particulier, on s'attardera sur l'approche des développements limités des chaînes de Markov.

Le troisième chapitre sera consacré à l'analyse de perturbation du modèle d'attente  $M/M/1/N$ , par l'approche des développements limités. La perturbation concerne la distribution de temps du service.

Le quatrième chapitre concernera l'analyse de perturbation du modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec pannes du serveur, où nous perturbons le taux de pannes du serveur. Une analyse de sensibilité des mesures de performance du ce modèle sera aussi l'objet de ce chapitre. Ce mémoire s'achèvera par une conclusion générale, où en mettant l'accent sur les éventuelles pistes de recherche à entreprendre.



# CHAPITRE 1

## SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, on les rencontre dans divers domaines d'activité : guichet de poste, trafic routier, centrale téléphonique, atelier de réparation, etc. La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des phénomènes d'attente. L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. Dans ce chapitre, on présentera quelques concepts de base et les éléments essentiels relatifs au formalisme de files d'attente. On accordera une attention particulière à la présentation de certaines files d'attente à capacité finie.

### 1.1 Files d'attente

**Définition 1.1.1.** Une **file d'attente** ou **queue** est un système stochastique composé d'un espace d'attente, d'un ou plusieurs serveurs et des clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système.

La théorie des files d'attente consiste à modéliser et à analyser de nombreuses situations en apparence très diverses. La théorie des files d'attente fut développée pour fournir des modèles permettant de prévoir le comportement de systèmes répondant à des demandes aléatoires.

Les files d'attente sont généralement considérées comme outil très puissant d'évaluation des mesures de performance de divers systèmes réels.

### 1.1.1 Types de files d'attente

À partir de regroupement d'individus attendant un service, on pourra obtenir plusieurs types de files d'attente telles que :

✓ **Files séparées** : une file par guichet (par exemple : caisses des supermarchés).

Ce système a l'inconvénient de générer des frustrations lorsque certaines files sont plus rapides que d'autres, ou lorsqu'un guichet supplémentaire s'ouvre, permettant aux derniers de passer les premiers ;

✓ **File distribuée (mutualisée)** : une seule file alimente plusieurs guichets ;

✓ **File virtuelle** : une prise de ticket permet de conserver l'ordre d'arrivée, sans avoir à faire la file physiquement : par exemple, les personnes peuvent s'asseoir en attendant leur tour ;

✓ **File virtuelle mobile** : les nouvelles technologies permettent maintenant de prendre rang par internet ou par téléphone, et d'être prévenu par SMS lorsque son tour approche. Le temps d'attente ne nécessitant plus une présence physique ;

✓ **File prioritaire** : des files plus rapides peuvent être créées, par exemple pour les personnes ayant un handicap, ou pour les personnes ayant une carte de fidélité ; parfois, des files prioritaires payantes peuvent être proposées.

### 1.1.2 Systèmes de files d'attente

Un modèle général d'un système d'attente peut être tout simplement décrit comme suit :

Les clients arrivent à un endroit et réclament un certain service. Les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires.

Le service d'un client qui arrive au système, va faire face à deux situations. Soit il va être servi directement si le serveur est libre, sinon il passe à une file dans l'attente du service. Comme le montre la figure (1.1).

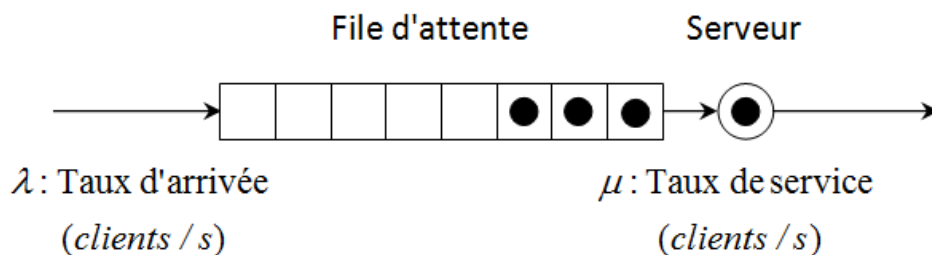


FIGURE 1.1 – Système de file d'attente.

### 1.1.3 Classification des files d'attente

La classification des files d'attente simples se base principalement sur trois éléments :

- le processus stochastique décrivant la durée de temps séparant deux arrivées consécutives des clients dans le système ;
- le nombre de serveurs ;
- la loi probabiliste décrivant la durée du temps de service des clients ;

A ces trois éléments, il faut parfois ajouter d'autres caractéristiques comme le nombre de places d'attente, le nombre total de clients existants ou, encore, les règles spécifiant l'ordre de traitement des clients.

#### 1) *Processus d'arrivée*

L'arrivée des clients à la station est décrit à l'aide d'un processus de comptage  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

**Définition 1.1.2.** [5] Un processus de comptage  $\{X(t), t \geq 0\}$  est un processus de renouvellement si et seulement si : les inter-arrivées des clients  $\{T_n, n \geq 1\}$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

#### 2) *Temps de service*

**Définition 1.1.3.** [5] Soit  $t_n$  la variable aléatoire qui mesure l'instant de fin de service du  $n$ -ième client.

Soit  $X_n$  la variable aléatoire désignant le temps de service du  $n$ -ième client (temps séparant le début de service de la fin de celui-là), on considère que les temps de service consécutifs sont décrits par des variables aléatoires  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  indépendantes et identiquement distribuées.

#### 3) *Nombre de serveurs*

La capacité de service dépend de la capacité en nombre de clients à traiter par chaque

serveur et du nombre de serveurs disponibles. On suppose qu'un serveur ne traite qu'un client à la fois. Les systèmes de files d'attente fonctionnent avec un ou plusieurs serveurs.

#### 4) *Discipline de service*

La discipline de la file est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder à la ressource modélisée par le serveur. Les disciplines de service classiques les plus courantes ainsi que leurs acronymes sont :

- ◇ **FIFO (First In First Out)** : les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée ;
- ◇ **LIFO (Last In First Out)** : le dernier client arrivé sera le premier traité ;
- ◇ **RANDOM (aléatoire)** : le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente ;
- ◇ **Round-Robin (cyclique)** : tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum  $Q$  (Quantité déterminée) de leur temps de service et ils sont remplacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli.

### 1.1.4 Notation de Kendall

Cette notation est proposée par Kendall en 1953, c'est un système standard pour décrire les caractéristiques essentielles d'un modèle de file d'attente. Ainsi, la notation de Kendall normalise la description d'une file simple de forme :

$$A/B/s/K/N/Z, \tag{1.1}$$

où :

$A$  : désigne la distribution de temps des inter-arrivées.

$B$  : désigne la distribution des durées de service.

$s$  : désigne le nombre de serveurs en parallèles.

$K$  : désigne la capacité du système.

$N$  : désigne la population des usagers.

$Z$  : c'est la discipline de service.

Pour spécifier les distributions de  $A$  et  $B$ , on aborde les notations suivantes :

$M$  : la distribution est exponentielle.

$E_k$  : la distribution est une loi d'Erlang d'ordre  $k$ .

$G$  : la distribution est une loi générale.

Dans la notation de Kendall, si le 4<sup>ème</sup> paramètre est enlevé, ceci signifie que la capacité du système est infinie.

## 1.2 Mesures de performances

L'analyse théorique d'un modèle de files d'attente a pour objet de saisir qualitativement et quantitativement le fonctionnement du système en question. Pour cela, il faut définir les critères et les mesures susceptibles d'atteindre cet objectif afin de déterminer à l'avance les performances du système.

Pour un système composé d'une seule file d'attente, les principales mesures de performances sont :

- ◇  $L$  : le nombre moyen de clients dans le système.
- ◇  $L_q$  : le nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- ◇  $W$  : la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service).
- ◇  $W_q$  : la durée moyenne d'attente d'un seul client.

Une mesure très importante, qui décrit le comportement asymptotique (lorsqu'il existe) du système tout entier, est la distribution stationnaire notée par  $\pi$ . La plupart des performances précédentes peuvent être exprimées à l'aide de la distribution  $\pi$ .

### Formule de Little

La formule de Little est l'un des résultats les plus utiles en théorie de files d'attente. Soit  $\alpha(t)$  le nombre d'arrivées dans le système jusqu'au temps  $t$ , et  $\lambda_t := \alpha(t)/t$  comme le taux moyen d'arrivée pendant l'intervalle du temps  $[0, t]$ . Soit  $W$  la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service). Dénoter enfin le nombre moyen de clients dans le système durant  $[0, t]$  par  $L_t$ . La relation entre ces deux mesures de performance est donnée dans le théorème suivant.

#### **Théorème 1.2.1.** [25](*Formule de Little*)

Si la limite  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$  et  $W$  existent, alors la limite  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$  existe aussi, et la relation

$$L = \lambda W. \tag{1.2}$$

est vérifiée.

Les valeurs de mesures de performance sont liées les unes aux autres par les relations suivante [25] :

$$L = \lambda W. \tag{1.3}$$

$$L_q = \lambda W_q. \tag{1.4}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (1.5)$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.6)$$

Tel que  $\mu$  est le taux de service. Les deux premières relations sont appelées **Formules de Little**.

## 1.3 Systèmes d'attente M/M/1 et M/G/1

### 1.3.1 Système d'attente M/M/1/ $\infty$

Ce modèle est le plus simple dans la théorie des files d'attente. Il décrit un système de file d'attente à un seul serveur, où les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux  $\lambda$  (ce qui implique que les inter-arrivées sont de loi exponentielle). Les clients sont traités dans l'ordre de leurs arrivées (*FIFO*), et les durées de service sont des variables aléatoires qui suivent une loi exponentielle de taux  $\mu$  qui sont mutuellement indépendantes et indépendantes des instants d'arrivées de chaque client.

Une file d'attente de type M/M/1 peut être décrite par un processus markovien. L'état d'une telle file est décrit par  $\{X(t), t \geq 0\}$  qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ .

#### Régime transitoire

Soit  $\Delta t$  un intervalle du temps très petit. En utilisant les propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, on obtient les équations suivantes :

$$P(\text{d'avoir exactement une arrivée pendant } \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

$$P(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

$$P(\text{d'avoir deux arrivées ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t).$$

$$P(\text{qui y est exactement un départ pendant } \Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

$$P(\text{qui y est aucun départ pendant } \Delta t) = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

$$P(\text{qui y est deux départs ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t).$$

Ainsi, la matrice des taux de transition  $Q = (Q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  prend la forme suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

### Régime stationnaire

La probabilité qui y est  $n$  clients en régime stationnaire peut être obtenue en utilisant les equations de Chapman-Kolmogorov suivantes :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \\ p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \quad , n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

Si  $\lambda < \mu$ , le processus  $\{X_t; t \geq 0\}$  converge vers la solution suivante [8] :

$$p_n = p_0 \rho^n \quad , n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

où :  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  : est le taux du trafic,

et

$$p_0 = 1 - \rho. \quad (1.9)$$

Si  $\rho < 1$  (condition d'ergodicité), alors il existe une unique distribution stationnaire.

On note que  $\pi_n$  est la probabilité stationnaire d'avoir  $n$  clients dans le système.

### Mesures de performance du système d'attente M/M/1/ $\infty$

– Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \sum_{n \geq 1} (n - 1) p_n = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}. \quad (1.10)$$

– Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = \sum_{n \geq 0} n p_n = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (1.11)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans la file :

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}. \quad (1.12)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}. \quad (1.13)$$

### 1.3.2 Système d'attente M/G/1/ $\infty$

Dans ce type de système, la durée des inter-arrivées est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , et la durée de service est une variable aléatoire suivant une loi quelconque  $H$ , de moyenne  $1/\mu$ . La propriété de Markov du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$  facilitant l'analyse des systèmes de type  $M/M/1$  n'est plus vérifiée pour le système  $M/G/1$ , ce qui rend son analyse plus délicate.

#### *La chaîne de Markov induite*

La description de l'état d'un système de files d'attente du type  $M/G/1$  en instant donné  $t$ , nous exige de connaître non seulement le nombre de clients dans le système à cet instant, mais aussi le temps de service déjà écoulé  $A_1(t)$  d'un client à l'instant  $t$ .

Le processus bidimensionnel  $\{X(t), A_1(t); t \geq 0\}$  possède à nouveau la propriété de Markov ; le calcul de son régime transitoire ferait intervenir des équations aux dérivées partielles.

Pour cela, on introduit la méthode de la chaîne de Markov induite, qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret.

A cet effet, nous considérons les instants  $(d_n)$  de départ du  $n$ -ième client. Ainsi, on définit le processus à temps discret  $\{X(d_n), A_1(d_n); n = 1, 2, \dots\}$ , où  $X(d_n) = X_n$  et  $A_1(d_n) = 0$ , pour  $n = 1, 2, \dots$

La variable aléatoire  $X_n = X(d_n)$  représentant le nombre de clients dans le système juste après l'instant  $(d_n)$  est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus

$E_n$  "le nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le  $n$ -ième client est servi".

Les variables aléatoires  $E_n$  sont indépendantes entre elles ; leur distribution commune est :

$$\mathbb{P}r[E_n = k] = a_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dH(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + E_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.14)$$



avec :

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } X_n > 0. \\ 0 & \text{Si } X_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ceci montre que  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $E_{n+1}$  et non des valeurs de  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ . Ce qui signifie que la suite  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$ .

### Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  sont données par :

$$P_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j / X_n = i] \\ = \begin{cases} P_{0j} = a_j & \text{Si } j \geq 0, i = 0. \\ P_{ij} = a_{j-i+1} & \text{Si } 1 \leq i \leq j + 1. \\ P_{ij} = 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Et la matrice des probabilités de transition prend la forme suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

*Remarque 1.3.1.* Puisqu'on peut passer de chaque état à n'importe quel état, il s'agit donc d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ .

### Régime stationnaire

Supposons que  $\rho < 1$  et soit  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  où

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr[X_n = k].$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution  $\pi$  elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante  $\Pi(Z)$ . Ceci, en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète stationnaire par rapport à une matrice stochastique  $\mathbb{P} : \pi \mathbb{P} = \pi$ . On obtient alors [25] :

$$\Pi(Z) = \frac{\pi_0 P(Z)(Z-1)}{Z - P(Z)}. \quad (1.15)$$

où  $P(Z) = \sum_{j \geq 0} P_j Z^j = \int_0^{+\infty} e^{\lambda(Z-1)s} dH(s)$ , est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service,  $Z \in \mathbb{C}$  tel que  $|Z| < 1$ . La formule (1.15) est connue sous le nom de la première formule de **Pollaczek – Khinchine**.

*Remarque 1.3.2.* • Deux méthodes existent pour déterminer les probabilités

$\pi_k (k \geq 0)$ . On peut les calculer en développant la fonction génératrice  $\Pi(Z)$  en série de Mac Laurin.

- On peut montrer que les probabilités stationnaires  $\pi_k (k \geq 0)$  de la chaîne de Markov induite  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  sont identiques aux probabilités stationnaires  $P_n$  du processus continu  $\{X(t); t \geq 0\}$  [25]. Notons que ce résultat est valable pour le système  $M/G/1$ , ne s'étend généralement pas à d'autres processus non markoviens.
- De la relation (1.14), on tire  $E_{n+1} = X_{n+1} - X_n + \delta_n$ , puisqu'on se trouve en régime stationnaire,

$$\mathbb{E}(E_{n+1}) = \mathbb{E}(\delta_n) = \Pr[X_n > 0] = 1 - \Pr[X_n = 0].$$

Donc, on a

$$\mathbb{E}(E_{n+1}) = 1 - \Pr[X_n = 0].$$

Où :  $\rho$  (l'intensité du trafic) est égale à l'espérance mathématique de  $E_n$ .

Alors,  $\pi_0 = 1 - \rho$ ;

Et la formule (1.15) s'écrit encore

$$\Pi(Z) = H^*(\lambda - \lambda Z) \frac{(1 - \rho)(Z - 1)}{Z - H^*(\lambda - \lambda Z)}.$$

où  $H^*$  est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service.

## Les caractéristiques du système M/G/1

### *Le nombre moyen de clients dans le système*

Pour calculer le nombre moyen de clients dans le système, en régime stationnaire,  $L = \mathbb{E}(X)$ , on peut utiliser la relation :

$$L = \mathbb{E}(X) = \lim_{Z \rightarrow 1} \Pi'(Z).$$

Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué. Une méthode élémentaire est utilisée pour montrer la formule dite "**deuxième formule de Pollaczek-Khinchine**", donnant l'expression de  $L$  par :

$$L = \mathbb{E}(X) = \rho + \rho^2 \frac{1 + C_\xi^2}{2(1 - \rho)}.$$

où :

$\xi$  est le temps de service du  $n$ -ième client.

$C_\xi^2 = (\sigma_\xi^2 / (\bar{\xi})^2)$  est le carré du coefficient de variation du temps de service.

### *Le temps moyen de séjour dans le système*

En utilisant la formule de Little, qui a été démontrée pour le système  $M/G/1$  [25], on obtient :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(\sigma_\xi^2 + 1/\mu^2)}{2(1 - \rho)}.$$

### *Le temps moyen d'attente dans le système*

Si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  ; puisque  $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ , alors, le temps moyen d'attente  $W_q$  dans le système sera :

$$W_q = \frac{\lambda(\sigma_\xi^2 + 1/\mu^2)}{2(1 - \rho)}.$$

### *Période d'activité*

Si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , un raisonnement intuitif montre que  $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{\mu - \lambda}$  est vérifiée même pour le système  $M/G/1$  [25].  $U$  étant l'intervalle de temps pendant lequel la station de service est continuellement occupée.

## 1.3.3 Systèmes d'attente à capacité finie

Dans cette section, on s'intéressera aux cas des modèles d'attente à capacité finie. Ce type de modèles sera l'objet d'une analyse plus approfondie dans les prochains chapitres.

### Système d'attente M/M/1/N

Ce système à serveur unique a la même structure que  $M/M/1/\infty$ , sauf que ce dernier a une capacité d'attente finie. Soit  $N$  la capacité de la file d'attente du modèle d'attente  $M/M/1$ . Conservons les notations introduites précédemment lors de la description des modèles ci-dessus. Un client qui arrive et trouve déjà  $N$  clients dans la file, il sera perdu.

L'état de ce système d'attente est décrit par le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ , défini sur un ensemble d'états  $S = \{0, 1, \dots, N\}$ .

### Régime transitoire

Reconsidérons les équations différentielles de Chapman-Kolmogorov correspondantes aux probabilités de transition dans le système M/M/1/∞. De plus, on rajoute que la capacité de la file est limitée à  $N$ , on aura les équations suivantes :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \\ p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \quad .n = 1, 2, \dots, N \\ p'_N = -\mu p_N + \lambda p_{N-1}. \end{cases} \quad (1.16)$$

En faisant tendre  $t$  vers l'infini dans le système ci-dessus, on aboutit au régime stationnaire.

### Régime stationnaire

La probabilité stationnaire d'être à l'état  $n$  se calcule par récurrence :

$$\pi_n = \rho \pi_{n-1}. \quad n = 0, \dots, N.$$

avec  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . On aboutit à la relation suivante :

$$\pi_n = \pi_0 \rho^n. \quad n \leq N.$$

En utilisant la condition de normalisation  $\sum_{n=0}^N \pi_n = 1$ , on peut déduire les formules suivantes :

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (1.17)$$

Finalement, on aura :

$$\pi_n = \left( \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right) \rho^n. \quad (1.18)$$

### Les caractéristiques stationnaires de la file M/M/1/N

– Le nombre moyen de clients dans le système

$$L = \frac{(N + 1)\rho^{N+1}}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (1.19)$$

– Le nombre moyen de clients dans la file

$$L_q = L - \rho(1 - \pi_N) = \left( \frac{\rho}{1 - \rho} \right) \frac{(N + 1)\rho^{N+1}}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (1.20)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système

$$W = \frac{(1 + N\rho^{N+1}) - (N + 1)\rho^N}{\mu(1 - \rho)(1 - \rho^N)}. \quad (1.21)$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans la file

$$W = \frac{-N\rho^N + (N - 1)\rho^{N+1}}{\mu(1 - \rho)(1 - \rho^N)}. \quad (1.22)$$

On peut facilement retrouver les caractéristiques de performance de M/M/1/ $\infty$ , lorsque N tend vers l'infini et  $\rho < 1$ .

### Système d'attente M/G/1/N

Ce modèle est la version finie du modèle déjà introduit M/G/1/ $\infty$ . Ainsi, à la différence, on suppose ici que la capacité d'attente est finie. Conservons toutes notations relatives à la description du modèle d'attente M/G/1/ $\infty$ . L'état de ce système d'attente est gouverné par le processus stochastique à temps discret  $\{X_n = X(t_n), n = 1, 2, \dots\}$ , où  $t_n$  : est l'instant de départ du  $n$ -ième client, à espace d'états discret  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  [5].

#### Régime stationnaire

Soit  $A_n$  le nombre de clients entrant dans le système durant le service du  $n$ -ième client.

Les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes et leur distribution est :

$$a_k = P(A_n) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} B(t) dt. \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Le processus  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est caractérisé par la matrice de probabilités de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k \\ \vdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} a_k \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 - a_0 \end{pmatrix},$$

où :  $B(\cdot)$  est la distribution de temps de service.

L'analyse du régime stationnaire de ce modèle d'attente est plus compliquée que celle relative au modèle d'attente M/G/1, où on dispose de plusieurs résultats analytiques obtenus par différentes approches, ce qui facilite l'analyse de performance de tels systèmes. Cependant, la file d'attente M/G/1/N est souvent analysée que par l'utilisation des méthodes approximatives, et en particulier numériques. Une description plus détaillée de ce modèle d'attente a été considéré dans[1].

## 1.4 Systèmes de files d'attente avec pannes

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, dans plusieurs situations réelles, on rencontre souvent des cas où les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires et, par conséquent, durant les périodes de réparation, le service des clients est interrompu. L'analyse de fonctionnement de ces systèmes est différente de celle des systèmes absolument fiables, où les serveurs ne tombent pas en panne durant les périodes de service.

L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante pour les applications pratiques, car la fiabilité des serveurs a une influence abondante sur les caractéristiques du système considéré. En particulier, plus les serveurs tombent en pannes, c'est-à-dire que les indices de fiabilité des serveurs sont bas, plus le nombre de clients dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque client dans la file est longue. Concernant la nature de ces interruptions, on distingue généralement les cas suivants :

- **Pannes de nature conservatrices**

Dès que la panne se produit, le service est interrompu, mais le client reste auprès du serveur et attend que ce dernier soit réparé. Après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu (la partie de service déjà acquise est donc conservée).

- **Pannes de nature non conservatrices**

Dans ce cas, la partie de service déjà acquise est détruite. Après la réparation de la panne, le service reprend à zéro.

- **Pannes avec perte définitive de client**

Dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon.

### • Pannes avec perte momentanée de client

Dès que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite. Par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

#### 1.4.1 Modèle d'attente M/G/1/N avec pannes

Considérons un système de files d'attente M/G/1/N, où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$ . La distribution  $H$  de la durée de service est générale, de fonction de répartition  $B(\cdot)$  et de moyenne  $1/\mu$ . Supposons que la période de la réparation est exponentielle de taux  $r > 0$ .

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client (c'est la nature de panne du serveur), c'est à dire que dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon. Supposons que le client quitte le système définitivement avec une probabilité  $(1 - \theta)$  lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité  $\theta > 0$ .

L'état du système de files d'attente M/G/1/N à serveur non fiable est décrit par la chaîne de Markov  $\{X_n, n \geq 0\}$  induite aux instants de "fin" du  $n$ -ième service, ou "fin" de la  $n$ -ième réparation. La matrice de probabilités de transition de la chaîne  $\{X_n, n \geq 0\}$  est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} \alpha_k \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{N-4} & 1 - \sum_{k=0}^{N-4} \alpha_k \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 & 1 - \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

où :

$$\alpha_k = \theta \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x) + (1 - \theta) \frac{r}{r + \lambda} \left( \frac{\lambda}{\lambda + r} \right)^k, \quad k = 0, \dots, N - 2. \quad (1.25)$$

L'étude des mesures de performance de ce modèle d'attente est équivalente à celle de son modèle analogue sans pannes. Une analyse détaillée de ce modèle d'attente est donnée dans [2].

**Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente. Puis, on a introduit les modèles d'attente à capacité finie  $M/G/1/N$  et  $M/G/1/N$  avec pannes de serveur. Ces deux modèles feront l'objet dans l'analyse du présent travail.



## CHAPITRE 2

# CHAÎNES DE MARKOV ET QUELQUES MÉTHODES D'ANALYSE DES FILES D'ATTENTE À CAPACITÉ FINIE

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord décrire ce que l'on entend par chaîne de Markov. Pour cela, nous allons d'abord nous familiariser avec certaines notions de base de la théorie des chaînes de Markov. Pour de plus amples connaissances, on pourra se référer à [16, 24]. En suite, nous décrirons brièvement certaines approches d'analyse des systèmes d'attente pouvant être régis par les chaînes de Markov. En particulier, nous nous intéresserons aux approches polynomiales, telles que les développements limités et les développements de Taylor, ainsi que les bornes de perturbation.

### 2.1 Processus stochastiques

Le calcul classique des probabilités concerne des épreuves où chaque résultat possible (ou réalisation) est mesuré par un nombre, ce qui conduit à la notion de variable aléatoire. Un processus stochastique représente une évolution discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

#### 2.1.1 Définitions

**Définition 2.1.1.** On peut définir un processus stochastique comme étant une famille  $\{X_t\}_{t \in T}$  de variables aléatoires indexées par le temps  $t$ . Les mots processus et stochastique signifient respectivement *fonction* et *aléatoire*. Alors qu'une variable aléatoire  $X$  associe à chaque  $\omega \in \Omega$  une réalisation  $X(\omega)$ , un processus stochastique  $\{X_t\}_{t \in T}$  associe à chaque  $\omega$  une fonction (ou

trajectoire)  $\{X_t(\omega)_{t \in T}\}$  :

$$\begin{aligned} T &\rightarrow S, \\ t &\rightarrow X_t(\omega), \end{aligned}$$

où  $S$  est l'espace d'arrivée des variables aléatoires  $X_t$ . Passer des variables aléatoires aux processus stochastiques revient à passer en analyse des points aux fonctions. Lorsque l'ensemble des temps  $T$  est en plus dénombrable (par exemple  $T = \mathbb{N}$ ), on parle de processus stochastiques à temps discret. Lorsqu'il est continu (i.e.  $T = [0; t_0]$  ou  $T = \mathbb{R}_+$ ), on parle de processus stochastiques à temps continu.

Il existe une classe de processus stochastique qui s'intitule processus Markovien. Celle-ci se distingue par rapport aux autres classes par la propriété dite de Markov.

## 2.2 Généralités sur les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire :  $X_n$  représente l'état du système à l'instant  $n$ . La propriété fondamentale des chaînes de Markov, dite propriété de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur actuelle. Autrement dit, conditionnellement à  $X_n$ ,  $(X_0, \dots, X_n)$  et  $(X_{n+k}, k \in \mathbb{N})$  sont indépendants.

### 2.2.1 Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ?

**Définition 2.2.1.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace  $S$  fini ou dénombrable, appelé espace d'états. On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov ssi :

$$P[X_{n+1} = j / X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j / X_n = i_n]. \quad (2.1)$$

Nous appelons probabilité conditionnelle :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad i, j \in S$$

Si de plus cette quantité ne dépend pas de  $n$ , i.e.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i). \quad (2.2)$$

alors la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite homogène. Cette propriété induit à une stabilité dans l'évolution du phénomène au cours du temps.

Il faut comprendre une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme une promenade dans l'espace d'états  $S$ , la variable  $X_n$  indiquant l'état dans lequel on est à l'instant  $n$ . La v.a.  $X_0$  représente l'état initial duquel démarre la chaîne. Selon le contexte,  $X_0$  pourra être aléatoire ou déterministe. La propriété de Markov signifie que, connaissant le dernier état visité (disons à l'instant  $n$ ), la loi du prochain état visité (i.e. la loi de  $X_{n+1}$ ) ne dépend pas des états visités depuis l'instant 0 jusqu'à l'instant  $n - 1$ . Mais il dépend du présent :  $X_n$  et  $X_{n+1}$  n'ont aucune raison d'être indépendantes !

La propriété d'homogénéité d'une chaîne de Markov exprime quant à elle que la probabilité d'aller de  $i$  en  $j$  reste la même au cours du temps. Elle permet de regrouper en une seule matrice (indépendante de  $n$ ) les probabilités de transition entre deux états quelconques.

**Définition 2.2.2.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène à espace d'états  $S$ . Soient  $i, j \in S$  deux états. La probabilité

$$p_{i,j} := P(X_1 = j | X_0 = i). \quad (2.3)$$

est appelée probabilité de transition de  $i$  à  $j$ . La matrice  $P := (p_{i,j})_{i,j \in S}$  est appelée matrice de transition de la chaîne.

Lorsque l'espace d'états  $S$  est fini, la matrice  $P$  est carrée de taille  $\text{Card}(S)$ . Lorsqu'il est infini, elle admet un nombre infini de lignes et de colonnes. Les coefficients de la matrice  $P$  sont positifs ou nuls. Leur somme sur une même ligne vaut 1 : pour tout  $i \in S$ ,

$$\sum_{j \in S} p_{i,j} = \sum_{j \in S} p_{i,j} := P(X_1 = j | x_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in S} \{X_1 = j\} \mid \{X_0 = i\}\right). \quad (2.4)$$

Il est souvent plus économique (et plus pertinent) de résumer les probabilités de transition dans le diagramme de transition. C'est un graphe orienté et pondéré dont l'ensemble des sommets est  $S$ . Une arête de poids  $p_{i,j}$  va de  $i$  à  $j$  si  $p_{i,j} > 0$ .

## 2.3 Chaîne de Markov à temps discret

Les chaînes de Markov sont des processus Markoviens à temps discrets.

### 2.3.1 Définitions et Propriétés

**Définition 2.3.1.**  $\{X_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$  définie sur un espace d'états  $S$ , est une chaîne de Markov à temps discret si pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $i \in S$ , si et seulement si :

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (2.5)$$

Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique  $\{X_n, n \geq 0\}$  satisfait les restrictions suivantes :

1. Le processus est à temps discret ;
2. L'espace des états  $S$  est fini ou dénombrable ;
3. Le processus satisfait la propriété de Markov (2.5) ;

### 2.3.2 Classification des états d'une chaîne de Markov

Dans le but d'étudier le comportement de la chaîne de Markov à long terme, nous devons classifier l'espace de ses états que l'on notera  $S = \{i, j, \dots\}$ , avec  $i, j, \dots$  constituent les points de cet espace, pour cela nous définissons quelques types d'états d'une chaîne de Markov discrète.

Un état  $j \in S$  est **accessible** à partir d'un état  $i$  si la probabilité de transition de  $i$  en  $j$  en un certain nombre d'étapes est positive.

$$\exists n \geq 0 \quad \text{tel que} \quad p_{i,j}^{(n)} \geq 0$$

– **état communiquant** :

On dit que l'état  $j$  **communique** avec l'état  $i$ , si chacun d'eux est accessible à partir de l'autre.

– **état persistant (ou récurrent)**

$i \in S$  est un état **récurrent** si, en partant de l'état  $i$  on repassera presque sûrement par cet état.

$$F_{i,i}(+\infty) = 1$$

où  $F_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^n f_{i,j}(k)$ . représente la probabilité de passage de l'état  $i$  à l'état  $j$  en au moins de  $n+1$  transitions  $f_{i,j}(n)$  la probabilité de premier passage

$$f_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j).$$

Il existe deux type d'état persistant

1. **états récurrents non nuls** :

Un état  $i$  est dit **récurrent non nul**, si la chaîne partant de  $i$  repassera par  $i$  au bout

d'un temps fini.

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)} < \infty.$$

## 2. états récurrents nuls :

Un état  $i$  est dit **récurrent nul**, si la chaîne partant de  $i$  repassera par  $i$  au bout d'un temps infini

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)} = +\infty.$$

### – état transitoire :

$i \in S$  est un état **transitoire** si, en partant de l'état  $i$  on risque de ne pas repasser par cet état.

$$F_{i,i}(+\infty) < 1.$$

*Remarques 2.3.1.*

- Si les états  $i$  et  $j$  communiquent alors ils sont tous les deux récurrents ou tous les deux transitoires. Ainsi, tous les états appartenant à la même classe irréductible seront de même type d'état transitoire (resp. récurrent).
- La classe sera qualifiée de transitoire (resp. récurrente) selon le type de ses états communicants.

### – périodicité d'un état

On appelle période d'un état  $i$  noté l'entier  $d(i)$  défini par :

$$d(i) = \text{PGCD}\{n \geq 1, p_{i,i}^{(n)} > 0\}.$$

- ✓ Si  $d(i) = d \geq 2$ , on peut dire que l'état  $i$  est périodique de période  $d$ .
- ✓ Si  $d(i) = 1$ , l'état  $i$  est qualifié de apériodique.

### – état ergodique

Un état est dit ergodique s'il est récurrent non nul et apériodique.

### – état absorbant :

On dit que l'état  $i$  est absorbant ssi :  $p_{i,i} = 0$  et  $p_{i,j} = 1 \quad \forall j \neq i$ .

## 2.4 Classification des Chaînes de Markov discrètes

On dit qu'une chaîne de Markov est discrète si son espace d'états  $S$  est fini ou dénombrable.

### 2.4.1 Chaînes de Markov irréductibles

**Définition 2.4.1.** Une chaîne de Markov est **irréductible**, si et seulement si, pour tout état  $i$  et  $j$ , il existe  $n \geq 0$  (pouvant dépendre de  $i$  et  $j$ ) tel que

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Autrement dit, une chaîne de Markov est irréductible, si elle a seulement une classe de communication. Si une chaîne de Markov n'est pas irréductible, nous l'appelons une chaîne **réductible**.

#### Définitions et propriétés[7]

- Une chaîne de Markov est irréductible si elle n'est constituée que d'une seule classe d'états communicants.
- Une chaîne de Markov est irréductible si son graphe représentatif est fortement connexe. Dans le cas contraire, la chaîne est réductible.
- Une chaîne de Markov est irréductible ne possédant pas qu'une seule classe et tous ses états sont périodiques, nous dirons qu'une telle chaîne est périodique. Sinon, la chaîne est dite apériodique.
- Une chaîne de Markov est fortement irréductible si et seulement si elle est irréductible est apériodique.
- Les états d'une chaîne de Markov irréductible sont de même nature (récurrents nuls ou bien récurrent non nuls). En général, on peut califier la nature de chaîne de Markov irréductible suivant la nature de ses états communicants (récurrent, transitoire, périodique, apériodique).

### 2.4.2 Chaînes absorbantes

Une chaîne de Markov est absorbante si et seulement si :

1. il existe, pour tout état, un état absorbant atteignable de cet état c'est à dire que la chaîne de Markov ne possède qu'une seule classe absorbante.
2. de tout état non absorbant, on peut l'atteindre d'un état absorbant.

### 2.4.3 Chaînes de Markov homogènes

Une chaîne de Markov est homogène dans le temps si la probabilité d'effectuer une transition d'un état à un autre est indépendante de l'instant auquel a lieu cette transition [18]. En d'autres termes, pour tout paire d'états  $(i, j)$  et pour tout instant  $n$

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j / X_{n+k-1} = i] \quad \forall k \geq 0. \quad (2.6)$$

Cette propriété induit à une stabilité dans l'évolution du phénomène au cours du temps.

## 2.5 Comportement asymptotique des chaînes de Markov irréductibles

### 2.5.1 Comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov revient à répondre aux questions suivantes :

- La distribution  $\pi^{(n)}$  converge-t-elle, lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ?
- Si la distribution  $\pi^{(n)}$  converge lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , quelle est sa limite, est-elle indépendante de la distribution initiale  $\pi^{(0)}$  ?

### 2.5.2 Distribution limite

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers  $\pi$  ou possède une distribution limite  $\pi$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \pi$$

indépendamment de la distribution initiale  $\pi^{(0)}$ , et si le vecteur  $\pi^{(n)}$  admet une limite, alors  $\pi$  correspond à une distribution stationnaire.

**Théorème 2.5.1.** (*Théorème d'existence des distributions limites [25]*)

*Si la matrice de transition  $P$  est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors*

$$\pi^{(n)} = \pi$$

*Quelle que soit la distribution initiale  $\pi^{(0)}$ , et*

$$P^n = P^*,$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .  $\pi$  est un vecteur de probabilité, et  $P^*$  une matrice dont toute les lignes sont identiques au vecteur limite  $\pi$ . En plus

$$\pi P^* = \pi$$

### 2.5.3 Distribution stationnaire

On appelle distribution de probabilité discrète  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  stationnaire ou invariante par rapport à une matrice stochastique  $P$  si :

$$\pi = \pi P$$

Une distribution est dite stationnaire ou invariante si elle ne change pas lors d'une transition. Un tel vecteur  $\pi$  rend compte d'un comportement stochastique stable du système. Par définition, une distribution stationnaire  $\pi^*$ , est un vecteur propre à gauche (donc vecteur ligne) de  $P$  associé à la valeur propre 1 et dont toutes les composantes sont positives ou nulles.

### 2.5.4 Comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques

Le théorème suivant résume le comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques.

**Théorème 2.5.2.** [11] Soit  $P$  la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont validées :

- La matrice  $P^n$  tend vers une matrice stochastique  $P^*$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- Les lignes de  $P^*$  sont identiques.
- $P_{ij}^* > 0$  pour tout  $i, j \in S$
- Pour toute distribution initiale  $\pi^{(0)}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(0)} P^n = \pi$$



○  $\pi^*$  est la solution unique du système :

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{i=1}^N \pi(i) = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$\pi^*$  égal à n'importe quelle ligne de la matrice  $P^*$ , pour tout  $i \in S$ ,  $\pi^* = 1/\mu_i$ , où  $\mu_i$  est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état  $i$ .

### Chaîne de Markov ergodique

Ce qu'on appelle propriétés ergodiques pour une chaîne de Markov concerne l'étude de ces comportements à long terme, soit de la chaîne elle-même, soit de ces probabilités de transition  $P^n$ .

Une chaîne de Markov est ergodique si elle admet une distribution asymptotique, i.e. si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  existe, unique et indépendante de la distribution initiale  $\pi_0$ .

**Proposition 2.5.1.** Les chaînes irréductibles et aperiodes sont ergodiques.

## 2.6 Méthodes d'analyse

### 2.6.1 Développement de Taylor

Le développement de Taylor est probablement utilisé dans plusieurs approches d'analyse numériques. Que ce soit en équations différentielles, en systèmes non linéaires, en champ électrique, ou en système de files d'attente. On aboutit souvent à l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point d'intérêt, dont l'expression analytique de cette fonction n'existe pas ou difficile à manipuler, mais les dérivées successives de cette dernière sont connues au point d'intérêt. Pour cette raison, le développement de Taylor, nous fournit une approximation polynomiale de la fonction considérée au voisinage du point d'intérêt.

#### Formules de Taylor

Elle est élaboré par le mathématicien Brook Taylor en 1712 [30]. Cette formule permet de remplacer une fonction régulière par un polynôme, si on peut calculer ces dérivées successives.

**Définition 2.6.1.** Pour une fonction infiniment dérivable, la fonction peut être représentée par un polynôme développé autour d'un point  $x_0$ , donné comme suit :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \dots \quad (2.8)$$

Ce que l'on note de façon plus compacte :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (2.9)$$

En pratique, la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  peut ne pas être infiniment dérivable. Dans ce cas, on peut se contenter des  $n$  premières dérivées et on aura le développement de Taylor au voisinage de  $x_0$  comme suit :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + R_n(x). \quad (2.10)$$

Comme on peut aussi l'écrire de la manière suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x), \quad (2.11)$$

avec  $R_n(x)$  est le reste du développement de Taylor. De plus, on suppose que les  $f^{(k)}(x_0)$  existe pour  $k \geq 1$ .

### Analyse du reste de la série

L'idée est de remplacer une fonction  $f$  que l'on ne sait pas calculer (ou difficile à manipuler mathématiquement) par un polynôme, qui est facilement calculable. Mais si  $f(x)$  n'est pas calculable, alors évidemment le reste  $R_n(x)$  ne l'est pas non plus.

Si on désire évaluer l'erreur d'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor, il faudrait donc calculer la série dans la formule (2.11). On doit donc chercher des moyens d'estimer ou de majorer ce reste.

### Différentes formes de reste de Taylor

Soient  $I$  un intervalle de  $x_0$  un point intérieur de  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.

1. **Reste de Taylor-Lagrange** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle compact  $[a; b]$  non réduit à un point, de classe  $C^n$  sur cet intervalle et de classe  $C^{n+1}$  sur  $]a; b[$ . Soient  $x_0; x \in [a; b]$  tels que  $x_0 < x$ , alors il existe un point  $c$  tel que [27] :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad (2.12)$$

avec  $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1!} f^{(n+1)}$  ( $c$ ) est le reste de Lagrange associé au développement de Taylor d'ordre  $n$ .

2. **Reste de Taylor-Young** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^n$ . Pour  $x \in [a; b]$ , on suppose que  $f^{(n)}$  est finie. Donc on peut écrire [27] :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n). \quad (2.13)$$

Le reste  $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$  appelé reste de Young, il vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

### 3. Formule de Taylor-Laplace

**Théorème 2.6.1.** [30] Si  $f$  est  $(k+1)$  fois dérivable sur l'intervalle  $I = [a; b]$ . Alors pour tout  $x$  appartenant au voisinage de  $x_0$ , alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_x^{x_0} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k dt. \quad (2.14)$$

L'expression  $\int_x^{x_0} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k dt$  est appelé reste de Laplace.

4. **Formule de Taylor-Cauchy** [27] Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, de classe  $C^n$  sur  $[a; b]$ . On suppose de plus que  $f^{(n)}$  est dérivable sur  $]a; b[$ . Alors pour tout  $x \in [a; b]$  on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-x_0), \quad (2.15)$$

tel que  $\xi \in [a; b]$ . L'expression  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-x_0)$  est le reste de Taylor-Cauchy.

## 2.6.2 Méthodes d'approximation par les bornes de perturbation

### Généralités

Soit  $P$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini de dimension  $N$ . Supposons que cette chaîne est ergodique, admettant une distribution stationnaire unique  $\pi$ . Celle-ci vérifie :

$$\pi P = \pi, \quad \sum_{i=1}^N \pi_i = 1.$$

Supposons que  $P$  soit perturbée à une autre matrice de transition  $\tilde{P}$ , de même dimension que la matrice  $P$ . Celle-ci est associée à une chaîne de Markov ergodique de distribution stationnaire

$\tilde{\pi}$ . Il est souvent important de décrire le changement de la distribution stationnaire  $\pi - \tilde{\pi}$  par rapport au changement de la matrice de probabilités de transition  $E \equiv P - \tilde{P}$ . Le changement effectué sera quantifié comme suit :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \| \leq \kappa_* \| E \| .$$

Nous allons présenter brièvement les six constantes (les plus connues)  $\kappa_1, \dots, \kappa_6$  intervenant dans la définition de quelques bornes de perturbation. La plupart de ces constantes sont exprimées soit en fonction de la matrice fondamentale  $Z (\triangleq (I - P + \Pi)^{-1})$ , soit en fonction de la matrice groupe inverse  $A^\sharp (\triangleq Z - \Pi)$  relative à la chaîne de Markov  $P$ .

### 2.6.3 Quelques bornes de perturbation des chaînes de Markov

Les bornes de perturbation des chaînes de Markov ergodiques sont données sous la forme suivante :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_\infty \leq \kappa_l \| E \|_\infty \triangleq BP_l.$$

La plupart des bornes de perturbation que nous considérerons sont en termes d'une des deux matrices liées à la chaîne de Markov : soit la matrice fondamentale  $Z$  ou bien la matrice groupe inverse  $A^\sharp$ . Ces bornes de perturbation sont définies en fonction de quelques constantes introduites dans la synthèse de Cho & Meyer [9] comme suit :

- Schweitzer 1968[26]  $\kappa_1 = \| Z \|_\infty ;$
- Meyer 1980[22]  $\kappa_2 = \| A^\sharp \|_\infty ;$
- Haviv & van Heyden 1984[12]  $\kappa_3 = \frac{\max_j (A_{jj}^\sharp - \min_i A_{ij}^\sharp)}{2} ;$
- Kirkland et al 1998[19]
- Funderlic & Meyer 1986[10]  $\kappa_4 = \max_{i,j} |A_{ij}^\sharp| ;$
- Seneta 1988[29]  $\kappa_5 = \frac{1}{1 - \tau_1(P)} ;$
- Seneta 1991[28]  $\kappa_6 = \tau_1(A^\sharp) = \tau_1(Z),$

où  $\tau_1(M)$  correspond au coefficient d'ergodicité d'une matrice  $M$ .

### 2.6.4 Relation entre les différentes bornes

Dans l'analyse comparative effectuée par Cho & Meyer[9], il est établi que :

- $\kappa_3 \leq \kappa_4 < 2\kappa_3 \leq \kappa_6 \leq \kappa_l,$  pour  $l = 1, 2, 5;$
- $\kappa_6 \leq n\kappa_3;$
- $\kappa_2 - 1 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 + 1.$

## 2.7 Développements limités

On a déjà vu qu'avec les formules de Taylor, certaines fonctions pouvaient être approchées par des polynômes. Plus précisément, l'existence de la dérivée  $f^{(n)}(x_0)$  entraînait celle d'un polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que la fonction  $f - P_n$  soit négligeable devant la fonction  $x \mapsto (x - x_0)^n$  au voisinage de  $x_0$ , c'est-à-dire :

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Un tel polynôme peut toutefois exister sans que  $f^{(n)}$  existe et même sans que  $f$  soit continue en  $x_0$ . Ceci nous amène à introduire la notion de développement limité.

Le développement limité représente une alternative pour écrire une fonction quelconque  $f$  au voisinage d'un certain point  $x$  sous forme polynomiale, sans que celle-ci vérifie les conditions (qui sont plus strictes) du théorème de Taylor. En effet, l'existence du développement limité de  $f$  implique que la limite de la fonction en question  $f$  existe (finie). Pour que le développement limité de  $f$  existe au voisinage de 0, il est donc nécessaire que  $f$  tende vers une limite finie quand  $x$  tend vers 0. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ pour } x \neq 1,$$

peut s'écrire sous forme d'un polynôme de degré  $n$  :

$$f(x) = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n}_{=P_n(x)} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{=R_n(x)}, \quad (2.16)$$

où  $P_n(x)$  s'obtient par exemple par division euclidienne de 1 par  $(1 - x)$  suivant les puissances croissantes.

**Définition 2.7.1.** Soit  $f$  une fonction numérique définie au voisinage de  $0^1$ , sauf peut-être en 0, et  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  admet "un développement limité à l'ordre  $n$ " au voisinage de 0, s'il existe un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :  $f(x) - P(x)$  soit négligeable devant  $x^n$  au voisinage de 0, ce qui signifie que :

$$f(x) = P(x) + o(x^n).$$

Le polynôme  $P$ , s'il existe, est unique et est appelé "partie régulière" du développement limité. Le terme  $o(x^n)$  est appelé "reste" du développement limité.

**Définition 2.7.2.** Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application,  $x_0 \in I$ , et  $n$  un entier naturel. On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , noté

---

1. un intervalle quelconque qui contient un ouvert qui comprend 0.

$DL_n(x_0)$ , s'il existe des constantes réelles  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , et une fonction  $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que : pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x), \quad \text{avec : } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0, \quad (2.17)$$

tel que

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (2.18)$$

est la partie régulière appelé aussi *développement limité* à l'ordre  $n$  en  $x_0$  de  $f$ .

**Définition 2.7.3.** On dit qu'une fonction  $f$  définie dans un voisinage d'un point  $x_0$ , sauf peut être en  $x_0$ , admet un DL au voisinage de  $x_0$  à l'ordre  $n$ .

Si la fonction  $y \rightarrow F(y) = f(x_0 + y)$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0.

On a alors :

$$F(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + y \epsilon(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0. \quad (2.19)$$

D'où, on peut se ramener du voisinage de  $x_0$  au voisinage de 0, en posant  $y = x - x_0$ .

**Définition 2.7.4.** On dit que  $f$  définie dans  $]a, +\infty[$  admet un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$ , s'il existe des constantes réelles  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  telles que :

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0. \quad (2.20)$$

On se ramène donc du DL à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$ , à celui au voisinage de 0, tout en posant  $y = \frac{1}{x}$  dans la formule (2.19).

### 2.7.1 Propriétés du développement limité

1. **Unicité du DL.** Si  $f$  admet un DL au point  $x_0$ , alors ce DL est unique
2. **Troncature d'un DL.** Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon_1(x).$$

Alors pour tout  $p \leq n$ , elle admet un DL à l'ordre  $p$  en  $x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \epsilon_2(x). \quad (2.21)$$

**Proposition 2.7.1.** On suppose que  $f$  admet un DL au voisinage du point  $x_0$

1. Si  $f$  est paire, alors la partie régulière du DL est un polynôme pair.
2. Si  $f$  est impaire, alors la partie régulière du DL est un polynôme impair.

### 2.7.2 Développement limité pour les chaînes de Markov

Dans le cadre des chaînes de Markov à temps discret et à espace d'états fini, on peut représenter la distribution stationnaire, si elle existe, sous forme polynomiale, et ce en utilisant le DL suivant [6] :

$$\tilde{\pi} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} [(\tilde{P} - P)Z]^n, \quad (2.22)$$

où  $\tilde{P}$  est la matrice de probabilités de transition de la chaîne de Markov perturbée, et  $P$  est celle associée à la chaîne de Markov originale. De même,  $\tilde{\pi}$  étant la distribution stationnaire de la chaîne perturbée, tandis que  $\pi$  est celle relative à la chaîne originale. La matrice  $Z$  est la matrice fondamentale de la chaîne de Markov originale. Celle-ci est définie par :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (P - \Pi)^n = I - P + \Pi. \quad (2.23)$$

#### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les éléments principales des processus Markoviens, ainsi que quelques types des chaînes de Markov et le comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques. De plus, nous avons passé brièvement en revue quelques méthodes d'analyse des systèmes réels pouvant être régis par les chaînes de Markov à capacité finie, telles que les développements limités et ceux de Taylor. Ces derniers feront l'objet de notre analyse dans le présent mémoire.

# CHAPITRE 3

## APPROXIMATION POLYNOMIALE DE LA FILE D'ATTENTE M/G/1/N

Dans ce chapitre, nous allons appliquer l'approche des développements limités pour les chaînes de Markov à temps discret et à espace d'états fini [6], afin d'approcher les différentes mesures de performance de la file d'attente M/G/1/N. Une analyse de sensibilité de ces performances sera aussi considérée, en utilisant la même approche. Pour cela, plusieurs résultats numériques seront exhibés pour le cas des files d'attente : M/M/1/N ( $CV^1 = 1$ ), M/H<sub>2</sub>/1/N ( $CV > 1$ ), M/E<sub>2</sub>/1/N ( $CV < 1$ ) et M/D/1/N ( $CV = 0$ ).

### 3.1 Analyse numérique de la file d'attente M/G/1/N

Considérons le modèle de file d'attente de type M/G/1/N. Supposons que les arrivées de clients dans le système suivent un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et la durée de service est une variable aléatoire suivant une loi générale  $H$ , de distribution  $B$  et de moyenne finie  $1/\mu$ . La capacité d'attente est limitée à  $N$ , en incluant la place en station du service. Un client arrivant et trouvant déjà  $N$  clients dans le système sera perdu. Les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée, c-à-d la discipline du service est FIFO. L'état de ce modèle d'attente est décrit par la chaîne de Markov  $X_n$ , qui représente le nombre de clients présents dans le système juste après la fin du service du  $n$ -ième client. Cette chaîne est à temps discret et à espace d'états  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . La matrice de probabilités de transition de la chaîne de Markov  $X_n$  est

---

1. CV signifie le coefficient de variation correspondant à la loi de la durée de temps de service.



donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k \\ \vdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} a_k \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 - a_0 \end{pmatrix},$$

avec

$$a_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB(t), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

La chaîne de Markov  $X_n$  étant apériodique et irréductible, alors elle est ergodique et admet une distribution stationnaire unique, notée par  $\pi$ .

Pour déterminer les métriques de performance de la file d'attente M/G/1/N, plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées et appliquées dans la littérature des files d'attente ; voir par exemple [17]. Plus spécifiquement, l'analyse numérique polynomiale de la file d'attente M/G/1/N a été considérée par Abbas et al. [1], et ce en utilisant l'approche de développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov. En outre, dans cette analyse, les auteurs ont focalisé leur attention sur l'estimation du reste de développement et l'obtention des dérivées de la distribution stationnaire sous forme récursive. Dans ce chapitre, nous entreprendrons une nouvelle piste pour l'analyse numérique de la même file d'attente. Celle-ci est différente de celle considérée par Abbas et al. [1]. En effet, nous allons considérer une perturbation distributionnelle non-linéaire, et ce en utilisant la nouvelle approche de développements limités élaborée par Bachi et al. [6]. Cette approche repose sur le principe des séries de Neumann, et elle ne nécessite pas le calcul des dérivées de la distribution stationnaire, qui est très coûteux en termes de complexité algorithmique. Cette approche est basée sur les développements limités, pour lesquels leurs coefficients sont déterminés en fonction de ceux de la matrice fondamentale. L'avantage de considérer cette matrice réside dans le fait que, en considérant des perturbations directionnelles, celle-ci facilite la généralisation de ce type de développements aux cas de perturbation de plusieurs lois ou paramètres [6].

Considérons la perturbation de la loi de temps de service relative à la file d'attente M/G/1/N, et notons la matrice de probabilités de transition perturbée par  $\tilde{P}$ . Supposons que celle-ci admet une distribution stationnaire unique, notée par  $\tilde{\pi}$ . Dans ce cas, en utilisant le concept des développements limités, la distribution stationnaire perturbée  $\tilde{\pi}$  pourra être

représenter sous la forme polynomiale suivante [6] :

$$\tilde{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi \left[ \left( \tilde{P} - P \right) Z \right]^k, \quad (3.1)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^m \pi \left[ \left( \tilde{P} - P \right) Z \right]^k}_{=P_m} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} \pi \left[ \left( \tilde{P} - P \right) Z \right]^k}_{=R_m}, \quad (3.2)$$

avec  $Z$  est la matrice fondamentale définie par :

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} (P - \Pi)^i.$$

où :  $\Pi$  est le projecteur stationnaire. Le polynôme  $P_m$  représente la partie régulière du développement limité, qui est ici une approximation polynomiale de la distribution stationnaire  $\tilde{\pi}$ , et  $R_m$  représente l'erreur due à cette approximation. L'existence de la matrice fondamentale  $Z$  est liée directement au fait que l'inverse de la matrice  $I - P + \Pi$  existe et borné, au sens d'une certaine métrique [6]. Ici, la matrice  $I$  désigne la matrice identité.

Concernant la perturbation à considérer dans cette partie de notre travail est celle de la distribution de temps de service. Dans ce sens, nous considérerons dans cette analyse numérique la proximité d'une loi générale, de moments finis, à celle d'une autre loi, pour laquelle on dispose de résultats analytiques relatifs à la file d'attente M/G/1/N. Cette proximité peut-être quantifiée comme suit :

$$prox(t) = |\tilde{b} - b|(t),$$

avec  $\tilde{b}(\cdot)$  et  $b(\cdot)$  sont les fonctions de densités de probabilités associées respectivement aux lois décrivant les temps de service des deux modèles, perturbé et nominal. Vu qu'on dispose des résultats analytiques exacts pour le modèle d'attente M/M/1/N, alors notre choix est porté sur cette file d'attente. Autrement dit, dans l'application numérique nous supposons que  $b(\cdot)$  est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\mu$  :

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Tandis que la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire modélisant la durée de temps du service dans la file d'attente M/G/1/N est choisie de telle sorte à balayer toutes les valeurs possibles correspondantes au coefficient de variation d'une telle variable aléatoire. En particulier, notre choix est focalisé sur les distributions suivantes :

- ✓ CV = 1 : Exponentielle de paramètre  $\tilde{\mu}$  ;
- ✓ CV  $\geq$  1 : Hyper-exponentielle d'ordre 3, de paramètres  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  ;
- ✓ CV  $\leq$  1 : Erlang d'ordre 2, de paramètres  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ;
- ✓ CV = 0 : Déterministe de paramètre  $d$ .

## 3.2 Applications numériques

Dans cette partie, nous présentons le développement algorithmique relatif à l'application de l'approche présentée ci-dessus au cas d'approximation de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/G/1/N. Ainsi, nous exhibons les différents résultats numériques obtenus, sous forme de tableaux et de graphes. Ces résultats sont dérivés par utilisation du logiciel MATLAB.

### Environnement MATLAB

Notre choix s'est porté sur l'utilisation de l'environnement MATLAB qui nous permet grâce à la richesse de sa bibliothèque mathématique, d'optimiser les instructions dans les programmes réalisés dans le cadre de ce travail. En effet, le MATLAB est un système interactif de calcul numérique et de visualisation graphique destiné aux ingénieurs et scientifiques qui possède un langage de programmation à la fois puissant et simple. En particulier, il intègre des fonctions d'analyse numérique de calcul matriciel, qui nous sera très utile pour nos calculs qui sont pratiquement liés à ce type de calcul.

### 3.2.1 Approche algorithmique

Nous avons élaboré un algorithme calculant les différentes distributions stationnaires du modèle d'attente M/G/1/N, en variant la loi de service tout en utilisant l'approche du développement limité. Les différentes étapes essentielles de notre analyse sont résumées dans **l'algorithme 1** :

**Algorithme 1**

**Inputs** : les matrices de probabilités de transition des modèles d'attente :  $M/M/1/N$ ,  $M/G/1/N$ , la distribution stationnaire de la file :  $M/M/1/N$  et la précision du calcul  $\epsilon$ ,  $m = 1$ .

**Outputs** : l'ordre du développement limité  $m$ , la distribution stationnaire approchée  $\tilde{\pi}$ , l'erreur absolue commise.

**ÉTAPE 1**

- Introduire le taux d'arrivée des clients dans la file M/M/1/N :  $\lambda$ , le taux de service :  $\mu$  et la capacité d'attente dans la file :  $N$ .
- Introduire les différents paramètres des lois de service du modèle M/G/1/N :  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tilde{\mu}, \nu_1, \nu_2, p$ .
- Vérifier l'inégalité suivante relative à l'existence du DL :

$$\|(\tilde{P} - P)Z\| < 1.$$

- On fixe la précision  $\epsilon = 10^{-4}$   
Si  $\|R(m)\| \leq \epsilon$ , aller à **ÉTAPE 2**.

**ÉTAPE 2**

- Déterminer l'ordre du polynôme :  $m$ .
- Calculer la distribution stationnaire  $\tilde{\pi}$  via la formule du DL (3.1).
- Calculer la distribution stationnaire :  $\pi$ .

**ÉTAPE 3**

- Calculer les erreurs absolues :  $\|\tilde{\pi} - \pi\|$ .

**Sinon**

- Revenir à **ÉTAPE 1**.

**3.2.2 Exemples numériques**

Dans toute cette application numérique, on fixe l'ordre de la matrice  $N = 5$ , qui représente la capacité d'attente dans le système d'attente M/G/1/N. On fait varier le taux des arrivées des clients dans le système, et le taux du service  $\mu$ , de telle sorte à obtenir les valeurs de l'intensité du trafic  $\lambda$  suivantes :

1.  $\rho = 1$
2.  $\rho = 0.3$
3.  $\rho = 1.7$

En premier lieu, on commence à calculer les distributions stationnaires du modèle d'attente nominal M/M/1/N, et ce en utilisant les formules suivantes :

Pour les valeurs de  $\rho$  : 0.3 et 1.7, les distributions stationnaires se calculent par :

$$\pi(n) = \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (3.3)$$

Pour la valeur de  $\rho = 1$ , en utilisant la formule suivante :

$$\pi(n) = \frac{1}{N + 1}; \quad n \in S. \quad (3.4)$$

Les résultats de calcul relatifs à la distribution stationnaire du modèle d'attente nominal M/M/1/N sont donnés dans le tableau suivant :

$\pi$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$
$\rho = 0.3$	0.667582	0.222527	0.074175	0.024725	0.008241	0.002747
$\rho = 1$	0.166666	0.166666	0.166666	0.166666	0.166666	0.166666
$\rho = 1.7$	0.032626	0.054377	0.090628	0.151047	0.251745	0.419557

Afin de calculer les caractéristiques stationnaires du modèle d'attente M/G/1/5, au préalable nous devons vérifier la convergence de l'algorithme, et ce pour les valeurs introduites des paramètres, puis nous estimons la valeur du reste. Celle-ci nous permettra finalement de récupérer le degré  $m$  du polynôme (DL) relativement à la précision fixée. Un exemple illustrant ce calcul est présenté, pour le cas du modèle d'attente M/D/1/5, est donnée en Figure 3.1.

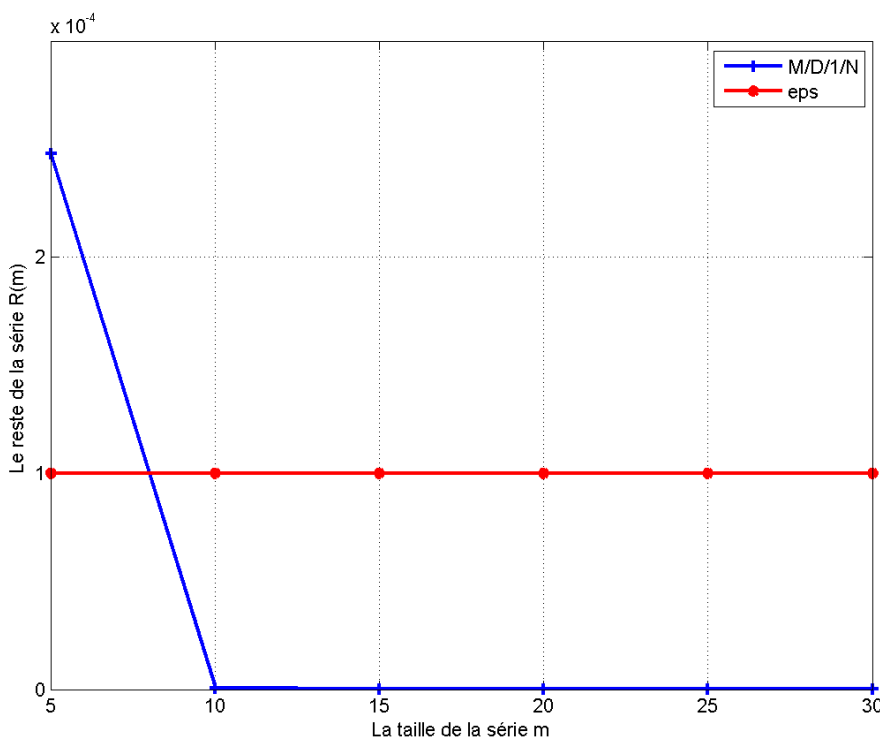


FIGURE 3.1 – Comportement du reste de DL par rapport au variation de l'ordre  $m$ .

La deuxième étape de notre analyse consiste à calculer les différentes distributions stationnaires correspondantes au modèle d'attente perturbé M/G/1/N. Ces distributions sont obtenues une fois, on a fixé la loi de la durée de temps de service générale. Les résultats numériques obtenus sont présentés ci-dessous.

**Loi exponentielle** : Nous fixons la loi de la durée du service à une loi exponentielle de paramètre  $\tilde{\mu}$ . Ainsi, le modèle d'attente induit dans ce cas est le modèle M/M/1/5. Le taux du service étant :

$$\tilde{\mu} = \mu + 10^{-3}.$$

avec  $\mu = 6/5$ .

L'exécution de l'Algorithme 1, nous permet d'obtenir, dans ce cas, l'ordre du DL  $m = 1$ . Ce qui signifie que l'approximation polynomiale obtenue est linéaire, c-à-d le DL ici est un polynôme de degré 1. Cela se justifie par le fait que la perturbation effectuée est elle-même paramétrique. Autrement dit, le modèle considéré est toujours le modèle M/M/1/5, et cette perturbation étant motivée par exemple par la modélisation des erreurs commises sur le calcul du taux de service  $\mu$ .

**Loi Hyper-exponentielle** : Cette loi de service est un mélange de trois lois exponentielles de paramètres respectivement :  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$  et  $\mu_3 = 2$ . Les pondérations  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  ont même valeur :  $\frac{1}{3}$ .

L'exécution de l'Algorithme 1 au modèle d'attente M/H<sub>3</sub>/1/5, nous a permis d'obtenir une approximation polynomiale de degré  $m = 4$ .

**Loi d'Erlang** : Dans cet exemple, on a fixé les paramètres correspondant à la loi du service comme suit :  $\mu_1 = 2$  et  $\mu_2 = 3$ .

Le résultat obtenu via toujours l'exécution de même algorithme, est un polynôme de degré  $m = 4$ . Ce qui signifie qu'on a approché la distribution stationnaire du modèle d'attente M/E<sub>2</sub>/1/5 par un polynôme de degré 4.

**Loi Déterministe** : Lorsque la durée de service est déterministe de paramètre  $d = 5/6$ , la distribution stationnaire du modèle d'attente M/D/1/5 peut-être approchée par un polynôme de degré  $m = 6$ , et ce en utilisant toujours l'Algorithme 1.

L'exécution de l'Algorithme 1, nous a finalement permis d'obtenir les distributions stationnaires relatives aux modèles d'attente considérés dans notre étude, et ce pour les valeurs des paramètres indiqués ci-dessus. Les différents résultats numériques obtenus, par les différents DLs, sont dressés dans le tableau 1.1 :

Modèle	m	$\rho$	$\tilde{\pi}_0$	$\tilde{\pi}_1$	$\tilde{\pi}_2$	$\tilde{\pi}_3$	$\tilde{\pi}_4$	$\tilde{\pi}_5$
M/M/1/5	1	0.3	0.6676918	0.2224897	0.0741385	0.0247046	0.0082321	0.0027431
		1	0.1668055	0.1667499	0.1666944	0.1666388	0.1665833	0.1665278
		1.7	0.0326674	0.0544276	0.0906825	0.1510872	0.2517281	0.4194070
M/H <sub>3</sub> /1/5	4	0.3	0.7227097	0.1971049	0.0567437	0.0168324	0.0050705	0.0015385
		1	0.2586427	0.2068124	0.1705174	0.1426112	0.1200739	0.1013420
		1.7	0.0708186	0.0934390	0.1254249	0.1694137	0.2295132	0.3113903
M/E <sub>2</sub> /1/5	4	0.3	0.7223111	0.2140176	0.0500374	0.0108641	0.0022926	0.0004768
		1	0.2248117	0.2248117	0.1875611	0.1501877	0.1188841	0.0937434
		1.7	0.0346192	0.0640905	0.1026750	0.1605125	0.2497816	0.3882105
M/D/1/5	6	0.3	0.7222281	0.2312524	0.0404420	0.0053718	0.0006332	0.0000717
		1	0.1960364	0.2546560	0.2109031	0.1535113	0.1085983	0.0762945
		1.7	0.0097192	0.0288228	0.0624213	0.1274089	0.2569361	0.5146914

**Tableau 1.1** : Les distributions stationnaires approchées par  $P$  des modèles d'attente M./1/5.

Afin d'avoir une idée sur la qualité de l'approximation obtenue dans les différents cas, on a considéré les erreurs absolues commises sur le calcul des distributions stationnaires des quatre modèles en question. Les résultats numériques correspondant à ces erreurs sont exhibés en tableau 1.2.

Lois	taux du trafic $\rho$	erreur absolue
M/M/1/5	$\rho = 0.3$	6.597615e-09
	$\rho = 1$	5.046358e-07
	$\rho = 1.7$	4.381933e-08
M/ $H_3$ /1/5	$\rho = 0.3$	1.881304e-07
	$\rho = 1$	2.002484e-05
	$\rho = 1.7$	2.100776e-05
M/ $E_2$ /1/5	$\rho = 0.3$	1.220182e-07
	$\rho = 1$	4.176303e-05
	$\rho = 1.7$	2.638098e-05
M/D/1/5	$\rho = 0.3$	7.738522e-10
	$\rho = 1$	3.900000e-05
	$\rho = 1.7$	3.579404e-05

**Tableau 1.2** :Les erreurs absolues commises sur le calcul des distributions stationnaires des modèles d'attente  $M./1/5$ .

### 3.3 Analyse de sensibilité des caractéristiques stationnaires du modèle d'attente $M/G/1/N$

La deuxième partie de ce chapitre consiste à calculer les caractéristiques stationnaires du modèle d'attente  $M/G/1/5$ . En outre, nous considérerons l'analyse de sensibilité de certaines performances par rapport aux changements de valeurs de quelques paramètres du modèle d'attente étudié.

#### Approche algorithmique

Après avoir calculé la distribution stationnaire approchée  $\tilde{\pi}$  du modèle d'attente  $M/G/1/5$ , et ce pour des distributions de service appropriées, nous allons déduire les caractéristiques stationnaires essentielles introduites par le modèle en question, pour les mêmes distributions de service qu'auparavant. Tout particulièrement, nous nous intéresserons à l'estimation des mesures de performances suivantes :



- Le nombre moyen de clients dans le système  $\tilde{L}$ .
- La probabilité de blocage  $\tilde{P}_b$ .
- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système  $\tilde{W}$ .

### Algorithme 2

**Inputs** : la distribution stationnaire  $\tilde{\pi}$

**Outputs** :  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{W}$ .

1. **ÉTAPE 1** Calculer

$$\tilde{L} = \sum_{i=0}^5 i * \tilde{\pi}_i.$$

$$\tilde{P}_b \leftarrow \tilde{\pi}_5.$$

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{L}}{(1 - \tilde{P}_b) \tilde{\lambda}}.$$

2. **ÉTAPE 2** Fin.

### Le nombre moyen de clients dans le système

Le comportement du nombre moyen de clients dans le système M/G/1/N par rapport à la variation de la capacité d'attente, pour les quatre lois de service considérées dans la première partie du présent chapitre, est illustré en figure 3.2

Les résultats numériques obtenus montrent que cette mesure de performance est sensible à la variation à la fois de la valeur de la capacité d'attente et à la variation du coefficient de variation relatif à la loi de temps de service. En effet, l'augmentation de la capacité d'attente engendre systématiquement l'augmentation du nombre moyen de clients dans le système, cela est justifié naturellement par le fait de donner plus d'accès aux clients dans le système, permettra la présence d'un nombre important de ces clients dans le système. Ce constat est montré clairement dans la figure ci-dessous. D'autre part, via la même figure, on remarque que pour les valeurs de la capacité d'attente dans le système inférieures à cinq, la performance en question croît inversement à l'ordre de croissance des valeurs du coefficient de variation de la loi de service. Quant à ses valeurs correspondantes aux valeurs de la capacité d'attente supérieure à cinq, on remarque l'inverse, c'est à dire que leurs valeurs croissent dans le même sens de croissance du coefficient de variation de la loi du service.

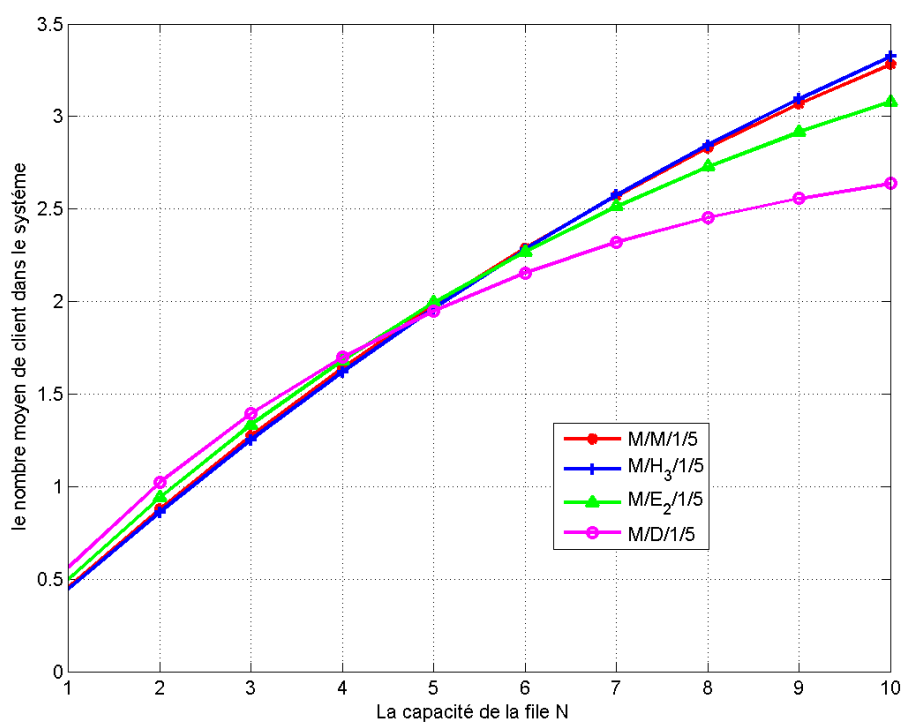


FIGURE 3.2 – Le nombre moyen de clients dans le système en fonction de la variation de la capacité d'attente du  $M/G/1/N$ .

## La probabilité de blocage

Dans cette partie, on s'intéressera à la variation des valeurs de la probabilité de blocage par rapport à celle de la capacité d'attente dans le système d'attente  $M/G/1/N$ . Les résultats numériques obtenus pour les différentes lois du service sont exhibés dans la figure 3.3

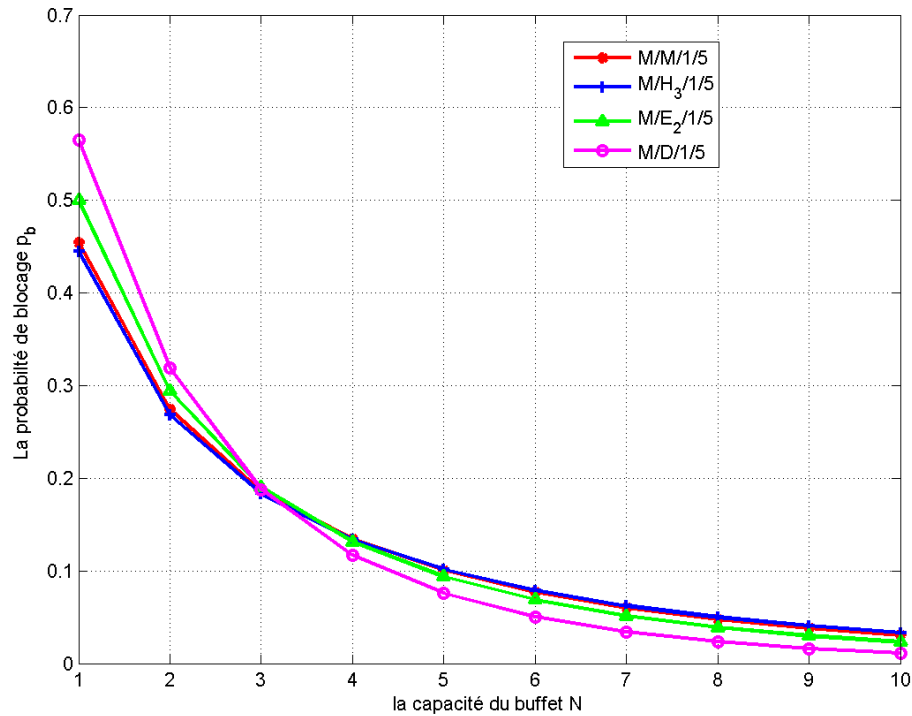


FIGURE 3.3 – La probabilité de blocage en fonction de la variation de la capacité d'attente dans le modèle  $M/G/1/N$ .

Dans la figure ci-dessus, on voit clairement que les valeurs associées à la probabilité de blocage  $\tilde{p}_b$  diminuent à mesure que la capacité d'attente dans le système  $M/G/1$  augmente pour les quatre lois du service, c'est à dire indépendamment du coefficient de variation de la loi du service. Et que  $\tilde{p}_b$  tend vers 0 lorsque la capacité de la file  $N$  augmente. Cela se justifie par le fait d'augmenter le nombre de places d'attente dans le système, le phénomène de refus des clients se diminue systématiquement.

De même, la variation de la probabilité de blocage relative au modèle d'attente M/G/1/N en fonction de la variation du taux de trafic  $\rho$  est montré dans la figure 3.4

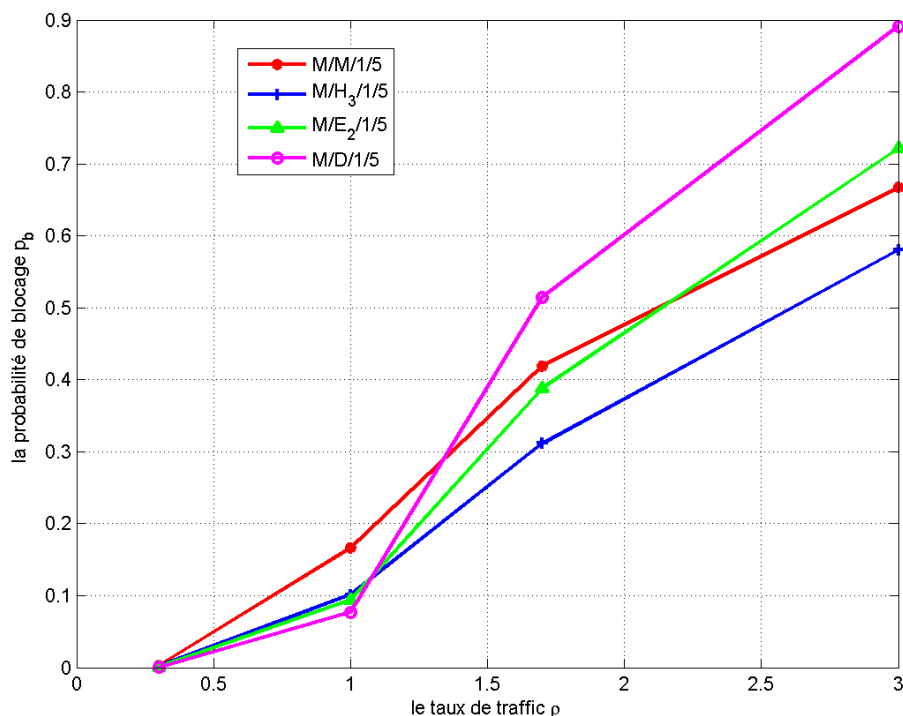


FIGURE 3.4 – La probabilité de blocage  $\tilde{p}_b$  en fonction du taux de trafic  $\rho$ .

La figure ci-dessus nous montre que l'augmentation du taux de trafic  $\rho$  induit l'augmentation de la probabilité de blocage  $\tilde{p}_b$  pour les quatres lois de service.

D'après les résultats graphiques, on remarque que pour un taux de trafic très petit ( $\rho \leq 0.3$ ), les probabilités de blocage tend vers 0. Or pour un trafic plus élevé ( $\rho \in ]0.3, 1]$ ), le refus des clients est également plus élevé, c-à-d les probabilités  $\tilde{p}_b$  augmentent. En outre, on constate bien que le même phénomène est plus important qu'avec le modèle déterministe que les autres modèles.

Si  $\rho > 1$ , les probabilités de rejet  $\tilde{p}_b$  des différents modèles augmentent indépendamment l'une de l'autre suivant leur coefficient de variation croissant.

### Le temps moyen de séjour d'un client dans le système

Enfin, on s'intéressera au comportement du temps moyen de séjour d'un client dans le système d'attente M/G/1/N par rapport aux changements de l'intensité du trafic  $\rho$ . La variabilité de la mesure de performance en question est illustrée dans la figure 3.5

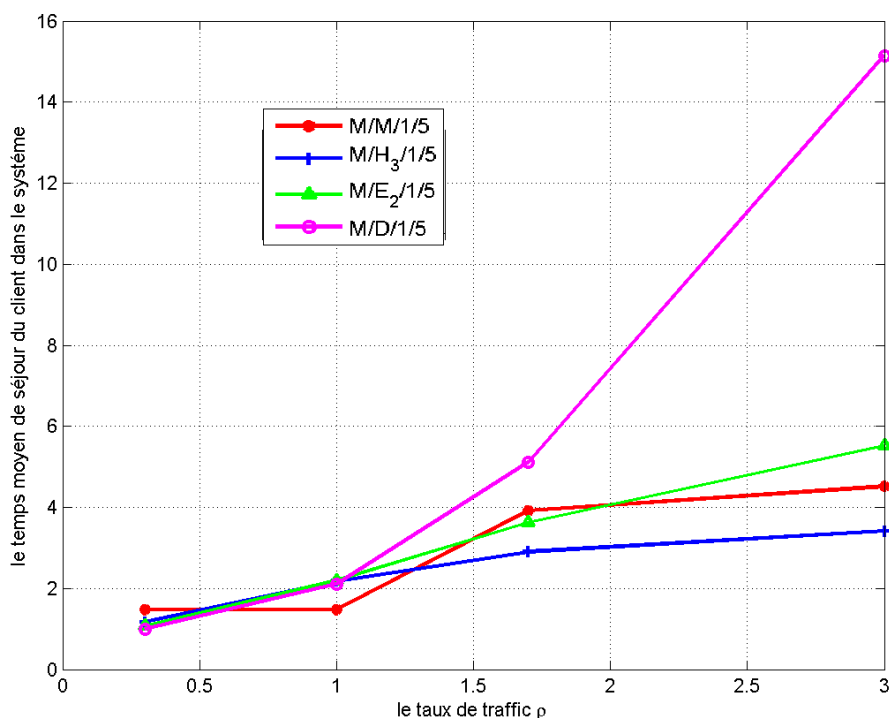


FIGURE 3.5 – Le temps moyen de séjour d'un client dans le système en fonction de  $\rho$ .

On voit dans cette figure que le temps moyen de séjour d'un client dans le système augmente en fonction de l'intensité du trafic  $\rho$ , et ce pour les quatre modèles, tels que pour ( $\rho > 0.3$ ) la valeur de temps moyen de séjour d'un client dans le système  $W$  la plus basse est celle qui correspond au modèle déterministe, et la plus élevée est celle du modèle exponentiel. Inversement, pour les valeurs de ( $\rho \in ]0.3, 1]$ ), le temps moyen de séjour d'un client dans le système relatif au modèle loi exponentiel est le plus petit par rapport à celui des autres modèles.

Pour  $\rho > 1$ , les temps moyen de séjour d'un client dans le système sont classés suivant les valeurs du taux de trafic décroissantes.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de calcul approximatif des mesures de performances du modèle d'attente  $M/G/1/N$ . Cet algorithme est basé sur les développements limités des chaînes de Markov [6]. L'approximation polynomiale de la distribution stationnaire du modèle d'attente  $M/G/1/N$ , nous a permis également de mesurer la sensibilité de certaines mesures de performances par rapport aux variations des paramètres du modèle en question.

## CHAPITRE 4

# ANALYSE FONCTIONNELLE DE LA FILE M/G/1/N AVEC PANNES DU SERVEUR

Dans ce chapitre, nous allons considérer l'analyse fonctionnelle du modèle d'attente non-fiable M/G/1/N. Cette approche repose sur l'utilisation des développements limités des chaînes de Markov [6], où nous supposerons que les mesures de performance du système étudié sont exprimées comme fonction de leur paramètres. En particulier, nous nous intéresserons à la dépendance de la distribution stationnaire par rapport au taux de pannes du serveur. La perturbation de type linéaire de ce dernier facilite l'analyse de modèle d'attente en question. Dans cette analyse, plusieurs exemples numériques seront présentés.

### 4.1 Description du modèle

Considérons le modèle d'attente M/G/1/N avec un serveur sujet à des pannes provoquant la perte des clients. Les arrivées des clients dans le système suivent un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . La durée de temps de service est de distribution générale, ayant une fonction de répartition  $B(\cdot)$  et une moyenne finie  $1/\mu$ . Lorsque le serveur tombe en pannes, la réparation de celui-ci se fait durant une période de temps de distribution exponentielle de fonction de répartition  $R$  de paramètre  $r > 0$ . L'occurrence des pannes du serveur suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - \theta$ . Cependant, la panne du serveur provoque la perte de client en cours de service. C'est les pannes avec perte définitive de client. Autrement dit, dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon avec une probabilité  $(1 - \theta)$ . Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité  $\theta > 0$ .

L'état du système de files d'attente M/G/1/N à serveur non fiable est décrit par la chaîne

de Markov  $\{X_n, n \geq 0\}$  induite aux instants de "fin" du  $n$ -ième service, ou "fin" de la  $n$ -ième réparation. La structure de la matrice de probabilités de transition de la chaîne  $\{X_n, n \geq 0\}$  est donnée par :

$$P_\theta = \theta P_1 + (1 - \theta) P_0, \quad (4.1)$$

où

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k \\ 0 & a_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} \alpha_k \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{N-4} & 1 - \sum_{k=0}^{N-4} \alpha_k \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 & 1 - \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

et

$$P_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \beta_k \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} \beta_k \\ 0 & a_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} \beta_k \\ 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{N-4} & 1 - \sum_{k=0}^{N-4} \beta_k \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_0 & 1 - \beta_0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

avec

$$\alpha_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x), \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (4.4)$$

et

$$\beta_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dR(x), \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (4.5)$$

Dans cette analyse, nous allons considérer la perturbation linéaire du taux de pannes  $\theta$ . Pour ce faire, nous supposons que le taux de pannes s'écrira sous la forme suivante :

$$\theta = \bar{\theta} + \Delta,$$

où  $\bar{\theta}$  correspond au taux de pannes du modèle d'attente nominal M/G/1/N, et  $\Delta$  est le paramètre de perturbation. Intuitivement, ce dernier paramètre peut, par exemple, refléter l'erreur commise sur l'évaluation du paramètre en question. Ainsi, la structure de la matrice des probabilités de transition du modèle d'attente nominal M/G/1/N avec pannes est convexe de la même forme que (4.1) :

$$P_{\bar{\theta}} = \bar{\theta} P_1 + (1 - \bar{\theta}) P_0. \quad (4.6)$$

Dans ce sens, supposons que chacun des deux modèles d'attente considérés, perturbé (noté  $\theta$ -modèle) et nominal (noté  $\bar{\theta}$ -modèle), a une distribution stationnaire unique, notée  $\pi_\theta$  et  $\pi_{\bar{\theta}}$  respectivement.

Dans cette analyse, nous utilisons l'approximation fonctionnelle de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes du serveur. Cela nous permettra d'étudier la dépendance de cette mesure de performance par rapport au taux de pannes du serveur. Ainsi, via l'approche des développements limités des chaînes de Markov, développée par Bachi et al. [6], la distribution  $\pi_\theta$  peut s'écrire sous la forme polynomiale suivante :

$$\pi_\theta = \pi_{\bar{\theta}} \sum_{i=0}^m (\Delta(P_1 - P_0)Z_{\bar{\theta}})^i, \quad (4.7)$$

où  $Z_{\bar{\theta}}$  est la matrice fondamentale associée au modèle nominal. Celle-ci est définie par :

$$Z_{\bar{\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{\bar{\theta}} - \Pi_{\bar{\theta}})^k.$$

## 4.2 Application numérique

Les étapes essentielles de notre analyse sont résumées en l'algorithme suivant.

### Algorithme 3

**Inputs :**  $P_0, P_1, \pi_{\bar{\theta}}, \bar{\theta}, \Delta$

**Outputs :** la distribution stationnaire du modèle M/G/1/N avec pannes  $\pi_\theta$

#### ÉTAPE 1

- Introduire les paramètres du modèle nominal : le taux d'entrée  $\lambda$ , ainsi que le taux de service  $\mu$  et l'ordre de la matrice N.
- Introduire les paramètres des lois de service du modèle perturbé :  $\mu_1, \mu_2, \mu, p, n_1, \nu_1, \nu_2, \Delta, N$
- Introduire  $\bar{\theta} = \frac{1}{N+1}$ .

#### ÉTAPE 2

- Calculer :  $\theta = \bar{\theta} + \Delta, \pi_\theta, P_\theta, Z_\theta, \Pi_\theta$ .
- Vérifier la convergence de l'algorithme :  
**Si**  $\|(\Delta(P_1 - P_0)Z)^i\| < 1$  **Alors** :  
 Calculer la distribution stationnaire  $\pi_\theta$   
**Sinon**  
 – Revenir à l'étape 1 .



**ÉTAPE 3**

- Calculer les erreurs relatives absolues

$$ERA = \left| \frac{\pi_i^{\text{DL}}(\theta) - \pi_i^{\text{réelle}}(\theta)}{\pi_i^{\text{réelle}}(\theta)} \right|,$$

avec  $\Delta \in [-0.1 : 0.01 : 0.1]$ .

**4.2.1 Approximation polynomiale de la distributions stationnaire**

Dans cette partie, nous utilisons l'Algorithme 3 pour approcher la distribution stationnaire du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes du serveur. Pour ce faire, on choisit les distributions de temps de service pour différents coefficients de variation. Dans ce sens, les résultats numériques correspondants à ces distributions stationnaires sont exhibés dans les tableaux ci-dessous.

**Distribution stationnaire de la file M/D/1/5 avec pannes**

Par application de l'Algorithme 3, nous obtenons une approximation de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/D/1/5 par un DL d'ordre 6, sachant que la valeur du paramètre de la distribution stationnaire du temps de service  $d = 5/6$ , la valeur du taux de réparation  $r = 1$ , la valeur du taux de pannes du modèle nominal  $\bar{\theta} = 1/6$  et celle du taux des arrivées est  $\lambda = 1$ . Les résultats numériques relatifs à ce calcul sont mont montrés dans le tableau suivant.

$\Delta$	$\pi_{\theta,0}$	$\pi_{\theta,1}$	$\pi_{\theta,2}$	$\pi_{\theta,3}$	$\pi_{\theta,4}$	$\pi_{\theta,5}$
-0.10	0.0000012	0.0000181	0.0002736	0.0041200	0.0620187	0.9335680
-0.09	0.0000011	0.0000173	0.0002647	0.0040313	0.0613718	0.9343135
-0.08	0.0000010	0.0000166	0.0002561	0.0039435	0.0607246	0.9350579
-0.07	0.0000010	0.0000158	0.0002476	0.0038568	0.0600773	0.9358012
-0.06	0.0000009	0.0000151	0.0002393	0.0037712	0.0594297	0.9365435
-0.05	0.0000009	0.0000144	0.0002311	0.0036865	0.0587820	0.9372848
-0.04	0.0000008	0.0000138	0.0002232	0.0036028	0.0581340	0.9380250
-0.03	0.0000008	0.0000131	0.0002155	0.0035201	0.0574859	0.9387642
-0.02	0.0000007	0.0000125	0.0002080	0.0034385	0.0568376	0.9395024
-0.01	0.0000007	0.0000119	0.0002006	0.0033578	0.0561890	0.9402396
0.00	0.0000006	0.0000114	0.0001934	0.0032782	0.0555403	0.9409758
0.01	0.0000006	0.0000108	0.0001864	0.0031995	0.0548914	0.9417109
0.02	0.0000005	0.0000103	0.0001796	0.0031219	0.0542423	0.9424451
0.03	0.0000005	0.0000098	0.0001730	0.0030452	0.0535930	0.9431782
0.04	0.0000005	0.0000093	0.0001665	0.0029695	0.0529436	0.9439103
0.05	0.0000005	0.0000088	0.0001602	0.0028949	0.0522939	0.9446415
0.06	0.0000004	0.0000084	0.0001541	0.0028212	0.0516441	0.9453716
0.07	0.0000004	0.0000079	0.0001481	0.0027485	0.0509941	0.9461008
0.08	0.0000004	0.0000075	0.0001423	0.0026768	0.0503439	0.9468289
0.09	0.0000003	0.0000071	0.0001366	0.0026061	0.0496935	0.9475561
0.10	0.0000003	0.0000067	0.0001311	0.0025363	0.0490429	0.9482823

Tableau 2.1 : Distribution stationnaire approchée par  $P_6$  du modèle M/D/1/5 avec pannes.

### Distribution stationnaire de la file M/H<sub>3</sub>/1/5 avec pannes

Dans cette partie, nous considérons l'approximation de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/H<sub>3</sub>/1/5 avec pannes, où les paramètres du modèle en question sont fixés comme suit :  $\bar{\theta} = 1/6$ ,  $r = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = 2$ , avec des pondérations équiprobables  $p = 1/3$ . L'exécution de l'Algorithme 3 au cas de ce modèle, nous a permis d'obtenir les résultats numériques exhibés dans le tableau suivant.

$\Delta$	$\pi_{\theta,0}$	$\pi_{\theta,1}$	$\pi_{\theta,2}$	$\pi_{\theta,3}$	$\pi_{\theta,4}$	$\pi_{\theta,5}$
-0.1	0.0029644	0.0087374	0.0257750	0.0760489	0.2243891	0.6620849
-0.09	0.0029983	0.0088138	0.0259351	0.0763313	0.2246645	0.6612567
-0.08	0.0030324	0.0088907	0.0260959	0.0766140	0.2249390	0.6604277
-0.07	0.0030669	0.0089682	0.0262574	0.0768972	0.2252124	0.6595977
-0.06	0.0031017	0.0090462	0.0264195	0.0771806	0.2254849	0.6587668
-0.05	0.0031369	0.0091247	0.0265823	0.0774645	0.2257563	0.6579349
-0.04	0.0031724	0.0092038	0.0267459	0.0777487	0.2260268	0.6571021
-0.03	0.0032083	0.0092835	0.0269101	0.0780333	0.2262962	0.6562684
-0.02	0.0032445	0.0093637	0.0270750	0.0783182	0.2265646	0.6554337
-0.01	0.0032810	0.0094444	0.0272407	0.0786035	0.2268320	0.6545981
0	0.0033179	0.0095258	0.0274070	0.0788891	0.2270983	0.6537616
0.01	0.0033552	0.0096077	0.0275740	0.0791751	0.2273637	0.6529241
0.02	0.0033928	0.0096901	0.0277417	0.0794614	0.2276280	0.6520856
0.03	0.0034308	0.0097732	0.0279101	0.0797481	0.2278912	0.6512463
0.04	0.0034692	0.0098568	0.0280793	0.0800351	0.2281535	0.6504059
0.05	0.0035079	0.0099409	0.0282491	0.0803225	0.2284147	0.6495646
0.06	0.0035470	0.0100257	0.0284197	0.0806102	0.2286748	0.6487223
0.07	0.0035864	0.0101110	0.0285909	0.0808983	0.2289339	0.6478791
0.08	0.0036263	0.0101970	0.0287629	0.0811867	0.2291920	0.6470349
0.09	0.0036665	0.0102835	0.0289356	0.0814754	0.2294490	0.6461897
0.1	0.0033179	0.0095258	0.0274070	0.0788891	0.2270983	0.6537616

Tableau 2.2 : Distribution stationnaire approchée par  $P_4$  du modèle M/H<sub>3</sub>/1/5 avec pannes.

### Distribution stationnaire de la file M/M/1/5 avec pannes

L'application de l'Algorithme 3 au cas de la file d'attente M/M/1/5 avec pannes, nous a permis l'obtention d'une approximation polynomiale de la distribution stationnaire d'ordre 4 pour les valeurs des paramètres suivants : le taux de réparation  $r = 1$ , le taux de pannes du modèle nominal  $\bar{\theta} = 1/6$ , le taux des arrivées des clients dans le système  $\lambda = 1$  et le taux de service  $\mu = 1$ . Les résultats numériques correspondant au calcul approché de la distribution stationnaire par un polynôme de degré  $m = 1$  sont présentés dans le tableau suivant.

$\Delta$	$\pi_{\theta,0}$	$\pi_{\theta,1}$	$\pi_{\theta,2}$	$\pi_{\theta,4}$	$\pi_{\theta,5}$	$\pi_{\theta,6}$
-0.10	0.1666944	0.1666833	0.1666722	0.1666611	0.1666500	0.1666389
-0.09	0.1666985	0.1666858	0.1666730	0.1666602	0.1666475	0.1666347
-0.08	0.1667027	0.1666883	0.1666738	0.1666594	0.1666450	0.1666305
-0.07	0.1667069	0.1666908	0.1666747	0.1666586	0.1666425	0.1666264
-0.06	0.1667110	0.1666933	0.1666755	0.1666577	0.1666400	0.1666222
-0.05	0.1667152	0.1666958	0.1666763	0.1666569	0.1666375	0.1666180
-0.04	0.1667194	0.1666983	0.1666772	0.1666561	0.1666350	0.1666139
-0.03	0.1667235	0.1667008	0.1666780	0.1666552	0.1666325	0.1666097
-0.02	0.1667277	0.1667033	0.1666788	0.1666544	0.1666300	0.1666056
-0.01	0.1667319	0.1667057	0.1666797	0.1666536	0.1666275	0.1666014
0.00	0.1667360	0.1667082	0.1666805	0.1666527	0.1666250	0.1665972
0.01	0.1667402	0.1667107	0.1666813	0.1666519	0.1666225	0.1665931
0.02	0.1667444	0.1667132	0.1666821	0.1666511	0.1666200	0.1665889
0.03	0.1667485	0.1667157	0.1666830	0.1666502	0.1666175	0.1665847
0.04	0.1667527	0.1667182	0.1666838	0.1666494	0.1666150	0.1665806
0.05	0.1667568	0.1667207	0.1666846	0.1666486	0.1666125	0.1665764
0.06	0.1667610	0.1667232	0.1666855	0.1666477	0.1666100	0.1665723
0.07	0.1667652	0.1667257	0.1666863	0.1666469	0.1666075	0.1665681
0.08	0.1667693	0.1667282	0.1666871	0.1666461	0.1666050	0.1665639
0.09	0.1667735	0.1667307	0.1666880	0.1666452	0.1666025	0.1665598
0.10	0.1667777	0.1667332	0.1666887	0.1666444	0.1666000	0.1665556

Tableau 2.3 : Distribution stationnaire approchée par  $P_1$  du modèle M/M/1/5 avec pannes.

### Distribution stationnaire de la file M/E<sub>2</sub>/1/5 avec pannes

Dans ce dernier exemple numérique, nous avons considéré l'approximation de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/E<sub>2</sub>/1/5 avec pannes. Celle-ci est approchée par polynôme de degré  $m = 4$ , et ce pour les paramètres du modèle fixés comme suit :  $\bar{\theta} = 1/6$ ,  $r = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 2$ . Les résultats obtenus par application toujours de l'Algorithme 3 sont montrés dans le tableau suivant.

$\Delta$	$\pi_{\theta,0}$	$\pi_{\theta,1}$	$\pi_{\theta,2}$	$\pi_{\theta,4}$	$\pi_{\theta,5}$	$\pi_{\theta,6}$
-0.1	0.0002270	0.0011686	0.0059889	0.0306767	0.1571276	0.8048109
-0.09	0.0002229	0.0011525	0.0059285	0.0304794	0.1566910	0.8055254
-0.08	0.0002189	0.0011366	0.0058685	0.0302825	0.1562533	0.8062399
-0.07	0.0002149	0.0011208	0.0058085	0.0300860	0.1558146	0.8069546
-0.06	0.0002110	0.0011052	0.0057496	0.0298899	0.1553748	0.8076693
-0.05	0.0002071	0.0010897	0.0056906	0.0296942	0.1549339	0.8083842
-0.04	0.0002033	0.0010744	0.0056321	0.0294989	0.1544919	0.8090992
-0.03	0.0001995	0.0010592	0.0055739	0.0293040	0.1540488	0.8098143
-0.02	0.0001958	0.0010442	0.0055160	0.0291096	0.1536046	0.8105295
-0.01	0.0001922	0.0010294	0.0054585	0.0289155	0.1531594	0.8112448
0.00	0.0001886	0.0010146	0.0054013	0.0287219	0.1527130	0.8119602
0.01	0.0001850	0.0010001	0.0053446	0.0285287	0.1522656	0.8126757
0.02	0.0001815	0.0009857	0.0052881	0.0283359	0.1518177	0.8133913
0.03	0.0001781	0.0009714	0.0052320	0.0281436	0.1513675	0.8141070
0.04	0.0001747	0.0009573	0.0051763	0.0279516	0.1509169	0.8148228
0.05	0.0001714	0.0009434	0.0051209	0.0277601	0.1504652	0.8155387
0.06	0.0001681	0.0009295	0.0050659	0.0275691	0.1500123	0.8162547
0.07	0.0001649	0.0009159	0.0050112	0.0273785	0.1495584	0.8169708
0.08	0.0001617	0.0009023	0.0049569	0.0271883	0.1491035	0.8176870
0.09	0.0001585	0.0008889	0.0049030	0.0269986	0.1486474	0.8184032
0.1	0.0001555	0.0008757	0.0048493	0.0268093	0.1481903	0.8191196

Tableau 2.4 : Distribution stationnaire approchée par  $P_4$  du modèle M/E<sub>2</sub>/1/5 avec pannes.

## 4.2.2 Analyse de sensibilité de la distribution stationnaire

Dans cette partie, nous allons étudier l'effet de la perturbation du taux de pannes  $\theta$  sur le calcul des composantes de la distributions stationnaires du modèle d'attente M/G/1/5. Pour ce faire, nous utilisons l'erreur relative absolue commise sur le calcul de ces distributions comme outil de mesure de la sensibilité. Celle-ci est donnée par :

$$ERA = \left| \frac{\pi_i^{\text{DL}}(\theta) - \pi_i^{\text{réelle}}(\theta)}{\pi_i^{\text{réelle}}(\theta)} \right|.$$

Les résultats numériques relatifs au calcul des erreurs relatives absolues commises sur l'estimation des composantes des distributions stationnaires sont exhibées sous forme de graphes. Ces résultats sont montrés dans les figures suivantes.

Notons que ces résultats ont été obtenus pour les mêmes valeurs des paramètres de chaque modèle d'attente que celles de la section précédente.

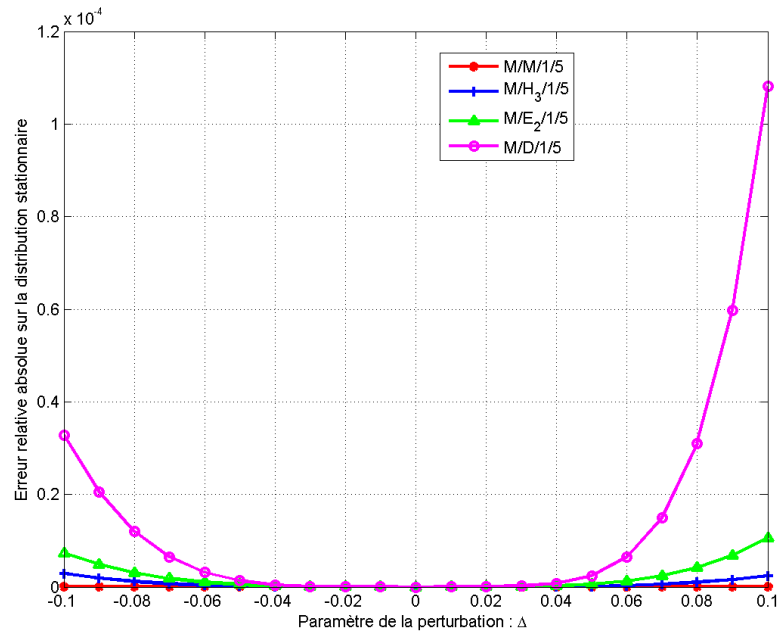


FIGURE 4.1 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_0$ .

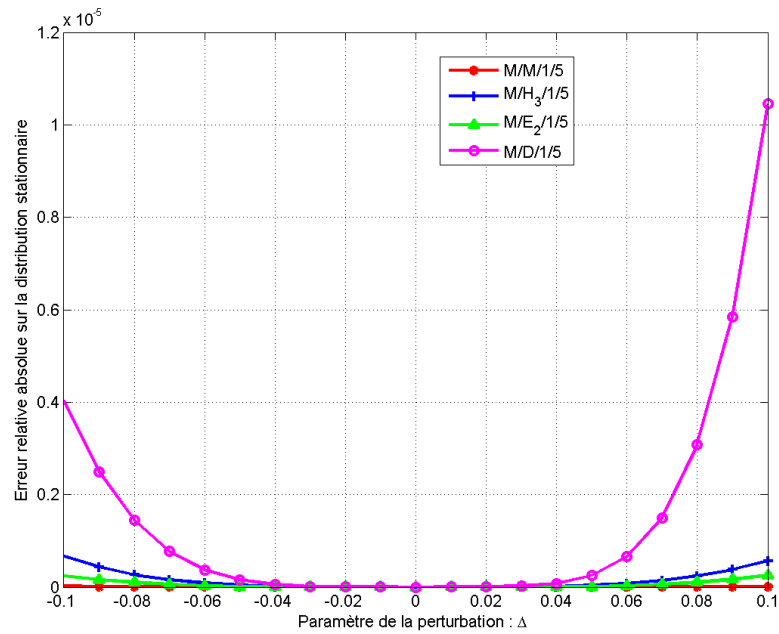


FIGURE 4.2 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_1$ .

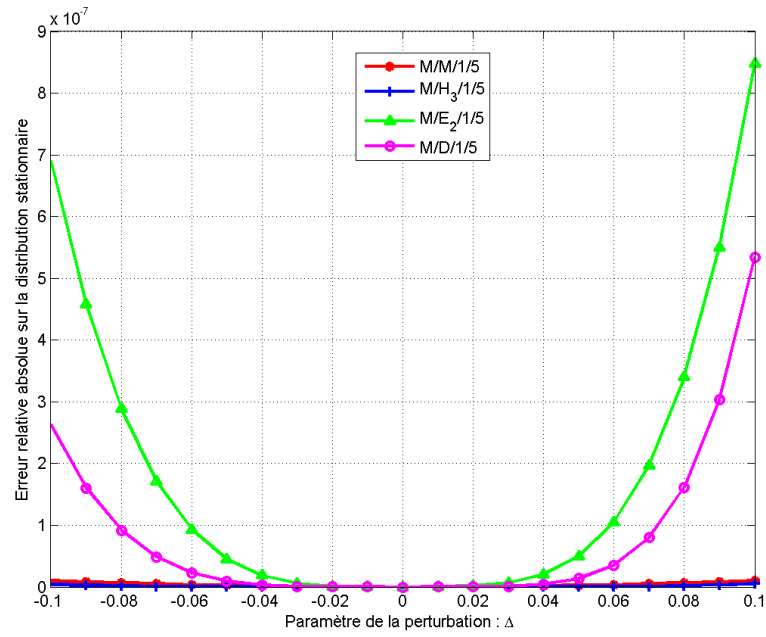


FIGURE 4.3 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_2$ .

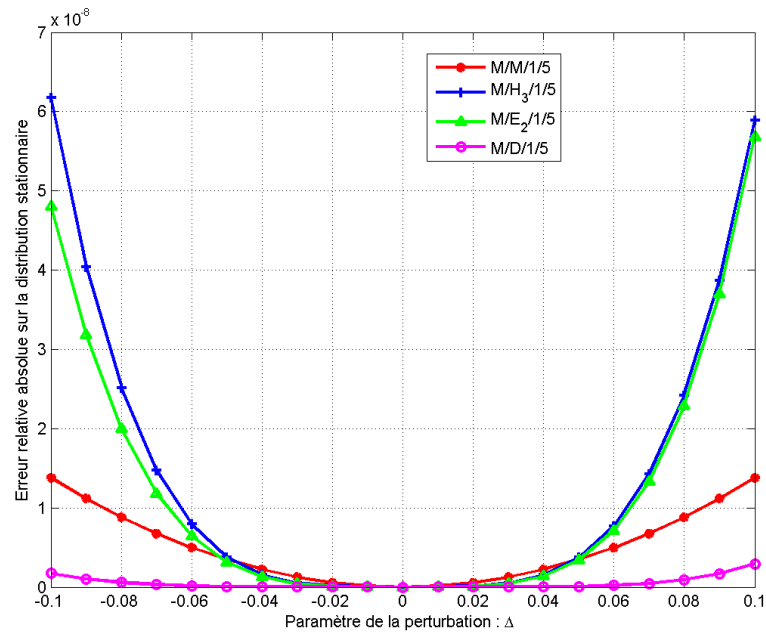


FIGURE 4.4 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_3$ .

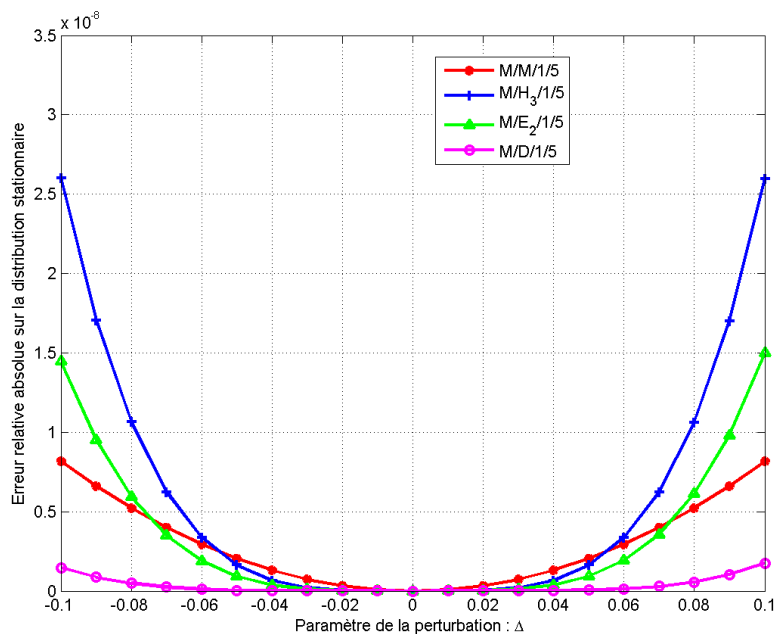


FIGURE 4.5 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_4$ .

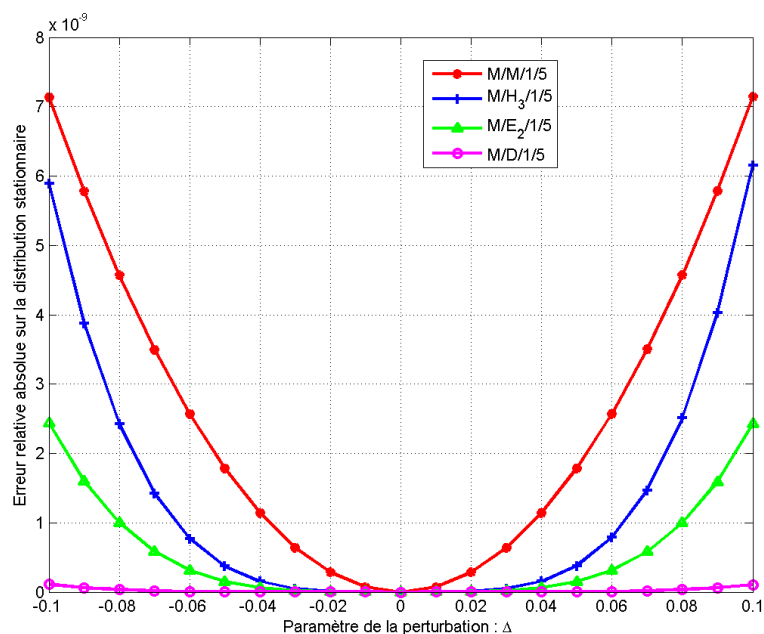


FIGURE 4.6 – Erreur relative absolue correspondante à la distribution  $\pi_5$ .



D'après les résultats obtenus, nous constatons que la perturbation du taux de pannes  $\theta$  de 10% engendra, pour les quatre modèles d'attente, une erreur très petite. Ce qui signifiera que le modèle considéré, ou sa distribution stationnaire, est robuste à cette perturbation. Ainsi, le calcul de l'approximation obtenue via cette approche est très consistant.

### 4.3 Mesures de performance du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes

Dans cette section, nous considérons le calcul de l'erreur relative absolue commise sur l'estimation du nombre moyen de clients dans les quatres modèles d'attente étudiés, et ce pour des DLs d'ordre différents, indépendamment toute précision de calcul. L'erreur relative absolue commise sur le calcul du nombre moyen de clients dans le système est donnée par :

$$ERA = \left| \frac{L_i^{DL}(\theta) - L_i^{réelle}(\theta)}{L_i^{réelle}(\theta)} \right|.$$

Les résultats numériques relatifs à ce calcul pour des approximations polynomiales de degré  $m = 2, 3, 4$  sont données ci-dessous sous forme de graphes.

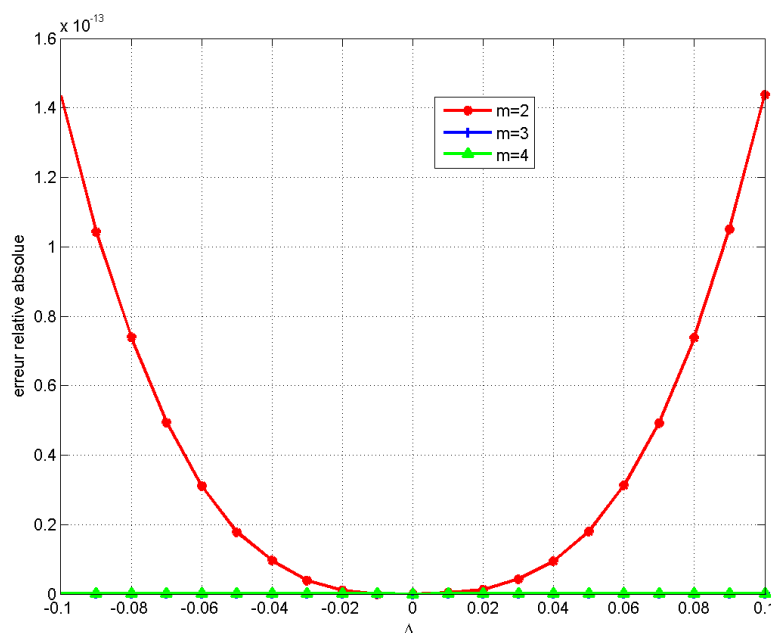


FIGURE 4.7 – Erreur relative commise sur M/M/1/5.

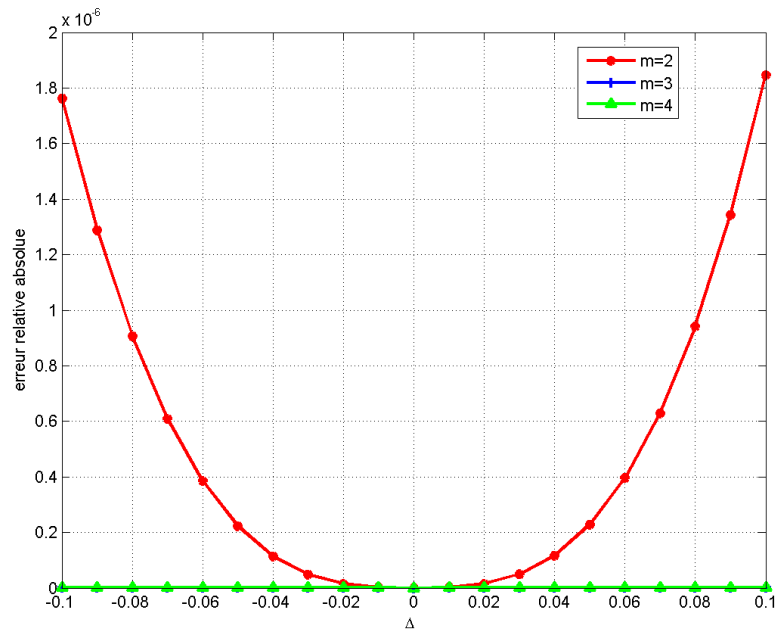


FIGURE 4.8 – Erreur relative absolue commise sur  $L : M/H_3/1/5$ .

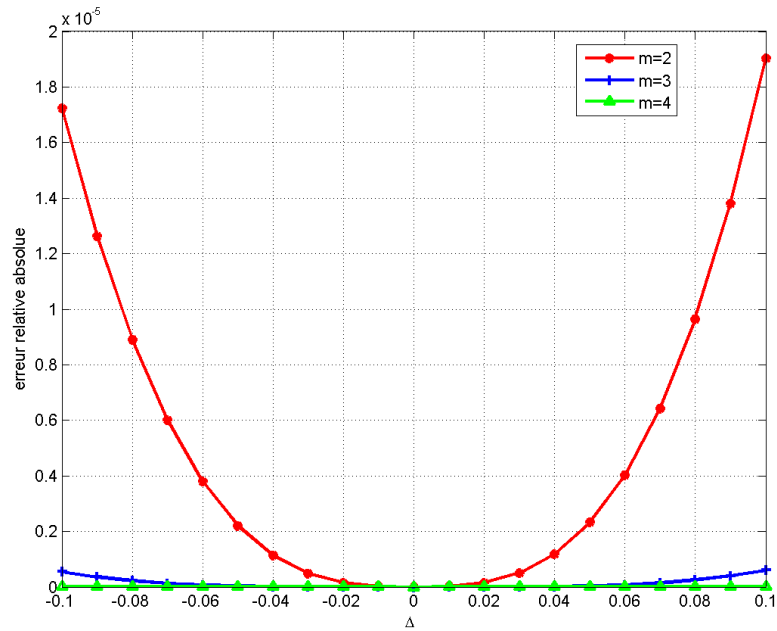


FIGURE 4.9 – Erreur relative absolue commise sur  $L : M/D/1/5$ .

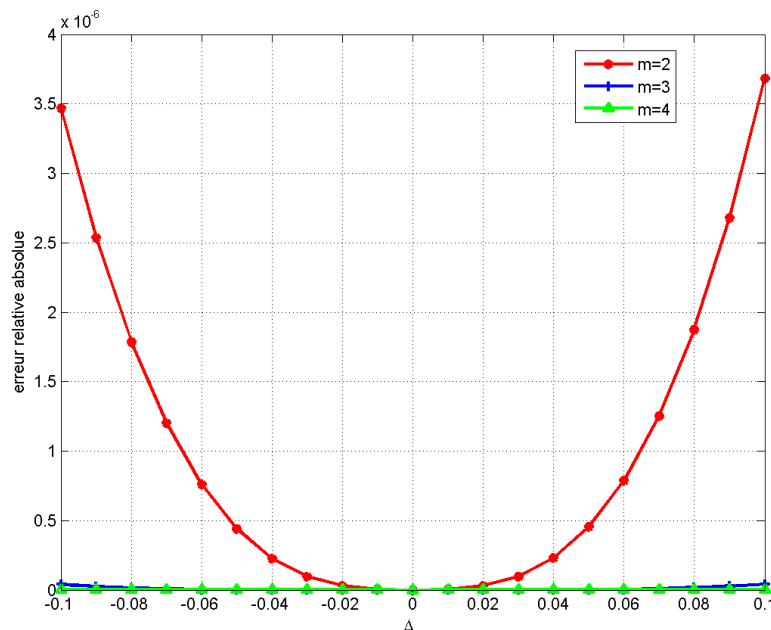


FIGURE 4.10 – Erreur relative absolue commise sur  $L : M/E_2/1/5$ .

D'après les résultats numériques obtenus dans les graphes ci-dessus, nous constatons que plus on augmente l'ordre du DL, plus on améliore la précision de calcul effectué sur le nombre moyen de clients dans le système. En outre, nous constatons que l'erreur induite est très petite dans tous les exemples considérés, ce qui signifie que l'approche utilisée est très consistante pour ce type d'approximation.

### 4.3.1 Nombre moyen de clients dans le système d'attente $M/G/1/N$

Nous terminons notre analyse numérique par le calcul du nombre moyen de clients dans le système d'attente  $M/G/1/5$ , et ce sur tout l'intervalle de perturbation  $[-0.1, 0.1]$ . Après exécution de l'Algorithme 3, nous avons obtenu, pour les mêmes valeurs des paramètres fixés auparavant, des polynômes de même degré : pour la file non-fiable  $M/M/1/5$  ( $P_1$ ), la file non-fiable  $M/H_3/1/5$  ( $P_4$ ), la file non-fiable  $M/D/1/5$  ( $P_6$ ) et la file non-fiable  $M/E_2/1/5$  ( $P_4$ ). Ces résultats numériques sont présentés dans la figure 4.11

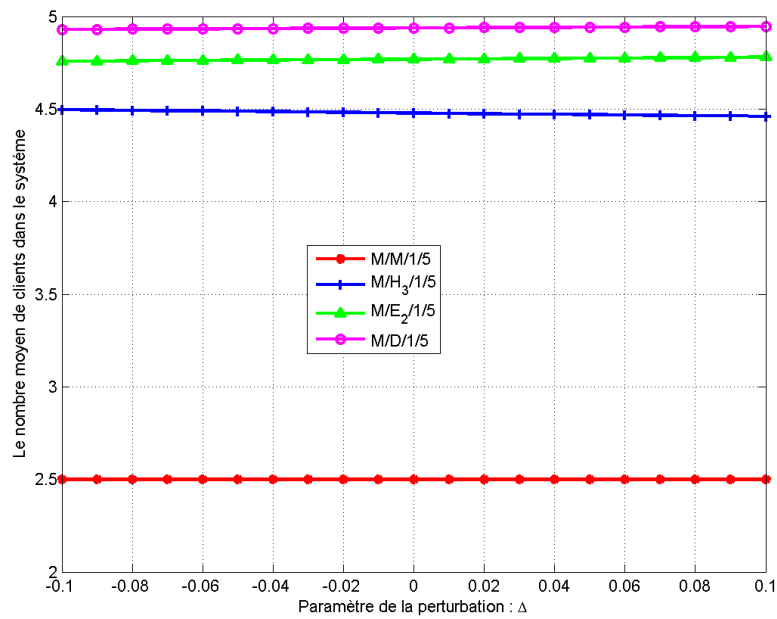


FIGURE 4.11 – Nombre moyen de clients dans le système en fonction de la perturbation  $\Delta$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé l'analyse de perturbation du modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec pannes du serveur. En utilisant l'approche des développements limités des chaînes de Markov [6], nous avons pu estimer certaines mesures de performance du modèle en question, et ce en perturbant le taux de pannes du serveur. De plus, nous avons considéré l'analyse de sensibilité des performances de ce modèle par rapport à la perturbation effectuée. Cette analyse nous a permis de juger la qualité de l'approximation polynomiale obtenue. Ainsi, plusieurs exemples numériques ont été exhibés afin de montrer la consistance de l'approche utilisée.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'étude des systèmes stochastiques réels deviennent de plus en plus complexe. Ceci a poussé les chercheurs à élaborer des théories et des techniques d'analyse et d'approximation permettant de pallier au problème d'analyse de performance de tels systèmes complexes, où la précision sur les caractéristiques de tels systèmes peut avoir des incidences majeures.

Dans ce mémoire, nous avons développé quelques algorithmes permettant de réaliser une analyse numérique de la file d'attente  $M/G/1/N$  via la méthode du développement limité des chaînes de Markov [6]. Ce travail constitue une tentative d'approximation de certaines mesures de performance des modèles d'attente étudiés, en l'occurrence le modèle d'attente  $M/M/1/N$  et le modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec pannes du serveur. Dans cette analyse, nous avons considéré deux types de perturbation : distributionnelle qui a concerné la distribution du temps de service de la file  $M/M/1/N$ , et paramétrique liée au taux de pannes dans la file  $M/M/1/N$  avec pannes du serveur. Ainsi, plusieurs mesures de performances des modèles d'attente étudiés ont été estimées, entre autres, le nombre moyen de clients dans le système, la probabilité de blocage et le temps moyen de séjour dans le système. Lors de cette analyse nous avons fixé les distributions de temps de service selon les valeurs de coefficients de variation de celles-ci.

L'analyse effectuée dans ce mémoire ouvre de nombreuses perspectives de recherche intéressantes. On peut citer :

- ✓ Élargir l'application de cette approche à d'autres types de modèles d'attente ;
- ✓ Effectuer une analyse comparative avec la simulation Monte Carlo ;
- ✓ Développer la même approche pour le cas de perturbation de plusieurs paramètres.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abbas K., Heidergott B. and Aïssani D., (2013) A functional approximation for the M/G/1/N queue. *Discrete Event Dynamic Systems* **23**, 93 –104.
- [2] Abbas K., Berkhout J., and Heidergott B. (2016) A critical account of perturbation analysis of Markov chains, *Markov Processes and Related Fields*, Polymat Publishing Company **22**, 227 – 265.
- [3] Avi-Itzhak B and Naor P. (1962) Some queueing problems with the service station subject to breakdown . *Operations research* **10**, 303 –320.
- [4] Alberts B., Bray D., Lewis J., Raff M., Roberts K and Watson J.D., (1994) Molecular Biology of the Cell. Garland Publishing Inc., *New-York*.
- [5] Baynat B. Théorie des Files D’attente ”*Des Chaines de Markov aux réseaux à forme produit*” . *Hérmes LAVISIER*, Paris, 2002.
- [6] Bachi K., Abbas K, and Heidergott B. An unified framework for analyzing Markov reliability models. Technical Report, Free University of Amsterdam, The Netherlands, 2017.
- [7] Benaim M and El Karoui N., (2017) Promenade Aléatoires *Chaînes de Markov et Simulation ; Martingales et Stratégies*, Ed palaiseau, *Ecole Polytechniques* .
- [8] Chabriac H., (2008) Eléments de Théorie des Files D’attente. *Supaero, Ed.*
- [9] Cho G.E and Meyer C., (2001) Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain. *Lin. Alg. Appl.* **335**, 137-150.
- [10] Funderlic. R and Meyer. C, (1986) Sensitivity of the stationary distribution vector for an ergodic Markov chain. *Lin. Alg. Appl.* **76**, 1–17.
- [11] Gross D and Hariss C., (1985) Fundamentals of Queueing Theory. *Wiley, New york*.
- [12] Haviv. M and Heyden. L.V, (1984) Perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite Markov chain. *Adv. Appl. Prob.* **16**, 804–818.

- 
- [13] Heidergott B., and Hordijk A. (2003) Taylor expansion bounds for the stationary Markov chain. *Advances in Applied Probability* **35**, 1046-1070.
- [14] Heidergott B., Hordijk A and Leder N., (2010) Series Expansions for Stationary Markov chains . *Adv.Appl.Probab (Oper.Rese)* **58(1)**, 756-767.
- [15] Heidergott B., Hordijk A. and Uitert Van M., (2007) Series Expansions For Finite-States Markov Chains . *Probability in the Engineering and Informational Sciences*.
- [16] Hêche (2004), Résumé sur les files d'attente et les réseaux *Recherche Opérationnelle* .
- [17] J.M. Smith (2004) Optimal design and performance modelling of M/G/1/N queueing systems. *Mathematical and Computer Modelling* **39**, 1049-1081.
- [18] Hêche J.F., Liebling. T.M and Werra D. (2003) Recherche Opérationnelle Pour Ingénieurs. *Presses Polytechniques Et Universitaires Romandes*.
- [19] Kirkland. S, Neumann. M and Shader. B, (1998) Applications of Paz's inequality to perturbation bounds for Markov chains. *Lin. Alg. Appl.* **268**, 183–196.
- [20] Kulkarni VG and Choi-B D., (1990) Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs , *Queueing Systems*, **7**, 191-208 .
- [21] Little J.D.C., (1961) A Proof of the Queueing Formula  $L = \lambda * W$  . *Opertaions Research*.
- [22] Meyer. C, (1980) The condition of a finite Markov chain and perturbation bounds for the limiting probabilities. *SIAM J. Alg. Disc. Math.* **10**, 273–283.
- [23] Ouazine S., and Abass K., (2016) Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation . *Applied Mathematical Modelling* **40**, 1137-1156.
- [24] Pardoux E. (1989), General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators, *Press. Cambridge*.
- [25] RUEGG A., (1989) Processus stochastique avec application aux phénomènes de file d'attente et de fiabilité. *Presse Polytechniques Rromandes.Suisse*.
- [26] Schweitzer. P, (1968) Perturbation theory and finite Markov chains. *Journal of Applied Probability* **5**, 410–413.
- [27] Elhadji S., and Hakam.S (2004) Fonctions Réelles à une Variables, Formules de Taylor. *Université Mohamed V-Agdol Rabat Maroc*,
- [28] Seneta E., (1984) Explicit forms for ergodicity coefficients and spectrum localization. *Lin. Alg. Appl.* **60**, 187–197.
- [29] Seneta. E, (1988) Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients. *Adv. Appl. Pro.* **20** 228–230.

- [30] Taylor B., ( 1715) *Methods incrementtorum directe et inversa*, Proposition 61, Théorème 3, Corrolaire 2, *Londres* .



---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons réalisé l'analyse de perturbation de quelques modèles de files d'attente, et ce par l'approche des développements limités des chaînes de Markov. Deux types de perturbation ont été considérées, perturbation distributionnelle concernant la distribution de temps du service dans la file  $M/M/1/N$ , et perturbation paramétrique concernant le taux de pannes dans le modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec pannes du serveur. De plus, une analyse de sensibilité de certaines mesures de performance des modèles étudiés a été considérée. Plusieurs exemples numériques illustratifs ont été exhibés afin de montrer l'efficacité de l'approche utilisée.

**Mots-clés** : Chaîne de Markov ; Développement limité ; Matrice fondamentale ; Files d'attente ; Perturbation ; Algorithme.

---

# Abstract

---

In this Master thesis, we have realized the perturbation analysis of some queueing models, by using power expansions for Markov chains. Two kinds of perturbation were considered, distributional perturbation concerning the distribution of the service time in the  $M/M/1/N$  queue, and parametric perturbation concerning the breakdowns rate in the  $M/G/1/N$  queue with server breakdowns. In addition, a sensitivity analysis of some performance measures of the studied models was considered. Several illustrative numerical examples were presented to show the effectiveness of the approach used.

**Keywords** : Markov chains ; Power expansions ; Fundamental matrix ; Queueing models ; Perturbation ; Algorithm.

---