Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

GUEDJALI Rachid
YAICHE Abderrahim

THÈME

Les échanges d'intervalles

Soutenu publiquement, le 20/06/2017 devant le jury composé de :

Mme.	**TAS**	Professeur	Université A-Mira de Béjaia.	Présidente.
Mr.	**CHEMLAL**	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Promoteur.
Mr.	**FARHI**	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Examinateur.
Mr.	**YAHIAOUI**	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Examinateur.

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Au début et avant tout, remerciements et louanges à Dieu le tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé de finaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude envers notre promoteur Monsieur

***Chemlal**, pour son soutien et la confiance qu'il nous a accordés en nous proposant ce sujet, et nous a aidés plus qu'il ne le pense. En nous écoutant patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et de l'avancement de notre travail, il nous a permis de synthétiser, comprendre et expliquer un grand nombre de questions. Ces conseils et sa gentillesse nous a apporté un précieux soutien, qu'il soit chaleureusement remercier ici.*

*Nos remerciements sont aussi adressés à Madame **TAS** , Monsieur **FARHI** et Monsieur **Yahiaoui** qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger notre travail. Nous remercions aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui nous ont permis d'améliorer notre formation.*

Merci à nos parents et à nos frères et sœurs pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, de nous avoir enseigné à penser et de nous avoir encouragés sans cesse pour aller plus loin.

Dédicaces

Je *dédie ce modeste travail à :*

$\mathcal{A}$ mes très chers parents qui ont voulu voir en moi le fruit d'un long sacrifice, et je ne les remercierai jamais assez, pour tous les efforts qu'ils ont déployé tout au long de cette durée d'études et je prie Dieu le tout puissant de les protéger et de leur accorder une longue vie.

$\mathcal{A}$ mes frères, *mes chères sœurs .*

$\mathcal{A}$ Mon cher binôme et meilleur ami : galo.

$\mathcal{A}$ tous mes collègues, *amis* et mes camarades.

$\mathcal{A}$ Toute ma famille et à tous les enseignants du déparetement de mathématiques en particulier notre promoteur.

$\mathcal{A}$ toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, pour la réalisation de ce travail.

Abderrahim yaiche

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est de démontrer le théorème de Sharkovski en introduisant la notion des échanges d'intervalles. Le théorème de Sharkovski est un théorème central dans la théorie des systèmes dynamiques. Le document original de Sharkovski paru en 1964 était en russe. Depuis plusieurs versions de la preuve sont apparues. Celle que nous présentons utilise des éléments de la théorie des échanges d'intervalles qui elle-même fait appel à la théorie des graphes en tant qu'outil.

Dans la première partie, on a défini les notions de bases des systèmes dynamiques discrets et montré quelque résultats sur les cycles associés.

Le chapitre 2 est consacré aux échanges. Nous définissons l'échange et la chaine d'intervalles qui représentent un moyen très utile dans la caractérisation des cycles d'un système dynamique discret.

Finalement, on a appliqué la notion des échanges d'intervalles pour démontrer le théorème de Sharkovski, qui est basée sur la création d'une chaine d'intervalles et s'inspirer d'un outil de la théorie des graphes qui est le graphe orienté, en prenant les points du cycle donné comme sommets et les arêtes sont des flèches puis manipuler ce graphe de sorte à trouver un chemin (configuration) signifiant(e) l'existence d'un cycle d'ordre de sharkovski supérieur, de plus on a exposé un aperçu sous forme d'un exemple de l'idée du mathématicien anglais Stefan sur la démonstration de cet ordre qui est basée sur le même outil et sur un placement précis des points du cycle mais d'une façon à éliminer d'une manière directe les configurations des cycles d'ordre inférieur.

CHAPITRE 1

Introduction aux systèmes dynamiques discrets

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduisons la notion des systèmes dynamiques discrets et nous exposons quelques théorèmes et propriétés fondamentales de ces systèmes permettant d'aborder les notions de chaines d'intervalles et d'échange d'intervalles.

Définition 1.1.1 *(système dynamique)*

Soient X un espace métrique compact, $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et $f : X \times T \to X$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

1) f continue sur $X \times T$

2) $\forall x \in X,\ f(x,0) = x$

3) $\forall x \in X, \forall n_1,\ n_2 \in T : f(f(x, n_1), n_2) = f(x, n_1 + n_2)$

Le triplet (X, T, f) est appelé un ***système dynamique discret****, X espace d'états (phases), T espace temps et f : le flot du système (fonction d'évolution).*

1.2 Exemples de construction des systèmes dynamiques discrets

Le but est de construire le flot d'un système dynamique à partir d'une fonction continue ou d'un homéomorphisme.

1.2.1 SDD engendré par une fonction continue

Soient X un espace métrique, $g : X \to X$ une fonction continue et $T = \mathbb{N}$.

posons: $f : X \times \mathbb{N} \to X$

$$f(x,n) = g^n(x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{g \circ g \circ g \circ ... \circ g(x)}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

1) f est continue sur $X \times \mathbb{N}$

2) $f(x,0) = g^0(x) = x$, $\forall x \in X$

3) $f(x, n_1 + n_2) = g^{n_1+n_2}(x) = f(f(x,n_1), n_2)$, $\forall x \in X, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

Donc $(X, \mathbb{N}, f)$ est un système dynamique **discret engendré par** g.

On note aussi ce système par $(X, \mathbb{N}, g)$.

1.2.2 SDD engendré par un homéomorphisme

Soient X un espace métrique, $h : X \to X$ un homéomorphisme et $T = \mathbb{Z}$.

Posons: $f : X \times \mathbb{Z} \to X$

$$f(x,n) = h^n(x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{h \circ h \circ h \circ ... \circ h}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \\ \underbrace{h^{-1} \circ h^{-1} \circ h^{-1} \circ ... \circ h^{-1}(x)}_{-n \text{ fois}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

1) f est continue sur $X \times \mathbb{Z}$

2) $f(x,0) = h^0(x) = x$, $\forall x \in X$

3) $f(x, n_1 + n_2) = h^{n_1+n_2}(x) = f(f(x,n_1), n_2)$, $\forall x \in X, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

Donc $(X, \mathbb{Z}, f)$ est un système dynamique **discret engendré par** h.

Remarque 1.2.1 *L'étude d'un système dynamique discret engendré par une fonction continue revient à l'étude des itérés successif :*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

1.3 Définitions

Soit (X, T, f) un système dynamique discret.

1.3.1 Orbite

Etant donné un point $x_0 \in X$, on appelle orbite (ou trajectoire) issue de x_0 l'ensemble :
$O(x_0) = \{f(x_0, n), \forall n \in T\}$

1.3.2 Ensemble-limite $\omega(x)$, $\alpha(x)$

On appelle ensemble limite positif, négatif réspectivement de x, l'ensemble suivant:

$$\omega(x) = \left\{ y \in X \text{ telque } \exists (n_i \uparrow) \subset T^+ \text{ tel que } \lim_{n_i \to +\infty} f(x, n_i) = y \right\}$$

$$\alpha(x) = \left\{ z \in X \text{ telque } \exists (n_i \downarrow) \subset T^- \text{ tel que } \lim_{n_i \to -\infty} f(x, n_i) = z \right\}$$

Remarque 1.3.1 *L'ensemble ω-limite permet de connaitre le comportement asymptotique de la trajéctoire issue de x, il peut se présenter sous forme d'un point fixe ou cycle.*

1.3.3 Ensemble invariant

Soient (X, T, f) un système dynamique discret et $A \subseteq X$, on dit que A est invariant par f si $f(A, n) \subseteq A \ \forall n \in T$ où $f(A, n) = \left\{ f(x, n), \forall x \in A \right\}$.

1.4 Point fixes et cycles

1.4.1 Points fixes

Définition 1.4.1 *Soient (X, T, f) un système dynamique discret, $f : X \to X$ une fonction continue et $x^* \in X$.*

On dit que x^* est un **point fixe** de ce système s'il vérifie $f(x^*) = x^*$.

Exemple 1.4.1 $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, $f(x) = -x^3$

$f(x) = x \Rightarrow -x^3 = x \quad \Rightarrow -x(x^2 + 1) = 0$

alors le seul point fixe est $x^* = 0$.

1.4.2 Stabilité des points fixes

Définition 1.4.2 *Soient $(X, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique, $f : X \to X$ une fonction continue et x^* un point fixe de ce système.*

*1) x^*est dit **stable** si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f^n(x) - x^*| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.*

*2) x^*est dit **attractif** si: $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x^*| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = x^*$.*

*3) Le point x^* est dit **asymptotiqument stable** s'il est stable et attractif.*

4) Un point fixe est instable s'il n'est pas stable.

Théorème 1.4.1 *Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable au voisinage de x^*, x^*un point fixe associe à f alors :*

1) $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$ est asymptotiquement stable..

2) $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$ est instable.

Preuve. 1) On a $|f'(x^*)| < M < 1 \Rightarrow \exists \delta > 0$, $|f'(x^*)| < M$, $\forall x \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$

soit $x_0 \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$, d'aprés le théorème des accroissements finis on a :

$\exists \gamma \in \,]x_0, x^*[, |x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\gamma)||x_0 - x^*|$

Donc : $|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$

Par réccurence : $|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*|$

Par passage à la limite : $x_n - x^* \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$ D'où: x^*est a ttractif.

Puisque $M < 1$ alors $|x_n - x^*| \leq |x_0 - x^*| < \delta$, qui entraine la stabilité de x^*.

Donc : x^*est asymptotiquement stable.

2) On a : $|f'(x^*)| > 1 \Longrightarrow \exists M > 1, |f'(x^*)| > M > 1 \Longrightarrow |x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\gamma)||x_0 - x^*| \geq M\ |x_0 - x^*|$

par réccurence : $|x_1 - x^*| \geq M\ |x_0 - x^*| \Longrightarrow\ |x_n - x^*|\ \geq M^n\ |x_0 - x^*|$

par passage à la limite : $x_n - x^* \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ Donc : x^*est instable. ■

Dans le cas $|f'(x^*)| = 1$, x^* est dit **neutre**, pour étudier la nature de x^* on utilise :

1) Si $f'(x^*) = 1$ le développement de Taylor à un ordre supérieur au voisinage de x^* de la fonction f.

2) Si $f'(x^*) = -1$ La dérivée schwarzienne de la fonction f.

Premier cas $f'(x^*) = 1$: L'étude suivante s'appuie sur les dérivés d'ordre supérieur et le développement de Taylor au voisinage de x^* de la fonction f.

On suppose que $f \in C^{n+1}(I)$.

On note par n le plus petit entier s'il éxiste tels que $n \geq 2$ et $f^n(x^*) \neq 0$.

On a : $f(x^*) = x^*$ et $f'(x^*) = 1$

Soient x, $x_0 \in V(x^*)$, le développement de Taylor de f au voisinage de x^*nous donne :

$f(x) \approx x + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n \Rightarrow f(x) - x \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n$

Posons : $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_m = f(x_{m-1})$

On oura : $x_1 - x_0 \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^n$

Par récurrence on obtient : $x_m - x_{m-1} \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_{m-1} - x^*)^n$.

On constate que le signe de $(x_m - x_{m-1})$ dépend du signe de $f^{(n)}(x^*)$ et de la parité de n qui permettent de conclure la nature de x^*.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

	$f^{(n)}(x^*) > 0$	$f^{(n)}(x^*) < 0$
n pair	Répulsif à droite Attractif à gauche	Répulsif à gauche Attractif à droite
n impair	Répulsif à gauche et à droite (répulsif)	Attractif à gauche et à droite (attractif)

Deuxième cas $f'(x^*) = -1$: L'étude suivante s'appuie sur la dérivé de Schwarz de la fonction f.

La quantité $S(f(x)) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$ est appelée la dérivé de Schwarz.

Montrons les deux réssultats suivants :

1) $S(f(x^*)) < 0 \Rightarrow x^*$est répulsif

Considérons $y_{n+1} = g(y_n)$, $g(y) = f^2(y) = (f \circ f)(y)$

$f(x^*) = x^* \Rightarrow g(x^*) = x^*$.

Supposons que x^* est stable pour la fonction g

alors : $\forall \varepsilon \succ 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |g^n(x_0) - x^*| = |f^{2n}(x_0) - x^*| < \varepsilon$

Par ailleurs: $|f^{2n+1}(x_0) - x^*| = |g^n(f(x_0)) - x^*|$

Puisque f est continue au voisinage de x^*:

$\exists \beta > 0, |x_0 - x^*| < \beta \Rightarrow |f(x_0) - x^*| < \delta \Rightarrow |f^{2n}(x_0) - x^*| < \varepsilon$ et $|f^{2n+1}(x_0) - x^*| < \varepsilon$

Ceci prouve que la natutre de x^* pour la fonction f et la même pour g.

Calculons les trois premières dérivés de la fonction g au point x^* :

$g'(y) = f'(y)f'(f(y)) \Rightarrow g'(x^*) = 1$

$g''(y) = f''(y)f'(f(y)) + (f'(y))^2 f''(f(y)) \Rightarrow g''(x^*) = 0$

$g'''(x^*) = -2f'''(x^*) - 3((f''(x^*))^2$

On a : $S(f(x^*)) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}\left[f''(x^*)\right]^2 > 0 \Rightarrow g'''(x^*) > 0$

En utilsiant le premier cas pour la fonction g, $n = 3$ et $g'''(x^*) > 0$ On conclut que x^* est répulsif .

2)$S(f(x^*)) > 0 \Rightarrow x^*$est attractif

On utilise le même raisonnement que précédemment.

1.4.3 Cycles

Définition 1.4.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\{x_1, ..., x_k\}$ est dit un cycle d'ordre k ou k-cycle si les éléments de cet ensemble vérifient :*

$x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ..., $x_k = f(x_{k-1})$, $x_1 = f(x_k)$. autrement dit : $f^k(x_1) = x_1$.

Remarque 1.4.1 *Si $f^n(x) = x$ le point x ne donne pas forcément lieu à l'existence d'un point de période n mais aussi possiblement à une période qui divise n.*

1.4.4 Stabilité de cycles

Un cycle d'ordre k est dit attractif, stable si l'un de ses points est attractif, stable en tant que point fixe de l'application f^k.

Théorème 1.4.2 *Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction suffisament dérivable et $\{x_1, ..., x_k\}$ est un cycle d'orde k alors :*

1) Le cycle est attractif si $\prod\limits_{1 \preceq i \preceq k} |f'(x_i)| < 1$

2) Le cycle est répulsif si $\prod\limits_{1 \preceq i \preceq k} |f'(x_i)| > 1$

3) Le cycle est neutre si $\prod\limits_{1 \preceq i \preceq k} |f'(x_i)| = 1$

Preuve. Soit $C = \{x_1, ..., x_k\}$ un k-cycle.

En appliquant la dérivation de la composition sur la fonction f^k au point x_i de C, on obtient :

$(f^k)'(x_i) = \prod\limits_{1 \preceq i \preceq k} f'(x_i)$

Le résultat s'obtient en appliquant le théorème de la stabilité des points fixes. ■

Exemple 1.4.2 *Soient $(\mathbb{R}, \mathbb{N}, f(x) = x^2 - 1)$ un SDD, $C = \{-1, 0\}$ un cycle d'ordre deux.*

On a $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-1) = -2, f'(0) = 0 \Rightarrow f'(-1) \times f'(0) = 0$

Donc C est attractif.

1.5 Etude d'un exemple de système dynamique

Il existe quelques systèmes dynamiques qui jouent un rôle important dans cette théorie. Nous proposons ici l'étude d'un des systèmes connues de cette théorie, la fonction doublement de période.

On considère le cercle unité du plan complexe.$S = \{z \in \mathbb{C} \ / \mid z \mid = 1 \}$.

Soit f une foinction difinie sur S par : $f(z) = z^2$.

Soit $z \in S \Rightarrow z = \exp(2i\pi\theta)$ avec $\theta \in [0, 1[$

alors $z^2 = \exp(2i\pi(2\theta))$ avec $2\theta \in [0, 1[$

D'ou la fonction $f(z) = z^2$ définie la fonction :

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\rightarrow 2x \bmod 1 \end{aligned} \quad \text{qui définit un SDD noté } ([0,1], \mathbb{N}, f).$$

Nous allons chercher les points périodiques de la fonction définit ci-dessus.

1.5.1 Points fixes

Pour trouver les points fixes, nous allons utiliser le développement en base 2.

1) si $x \in [0, \frac{1}{2}[$

Posons $x = 0, 0\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \geq 1$

Alors $f(x) = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$

$f(x) = x \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \geq 1$

En convertissant en base 10, on aurra donc le point fixe $x = 0$.

2) si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Posons $x = 0, 1\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \geq 1$

Alors $f(x) = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$

$f(x) = x \Rightarrow \alpha_i = 1, \forall i \geq 1$

En convertissant en base 10, on aurra :

$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

D'ou $x = 1$ est le point fixe.

On conclut que les point fixe de la fonction f sont 0 et 1.

1.5.2 Cycles

On cherche l'ensemble des points p-périodique de $]0, 1[$, $p \geq 2$

1)Méthode dirècte

$f(x) = 2x \bmod 1 \Rightarrow f^p(x) = 2^p x \bmod 1$

$f^p(x) = x \Rightarrow x(2^p - 1) \bmod 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{k}{(2^p-1)}, k \in [1, 2^p - 1[\cap \mathbb{N}$

$\left\{ (\frac{k}{(2^p-1)})_{k\in[1,2^p-1[\cap\mathbb{N}}, f^j(\frac{k}{(2^p-1)}) \neq \frac{k}{(2^p-1)}, \forall j < p \right\}$ est l'ensemble des points p-périodique de $]0, 1[$ pour la fonction f.

Remarque 1.5.1 *Les points p-périodique de $]0, 1[$ pour la fonction f sont les rationnels de la forme $(\frac{k}{(2^p-1)})_{k\in[1,2^p-1[\cap\mathbb{N}}$.*

Exemple 1.5.1 *Pour $p = 4$ et $k = 1$*

Le cycle issu en $x_0 = \frac{1}{15}$ est $C = \left\{x_0 = \frac{1}{15},\ f(x_0) = \frac{2}{15},\ f^2(x_0) = \frac{4}{15},\ f^3(x_0) = \frac{8}{15}\right\}$.

<u>2)En utilisant le développement en base 2</u>

Posons $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ tel que $f^{p-j}(x) \neq x$ avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \geq 1$ et $1 \leq j \leq p - 1$

Alors $f^p(x) = 0, \alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\alpha_{p+3}...$

$f^p(x) = x \Rightarrow \alpha_{p+1} = \alpha_1, \alpha_{p+2} = \alpha_2, \alpha_{p+3} = \alpha_3, ...$

Exemple 1.5.2 *<u>1) Cycle d'ordre 2 :</u>*

Soit $x_0 \in [0, \frac{1}{2}[$ alors $f(x_0) \in [\frac{1}{2}, 1[$

$x_0 \in [0, \frac{1}{2}[\Rightarrow x_0 = 0.0\alpha_2\alpha_3\alpha_4... \Rightarrow f(x_0) = 0.\alpha_2\alpha_3\alpha_4... \Rightarrow f^2(x_0) = 0.\alpha_3\alpha_4\alpha_{45}...$

Puisque $f(x_0) \in [\frac{1}{2}, 1[$ alors $x_1 = f(x_0) = 0.1\alpha_3\alpha_4...$

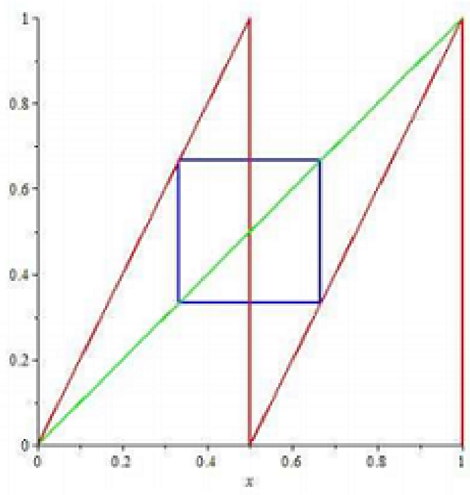
Par identification :

$f^2(x_0) = x_0 \Rightarrow \alpha_i = \begin{cases} 0 & si\ i \quad impair \\ 1\ si & i \quad pair \end{cases}$

$x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$

Le cycle de période 2 est $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.



Cycle de période 2 pour la fonction f

Exemple 1.5.3 *1) Cycle d'ordre 3 :*

Soit $x_0 \in [0, \frac{1}{3}[$ *et* $f(x_0) \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ *alors* $f^2(x_0) \in [\frac{1}{2}, 1[$

$x_0 \in [0, \frac{1}{3}[\Rightarrow x_0 = 0.0\alpha_2\alpha_3\alpha_4... \Rightarrow f(x_0) = 0.\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$

Puisque $f(x_0) \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ *alors* $x_1 = f(x_0) = 0.0\alpha_3\alpha_4...$

$x_2 = f^2(x_0) \in [\frac{1}{2}, 1[\Rightarrow x_2 = 0.1\alpha_4\alpha_5...$

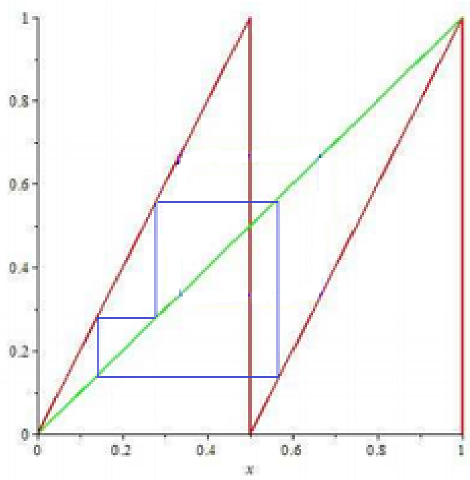
Par identification :

$$f^2(x_0) = x_0 \Rightarrow \alpha_i = \begin{cases} 1 & si\ i\ \ multiple\ de\ 3 \\ 0 & \qquad sinon \end{cases}$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{8^i} = \frac{1}{7},\ x_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{8^i} = \frac{2}{7},\ x_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{8^i} = \frac{4}{7}$$

Le cycle de période 3 *est* $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$.

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.



Cycle de période 3 pour la fonction f

1.5.3 Application logistique.

L'application logistique est l'un des modèles mathématiques de la croissance d'une population animale. Ce modèle est une évolution du modèle exponentionnelle.

Le modèle exponentionnelle fut proposé en 1798 par Thomas Robert Malthus (1766-1834). Lors d'études expérimentales il remarqua que chaque génération est proportionnelle à la précédente. Ainsi d'une période à la suivante l'évolution de la population se traduit par la relation :

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

où : x_n : l'éffectif du population à la période n.

λ : le taux de croissance effectif d'une période à la suivante.

Le mathématicien Belge Vershulst a remis en cause le modèle exponnentionnelle et a proposé en 1838 le modèle logistique. Le principal défaut du modèle exponentionnelle est qu'il ne tient pas compte du fait que les ressources sont limités.

L'équation logistique est donnée par : $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$

Pour $\lambda = 4$ l'application logistique est conjuguée à l'application doublement de période par la fonction $\sin^2(2\pi x)$.

1.6 Conjugaison topologique

Définition 1.6.1 *Soient (X, T, f), (Y, T', g) deux systèmes dynamiques et $\pi : X \to Y$ une application bijective continue vérifiant $\pi \circ f = g \circ \pi$.*

On dit que π est une conjugaison et que (X, T, f) et (Y, T', g) sont topologiquement conjugués.

1.6.1 Point fixe des systèmes conjugués

Soient (X, T, f), (Y, T', g) deux systèmes dynamiques conjugués et x^* un point fixe de f on a alors

$(\pi \circ f)(x^*) = \pi(f(x^*) = \pi(x^*) = (g \circ \pi)(x^*) = g(\pi(x^*))$, c'est à dire que $\pi(x^*)$ est un point fixe de g.

Proposition 1.6.1 *Soient (X, T, f), (Y, T', g) deux systèmes dynamiques conjugués et x^* un point fixe de f , on a $f'(x^*) = g'(\pi(x^*))$*

c'est à dire: $\pi(x^*)$ et x^* sont de la même nature.

Preuve. Soient x^* un point fixe de la fonction f et $\pi : X \to Y$ une application bijective différentiable (difféomorphisme).

On a $(\pi \circ f)(x) = (g \circ \pi)(x)$, $\forall x \in X$

En dérivant les deux termes de l'égalité : $f'(x)(\pi' \circ f)(x) = \pi'(x)(g' \circ \pi)(x)$, $\forall x \in X$

D'ou $f'(x^*)\pi'(x^*) = \pi'(x^*)g'(\pi(x^*))$

Puisque $\pi'(x^*) \neq 0$ (car π est bijective)

Donc $f'(x^*) = g'(\pi(x^*))$ ∎

Remarques 1.6.1 *1) On peut ramener l'étude de la nature des points fixes d'un système dynamique"compliqué" à l'étude de son système conjugué "simple" .*

2) On peut ramener l'étude du système dynamique $([a,b],T,f)$ *au système* $([0,1],T,g)$ *en posant* $g=\pi\circ f\circ\pi^{-1}$ *tel que* $\pi:\begin{cases}[a,b]\to[0,1]\\ x\ \to \frac{x-a}{b-a}\end{cases}$ *est un difféomorphisme.*

1.6.2 Cycle des systèmes conjugués

Soit f et g deux récurrences conjuguées et soit x_0 un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f on a alors :

$\pi\circ f=g\circ\pi\Rightarrow\pi\circ f\circ\pi^{-1}=g$

D'où $g^k=(\pi\circ f\circ\pi^{-1})^k=\pi\circ f^k\circ\pi^{-1}\Rightarrow\pi\circ f^k=g^k\circ\pi$

$$\Rightarrow(\pi\circ f^k)(x_0)=(g^k\circ\pi)(x_0)$$
$$\Rightarrow\pi(f^k(x_0))=g^k(\pi(x_0))=\pi(x_0)$$

Ainsi on a $g^k(\pi(x_0))=\pi(x_0)$ ainsi si x_0 est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f alors $\pi(x_0)$ est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction g.

1.7 Transitivité

Définition 1.7.1 *(Ensemble des points errants) Soit* (X,T,f) *un système dynamique.*

1. *Un point* x_0 *est dit errant si et seulement s'il existe un voisinage* U *de* x_0 *et un ouvert* V *tel que pour tout* $n>0$, $f^n(U)\cap V=\emptyset$.
2. *Un point est non-errant s'il n'est pas errant autrement dit pour tout voisinage* U *de* x_0 *et tout ouvert* V *il existe* $n>0$ *tel que* $f^n(U)\cap V\neq\emptyset$.

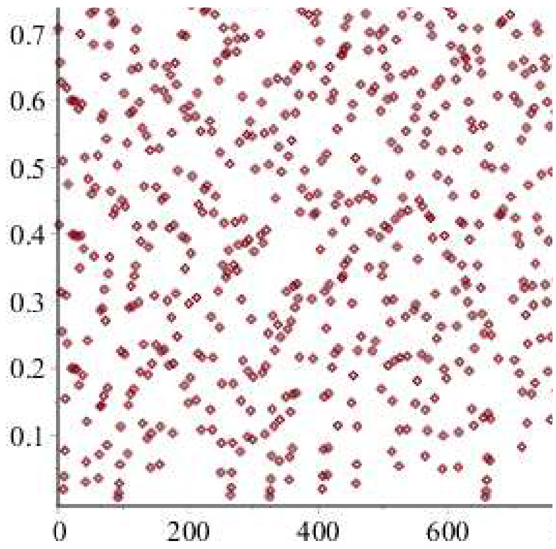
Définition 1.7.2 *(Transitivité) Soit* (X,T,f) *un système dynamique.*

1. *On dit que le point* x *est transitif si son orbite est dense dans* X.
2. *On dit que le système*(X,T,f) *est transitif si tous ses points sont non errants .*

Remarque 1.7.1 *1)Un système dynamique* (X,T,f) *est transitif s'il existe un point* $x\in X$ *tel que l'orbite* $O(x)$ *est dense dans X.*

2) Géométriquement une orbite dense correspond à un graphe d'orbite qui parcourt la totalité de l'espace.

Exemple 1.7.1 *(orbite dense)*



Tracé des 1000 premièrs itérations de l'orbite d'un point non errant.

1.8 Graphe orienté

Définition 1.8.1 *Un graphe orienté $G = (V, A)$ est défini par la donnée d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'arête A. chaque arête étant un couple de sommets.(par exemple, si x et y sont des sommets, les couples (x, y) et (y, x) notés respectivement xy et yx peuvent être des arête du graphe G, une arrête est représentée par une flèche ($\rightarrow$).*

Remarque 1.8.1 *Dans notre travail, nous fixons V comme l'ensemble fini de sous-intervalles fermés $\{I_k\}$ de I d'intérieurs disjoints deux à deux.*

Les éléments $\{I_k\}$ comporte une arête $I_i \rightarrow I_j$ si et seulement si $I_j \subseteq f(I_i)$.

Exemple 1.8.1 *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *défini pare* $f(x) = 2x \bmod 1$ *une fonction continue.*

Soit $I_0 = [\frac{1}{7}, \frac{2}{7}]$ *et* $I_1 = [\frac{2}{7}, \frac{4}{7}]$ *deux sous-intervalles de* $[0,1]$.

On a : $\begin{cases} f(I_0) = I_1, (I_0 \to I_1) \\ f(I_1) = I_0 \cup I_1, (I_0 \longleftarrow I_1 \circlearrowleft) \end{cases}$

Donc le graphe orienté G est définit comme suit : $I_0 \leftrightarrows I_1 \circlearrowleft$

CHAPITRE 2

Échanges d'intervalles

Définition 2.0.2 *Soit* $(I_i)_{i=1...m}$ *une subdivision de* $I = [0, 1]$.

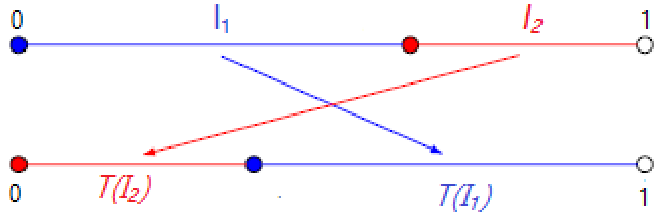
On appelle ***échange de*** m ***intervalles*** *de* I *une bijection* $T : I \to I$ *définie par:* $T(x) = x + \delta_i$, *pour tout* $x \in I_i$, $\delta_i \in \mathbb{R}$.*A chaque échange d'intervalles* T *on associe :*

1- Un vecteur longueur $\lambda = (\lambda_{1,}\lambda_2..., \lambda_m)$ *où* $\lambda_i = a_i - a_{i-1}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0.$

2- Un vecteur de translation $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m)$.

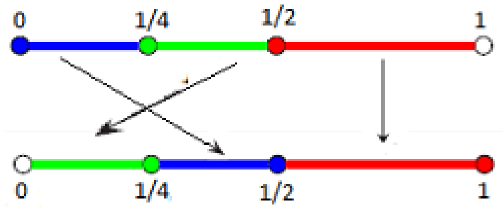
Exemple 2.0.2 *Pour* $m = 2$, $\lambda = (\lambda_{1,}\lambda_2)$, *l'application définie comme suit est un échange de 2 intervalles :*

$$T(x)=\begin{cases} x + \lambda_2 \ si \ \ x \in I_1 \\ x - \lambda_1 \ si \ \ x \in I_2 \end{cases}$$



Exemple 2.0.3 *Pour* $m = 3$, $\lambda = (\lambda_{1,}\lambda_2, \lambda_3)$, *L'application* T *suivante est un échange de 3 intervalles.*

$$T(x)=\begin{cases} x + \frac{1}{4} \ si \ \ x \in [0, \frac{1}{4}[\\ x - \frac{1}{4} \ si \ \ x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ x \qquad si \ \ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



échange de 3 intervalles.

Définition 2.0.3 *(Recouvrement)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et J, K deux intevalles fermés.

1) On dit que J recouvre K si $K \subset f(J)$, on note $J \underset{f}{\rightarrow} K$ ou simplement $J \rightarrow K$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

2) Si k est un entier positif, on dit que J recouvre K k fois si J contient k sous intervalles fermés avec des interieurs disjoints tel que chaque sous intervalle recouvre K

Définition 2.0.4 *(chaine d'intervalles)*

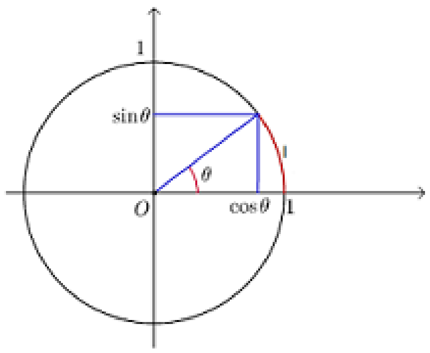
Soient $J_0, ..., J_n$ des sous intervalles férmés de I tel que J_{i-1} recouvre J_i pour $1 \leq i \leq n$ alors $(J_0, ..., J_n)$ est appelé chaine d'intervalles et $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow ... \rightarrow J_n$

2.1 Échanges d'intervalles induit par la rotation

On considère le cercle unité du plan complexe.$S = \{z \in \mathbb{C} \ / \mid z \mid = 1 \ \}$.

On note par R_α la rotation de centre 0 et d'angle α .

La rotation d'angle alpha correspond dans le cercle unité à l'action de la fonction $R_\alpha(z) = z_0 z = \exp(2\pi i(\alpha + \theta))$ tel que $z_0 = \exp(2\pi i\alpha)$ $\forall \alpha, \ \theta \in \mathbb{R}$

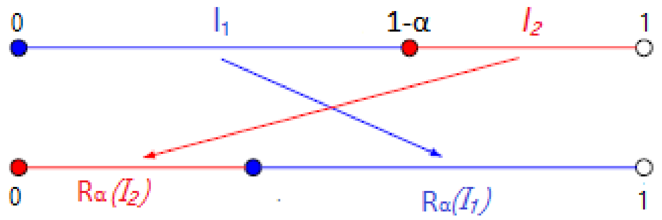


l'angle α est défini par : $\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \alpha$ car $r = 1$

La rotation d'angle α est difinie aussi par l'application:

$$R_\alpha : \begin{cases} [0,1[\rightarrow [0,1[\\ \quad x \ \ \rightarrow (x+\alpha) \bmod 1 \end{cases} \qquad \alpha \in [0,1[.$$

Cette application définie un échange de deux intervalles $[0, 1-\alpha[$ et $[1-\alpha, 1]$.



La rotation d'angle alpha possède une propriété intéressante que nous pouvons résumer dans la proposition ci dessous.

Proposition 2.1.1 *Soient R_α, l'application définie ci-dessus alors*

1) $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ tous les points sont périodiques

2) $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \Rightarrow$ aucun point n'est périodique

Preuve. 1) $R_\alpha^n(x) = (x + n\alpha) \bmod 1$, $\forall x \in [0,1]$

Puisque $\alpha \in \mathbb{Q}$

Alors pour $\alpha = \frac{p}{n}$ tel que $p \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$ on a :

$R_\alpha^n(x) = (x + p) \bmod 1 = x$, $\forall x \in [0,1]$

D'ou $\forall x \in [0,1[$, x est périodique (de période n).

2) En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il éxiste $x \in [0,1]$ qui est périodique (de période n)

On aura $R_\alpha^n(x) = (x + n\alpha) \bmod 1 = x \Rightarrow n\alpha = m$ tel que $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qui est absurde avec l'hypothèse

Donc aucun point n'est périodique. ■

2.2 Permutation

Soit s un entier supérieur ou égal à 2, σ une pérmutation de l'ensemble $\{1, ..., s\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_s) \in \mathbb{R}_+^s$ telles que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$. Désignons par$(X_k)_{1\leq k\leq s}$, la partition de l'intevalle $[0,1]$, posons $\delta_0 = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, ..., s\}$

$\delta_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ et $X_k = [\delta_{k-1}, \delta_k[$

L'échange d'intervalle associé au couple (δ, λ) est la transformation T de $[0,1]$ dans lui même, définie comme l'isométrie par morceaux qui consiste à découper $[0,1]$ et à replacer les éléments de cette partition dans l'orde $X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(s)}$.

De manière analytique, T est donc la transformation qui à un point x de l'intervalle X_i fait correspondre le point :

$T(x) = x + \alpha_i$ avec $\alpha_i = \sum_{j<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma(j)} - \sum_{j<i} \lambda_j$

Exemple 2.2.1 *Soint* $X_1 = [0, \frac{1}{3}[, X_2 = [\frac{1}{3}, \frac{7}{12}[, X_3 = [\frac{7}{12}, \frac{3}{4}[, X_4 = [\frac{3}{4}, 1]$ *une partition de* $[0,1]$ *et* $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \lambda_3 = \frac{1}{6}, \lambda_4 = \frac{1}{4}$*les longueurs (resp) des intevalles précédents.*

Pour réaliser les permutions suivantes : $X_{\sigma(1)} = X_4, X_{\sigma(2)} = X_3, X_{\sigma(3)} = X_2, X_{\sigma(4)} = X_1$, *il suffit de trouver* $\alpha_i, i = \overline{1,4}$:

$\alpha_1 = \sum_{j<4} \lambda_{\sigma(j)} - \sum_{j<1} \lambda_j = \lambda_4 + \lambda_3 + \lambda_2 = \frac{2}{3}$
$\alpha_2 = \sum_{j<3} \lambda_{\sigma(j)} - \sum_{j<2} \lambda_j = \lambda_4 + \lambda_3 - \lambda_1 = \frac{1}{12}$
$\alpha_3 = \sum_{j<2} \lambda_{\sigma(j)} - \sum_{j<3} \lambda_j = \lambda_4 - \lambda_1 - \lambda_2 = -\frac{1}{3}$ $\alpha_4 = \sum_{j<1} \lambda_{\sigma(j)} - \sum_{j<4} \lambda_j = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = -\frac{3}{4}$

Remarque 2.2.1 *:*

Le nombre de permutation possible de n éléments d'un cycle est égal au plus à $n!$.

2.3 Les permutations possibles dans un cycle

Définition 2.3.1 *Soit* $P = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ *un cycle d'ordre* p,

On appelle permutation de P toute application bijective $f : P \to P$, On note S_p l'ensemble des permutations de P.

Si $\sigma \in S_p$, on peut représenter σ par : $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_p \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & ... & \sigma(x_p) \end{pmatrix}$

-Les P ecritures $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$, $\{x_2, x_3, ..., x_p, x_1\}$, ..., $\{x_p, x_1, ..., x_{p-1}\}$ representent toutes le même cycle.

-Toute permutation ne correspond pas forcément au cycle d'un système dynamique, certaines permutations correspondent à aucun cycle.

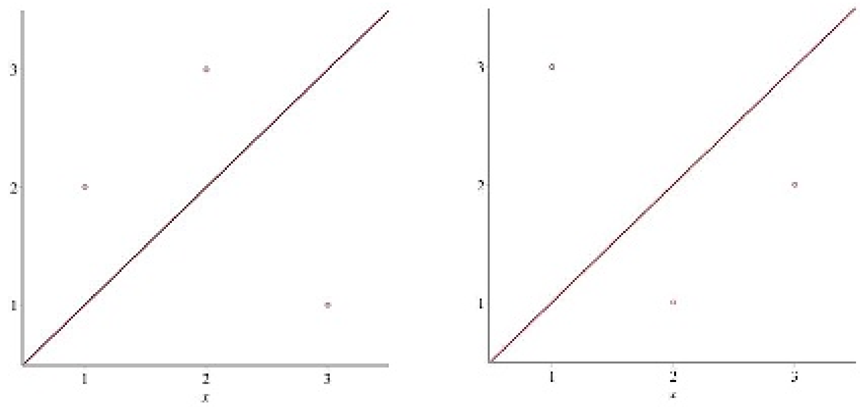
-Les permutations des éléments d'un cycle d'ordre p définissent des cycle de même ordre et aussi des cycles d'ordre inférieur.

Exemple 2.3.1 *(cycle d'ordre 3)*

Soit $P = \{1, 2, 3\}$ *un cycle d'ordre* 3,*tel que :* $1 < f(1) = 2 < f(2) = 3,\ f(3) = 1$.

Les deux permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est définit le même cycle* $\{1, 2, 3\}$.

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.



Les autres permutations définissent un cycle d'ordre 1 et 2.

Exemple 2.3.2 *(cycle d'ordre 5)*

Soit $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *un cycle d'ordre* 5, *tel que :* $1 < f(1) = 2 < f(2) = 3 < f(3) = 4 < 5,\ f(5) = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: cette permutation définit un 5-cycle $\{1, 3, 5, 2, 4\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$: cette permutation définit un 4-cycle $\{1, 2, 3, 4\}$ et un point fixe.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$: cette permutation définit un 3-cycle $\{1, 2, 3\}$ et un 2-cycle $\{4, 5\}$.

CHAPITRE 3

Application des échanges d'intervalles

3.1 Théorème de Sharkovski

3.1.1 Introduction

Le document original de Sharkovski en 1964, était en russe. Son travail n'a pas été connu en dehors de l'Europe de l'est, entretemps Li et Yorke qui n'étaient pas au courant du travail de Sharkovski, cela illustre le manque de communication entre les littératures russe et anglaise. Ils ont prouvé un cas particulier: l'existence d'un point périodique de la période 3, implique l'existence des points périodiques de toutes les autres périodes. Cela revient au nombre initial dans l'ordre de Sharkovski. La première preuve qui est différente de celle de Sharkovski était en anglais, réalisé en 1977 par Štefan.

Définition 3.1.1 *:*

On définit l'ordre de sharkovski sur les entiers naturels non nuls comme suit :

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec ... \prec 3.2 \prec 5.2 \prec 7.2 \prec 9.2 \prec ...$$

$$... \prec 3.2^n \prec 5.2^n \prec 7.2^n \prec ... \prec 3.2^{n+1} \prec 5.2^{n+1} \prec 7.2^{n+1} \prec 9.2^{n+1}$$

$$... \prec 2^n \prec 2^{n-1} ... \prec 4 \prec 2 \prec 1$$

Remarque 3.1.1 *.*

1) $n.2^p \prec m.2^q \Longleftrightarrow n < m$.

2) $2^p \prec 2^q \Longleftrightarrow p > q$.

Théorème 3.1.1 *Soit* $f : I \to I$ *une fonction continue ayant un point périodique de période* n.

pour tout m *vérifiant* $n \prec m$, f *admet un point périodique de période* m.

Remarque 3.1.2 *On donne une démonstration du théorème de Sarkovski sous forme de plusieurs lemmes.*

Lemme 3.1.1 *Soit* $f : I = [a, b] \to R$ *une fonction continue, on a :*

1) $I \subseteq f(I)$ *alors* f *admet un point fixe dans* I

2) $f(I) \subset I \Rightarrow f$ *ademet aumoins un point fixe.*

Preuve. Posons $g(x) = f(x) - x$

1) $I \subseteq f(I)$ alors $\exists \beta, \gamma \in I$ tels que $f(\beta) = a$ et $f(\gamma) = b$

$$\begin{cases} g(\beta) = f(\beta) - \beta = a - \beta \leq 0 \\ g(\gamma) = f(\gamma) - \gamma = b - \gamma \ \geq 0 \end{cases}$$

En appliquant le théorèrme des valeurs intermédiaire sur $[\beta, \gamma]$:

$\exists x^* \in [\beta, \gamma]$ tel que $g(x^*) = 0$

D'où $f(x^*) = x^*$.

2) On a $f(I) \subset I$ alors $\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaire sur $[a, b]$ on aura

$\exists c \in [a, , b]$ tel que $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.1.2 *Soit* f *une fonction continue .*

Si J *est un segment inclus dans* $f(I)$, *alors il existe un segment* k *inclus dans* I *tel que* $J = f(k)$.

Preuve. Posons $J = [\alpha, \beta]$

Comme $J \subset f(I)$, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, Supposons que $\alpha \neq \beta$ et donc $a \neq b$.

– Si $a < b$: L'idée est de prendre dans $[a, b]$ un antécédent u de α et un antécédent v de β, tels qu'entre u et v , il n'y ait plus d'autre antécédent de α ni de β.

Considérons l'ensemble $A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$

Alors A est un ensemble fermé non vide (il contient b) et minoré par a. On peut donc considérer $v = \inf\{x \in A\}$

Par continuité de f, on a $f(v) = \beta$ et $f(y) < \beta$ pour tout $y \in [a, v[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (car $f(a) = \alpha < \beta$).

Considérons maintenant l'ensemble : $B = \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$

Alors B est un ensemble fermé, non vide et majoré par v, On peut donc définir $u = \sup\{x \in B\}$

On a alors $u < v$ et $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. Le segment $K = [u, v]$ convient donc.

– Le cas $a > b$ se traite de la même manière en considérant cette fois

$u = \sup\{x \in [a, b]; f(x) = \beta\}$,puis $v = \inf\{x \in [u, a]; f(x) = \alpha\}$. ■

Lemme 3.1.3 *Supposons qu'il existe n intervalles $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que l'on ait :*

$I_1 \subset f(I_0), I_2 \subset f(I_1), \dots, I_{n-1} \subset f(I_{n-2}), I_0 \subset f(I_{n-1})$ alors f admet un cycle de période n, ainsi il existe $x_0 \in I_0$ tel que $f^n(x_0) = x_0$ et pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$f^k(x_0) \in I_k$.

Preuve. – Pour n = 1 : on dispose par hypothèse d'un segment $I_0 = [a, b]$ tel que $I \subset f(I_0)$ En particulier, il existe α et β dans I_0 tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.

La fonction $g(x) = f(x) - x$ prend alors des valeurs de signes opposés en α et β ($g(\alpha) = a - \alpha < 0$ et $g(\beta) = b - \beta > 0$), et comme elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit l'existence d'un point fixe dans l'intervalle I_0.

– Pour n = 2 : On a $I_1 \subset f(I_0)$ et $I_0 \subset f(I_1)$.

D'après le lemme précédent, il existe un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$

Alors $J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$.

Le cas $n = 1$ assure alors l'existence d'un point fixe $x_0 \in J_1 \subset J_0$ de f^2 et celui-ci vérifie bien que $f(x_0) \in I_1$.

- cas général **:** On va appliquer la même démarche

Comme on a $I_1 \subset f(I_0)$, on peut choisir un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$.

On a alors $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$

Donc, il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$.

On construit ainsi une suite finie de segments $J_{n-1} \subset \ldots \subset J_2 \subset J_1 \subset I_0$ telle que $f^k(J_K) = I_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$.

On a enfin $I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1})$, de sorte qu'il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$.

Comme $J_n \subset f^n(J_n)$, f^n admet un point fixe $x_0 \in J_n$. Par construction des intervalles J_k, $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ ■

Lemme 3.1.4 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, si f admet un cycle d'ordre p tel que $p \geq 2$ alors elle admet un cycle d'ordre inférieur*

Preuve. Soient:

- a et b deux points de n-cycle $(a < b)$

-N_a : nombre de points du cycle inférieur strictement à a (à gauche de a)

-N_b : nombre de points du cycle inférieur strictement à b (à gauche de b)

On sait que $N_a < N_b$

Notons l'ensemble des indices des points de n-cycle à gauche de a par:$G_a = \{r_1, r_2, ..., r_{Na}\}$

et l'ensemble des indices des points de n-cycle à gauche de b par:$G_b = \{s_1, s_2, ..., s_{N_b}\}$

$\exists s \in G_b \backslash G_a$ tel que $(a \leq f^s(b) < b)$ et $(a < f^s(a))$

Posons $g(x) = f^s(x) - x$

Par suite $(g(a) = f^s(a) - a > 0)$ et $(g(b) = f^s(b) - b < 0)$

D'aprés le théorème des valeurs intermédiaire:

$\exists c \in]a, b[, g(c) = 0 \Rightarrow f^s(c) = c$

D'ou le résultat. ■

Exemple 3.1.1 *Soit f une fonction continue, $C = \{a, b, c, d\}$ un cycle d'ordre 4 tel que $a < f(a) = b < f(b) = c < f(c) = d$ et $f(d) = a$.*

$G_b = \{3\}, G_c = \{2, 3\} \Rightarrow G_c \backslash G_b = \{2\}$

On a $f^2(b) = d$ et $f^2(c) = a$

Par suite $f^2(b) - b > 0$ et $f^2(c) - c < 0$

D'aprés le théorème des valeurs intermédiaire:

$\exists e \in]b, c[, f(e) = e$

Nous allons démontrer un résultat plus fort que le lemme précédent, en effet on va montrer qu'il existe toujours un cycle d'une période strictement plus grande que 1 et plus petite que la période du cycle.

Proposition 3.1.1 *Soit f une fonction continue.*

f admet un cycle d'ordre $p > 2 \Rightarrow f$ admet un cycle d'ordre m tel que $1 < m < p$

Preuve. Soient x_{k_0}, x_{k_1} deux éléments de p-cycle tel que $f(x_{k_0}) > x_{k_0}$ et x^* le plus grand point fixe à gauche de x_{k_0}

Soit $m < p$ tel que $f^m(x_{k_0}) = x_{k_1}$ et $f(x_{k_1}) < x_{k_1}$

1)Notons $I_0 =]x^*, \alpha[, \alpha > x_{k_0}$ tel que $f(x) > x, \forall x \in I_0$

Posons $I_m = f^{-m}(I_0)$ qui est un intervalle (car f est continue)

$\forall x \in I_m, f^m(x) > x$

2)Puisque f est continue alors $\exists\ J =]\beta, x^*[\ \in V(x_{k_1}), \beta < x_{k_1}$tel que $\forall x \in J, f(x) < x$

De plus $J \in V(f^m(x_{k_0}))$ car $f^m(x_{k_0}) = x_{k_1}$

D'après le lemme précédent $\exists J' \in V(x_{k_0})$ tel que $f^m(J') = J$

D'ou $\forall x \in J', f^m(x) < x$

De (1) et (2) $x^* \notin I_m$ et $x^* \notin J'$

En appliquant le théorème des valeurs intermidière sur $[a, b]$ tel que a$\in I_m$ et $b \in J'$

On aura: $\exists x^{**} \in [a, b]$ tel que $f^m(x^{**}) = x^{**}$

Donc f admet un cycle d'ordre m. ■

3.2 Exemples de construction des cycles

3.2.1 Construction d'un cycle d'ordre 5 à partir d'un cycle d'ordre3

Soit $x_0 < x_1 < x_2$ des points de l'orbite périodique de période 3 de x_0.

Cela nous donne une partition en 2 intervalles fermés, définie par $I_0 = [x_0, x_1]$ et $I_1 = [x_1, x_2]$.

On a $I_1 \subseteq f(I_0)$ et $f(I_0) \supseteq I_0 \cup I_1$ Alors on a le graphe suivant :$I_0 \rightleftarrows I_1 \circlearrowleft$.

Choisissons maintenant le bons chemins dans ce graphe pour produire par exemple un orbite périodique de période 5.

En choisit le chemin suivant :

$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to ... \to I_1}_{4fois.} \to I_0$

Par (lemme 3.1.3) il existe un point x^* de I_0 tel que $f^5(x^*) = x^*$.tel que $f^k(x^*) \in I_1$ pour $k < 5$.

Montrons que x^* est de période exactement 5 :

Supposons par l'absurde que $f^k(x_0) = x_0$ pour $k < 5$.

Comme $x^* \in I_0$ et $f^k(x^*) \in I_1$ Alore $f^k(x^*) = x^* \Rightarrow x^* \in I_1 \cap I_0 \Rightarrow x_0 = x_{1.}$

Comme x^* ne peut pas être égal à x_1 (puisque x_1 est 3-périodique), Donc x^* est de période exactement 5.

Remarque 3.2.1 *Cette procédure est généralisable pour toutes les périodes impaires.*

Lemme 3.2.1 *Si f admet un point de période impaire $n > 1$, alors elle admet des points périodiques de toutes les périodes impaire plus grandes que n selon l'ordre de Sharkovski.*

Plan de la preuve

Soit f une fonction continue admet un point x_0 de période impaire $n > 1$.

les points de l'orbite de x_0 par ordre croissant est $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1}$ tel que $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $i = \overline{0 : n-2}$ et $x_0 = f(x_{n-1})$, Cela nous donne une partition en $(n-1)$ intervalles fermés, définie par les $[x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{0, n-2.}$ De plus les $[x_i, x_{i+1}]$ définissent la chaine d'intervalles suivante : $I_0 \to I_1 \to ... \to I_{n-2} \circlearrowleft$ et $I_{n-2} \to I_0$, $I_{n-2} \to I_1$, ... , $I_{n-2} \to I_3$.

Pour produire une orbite périodique de période $m > n$,il suffit choisir le chemin suivant :

$I_0 \to I_1 \to ... \to \underbrace{I_{n-2} \to I_{n-2} ... \to I_{n-2}}_{m-n+2 \text{ fois}} \to I_0$

Remarque 3.2.2 *L'ordre de Sharkovski traite des périodes minimales, en effet il est possible qu'un système possède la période 5 et la période 3 comme l'illustre l'exemple suivant.*

3.2.2 Construction d'un cycle d'ordre 3 à partir d'un cycle d'ordre5

Soit $x_0 < x_1 = f(x_0) < x_2 = f(x_1) < x_3 = f(x_2) < x_4 = f(x_3)$ et $x_0 = f(x_4)$ des points de l'orbite périodique de période 5 issue de x_0.

Cela nous donne une partition en 4 intervalles fermés, définie par $I_0 = [x_0, x_1]$, $I_1 = [x_1, x_2]$, $I_2 = [x_2, x_3]$ et $I_3 = [x_3, x_4]$.

Alors on a le graphe suivant :

$I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \circlearrowleft$ et $I_3 \to I_0$, $I_3 \to I_1$, $I_3 \to I_2$

Pour avoir une période 3, il suffit de choisir le chemin suivant

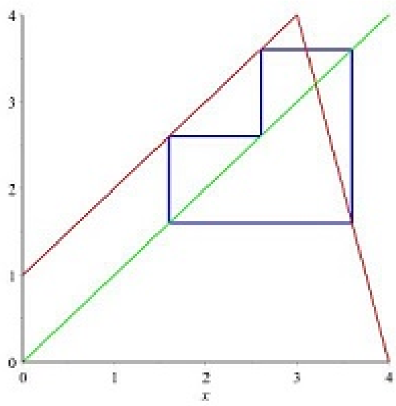
$I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_1$

Exemple 3.2.1 *Soit f une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in [0,3] \\ -4x+16 \text{ si } x \in [3,4] \end{cases}$$

On a $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$ et $f(4) = 0$

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.



Cycle de période 3 pour la fonction f

Lemme 3.2.2 *Soit f une fonction continue .*

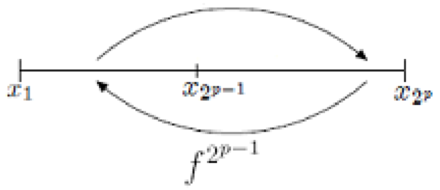
f admet un 2^p-cycle $\Rightarrow$ f admet un 2^{p-1}-cycle

Preuve. Soit $x_1 < x_2 < ... < x_{2^p}$ les points de 2^p-cycle, tel que $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $i = \overline{1 : 2^p - 1}$ et $x_1 = f(x_{2^p})$.

Cela nous donne une partition en $(2^p - 1)$ intervalles fermés, définie par : les $[x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{1, n-1}$.

Comme f admet un 2^p-cycle alors :

On a $f^{2^p}(x^*) = (f^{2^p-1})^2(x^*) = x^*$, $((f^{2^p-1})^2 = f^{2^p-1} \circ f^{2^p-1})$.



Comme $[x_{2^{p-1}+1}, x_{2^p}] \subset f^{2^{p-1}}([x_{2^{p-1}+1}, x_{2^p}]$ donc il existe un point fixe $x \in [x_{2^{p-1}+1}, x_{2^p}]$ pour la fonction $f^{2^{p-1}}$.

De plus les $[x_i, x_{i+1}]$ définissent la chaine d'intervalles suivante :

$I_1 \to I_2 \to ... \to I_{2^{p-1}} \to I_{2^{p-1}+1} \to ... \to I_{2^p-1}$ et $I_{2^{p-1}} \to I_i$, $i = \overline{1 : 2^p - 1}$.

On choisit le chemin suivant : $I_{2^{p-1}} \to ... \to I_{2^{p-1}} \to I_{2^{p-1}}$

Alors $\exists\ x_0 \in I_{2^{p-1}}$ tel que $f^{2^{p-1}}(x_0) = x_0$ et $f^k(x_0) \in I_k$, $k = \overline{2^{p-1} : 2^p - 1}$.

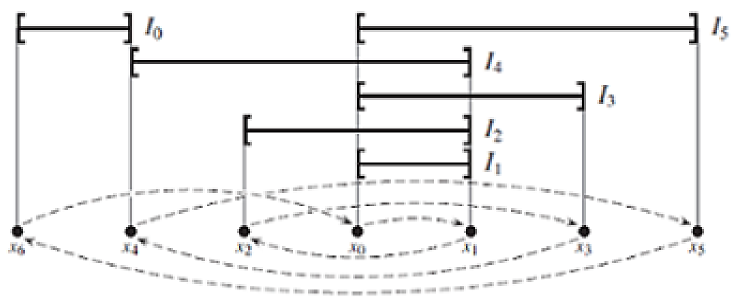
D'où f admet 2^{p-1} cycle. ■

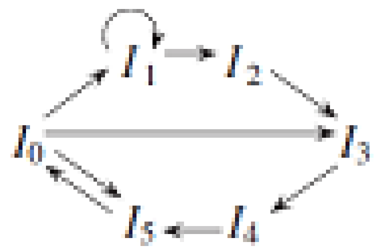
3.2.3 Graphe orienté de Stefan

Stefan a donné une démonstration de l'ordre de Sharkovski en plaçant les éléments du cycle d'une manière alterné (gauche et droite) pour ne pas produire un graphe orienté d'une configuration d'ordre de Sharkovski inférieur.

On donne l'idée sous forme d'un éxemple :

<u>Cycle de période 7 (impair):</u>





Les configurations possible qu'on peut tirer du shéma et le graphe orienté précedents sont :

(1) $I_1 \to I_1$ et $I_0 \to I_1$

(2) $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_1$

(3) $I_0 \to I_1, I_3, I_5$

(4) $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$

(5) $I_0 \to I_5 \to I_0$

(6) $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$

(7) $I_0 \to I_1 \to I_1 \to ... \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$

Les longueurs de ces boucles sont 1, 2, 4, 6, et d'autres plus grandes que 7, qui prouve qu'il n'éxiste pas de configuration d'ordre 3 et 5.

Définition 3.2.1 *On considère un cycle O, soit $p = \max\{x_i : f(x_i) > x_i\}$ le point le plus à droite des points du cycle pour lesquels $f(x_i) > x_i$ et q le point du cycle qui est le successeur immédiat de p. On définit le centre c du cycle par $\dfrac{p+q}{2}$.*
- Pour $x \in O$ on note $O_x \subset O$ l'ensemble des points définit par $O_x = O \cap [x, p]$ quand $x \leq p$ et $O_x = O \cap [q, x]$ quand $x \geq q$. On dit qu'un point x change de coté si c est borné par x et $f(x)$.

Définition 3.2.2 *Une suite de points $x_0, x_1, ...x_n$ de points d'un cycle est dite une suite de Stefan si :*
1- $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$.
2- Les points $x_0, x_1, ...x_n$ alternent de coté par rapport au centre c et les suites x_{2j} et x_{2j+1} sont strictement monotones et s'éloignent du point c.

3- Si $1 \leq j \leq n-1$ alors x_j change de coté (par rapport à c) et $x_{j+1} \in O_{f(x_j)}$.

4- Le point x_n ne change pas de coté.

Lemme 3.2.3 *Supposons les points d'un $n-$cycle O forment une séquence de Stefan. Si $l > n$ (selon l'ordre de Sharkovski) alors f possède une chaine d'intervalles de longueur l et par conséquent un point périodique de période l.*

3.3 Preuve du théorème de Sharkovski

En appliquant le lemme de Stefan (3.3.2) dans la démonstration des lemmes (3.2.1) et (3.2.2) qui caractérisent la partie impaire de l'ordre de Sharkovski respectivement la partie des puissances de 2, ce qui entraine la preuve de la dernière partie de cet ordre qui est un cas particulier. Finalement, en regroupant toutes ces parties on aura la démonstration de l'ordre de Sharkovski.

Théorème de réalisation de Sharkovski

Chaque séquence de l'ordre de sharkovski est l'ensemble des points périodique d'un système dynamique défini sur un intervalle.

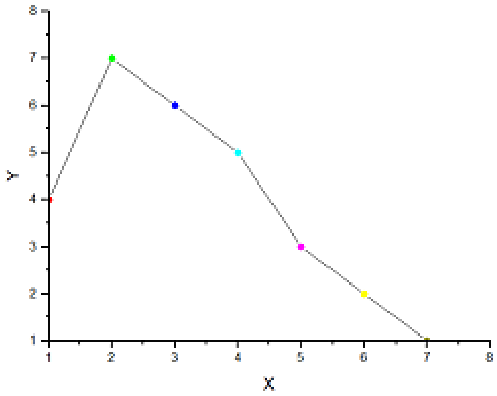
Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un n-cycle vérifiant la propriété de Stefan

Pour construire un cycle sur le plan, il suffit de relier ses points par des segments de droites .

Exemple 3.3.1 *Soit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ un 7-cycle tel que $f(1) = 4, f(4) = 5,$*

$f(5) = 3, f(3) = 6, f(6) = 2, f(2) = 7, f(7) = 1.$

Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.



Théorème 3.3.1 *(Li-Yorke)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to I$ une fonction continue, supposons que F a une orbite périodique de période trois alors :

1. F a des orbites périodiques de toutes les périodes.

2. Il existe un ensemble non dénombrable $S \subset I$ tel que $O(x_0)$ est instable et périodique pour tout x_0 dans S.

Remarque 3.3.1 *:*

Le théoréme de Sharcovski est valable sur l'intervalle fermé, On ne peut pas le généralliser à l'ensemble des systeme dynamiques

Exemple 3.3.2 *Rotation d'angle $\frac{1}{3}$.*

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$ On a : $R_{\frac{1}{3}}(x) = (x + \frac{1}{3}) \bmod 1 \Rightarrow R^3_{\frac{1}{3}}(x) = (x + 3 \times \frac{1}{3}) \bmod 1 = x$, $\forall x \in [0, 1[$

Donc : pour $\alpha = \frac{1}{3}$ tous les points sont périodiques de période 3 .

Montrons que $R_{\frac{1}{3}}$n'admet pas de point périodiques de période 5 .

Supposons qu'il éxiste $x \in [0, 1[$ qui est périodique de période 5

On aura $R^5_{\frac{1}{3}}(x) = (x + 5 \times \frac{1}{3}) \bmod 1 = x \Rightarrow \frac{5}{3} \notin \mathbb{Q}$ ce qui est impossible .

Donc $R_{\frac{1}{3}}$n'admet pas un point périodiques de période 5.

Exemple 3.3.3 *La fonction doublement de période possède des points périodique de toutes les périodes. Mais n'est pas défini sur l'intervalle fermé.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé aux échanges d'intervalles et leur application à la preuve du théorème de Sharkovski. Le théorème de Sharkovski permet de caractériser l'existence des cycles de périodes minimales.

La notion de chaine d'intervalles permet de caractériser de façon efficace l'existence d'un point périodique sans prendre le risque de l'existence de points périodiques de périodes inférieures. Nous avons utilisé cet outil pour prouver les lemmes principaux du théorème de Sharkovski.

Deux systèmes particuliers qui ne sont pas définis sur l'intervalle ont étés étudiés dans ce mémoire. La rotation d'angle alpha qui possède des points périodiques si l'angle est rationnel. Dans ce cas la période est la même pour tous les points. Ainsi la rotation est un exemple qui montre que l'ordre de Sharkovski ne se généralise pas aux autres systèmes dynamiques en dehors de l'intervalle.

Le second système étudié dans ce mémoire est la fonction doublement de période. Ce système possède des points périodiques de toutes les périodes, il est conjugué à un système dynamique de même nature défini sur l'intervalle.

Bibliographie

[1] Chaos for continuous interval maps, Sylvie Ruette, 2015, Laboratoire de Math ematiques, Batiment 425, Universit e Paris-Sud, 91405 Orsay cedex -France.

[2] M. Francesco Dolce,Codes bifixes, échanges d'intervalles et propriété de la base d'indice fini,université de paris-est, 2012/2013.

[3] Hadda Hmili. Echanges d'intervalles. Equations cohomologiques et distributions invariantes.Mathématiques générales [math.GM]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis;Faculte des Sciences de Bizerte (Tunisie), 2012.

[4] L. Alsed'a, J. Llibre, and M. Misiurewicz, Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One, 2nd ed., Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 5, World Scientific, River Edge, NJ, 2000.

[5] R. Barton and K. Burns, A simple special case of Sharkovskii's theorem, Amer. Math. Monthly 107 (2000)932–933. doi:10.2307/2695586

[6] U. Burkart, Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions, J. Combin. Theory Ser.B 32 (1982) 57–68. doi:10.1016/0095-8956(82)90076-4

Résumé

Le document original de Sarkovski en 1964, était en russe. La première preuve différente de celle de Sharkovski était en anglais et est due à Štefan en 1977, entretemps Li et Yorke n'ont pas été au courant du travail de Sharkovski, ils ont prouvé un cas particulier, à savoir que l'existence d'un point périodique de la période 3 implique l'éxistence des points périodiques de toutes les périodes.

Le but de ce travail est de démontrer le théorème (ordre) de Sharkovski en introduisant la notion des échanges d'intervalles, pour cela présentons le plan de travail suivi.

Dans la première partie, nous avons définit les notions de bases des systèmes dynamiques discret et montré quelque résultat. Par suite, on enchaine par définir l'échange d'intervalles et indiquer les caractérisques des singularités associé.

Finalement, on a prouvé l'ordre de Sharkovski par la création d'une chaine d'intervalles et l'application des échanges d'intervalles, pour cela on a divisé l'ordre de Sharkovski sous forme de deux lemmes principaux (partie des puissance de 2 et impaire)). La partie restante est un cas particulier de l'un des lemmes précédents. On a conclut ce travail par lier démonstarations des parties de l'ordre de Sharkovski et on a exposé l'idée de Stefan qui sert à éviter d'une manière directe les configurations qui signifient l'existence d'un cycle d'ordre inférieur.

Mots clès : Echanges d'intervalles, systèmes dynamiques, théorème de Sharkovski, chaine d'intervalles.

Abstract

The original document of Sarkovsky in 1964, was in Russian. The first proof different from that of Sharkovsky was in English and is due to Štefan in 1977, meanwhile Li and Yorke were not aware of the work of Sharkovsky, they proved a particular case, namely that the existence of a " A periodic point of period 3 implies the existence of the periodic points of all periods.

The aim of this work is to demonstrate Sharkovski's theorem (order) by introducing the notion of interval interchanges, to present the work plan followed.

In the first part, we defined the basic notions of discrete dynamic systems and showed some result. Consequently, we define the exchange of intervals and indicate the characteristics of the associated singularities.

Finally, we have proved the order of Sharkovski by the creation of a chain of intervals and the application of interchanges of intervals, for this we divided the order of Sharkovski in the form of two main lemmas (part of the power Of 2 and odd). The remaining part is a special case of one of the preceding lemmas. This work was concluded by linking demonstrations of the parts of the Sharkovsky order and the idea of Stefan was used to avoid in a direct way the configurations which signify the existence of a cycle of inferior order.

Key words: exchange of intervals, dynamic systems, Sharkovski's theorem, chain of intervals.