République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Thème

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Omega)$

Présenté par :

Melle OUALI Sourya

Melle IDIR Lamia

Encadré par :

Mme S. TAS

Jury :

Président :

Mr A. KANOUNE

Examinateurs :

Mr A. MOUSSAOUI

Mr R. BENMEZIANE

Promotion 2012

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BeJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

Melle OUALI Sourya
Melle IDIR Lamia

TH ÈME

ESPACES DE SOBOLEV $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Omega)$

Mr A. KANOUNE	**M.C.B**	**U. Béjaia.**	**Président**
Mme S. TAS	**Professeur**	**U. Béjaia.**	**Rapporteur**
Mr A. MOUSSAOUI	**M.C.B**	**U. Béjaia.**	**Examinateur**
Mr R . BENMEZIANE	**M.A.A**	**U. Béjaia.**	**Examinateur**

Juin 2012

Remerciements

Nous remercions Dieu qui nous a procurés cette réussite.
Nous tenons à remercier vivement notre promotrice M^{me}. Tas de nous avoir proposé ce sujet et d'avoir dirigé ce travail, pour son dévouement, sa disponibilité et pour qui nous témoignons notre profond respect.
Nous remercions particulièrement M^rB. Kerai pour son aide précieuse.
Nous adressons nos sincères remerciements à M^rA. Kanoune pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être président du jury de ce travail.
Nous remercions également M^rA. Moussaoui et M^rR. Benméziane d'avoir accepté de juger ce mémoire.
Enfin, nous remercions tous les membres du département de Mathématiques de l'université A.Mira de Béjaïa, les enseignants, les étudiants ainsi que tous nos camardes et amis.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma chère mère pour tous ses sacrifices et son soutien moral.

A mon cher père qui m'a soutenu durant tout mon cycle d'étude.

A mes chers frères : Salim, Houssam, Bilal et Chams Eddine.

A mes chères sœurs : Abir et Samiha.

A toute ma grande famille.

A mon binôme Sourya.

A toutes mes amies.

A tous mes camarades avec lesquels j'ai partagé cette année.

Lamia

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents pour leur soutien moral et matériel dont ils ont fait preuve tout au long de mes études afin que je puisse réussir.

A la mémoire de ma tante Ben Atsou Atika.

A mes très chers frères : Nabil, Kamel, Yacine et mon cher petit Mounir.

A ma très chère sœur Linda, à ma sœur Nabila, son mari Idir et ses enfants Islam et Imane.

A toute ma famille chacun par son nom.

A toutes mes amies.

A mon binôme Lamia.

A tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

Sourya

Table des matières

Introduction générale

Les espaces de Sobolev portent le nom du savant Sergueï Lvovitch Sobolev qui est un mathématicien et un physicien atomique russe de l'époque Soviétique (né le 6 octobre 1908 et décédé le 3 janvier 1989).

Au cours des années 30, Sobolev a introduit des notions qui sont fondamentales dans le développement de plusieurs domaines des mathématiques. Tout en travaillant à Moscou, Sobolev a construit la méthode standard pour résoudre les problèmes elliptiques avec conditions aux limites en introduisant ses espaces fonctionnels. Il a donné les inégalités sur les normes relatives à ces espaces qui étaient importants dans la théorie de l'intégration des espaces fonctionnels, il a de plus appliqué ses méthodes pour résoudre les problèmes difficiles de la physique mathématique.

En 1939, Sobolev a été élu membre à part entière de l'académie des sciences d'URSS. Il n'avait que 31 ans au moment de son élection qui a été une réalisation remarquable et a fait de lui le plus jeune membre.

Sobolev a reçu de nombreux honneurs pour ses contributions fondamentales aux mathématiques. Il a été élu à de nombreuses sociétés scientifiques, y compris l'académie des sciences d'URSS, l'académie des Sciences de France et l'académie nationale dei Lincei. Il a reçu de nombreux prix, dont trois prix d'état et la médaille d'or 1988 Lomonosov de l'académie des sciences d'URSS.

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels modelés pour la plupart à partir des espaces de Lebesgue et munis des normes combinant celle de la fonction en question et de celles des dérivées faibles jusqu'à un certain ordre.

Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois (pour donner un sens par exemple à une équation aux dérivées partielles) et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction, ce qui fait d'eux des outils très importants et très adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions d'équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions dérivables dont les dérivées sont comprises dans un sens classique.

Dans notre modeste travail, nous donnons dans le premier chapitre quelques outils et définitions de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans la suite. Le deuxième et le troisième chapitre présentent un outil de travail pour la résolution des équations aux dérivées partielles qui sont les espaces de Sobolev. En effet dans le deuxième chapitre, notre étude concerne les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ *où* m *est un entier, nous donnons les définitions et les propriétés de base de cet espace ainsi que les théorèmes d'injection continues et compactes, les théorèmes de densité. De plus, nous énonçons un théorème établissant l'existence de l'application trace et nous exposons le dual de cet espace.*

Le dernier chapitre constitue une généralisation du chapitre précédent. Nous approfondissons l'étude des espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ *où* s *est un réel. Dans un premier temps, nous traitons le cas où* $0 < s < 1$ *et avons présenté les différentes propriétés et théorèmes fondamentaux. Dans la deuxième section, nous présentons le cas où* $0 < s < +\infty$*, nous donnons aussi les propriétés et les théorèmes essentiels de cet espace. Enfin, nous terminons par le dual de* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *qui n'est autre que* $W^{-m,p'}(\Omega)$*.*

CHAPITRE 1

Préliminaires et notions de base

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des définitions et des notions qui seront utilisées dans les deux autres chapitres (partition de l'unité, un ouvert lipschitzien et de classe C^1,...) et d'introduire des résultats et des théorèmes utiles pour étudier les espaces de Sobolev (théorème de compacité dans les L^p, théorème de Hahn Banach, théorème de représentation de Riesz,...).

1.1 *Rappels d'analyse fonctionnelle*

Définition 1.1.1 *Une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à un recouvrement ouvert $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l'ouvert Ω est un ensemble de fonctions Ψ_j vérifiant :*
(1) Pour tout j, la fonction Ψ_j est dans $C^\infty(\Omega)$, positive et à support contenu dans A_j.
(2) Sur tout compact K de Ω, un nombre fini seulement de fonctions Ψ_j ne sont pas identiquement nulles sur K.
(3) $\forall x \in \Omega,\ \sum_{j\in\mathbb{N}} \Psi_j(x) = 1$.

Définition 1.1.2 *On dit que Ω est un ouvert lipschitzien uniforme si :*
(1) Il existe un recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ de Ω tel que $d(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$ et pour tout $i \geq 1$, Ω_i est borné avec $\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ et ou bien la famille $\{\Omega_i\}$ a un cardinal fini, ou bien

$$\exists k \geq 2,\ |i-j| \geq k \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing.$$

(2) Il existe un ouvert borné $\vartheta_i^{'}$ de $\mathbb{R}^{N-1}$, une fonction a_i lipschitzienne sur $\vartheta_i^{'}$ et un système de coordonnées tels que, quitte à renuméroter ces coordonnées :

$$\begin{aligned} \Omega_i \cap \Omega &\subset \{(x^{'}, x_N)\backslash x^{'} \in \vartheta_i^{'}, x_N > a_i(x^{'})\}. \\ \Omega_i \cap \partial\Omega &= \{(x^{'}, a_i(x^{'}))\backslash x^{'} \in \vartheta_i^{'}\}. \end{aligned}$$

(3) Il existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_i$, subordonnée au recouvrement de Ω par les Ω_i et des constantes C_1 et C_2 telles que :

$$\forall i,\ \|\varphi_i\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \ et\ \|a_i\|_{W^{1,\infty}(\vartheta_i^{'})} \leq C_2.$$

Définition 1.1.3 *On dit qu'un ouvert est de classe C^1-uniforme s'il est lipschitzien uniforme avec des fonctions a_i de classe C^1.*

Remarque 1.1.1 *On utilisera souvent dans la suite, pour alléger la lecture, le terme C^1 ou C^k ou lipschitzien, en omettant le qualificatif régulier ou uniforme.*

Définition 1.1.4 *Soient E et F deux espaces de Banach.*
On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées :
(i) E est un sous-espace de F.
(ii) Tout suite convergente dans E est convergente dans F.
Autrement dit, l'identité $I : E \to F$ est continue ou encore $\exists\, C > 0$ telle que :

$$\|u\|_F \leq C\,\|u\|_E \ pour\ tout\ u \in E.$$

Définition 1.1.5 *Soient E et F deux espaces de Banach.*

On dit que l'injection de E dans F est compacte et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ si :

(i) E s'injecte continûment dans F.

(ii) L'application $I : E \to F$ est compacte.

Autrement dit, toute suite bornée dans E est relativement compacte dans F.

Proposition 1.1.1 *(Inégalité de Hölder)*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et p' l'exposant conjugué de p c-à-d $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega). \\ \int\limits_\Omega |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{cases}$$

Cette inégalité se généralise en considérant des réels $p_j > 1$ dont la somme des inverses est égale à 1

$$\forall f_j \in L^{pj}(\Omega), \ \int_\Omega \left| \prod_j f_j(x) \right| dx \leq \prod_j \left[\int_\Omega |f_j(x)|^{pj}\, dx \right]^{\frac{1}{pj}}.$$

Théorème 1.1.1 *(Représentation de Riesz)*

Soient $1 \leq p < +\infty$, $T \in (L^p(\Omega))^*$ et p' le conjugué de p. Alors, il existe $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $u \in L^p(\Omega)$:

$$T(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx \text{ et } \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|T\|_{(L^p(\Omega))^*}.$$

Théorème 1.1.2 *(Compacité des bornés dans L^p)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$.

Un sous ensemble K borné dans $L^p(\Omega)$ est précompact dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ et un sous ensemble ouvert G d'adhérence compacte dans Ω, tel que pour tout $u \in K$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, satisfaisant à $|h| < \delta$ et $|h| \leq d(G, \partial\Omega)$, on ait :

$$\int\limits_G |u(x+h) - u(x)|^p\, dx < \varepsilon^p \text{ et } \int\limits_{\Omega \setminus \bar{G}} |u(x)|^p\, dx < \varepsilon^p.$$

Théorème 1.1.3 *(Théorème d'Ascoli)*

Soit E un espace compact et (E, d) un espace métrique, (F, δ) un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, F)$ des fonctions continues de E dans F est relativement compacte si et seulement si :

(1) A est équicontinue c'est à dire :

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (\forall f \in A, \forall y \in E) : (d(x, y) < \delta) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon).$

(2) Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

Définition 1.1.6 *Soit E un espace de Banach.*

Une carte locale d'un espace topologique X sur E est la donnée d'un couple (U, φ) tel que:

(1) U est un ouvert de X.

(2) φ est une application de U dans E vérifiant : $\varphi : U \mapsto \varphi(U)$ est un homéomorphisme. L'application réciproque $\varphi^{-1} : \varphi(U) \mapsto U$ est appelée paramétrisation de U et les coordonnées locales des points de U sont leurs images par φ.

Définition 1.1.7 *(L'espace $L^p(]a, b[, X)$)*

Soit X un espace de Hilbert séparable et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$.

On désigne par $L^p(]a, b[, X)$ $1 \leq p \leq +\infty$ l'espace des classes des fonctions

$$\begin{aligned} f : \,]a, b[&\to X, \text{ vérifiant} \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

i) f est mesurable.

ii) $\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty$.

On muni $L^p(]a, b[, X)$ de la norme

$$\|f(t)\|_{L^p(]a,b[,X)} = (\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt)^{\frac{1}{p}}.$$

CHAPITRE 2 *Espaces de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, où m est un entier. Nous énonçons quelques résultats ainsi que les théorèmes de densité, d'injection et d'existence de l'application trace.

2.1 *Définitions et propriétés élémentaires*

Soit $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on le note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, \ 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}.$$

où $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$ *est la dérivée partielle de u d'ordre α au sens des distributions définie par :*

$$\langle D^\alpha u \ , \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u \ , D^\alpha \varphi \rangle \ , \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \ \textit{avec} \ |\alpha| = \ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & si \;\; 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq\infty} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & si \;\; p = \infty \end{cases}$$

Proposition 2.1.1 *L'espace $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration.

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans l'espace fonctionnel $W^{m,p}(\Omega)$. Alors pour tout multi-indice d'ordre inférieur où égal à m, $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et u_α pour tout multi-indice α, $0 < |\alpha| \leq m$, telles que (u_n) et $(D^\alpha u_n)$ convergent vers u et u_α respectivement vers dans $L^p(\Omega)$ et ceci pour tout multi-indice. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ chacune des fonctions u_n détermine une distribution $T_{u_n} \in D'(\Omega)$ ainsi, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$

on a :

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| &\leq \textstyle\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\, |\phi(x)|\, dx. \\ &\leq \|\phi(x)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder où p' est l'exposant conjugué à p ainsi, $T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Par un même raisonnement, $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \longrightarrow T_{D^\alpha u}(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice d'ordre compris entre 0 et m. Il en découle :

$$\begin{aligned} T_{u_\alpha}(\phi) &= \lim_{n\to+\infty} T_{\;D^\alpha u_n}(\phi) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^\alpha T_{\;u_n}(D^\alpha \phi) \\ &= \;\; (-1)^\alpha T_{\;u}(D^\alpha\phi) = D^\alpha(T_u)(\phi), \text{ pour toute fonction } \phi \in D(\Omega), \text{ ainsi} \end{aligned}$$

$u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$. Finalement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est donc complet. ∎

Remarque 2.1.1 *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est*

- réflexif pour $1 < p < +\infty$.

- séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.1.1 *On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$, possède une propriété de (m,p) prolongement s'il existe un opérateur linéaire et continu P de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, tel que pour p.p $x \in \Omega$, l'opérateur satisfait à $Pu\,(x)|_{\Omega} = u\,(x)$.*

2.2 Théorèmes de densité

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Alors le sous-espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Démonstration. *On commence par le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$.*
Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, on considère une suite régularisante $x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ et un réel $\delta > 0$.
On sait que la fonction $\rho_\varepsilon \star u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et ses dérivées

$$D^\alpha(u \star \rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon \star D^\alpha u$$

sont des éléments de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et aussi qu'il existe ε_0 tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait

$$\|u - \rho_\varepsilon \star u\|_{L^p} \leq \delta \text{ et } \forall\,|\alpha| \leq m, \|D^\alpha u - \rho_\varepsilon \star D^\alpha u\|_{L^p} \leq \delta$$

On en déduit que $\rho_\varepsilon \star D^\alpha u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et qu'il existe une constante C_m telle que $\|u - \rho_\varepsilon \star u\|_{W^{m,p}} \leq \delta\ C_m$ ce qui termine la démonstration dans le cas de $\mathbb{R}^N$.
Soit maintenant un ouvert $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, On utilise un recouvrement ouvert $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de Ω défini par

$$\Omega_j = \left\{ x \in \Omega,\ \ |x| \leq jC_1 \ \text{ et } \ d(x, \partial\Omega) > \frac{C_2}{j+1} \right\}$$

les constantes C_1 et C_2 sont choisies pour que $\Omega_2 \neq \emptyset$.
Cette suite d'ouverts bornées est croissante et recouvre Ω, en posant alors,
On pose $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$.
On définit la suite d'ouverts $\{A_j\}$ telle que

$$A_j = \Omega_{j+2} \backslash \overline{\Omega_{j-1}} \text{ avec } A_0 = \Omega_2, A_1 = \Omega_3.$$

La famille $\{A_j\}$ constitue encore un recouvrement ouvert de Ω et on vérifie facilement que si $|j - j'| \geq 3$ alors $A_j \cap A_{j'} = \varnothing$.

Soit (ψ_j) *une partition de l'unité associée au recouvrement* $\{A_j\}$, *soit aussi* ε_j *assez petit que* ε *étant donné, on ait à la fois*

$$\begin{aligned} \forall\, j &\geq 2, \quad A_j + B(0,\varepsilon_j) \subset A_{j\,-1} \cup\ A_j\ \cup A_{j\,+1}. \\ \forall\, j &\geq 0, \quad \left\| \rho_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u) - (\psi_j u) \right\|_{W^{m,\,p}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}. \end{aligned}$$

On considère alors la fonction $v^{(\varepsilon)}$ *définie par*

$$v^{(\varepsilon)} = \sum_0^{+\infty} (\rho_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u)).$$

Cette fonction est bien définie car la somme du second membre est localement finie, on déduit des inégalités précédentes que

$$v^{(\varepsilon)} \in\ W^{m,p}(\Omega).$$

En utilisant $u = \sum\limits_0^{+\infty} (\psi_j u)$, *on peut terminer la démonstration par l'inégalité*

$$\begin{aligned} \|\ v^{(\varepsilon)} - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &\leq \sum_0^{+\infty} \left\| \rho_{\varepsilon_j} \star (\psi_j u) - (\psi_j u) \right\|_{W^{m,p}}. \\ &\leq \sum_0^{+\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^{j+1}} \ = \ \varepsilon. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Définition 2.2.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *On note* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *l'adhérence de l'espace* $D(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$ *au sens de la norme* $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Trouver une caractérisation intrinsèque des fonctions de $W_0^{m,p}(\Omega)$ *n'est pas évident en général et dépend fortement de la structure de* Ω, *dans le cas* $\Omega = \mathbb{R}^N$, *une méthode de troncature et de régularisation permet de montrer la proposition suivante :*

Proposition 2.2.2 *L'espace* $D(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, *donc* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. *Soit* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit φ *une fonction de* $D(B(0,2))$, *qui vaut* 1 *sur* $B(0,1)$ *et telle que* $0 \leq \varphi \leq 1$.

On pose $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{x}{n})$. *Alors la suite* (u_n) *définie par :* $u_n(x) = \varphi_n(x)\ u(x)$ *converge vers* u *dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, *en effet*

Puisque $|u|^p \in L^1$ *on a*

$$\|u - u_n\|_{L^P}^p \ = \|(1-\varphi_n)u\|_{L^P}^p \leq \int_{|x|\geq n} |u(x)|^p\, dx \longrightarrow 0.$$

D'autre part, la formule de Leibniz de dérivation d'un produit d'une fonction C^∞ par une distribution entraîne que si $|\alpha| = m$ alors $D^\alpha(\varphi_n u)$ est la somme de $\varphi_n \ D^\alpha u$ et d'expressions de la forme $(\frac{1}{n})^j \ D^{\alpha_1}\varphi(\frac{x}{n}) \ D^{\alpha_2}$ où $|\alpha_1| + |\alpha_2| = m$ et $|\alpha_1| = j \geq 1$. On peut majorer la norme dans L^P de ces expressions par $\frac{1}{n^j} \, |D^{\alpha_1}\varphi|_\infty \, (\int_{|x|\geq n} |D^{\alpha_2}u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ qui tend vers 0, puisque $j \geq 1$, on en déduit que

$$|D^\alpha(\varphi_n u) - D^\alpha u|_{L^p} \leq |D^\alpha(\varphi_n u) - \varphi_n \ D^\alpha u|_{L^p} + |\varphi_n \ D^\alpha u - D^\alpha u|_{L^p}$$

qui est la somme de deux quantités qui tendent vers 0.

On utilise une suite régularisante, si ρ est une fonction régularisante on lui associe $\rho_n(x) = \eta^n \rho(\eta x)$ et $u_n = \rho_n \star (\varphi_n u)$, alors (u_n) est une suite de fonctions appartenant à $D(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}$.

D'une manière générale, on verra que sous des conditions de régularité concernant Ω, il suffira que la prolongée $\widetilde{u}$ de u par 0 hors de Ω appartienne à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ pour qu'on puisse conclure à la propriété : $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Corollaire 2.2.1 *Si Ω est lipschitzien alors $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Démonstration. *Soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et $(\upsilon_n) \in D(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers $P(u)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Alors les restrictions à Ω de υ_n convergent vers la restriction de $P(u)$ à Ω qui n'est autre que u. ■

Corollaire 2.2.2

Soit $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ càd pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a $\varphi u \in W^{1,p}(\Omega)$. Soit x_0 le point $(x_0', \, t) \in \Omega$ où $x_0' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On désigne par $B'(x_0', t)$ une boule ouverte dans $\mathbb{R}^{N-1}$ et par $B^*(x_0', t)$ le cylindre ouvert $B'(x_0', t) \times]-r, r[$, dont l'adhérence pour r assez petit, est incluse dans Ω. Alors pour presque tous les couples (x', t) et (x', t') d'éléments de $B^*(x_0, t)$, on a

$$u(x', t) - u(x', t') = \int_{t'}^{t} \frac{\partial}{\partial x_N} u(x', s) ds$$

Démonstration.

Pour $\left(t,t'\right) \in (]-r,r[)^2$ *et* $x' \in B'(x_0',r)$, *posons*

$$v(x') = \int_{t'}^{t} \frac{\partial}{\partial x_N} u(x',s)ds.$$

On montre que $v \in L^p(B'(x_0',r))$. *Comme* $\overline{B^*(x_0,r)} \subset \Omega$, *la fonction* $\left(x',s\right) \mapsto \partial_N\ u(x',s)$ *est dans* L^p, *donc sommable en* s *sur l'intervalle* $\left[t',t\right]$ *inclus dans* $]-r,r[$. *Il en résulte que* v *est presque partout définie sur* $B'(x_0',r)$. *Ensuite en utilisant les formules de Hölder et de Fubini, on a pour presque tout couple* $\left(t,t'\right)$

$$\begin{aligned}\|v\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_{B'} \left|\int_t^{t'} \frac{\partial}{\partial x_N} u\left(x',s\right) ds\right|^p dx'.\\ &\leq \int_{B'} \left|t-t'\right|^{p-1} \int_t^{t'} \left|\frac{\partial}{\partial x_N} u\left(x',s\right)\right|^p dsdx'.\\ &\leq \left|t-t'\right|^{p-1} \int_{B^*} \left|\frac{\partial}{\partial x_N} u\left(x',s\right)\right|^p dx < \infty.\end{aligned}$$

Soit (u_n) *une suite de* $C^\infty(B^*) \cap W^{1,p}(B^*)$ *qui converge vers* u, *on définit la suite* (u_n) *sur* B' *par la relation :*

$$v_n(x') = \int_{t'}^{t} \frac{\partial}{\partial x_N} u_n(x',s)ds.$$

En remplaçant u *par* $u_n - u$ *dans le calcul précédent, on voit que* $v_n \longrightarrow v$ *dans* $L^p(B')$. *On peut extraire de cette suite une sous-suite* $\left(v_{n_j}\right)$ *qui converge presque partout vers* v *sur* B'. *On peut de même extraire de la suite* (u_{n_j}) *une sous-suite* $(u_{\rho(n)})$ *qui converge presque partout vers* u *sur* B^*, *les fonctions* $u_{\rho(n)}$ *étant régulières, on a :*

$$u_{\rho(n)}(x',t) - u_{\rho(n)}(x',t') = \int_t^{t'} \partial_{\rho(n)} u\left(x',s\right) ds = v_{\rho(n)}(x').$$

En utilisant la convergence presque partout des deux membres, on obtient la formule du corollaire. ■

2.3 *Injections de Sobolev*

Définition 2.3.1

Si Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *les entiers* $j \geq 0$ *étant donnés, on définit la famille des espaces* C_b^j *par :*

$C_b^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega)/\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq j,\ \exists K_\alpha,\ \|D^\alpha u\|_\infty \leq K_\alpha\}$, *muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{C_b^m(\Omega)} = \sup_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

$C_b^j(\Omega)$ *muni de cette norme est un espace de Banach.*

Les sous-espaces $C_b^{j,\lambda}(\Omega)$ *où* λ *est un réel strictement positif, sont constitués des fonctions de* $C_b^j(\Omega)$ *telles que, si* $|\alpha| \leq j$ *alors :*

$\exists C_{\alpha,\lambda}, \forall x,\, y \in \Omega, \quad \left|D^{(\alpha)}u(x) - D^{(\alpha)}u(y)\right| \leq C_{\alpha,\lambda}\,|x-y|^\lambda$, *muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{C_b^{m,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{C_b^m(\Omega)} + \sup_{|\alpha|\leq m}\ \sup_{\{(x,y)\in\Omega^2,\ x\neq y\}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

$C_b^{j,\lambda}(\Omega)$ *muni de cette norme est un Banach.*

Remarque 2.3.1 $\forall(\alpha,\lambda),\ 0 < \alpha < \lambda < 1 : C_b^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\Omega)$, *les inclusions étant strictes.*

Remarque 2.3.2 *Lorsque* Ω *est un ouvert borné, toute fonction de cet espace et ses dérivées se prolongent continûment sur* $\overline{\Omega}$, *cet espace est alors identique à l'espace* $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$.

Théorème 2.3.1 *Quels que soient* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *le demi-espace* $\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$ *possède un opérateur de* (m,p) *prolongement.*

Démonstration. *On définit pour* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}_+^N)$ *la prolongé* Pu *de* u *pour* $x_N < 0$ $Pu\ (x) = \sum_{1\leq j\leq m} \lambda_j u\left(x', -jx_N\right)$, *où* (λ_j) *constitue la solution unique du système*

$$\forall k \in \{0,1,...,m-1\},\ \sum_{1\leq j\leq m} (-j)^k\,\lambda_j = 1.$$

On peut remarquer d'abord qu'avec ces conditions, si $u \in C^m\left(\mathbb{R}_+^N\right)$ *alors pour tout* $k \leq m-1$, *la fonction* u *et les dérivées partielles* $\partial^k Pu/\partial x_N^k$ *sont continues à la traversée de* $\{x_N = 0\}$ *et on déduit que* $Pu \in C^{m-1}(\Omega)$.

Il suffit pour cela d'utiliser la définition des dérivées ∂_N^k *le long de* $\{x_N = 0\}$. ■

Théorème 2.3.2 *Un ouvert de classe* C^m *possède la propriété de* (m,p)*-prolongement pour tout* $p \in [1,\ \infty[$.

Démonstration.

On se ramène par cartes locales à prolonger une fonction du type $\varphi_i u$. *On laisse tomber les indices* i *pour la fonction* a_i *et les coordonnées locales. On définit alors :*

$$\nu\left(x',t\right) = u\left(x', a\left(x'\right) + t\right).$$

qui est dans $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N_+\right)$ *compte tenu des propriétés de* a_i, *on utilise alors le prolongement donné dans le théorème* 2.3.1, *la continuité du prolongement est une conséquence immédiate des propriétés de* C^m*-régularité et de celle du prolongement sur* $\mathbb{R}^N$. ■

2.3.1 *Injections continues*

Théorème 2.3.3 *(Théorème de Sobolev)*

On suppose que $p \geq 1$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *Alors*

(1) Si $N > mp$ *alors pour tout* q *tel que* $p \leq q \leq Np/(N-mp)$, *on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N).$$

L'inégalité d'injection continue peut être précisée comme suit :

Sous les conditions énoncées, il existe une constante C *telle que :*

$$\forall \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_q \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

(2) Pour $p = 1$, *on a :* $W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$.

(3) Si $N = mp$ *et* $p > 1$ *alors pour tout* q *tel que* $p \leq q < \infty$, *on a :*

$$W^{m,\,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N).$$

(4) Si $p > N$ *alors*

$$0 < \lambda \leq 1 - N/p \Longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N).$$

(5) Si $mp > N$ *lorsque* $N/p \notin \mathbb{N}$ *et si* j *est tel que* $(j-1)\,p < N < jp$ *alors*

$$0 < \lambda \leq j - N/p \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N).$$

Si $N/p \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq j = N/p + 1$ *alors*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-(N/p)-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \text{ pour tout } \lambda < 1.$$

Remarque 2.3.3 *D'après la densité de $D(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, il suffit de prouver ce théorème dans $D(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 2.3.4 *(Réduction aux cas des injections critiques).*
Si les propriétés sont démontrées dans les cas critiques, c'est-à-dire pour l'affirmation (1) dans le cas : $q = Np/(N - mp)$ et pour les affirmations (4) et (5) dans les cas respectifs $\lambda = 1 - N/p$ et $\lambda = j - N/p$, alors les propriétés (1), (4) et (5) du théorème 2.3.3 *en résultent.*
Supposons en effet, l'affirmation (1) *prouvée pour $q = p^* = Np/(N - mp)$.*
Soit $q \in]p, p^*[$ et $\theta \in]0, 1[$ tel que $q = \theta p + (1 - \theta)p^*$. L'inégalité de Hölder, pour les exposants conjugués $1/\theta$ et $1/(1 - \theta)$, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\theta p} |u(x)|^{(1-\theta)p^*} dx. \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p\theta/\theta} dx\right]^{\theta} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*(1-\theta)/(1-\theta)} dx\right]^{(1-\theta)}. \\
&\leq \|u\|_{L^p}^{p} \|u\|_{L^{p^*}}^{p^*(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

On sait que $u \in L^p$, $u \in L^{p^*}$ et que d'autre part il existe C telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Ainsi l'inégalité précédente montre que $u \in L^q$ et que :

$$\|u\|_{L^q}^{q} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^{p\theta+(1-\theta)p^*} = C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^{q}.$$

Ce qui démontre la continuité de l'injection dans L^q.
Un raisonnement analogue permet de ramener la démonstration des affirmations (4) *et* (5) *au cas critique envisagé ci-dessus.*

Organisation de la preuve du théorème de Sobolev

Étape A: On établit pour les fonctions de $D(\mathbb{R}^N)$ l'inégalité :

$$\|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)}$$

Il en résultera par la densité de $D(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, l'affirmation (1) *du théorème* *dans le cas* $p = m = 1$.

Étape B: On établit dans le cas $p < N$ *pour les fonctions* φ *de* $D(\mathbb{R}^N)$ *l'inégalité :*

$$\|\varphi\|_{L^{Np/(N-p)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Étape C: On établit par récurrence, pour les fonctions φ *de* $D(\mathbb{R}^N)$ *dans les cas* $m \geq 2$ *et* $mp < N$ *l'inégalité :*

$$\|\varphi\|_{L^{Np/(N-mp)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$$

À l'issue de ces trois étapes, l'affirmation (1), *grâce a la densité et à la remarque* 2.3.4 *sera démontée.*

Étape D: On établit pour les fonctions φ *de* $D(\mathbb{R}^N)$ *l'inégalité :*

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq C \|\varphi\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^N)}$$

En utilisant la densité des fonctions régulières, on déduira l'affirmation (2) du théorème.

Étape E: On prouve l'affirmation (3) du théorème en commençant par le cas $m = 1$, $p = N$ *et en poursuivant avec* $m \geq 2$ *puis* $Np = m$.

Étape F: On démontre les deux dernières propriétés (4) et (5) du théorème.

Lemme 2.3.1 *(voir* [5]*) Soient* $N \geq 2$ *et* N *fonction* F_i, *chacune appartenant à* $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$.*Soit* $\check{x}_i^{(N)}$ *le* $(N-1)-$*uplet* $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. *Alors on a :* $\prod F_i(\check{x}_i^{(N)}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et on a l'inégalité*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_i \left| F_i(\check{x}_i^{(N)}) \right| dx \leq \prod_i (\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| F_i(\check{x}_i^{(N)}) \right|^{N-1} d\check{x}.$$

Démonstration. *Du théorème* 2.3.3

Montrons d'abord l'étape A. *càd montrons que :*

$$\exists C, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)}.$$

. *Soit* $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$. *Alors pour tout indice* $i \in \{1, ..., N\}$ *on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi(x + (s - x_i)e_i) ds.$$

On en déduit :

$$|\ \varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi(x + (s - x_i)e_i) \right| ds \quad . \tag{1}$$

On remarque que l'intégrale du membre de droite de (1) *ne dépend pas de la composante* x_i *de* x. *On définie, sur* $\mathbb{R}^{N-1}$, *la fonction* φ_i *à support compact, par la formule :*

$$\varphi_i(\check{x}_i^{(N)}) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi(x + (s - x_i)e_i) \right| ds.$$

Les inégalités (1) *s'écrivent donc :*

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \forall x \in \mathbb{R}^N, \ |\ \varphi(x)| \leq \ \varphi_i(\check{x}_i^{(N)}).$$

Comme le but est l'étude de $\|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}}$, *on note ici que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, |\ \varphi(x)|^{N/(N-1)} \leq \prod_1^N [\varphi_i(\check{x}_i^{(N)})]^{1/(N-1)} \ .$$

On applique le lemme 2.3.1 *aux fonctions* $F_i = |\varphi_i|^{1/(N-1)}$. *L'inégalité*

$|\varphi(x)| \leq \prod_{1 \leq i \leq N} |\varphi_i(\check{x}_i)|^{1/(N-1)}$ *fournit alors pour la norme* $\phi = \|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}}$, *l'expression*

$$\phi \leq [\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \displaystyle\prod_{1 \leq i \leq N} F_i(\check{x}_i) dx]^{(N-1)/N} \ .$$

$$= \prod_{1 \leq i \leq N} \textstyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi(x + se_i) \right| ds d\check{x}_i]^{1/N}.$$

$$= [\prod_{1 \leq i \leq N} \left\| \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}]^{1/N}.$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \left\| \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \tfrac{1}{N} \|\varphi\|_{w^{1,1}(\mathbb{R}^N)} .$$

On a ainsi la propriété d'injection continue $W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{N/(N-1)}$ *et, par la densité de* $D(\mathbb{R}^N)$ *dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, *l'affirmation* (1) *du théorème est démontrée dans le cas* $p = m = 1$. ■

Remarque 2.3.5

En fait, la dernière inégalité, qui traduit la continuité de l'injection, s'écrit ici plus précisément :

$$\|\varphi\|_{N/(N-1)} \leq C \|\nabla \varphi\|_1 .$$

Montrons maintenant l'étape B.

On suppose maintenant $m = 1$ *et* $p < N$.

On considère pour $u \in D(\mathbb{R}^N)$ *la fonction* $v = |u|^{p(N-1)/(N-p)-1}\, u$ *où l'exposant est positif où nul, puisque* $p \geq 1$. *Par définition* $|u|^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(|u|))$, *la dérivée partielle* $\partial_i v$ *s'écrit*

$$\partial_i v = \frac{p(N-1)}{N-p}\, |u|^{p(N-1)/(N-p)-1}\, \partial_i u.$$

En outre, la remarque précédente et l'utilisation de l'inégalité de Hölder fournissent

$$\begin{aligned} (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{N/(N-1)}\, dx)^{(N-1)/N} &\leq C(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{p(N-1)}{N-P}\, |u(x)|^{p(N-1)/(N-p)-1}\, |\nabla u(x)|\,. \\ &\leq C\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{Np/(N-p)}\, dx\right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Le membre de gauche n'est autre que $\|u\|_{Np/(N-p)}^{(N-1)p/(N-p)}$. *Donc, en divisant par* $\|u\|_{Np/(N-p)}^{(p-1)N/(N-p)}$, *on obtient l'inégalité*

$$\|u\|_{Np/(N-p)} \leq C\, \|\nabla u\|_p\,.$$

On a ainsi démontré l'affirmation (1) *du théorème pour* $m = 1$ *et* $1 < p < N$.

Montrons l'étape C.

On fait maintenant une preuve par récurrence sur m.

Supposons $m \geq 2$ *et* $mp < N$, *on a donc :* $(m-1)p < N$ *et* $p < N$.

Supposons l'injection $W^{m-1,p} \hookrightarrow L^{Np/(N-(m-1)p)}$ *démontrée.*

Avec D désignant un opérateur différentiel d'ordre 1, on a $Du \in W^{m-1,p}$, *donc :*

$Du \in L^{Np/(N-(m-1)p)}$, *Puisque* $u \in W^{m,p}$, *on a :* $u \in W^{m-1,p}$. *Par suite* $u \in L^{Np/(N-(m-1)p)}$.

Finalement, en posant $q = Np/(N-(m-1)p)$, *on a :* $u \in W^{1,q}$.

D'après le théorème d'injection pour $m = 1$ *et puisque* $q(N-q) = p(N-mp)$, *on obtient* $u \in L^{Nq/(N-mp)}$ *ce qui achève la démonstration pour l'étape C.*

Montrons l'étape D.

montrons que $W^{N,1} \hookrightarrow L^{\infty}$. *L'utilisation de la densité des fonctions régulières entraînera ensuite la propriété d'injection :*

$$W^{N,1} \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N).$$

On a déjà montré que si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ *alors :*

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad \|u\|_{\infty}(x', .) \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\partial_N u(x', t)\right| dt.$$

Faisons d'autre part l'hypothèse de récurrence suivante, si $v \in W^{N-1,1}(\mathbb{R}^{N-1})$ *alors*

$$v \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{N-1}) \text{ et } \|u\|_{\infty} \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1} \\ |\alpha\leq N-1|}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|D^{\alpha}v(x^{'})\right| dx^{'}.$$

On applique cette inégalité à la fonction $\partial_N u(x^{'}, x_N)$ *pour* x_N *fixé, on obtient :*

$$\sup_{x^{'}\in\mathbb{R}^{n-1}} \left|\partial_N u(x^{'}, x_N)\right| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1} \\ |\alpha\leq N-1|}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\ D^{\alpha}(\partial_N u)|\,(x^{'}, x_N)dx^{'}.$$

On intègre ensuite par rapport à x_N

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x^{'}\in\mathbb{R}^{n-1} \\ x_N\in\mathbb{R}}} \left|u(x^{'}, x_N)\right| &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} \sup_{x^{'}\in\mathbb{R}^{N-1}} \left|\partial_N u(x^{'}, x_N)\right| dx_N. \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1} \\ |\alpha\leq N-1|}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |D^{\alpha}\ (\partial_N u)(x', x_N)|\, dx^{'}dx_N. \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1} \\ |\alpha\leq N-1|}} \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} |D^{\alpha}u|\, dx. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu $W^{N,1} \hookrightarrow L^{\infty}$.

Retournons à l'affirmation (2). Soit $u \in W^{N,1}(\mathbb{R}^N)$ *et* (u_n) *une suite de* $D(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $\|u_n - u\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ *d'après ce qui précède, on déduit que* $\|u_n - u\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$, *ce qui signifie que* $u_n \longrightarrow u$ *uniformément sur* $\mathbb{R}^N$. *Ainsi* u *est continue sur* $\mathbb{R}^N$. *Comme* $u \in L^{\infty}$, *il en résulte que* $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$. *De plus, l'inégalité*

$$\|u\|_{L^{\infty}} \leq C\,\|u\|_{W^{N,1}}\quad .$$

fournit

$$\forall u \in W^{N,1}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{C_b(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{N,1}}.$$

Cela termine l'étape D et la preuve de l'affirmation (2).

Montrons l'étape E.

Supposons que $mp = N$.

On commence par le cas $m = 1$, $p = N > 1$.

Soit donc $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. *On montre que* u *appartient à* L^p *quel que soit* $q \geq N$. *On commence par montrer que* $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ *s'injecte continûment dans* L^q *pour tout*

$q \in [N, N^2/(N-1)]$. *Pour cela, on remarque que si* $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ *alors* $u^N \in W^{1,1}$, *ceci résulte de* $\nabla\left(u^N\right) = Nu^{N-1}\nabla u$ *et de l'inégalité de Hölder :*

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u^N\right| &\le N \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \left|u^{N-1}\right| dx.\\ &\le N \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^N dx\right)^{1/N} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^N dx\right)^{(N-1)/N}.\end{aligned}$$

Par l'injection de Sobolev de $W^{1,1}$ *dans* $L^{N/(N-1)}$, *on déduit l'appartenance de* u *à* $L^{N^2/(N-1)}$.

On montre maintenant l'appartenance de u *à tous les* L^q *pour* $q > N^2/(N-1)$, *pour ce faire, on remarque que* q *peut alors s'écrire* $q = q^{'}N(N-1)$ *avec* $q^{'} > N$.

Considérons φ *une fonction régulière approchant* u *où* $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ *:*

$$A = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi^{q'N/(N-1)}\right| dx\right)^{(N-1)/N} = \left\|\varphi^{q'}\right\|_{L^{N/(N-1)}}.$$

En utilisant $\nabla\left(|\varphi|^{q^{'}}\right) = q^{'} |\varphi|^{q^{'}-2} \varphi\nabla\varphi$, *la remarque* 2.3.5 *puis l'inégalité de Hölder, on obtient pour* A *les majorations :*

$$\begin{aligned}A &\le q^{'} C \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{q^{'}-1} |\nabla\varphi|\, dx\\ &\le q^{'} C \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{(q^{'}-1)N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/N} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^N dx\right)^{1/N} \qquad (2)\end{aligned}$$

On voit que $(q^{'}-1)N/(N-1) \in \left[N, q^{'}N/(N-1)\right]$, *il existe donc un nombre*

$\theta = 1/(q^{'}+1-N)$ *tel que :* $\frac{(q^{'}-1)N}{(N-1)} = \theta N + (1-\theta)\frac{q^{'}N}{(N-1)}$.

Par suite, en utilisant encore l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{(q^{'}-1)N/(N-1)} dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{q^{'}N/(N-1)} dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^N dx\right)^{\theta}.$$

En reportant dans l'inégalité précédente (2), *on obtient :*

$$\begin{aligned}&\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{q^{'}N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/(Nq^{'})}.\\ &\le Cq^{'(q^{'}-N+1)/q^{'}} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^N dx\right)^{(N-1)/(Nq^{'})} \left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi(x)|^N dx\right)^{(q'-N+1)/(q^{'}N)}.\end{aligned}$$

On a ainsi $u \in L^{q^{'}N/(N-1)}$.

Notons qu'on ne peut pas en déduire que $u \in L^\infty$ *car la suite des scalaires* $q^{'(q^{'}-N=1)/q^{'}}$ *n'est pas bornée. Il existe d'ailleurs des exemples de fonctions de* $W^{1,N}$ *où* $N \ge 2$, *qui ne sont pas bornées.*

Supposons $m \ge 2$, $mp = N$, *alors* $(m-1)\,p < N$. *De* $u \in W^{m,p}$, *on déduit* $u \in W^{m-1,p}$ *et pour tout* j, $\partial_j u \in W^{m-1,p}$. *Donc, d'après l'affirmation (1) du théorème, on sait que* u *et* $\partial_j u$ *appartiennent à* L^r *avec* $r = Np/(N-(m-1)p)$. *De* $mp = N$, *on déduit que* $r = N$, *on a donc* $u \in W^{1,r}$, *ce qui implique d'après ce qui précède* $u \in L^q$ *pour tout* q, *ce* *qui achève la démonstration de l'étape E.*

Montrons l'étape F.

On considère la solution élémentaire E du Laplacien càd $E = k_N r^{2-N}$ si $N \geq 3$ et $E = k_2 \ln r$ pour $N = 2$, avec $k_2 = \frac{1}{2\pi}$ et $k_N = \frac{1}{(2-N)} w_{N-1}$, w_{N-1} étant l'aire $(N-1)$-dimensionnelle de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$.

Soit θ une fonction de $D\left(\mathbb{R}^N\right)$ qui vaut 1 sur une boule de centre 0.

Soit $F = \theta E$, alors :

$$\triangle F = \theta \delta_0 + 2\nabla\theta\ \nabla E + (\triangle\theta)\, E = \delta_0 + \psi.$$

où $\psi \in D\left(\mathbb{R}^N\right)$. On peut écrire : $u = \delta_0 \star u - \psi \star u$ puis :

$$\triangle F \star u = \sum_{1 \leq i \leq N} \partial_i F \star \partial_i u.$$

Les dérivées de F sont de la forme r^{1-N} au voisinage de 0 et à support compact dans $\mathbb{R}^N$, elles sont donc dans tous les L^q pour que $q < N(N-1)$. En particulier, elles sont dans $L^{p'}$ puisque $p > N$, le produit de convolution $\sum_i \partial_i F \star \partial_i u$ appartient donc à L^∞, puisque $\psi \in D\left(\mathbb{R}^N\right)$.

On a ainsi obtenu l'existence d'une constante C telle que :

$$\|u\|_\infty \leq \left(\|\nabla F\|_{p'} \|\nabla u\|_p + \|\psi\|_{p'} \|u\|_p\right).$$

ce qui signifie que $u \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Notons qu'on obtient une estimation optimale en utilisant des fonctions de la forme : $u_\lambda(x) = u(x/\lambda)$ où $\lambda > 0$. En effet, l'inégalité de continuité :

$$\|u\|_\infty \leq C_1 \|u\|_p + C_2 \|\nabla u\|_p.$$

appliquée à u_λ fournit :

$$\|u\|_\infty \leq C_1 \lambda^{N/p} \|u\|_p + C_2 \lambda^{-1+N/p} \|\nabla u\|_p.$$

En particulier, le minimum de la fonction de λ exprimée dans le membre de droite est atteint pour $\lambda = M \|\nabla u\|_p \left(\|u\|_p\right)^{-1}$. On obtient donc l'inégalité où C est une constante qui ne dépend que de N et de p :

$$\|u\|_\infty \leq C\left(\|u\|_p^{1-N/p} \|\nabla u\|_p^{N/p}\right).$$

Etudions enfin le caractère Höldérien de u. Soit $h \in \mathbb{R}^N$, on a l'inégalité suivante :

$$\|\tau_h u - u\|_p \leq Ch \|\nabla u\|_p.$$

D'autre part :

$$\|\nabla(\tau_h u - u)\|_p \leq 2\|\nabla u\|_p.$$

De sorte qu'en utilisant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|\tau_h u - u\|_\infty \leq Ch^{1-N/p}\|\nabla u\|_p.$$

Ceci entraîne que u *est Hölderienne d'exposant* $1 - N/p$.

Considérons le cas où $m \geq 2$. *Si* $mp > N$ *lorsque* $N/p \notin \mathbb{N}$ *et* $j = [N/p] + 1$, *alors :*

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C_b^{m-j,j-N/p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

En effet, soit j *tel que* $jp > N > (j-1)\,p$ *alors:*

$$u \in \quad W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \Rightarrow (u, Du) \in \quad \left(W^{j-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2.$$

$$\text{Donc} \qquad (u, Du) \in \left(L^{Np/(N-(j-1)p)}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^2.$$

D'après la première injection de Sobolev puisque $p < N$. *D'où il résulte que :*

$$u \in W^{1,\ Np/(N-(j-1)p)}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

En utilisant ce qui précède et en remarquant que $Np/(N-(j-1)p) > N$, *on obtient :* $u \in C_b\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et plus précisément :*

$$u \in C_b^{0,1-N(N-(j-1)p)/(Np)}\left(\mathbb{R}^N\right) = C_b^{0,j-N/p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Soit maintenant $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $mp > N$, *soit* j *tel que* $(j-1)\,p \leq N < jp$. *D'après ce qui précède* $D^{(m-j)}u \in \quad W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *donc* $u \in C_b^{(m-j)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *avec* $j = [N/p]+1$. *Puisque* $D^{(m-j)}D^{(m-j)}u \in C_b^{0,j-N/p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *alors* $u \in C_b^{(m-j),j-N/p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Si $u \in W^{j,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *avec* $j = (N/p) + 1 \in \mathbb{N}$ *alors* $Du \in W^{j-1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Puisque* $(j-1)\,p = N$, *l'étape E entraîne que* $Du \in L^q$ *pour tout* $q < \infty$. *Ce qui précède montre que* $u \in C_b^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *quel que soit* $\lambda < 1$.

Si $j = (N/p) + 1 \in \mathbb{N}$ *alors* $D^{(m-j)}u \in C_b^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\forall\lambda < 1$ *d'où* $u \in C_b^{m-N/p-1,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\forall\lambda < 1$.

Ceci termine l'étape F et la démonstration du théorème.

Proposition 2.3.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *qui possède un* (m,p) *prolongement. Alors le théorème* 2.3.3 *s'étend au cas de* Ω.

Démonstration. *Soit* P *un opérateur de prolongement continu de* $W^{m,p}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. *Puisque* $P\ u(x) = u(x)$ *pour tout* x *dans* Ω, *on a*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|P(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|P(u)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|P\|\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

On utilise un procédé identique pour les cas (2) et (3) du théorème d'injection de Sobolev.

■

Théorème 2.3.4 *On suppose que l'ouvert* Ω *est lipschitzien.*

(1) Si $N > mp$ *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* q *tel que* $q \leq Np/(N-mp)$.

(2) Si $N = mp$ *et* $p > 1$ *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *pour tout* q *tel que* $q < \infty$.

(3) Si $p = 1$ *alors* $W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega)$.

(4) Si $mp > N$:

Si $N/p \notin \mathbb{N}$ *et si* j *est tel que* $(j-1)\,p < N < jp$ *alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\Omega), \forall \lambda \leq j - N/p.$$

Si $N/p \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq j = N/p + 1$ *alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m-(N/p)-1,\lambda}(\Omega) \text{ pour tout } \lambda < 1.$$

Pour la démonstration il suffit d'abord de voir qu'on peut se ramener par les techniques de la démonstration du théorème 2.3.3 *au cas où* $m = 1$ *et pour* $m > 1$, *on continue grâce aux opérateurs de* (m,p) *prolongement.*

2.3.2 *Injections compactes*

Nous donnons maintenant des résultats de compacité pour les injections de Sobolev dans les ouverts bornés lipschitziens.

Théorème 2.3.5

Soit Ω *un ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$, *où* $N > 1$. *Si* $N > mp$ *alors l'injection*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compacte pour $q < Np/(N-mp)$.

Démontrons d'abord deux lemmes :

Lemme 2.3.2 *Soit* Ω *un ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$. *Alors*

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow_c L^1(\Omega).$$

Démonstration.

Soit B *un ensemble borné de* $W^{1,1}(\Omega)$. *On utilise le critère de compacité des bornés dans* $L^p(\Omega)$ *donné dans le théorème* 1.1.3. *Il faut donc vérifier les deux hypothèses de ce théorème :*

 # Soit $\varepsilon > 0$ *donné. On montre qu'il existe un compact* K *de* Ω *tel que :*

$$\forall u \in B, \int_{\Omega \setminus K} |u(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants N *et* $N/(N-1)$, *on obtient* :

$$\int_{\Omega \setminus K} |u(x)|\, dx \leq [\int_{\Omega \setminus K} dx]^{1/N} [\int_{\Omega \setminus K} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx]^{(N-1)/N}.$$

L'ouvert Ω *étant borné, on peut choisir* $mes(K)$ *assez grande pour que la mesure de* $(\Omega \setminus K)$ *soit arbitrairement petite, le résultat s'ensuit.*

 # En deuxième lieu, on désigne par B_0 *la fermeture de la réunion de la famille* B_{h_0} *de toutes les boules ouvertes centrées sur* $\partial\Omega$ *et de rayon* h_0.

On pose $w = \Omega \setminus B_0$. *C'est un ouvert inclus dans* Ω *et on voit aisément que, si* $|h| < h_0$ *alors* ($x \in w \Rightarrow x + h \in \Omega$).

En conséquence, pour tout $x \in w$, *lorsque* $u \in B$, *on a*

$$\int_w |u(x+h) - u(x)|\, dx \;=\; \int_w \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+th) dt \right| dx.$$

Par dérivation de la fonction absolument continue $t \mapsto u(x+th)$, *on obtient*

$$\frac{d}{dt} u(x+th) = \sum_1^N h_i \partial_i(u)(x+th) = h.\nabla u(x+th).$$

Donc

$$\int_w |u(x+h) - u(x)|\, dx \leq \int_w |h|\, |\nabla u(x+th)|\, dx.$$

Puisque $x + th \in \Omega$, *cette dernière intégrale est majorée par* $|h| \, |\nabla u|_{L^p(\Omega)} \, |w|^{1/p}$ *donc par* $C\,|h|$, *car* $u \in B$.

Ainsi, il existe $h_1 < h_0$ *tel que :*

$$|h| \leq h_1 \Rightarrow \int_w |u(x+h) - u(x)| \, dx \leq C\,|h| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il reste à majorer l'intégrale sur $\Omega \backslash w$. *Pour cela, on utilise l'inégalité :*

$$\int_{\Omega \backslash w} |\tilde{u}(x+h) - u(x)| \, dx \ \leq \ \int_{\Omega \backslash w} (|u(x+h)| - |u(x)|) dx.$$

L'argument de la première partie de la démonstration entraîne alors l'existence de $\delta < h_1$ *tel que :*

$$|h| \leq \delta \Rightarrow 2 \int_{d(x,\partial\Omega) \leq 2\delta} |u(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Finalement

$$\forall u \in B, \quad |h| \leq \delta \Rightarrow \int_\Omega |\tilde{u}(x+h) - u(x)| \, dx \leq \varepsilon.$$

Le théorème 1.1.3 *assure alors que* B *est relativement compact dans* $L^1(\Omega)$. ■

Lemme 2.3.3 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Soit* (u_n) *une suite convergente dans* $L^k(\Omega)$ *et bornée dans* $L^q(\Omega)$ *pour un certain* $q > k$. *Alors elle converge dans tous les* $L^p(\Omega)$ *tels que* $k \leq p < q$.

Démonstration. *On utilise l'inégalité de Hölder en écrivant :*

$$p = \theta k + (1-\theta) q \text{ où } \theta \in \,]0,1[\,.$$

Alors

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|^{\theta}_{L^k(\Omega)} \|u_n - u_m\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

Le membre de droite tend vers zéro pour n *et* m *tendant vers l'infini, car c'est le produit d'une suite bornée par une suite tendent vers zéro.*

On en déduit que (u_n) *est de Cauchy dans* $L^p(\Omega)$, *elle converge donc dans* $L^p(\Omega)$. ■

Démonstration.

Revenons à la démonstration du théorème 2.3.5.

Soit (u_n) *une suite de* $W^{m,p}(\Omega)$ *bornée dans cet espace. Puisque* Ω *est borné,*

$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, donc (u_n) est bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$. D'après le lemme 2.3.2, elle est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Par ailleurs, grâce au théorème 2.3.4, la suite (u_n) est bornée dans $L^q(\Omega)$ avec $q \leq Np/(N-mp)$. En utilisant le lemme 2.3.3, (u_n) est relativement compact dans tous les $L^q(\Omega)$ pour $p \leq q < Np/(N-mp)$. ■

On s'intéresse maintenant, dans le cas où $mp > N$, aux injection compactes dans des espaces de fonctions Hölderiennes.

Théorème 2.3.6 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien. Soit $mp > N$ et $j = [N/p] + 1$. Alors pour tout $\lambda < j - \frac{N}{p}$, les injections : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-j,\lambda}(\bar{\Omega})$ sont compactes. Démontrons d'abord le lemme suivant :*

Lemme 2.3.4 *Soit un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ et (u_n) une suite de $C^{0,\lambda}(\Omega)$ relativement compacte dans $C(\bar{\Omega})$. Alors, pour tout μ tel que $0 < \mu < \lambda$, la suite (u_n) est relativement compacte dans tous les $C_b^{0,\mu}(\Omega)$.*

Démonstration.

Soit $\theta \in]0,1[$ tel que $\mu = \theta\lambda$. Soit $(u_{\sigma(n)})$ une sous-suite de (u_n) qui converge dans $C(\bar{\Omega})$. Pour tout couple (n,m) d'indices, posons :

$$d_{n,m} = \left|(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)})(x+h) - (u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)})(x)\right|.$$

On a

$$d_{n,m} = d_{n,m}^{\theta}\, d_{n,m}^{1-\theta}.$$

Grâce à la convergence de $(u_{\sigma(n)})$ dans $C(\bar{\Omega})$, on peut choisir n_0 assez grand et $h_0 > 0$ assez petit pour que, si $n,m \geq n_0$ et si x et $x+h$ sont dans Ω avec $|h| < h_0$, on ait l'inégalité suivante :

$$d_{n,m}^{1-\theta} = \left|(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)})(x+h) - (u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(m)})(x)\right|^{(1-\theta)} \leq \varepsilon.$$

Alors, sous ces conditions

$$d_{n,m} \leq 2h^{\theta\lambda}\varepsilon.$$

Par conséquent

$$\|u_n - u_m\|_{C^{0,\mu}(\Omega)} \leq 2\varepsilon.$$

■

Démonstration.

Revenons à la démonstration du théorème 2.3.6

 # On commence par le cas $m = 1$ et $p > N$.

Montrons que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$ est compacte. Pour ce faire, on utilise le théorème d'Ascoli. Soit K un ensemble borné dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, pour tout

$x \in \Omega$, l'ensemble $\{u(x) \setminus u \in K\}$ est borné uniformément. En effet, l'injection étant déjà continue, on a pour tout $u \in K$: $\|u(x)\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$.

Montrons que K est équicontinu. En effet, par la continuité de l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C^{0,1-N/p}(\Omega)$, on a : $\forall (x, x+h) \in \overline{\Omega}^2$

$$|u(x+h) - u(x)| \leq C h^{1-N/p} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

Ceci entraîne que K est uniformément Höldérien, donc en particulier équicontinu. L'utilisation du lemme 2.3.4 *permet de conclure dans le cas $m = 1$ et $p > N$.*

 # Soit maintenant K un borné de $W^{j,p}(\Omega)$ avec $(j-1)p \leq N \leq jp$.

Il est facile de voir comme précédemment que K est relativement compact dans $C(\bar{\Omega})$.

On utilise encore le lemme 2.3.4 *pour conclure que K est compacte dans $C^{0,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < j - (N/p)$.*

 # Dans le cas général, soit K un sous-ensemble borné de $W^{m,p}(\Omega)$ et soit $j = [N/p] + 1$.

Soit (u_n) une suite de points de K. Puisque (u_n) est bornée dans $W^{m,p}(\Omega)$, cette suite, ainsi que les suites des dérivées $(D^{m-j} u_n)$ sont bornées dans $W^{j,p}(\Omega)$.

D'après ce qui précède, on peut extraire de ces suites des sous-suites, notées de la même façon pour simplifier, qui convergent respectivement vers u et vers $\upsilon_{m,j}$ dans $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$, càd

$$\|u_n - u\|_\infty \to 0 \text{ et } \left\|D^{m-j} u_n - \upsilon_{m,j}\right\|_\infty \to 0.$$

La convergence dans L^∞ entraînant la convergence au sens des distributions, on a $\upsilon_{m,j} = D^{m-j} u$.

En outre, d'après ce qui précède, $(D^{m-j}u_n)$ *converge vers* $D^{m-j}u$ *dans* $C^{0,\lambda}(\Omega)$ *pour tout* $\lambda < j - N/p$.
On en déduit que, pour tout $\lambda < j - N/p$, (u_n) *tend vers* u *dans* $C_b^{m-j,\lambda}(\Omega)$.
Par conséquent, la compacité de l'injection de $W^{m,p}(\Omega)$ *dans* $C_b^{0,\mu}(\Omega)$ résulte *et ceci pour tout* $\mu < j - N/p$. ■

2.4 *Inégalité de Poincaré*

Théorème 2.4.1 *(Inégalité de Poincaré)*
Soient $1 \leq p < +\infty$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, *alors il existe une constante* $C = C(\Omega)$ *telle que pour toute fonction* $u \in W_0^{1,\,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

Démonstration. *Puisque* $D(\Omega)$ *est dense dans* $W_0^{1,\,p}(\Omega)$, *il suffit de montrer l'inégalité dans* $D(\Omega)$. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *et* p' *l'exposant conjugué de* p, *supposons que* Ω *est contenu entre les hyperplans* $x_n = 0$ *et* $x_n = c > 0$.
On prolonge u *par* 0 *en dehors de* Ω. *Notons alors* $x = (x', x_n)$ *avec* $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$.
Vu que u *est à support compact dans* Ω, on a

$$u(x) = \int_0^{x_n} D_n u\left(x', t\right) dt.$$

Ainsi $\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u\left(x', x_n\right) \right|^p dx_n \right) dx'.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| u\left(x', x_n\right) \right|^p dx = \int_0^c \left| u\left(x', x_n\right) \right|^p dx_n.$$
$$= \int_0^c \left| \int_0^{x_n} D_n u\left(x', x_n\right) dt \right|^p dx_n.$$

et

$$\left| \int_0^{x_n} D_n u\left(x', x_n\right) \right|^p \leq \int_0^{x_n} \left| D_n u\left(x', x_n\right) \right| dt.$$
$$= \|D_n u\|_{L^1([0,\,x_n])}^p.$$
$$= \|D_n u\|_{L^p([0,\,x_n])}^p \|1\|_{L^{p'}([0,\,x_n])}^p.$$

$$= \left(\int_0^c \left|D_n u\left(x', x_n\right)\right|^p dt\right) \ x_n^{p-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|u\left(x', x_n\right)\right|^p dx_n &\leq \int_0^c \left(\int_0^c \left|D_n u\left(x', x_n\right)\right|^p dt\right) \ x_n^{p-1} \ dx_n.\\ &= \frac{c^p}{p} \int_0^c \left|D_n u\left(x', x_n\right)\right|^p dt.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^c \left|D_n u\left(x', x_n\right)\right|^p dt\right) dx'.\\ &= \frac{c^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left|D_n u\left(x\right)\right|^p dx.\\ &= \frac{c^p}{p} \left\|D_n u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.\end{aligned}$$

On conclut que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.4.2 *(Inégalité de Poincaré -Wirtinger)*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné convexe, $p > N$ un réel, alors pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et pour tout partie mesurable $B \subset \Omega$ de mesure non nulle, posons :

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y)dy.$$

Alors :

$$\|u - u_B\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{W_n^{1-\frac{1}{n}}}{|B|} \left|\Omega\right|^{1/n} \left(diam \ \Omega\right)^N \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

En particulier l'inégalité reste valable si on prend $\Omega = B$.

Pour montrer ce théorème, on utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4.1 *Soient $\mu \in \left]0, 1\right]$, $f \in L^1\left(\Omega\right)$, posons :*

$$V_\mu f(x) = \int_\Omega |x - y|^{N(\mu - 1)} f(y)dy.$$

Soient $1 \leq p \leq q < \infty$ vérifiant : $0 \leq \delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$.

Alors V_μ *est un opérateur linéaire continu de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$. *De plus, pour toute fonction* $f \in L^p(\Omega)$, *on a:*

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} W_N^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme 2.4.2 *Soient* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^N$, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *et* $B \subseteq \Omega$ *une partie mesurable de mesure non nulle. Alors, pour presque tout* $x \in \Omega$, *on a*

$$|u(x) - u_B| \leq (diam\Omega)^N \frac{1}{|B|} V_{\frac{1}{N}}(|\nabla u|).$$

Démonstration.

Par le lemme 2.4.2

$$|u(x) - u_B| \leq (diam\Omega)^N \tfrac{1}{|B|} V_{\frac{1}{N}}(|\nabla u|).$$

D'après le lemme 2.4.1, *avec* $p = q$ *et par conséquent* $\delta = 0$, $\mu = 1/N$

$$\left\|V_{\frac{1}{N}}(|\nabla u|)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq N w^{1-\frac{1}{N}} |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Combinant les deux inégalités, on trouve le résultat cherché. ■

2.5 Trace sur la frontière d'un ouvert de classe C^1

On rappelle qu'on a défini un ouvert C^1*-uniforme comme un ouvert* $\mathbb{R}^N$ *, lipschitzien avec des fonctions* a_i *de classe* C^1. *Dans cette situation, on peut donner un sens à l'intégration sur chacune des portions de frontière* $U_i = \partial\Omega \cap \Omega_i$ *lesquelles constituent des sous-variétés de dimension* $N-1$ *et de classe* C^1 *dans l'espace* $\mathbb{R}^N$. *Une telle sous variété étant définit par une équation cartésienne* $x' \mapsto a_i(x')$ *où* a_i *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* ϑ_i' *de* $\mathbb{R}^{N-1}$, *l'élément d'aire* $(N-1)$ *dimensionnelle sur* U_i *est donné par* $d\sigma(m) = \sqrt{1 + |\nabla a_i|^2}$ $(m)dm$. *On rappelle qu'alors l'intégrale de* f, *fonction sommable dans* U_i *est définie par*

$$\int_{U_i} f(m)dm = \int_{\vartheta_i'} f(x', a_i(x'))\sqrt{1 + |\nabla(a_i)(x')|^2} dx'.$$

Dans cette section, on définie la trace d'une fonction u *de* $W^{1,p}(\Omega)$ *sur le bord de* Ω.

Théorème 2.5.1 *Soit* Ω *un ouvert* C^1*-uniforme dans* $\mathbb{R}^N$. *Alors, il existe une application linéaire et continue* γ_0, *dite application trace de* $W^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^p(\partial\Omega)$ *telle* *que si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, l'image $\gamma_0(u)$ est la fonction $x \longmapsto u(x)$ bien définie sur $\partial\Omega$.*

Démonstration. *Supposons que $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. En utilisant la partition de l'unité et les coordonnées locales, on commence par définir la trace de $\upsilon_i = \varphi_i u$.*
Cette dernière qui appartient à $W^{1,p}(\Omega_i)$ peut être prolongée par 0 hors de son support dans l'ouvert $\{ \vartheta_i^{'} \times \{x_N > a_i(x^{'})\}$. En utilisant le corollaire 2.2.2, on écrit pour $n > 0$ entier et $y > 0$ l'égalité:

$$\upsilon_i(x^{'}, a_i(x^{'}) + 1/n) - \upsilon_i(x^{'}, a_i(x^{'}) + y) = -\int_{1/n}^{y} \partial_N(\upsilon_i)(x^{'}, a_i(x^{'}) + t)dt. \qquad (3)$$

Posons : $u_n(x^{'}) = \upsilon_i(x^{'},\ a_i(x^{'}) + 1/n)$. On déduit de (3) que pour tout couple $(n,\ m)$ d'entiers non nuls, on a

$$\left|(u_n(x^{'}) - u_m(x^{'}))\right| \le \left|\int_{1/m}^{1/n} \left|\partial_N(\upsilon_i)(x^{'},\ a_i(x^{'}) + t)\right| dt\right|.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans cette inégalité puis en élevant à la puissance p et en intégrant par rapport a $x^{'} \in \vartheta_i^{'}$, après avoir multiplié à gauche par l'élément d'aire $d\sigma_i$, on montre que, $A_{n,\,m} = \|u_n - u_m\|_{L^p(\vartheta_i^{'},\, d\sigma_i)} \longrightarrow 0$.

$$A_{n,\,m} \le \left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right|^{1-1/p} \cdot \left[\int_{\vartheta_i^{'}} \sqrt{1 + |\nabla a_i(x')|^2} (\int_{\{a_i(x^{'})-1/m \le\, x_N \,\le\, a_i(x^{'})-1/n\}} |\partial_N \upsilon_i(x)|^p\right]^{1/p},$$

d'où l'on déduit :

$$A_{n,\,m} \le \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^{1-1/p} \sqrt{1 + \|\nabla a_i\|_\infty} \, \|\partial_N(\upsilon_i)\|_{L^p(\Omega_i)} . \qquad (4)$$

Ceci, en utilisant la condition de la définition 1.1.3, exprimant notamment que $\left|\nabla a_i(x^{'})\right|$ est majoré. Lorsque $p > 1$ et lorsque n et m tendent vers $+\infty$, le membre de droite tend vers zéro, donc le membre de droite tend encore vers zéro par définition des fonctions de L^1.
Dans tous les cas, la suite (u_n) est de Cauchy dans l'espace $L^p(\vartheta_i^{'},\, d\sigma_i)$, espace de Lebesgue pour la mesure bornée $d\sigma_i$, donc complet. Cette suite est donc convergente dans $L^p(\vartheta_i^{'},\, d\sigma_i)$ vers une fonction $w_i \in L^p(\vartheta_i^{'},\, d\sigma_i)$.
De plus, il existe une sous suite $(u_{\eta(n)})$ de (u_n) qui converge p.p. dans $\vartheta_i^{'}$ vers $w_i(x^{'})$.

Or, dire que $\lim(\varphi_i u)(x', a(x') + 1/\eta(n))$ *existe p.p. revient a dire qu'on peut définir la fonction* $x' \longmapsto \varphi_i u(x', a(x')) = w_i(x')$.

Ce prolongement w_i *de* $\varphi_i u$ *sur* $\partial\Omega \cap \Omega_i$ *est la trace cherchée, on pose donc* $\gamma_0(\varphi_i u) = w_i$. *D'après ce qui précède, cette fonction est dans l'espace* $L^p(\vartheta_i', d\sigma_i)$*, donc dans l'espace* $L^p(\partial\Omega \cap \Omega_i)$*. De plus, par un passage à la limite dans* (3) *en prenant* y *assez grand pour que* $\upsilon_i(x', a_i(x') + y) = 0$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} p.p. \;\; x' \in \vartheta_i', \;\; \gamma_0(\varphi_i u)(x') &= -\lim\left[\int_{1/\eta(n)}^{+\infty} \partial_N(\upsilon_i)(x', \; a_i(x') + t)dt\right]. \\ &= \; -\int_0^{+\infty} \partial_N(\varphi_i u)(x', \, a_i(x') + t)dt \; . \end{aligned} \qquad (5)$$

D'après la condition (1) *de la définition* 1.1.2*, on peut conclure à* $\gamma_0(u) \in L^p(\partial\Omega)$. *On peut montrer aussi que la trace ainsi définie ne dépend pas du choix des éléments de la définition* 1.1.2.

 # Si nous supposons que $u \in C^1(\bar{\Omega})$*, les arguments précédents peuvent être repris. En particulier, l'égalité* (5) *nous fournit*

$$\gamma_0(\varphi_i u)(x', a_i(x')) = \varphi_i \tilde{u}(x', a_i(x')).$$

On en déduit que $\gamma_0 u$ *est, alors, le prolongement par continuité de* u *sur le bord* $\partial\Omega$.

 # Il reste à prouver la continuité de l'application γ_0. *Pour cela, on fait à partir de l'égalité* (5) *les mêmes calculs que pour aboutir à* (4). *On obtient :*

$$\| \; \gamma_0(\varphi_i u)\|_{L^p(\vartheta_i', d\sigma_i)} \le C\sqrt{1 + \|\nabla a_i\|_\infty}\, \|\partial_N(\varphi_i u)\|_{L^p(\Omega_i)}\, .$$

On en déduit, grâce à la condition (3) *de la définition* 1.1.2

$$\begin{aligned} \| \; \gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} &\le C\sup(\sqrt{1 + \|\nabla a_i\|_\infty})\sum_i \|\nabla(\varphi_i u)\|_{L^p(\Omega_i)}\, . \\ &\le C'\sum_i \|u\nabla\varphi_i + \varphi_i \nabla u\|_{L^p(\Omega_i)}\, . \\ &\le C'\sup_i\{\|\varphi_i\|_\infty, \, \|\partial_N \varphi_i\|_\infty\}\sum_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_i)}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante C^**, qui ne dépend pas des éléments de la définition* 1.1.2*, tels que :*

$$\forall u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}\,(\Omega), \;\; \| \; \gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C^* \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\, .$$

 # On a ainsi défini la trace de u lorsque $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. *Pour* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *on approche u grâce à la densité de la proposition* 2.2.1 *par :* $u_n \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. *La formule* (5) *donne finalement, par passage à la limite* $\gamma_0 u = -\int_0^{+\infty} \partial_N(\varphi_i u)(x', a_i(x') + t)dt$ *et il en résulte que* $\gamma_0 u_n \to \gamma_0 u$ *dans* $L^p(\partial\Omega \cap \Omega_i)$. *On justifie ainsi la continuité, à savoir:*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \| \gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

■

2.6 *Dual de* $W^{m,p}(\Omega)$

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser au dual d'un espace de Sobolev. Le dual d'un espace de Banach existe toujours, nous proposons d'identifier ses éléments dans le cas des espaces de Sobolev, il est souvent commode de considérer les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ *comme le produit des espaces fonctionnels* $L^p(\Omega)$.

Nous introduisons pour cela un nouvel espace de fonctions, qui nous donnera notamment quelques nouveaux résultats concernant les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 2.6.1 *Pour* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *soit* m, p *fixé on pose*

(1) $N = \sum\limits_{0<|\alpha|\leq m} 1$ *le nombre de multi-indice* α *satisfaisant* $0 < |\alpha| \leq m$.

(2) $L^p_N(\Omega) = \prod\limits_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$ *l'espace fonctionnel muni de la norme définie par*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{L^p(\Omega)} & si\ 1 \leq p \leq +\infty \\ \underset{1\leq i\leq N}{Max} \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} & si\ \ p = +\infty \end{cases}$$

pour tout vecteur $(u_i)_{1\leq i\leq N} \in L^p_N(\Omega)$.

(3) E l'opérateur linéaire définie par

$E :\ W^{m,p}(\Omega) \to L^p_N(\Omega)$

$u \quad \mapsto Eu = (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m}$

On remarque sans difficulté que pour toute fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *on a :*

$$\|Eu\|_{L^p_N(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} .$$

Autrement dit E *est un isomorphisme isométrique de* $W^{m,p}(\Omega)$ *dans* $W \subset L^p_N(\Omega)$.

Corollaire 2.6.1 *(La représentation de Riesz)*
Soit $1 \leq p < +\infty$, *pour tout opérateur* $T \in (L^p_N(\Omega))^*$. *Il existe un unique* $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ *tel que pour tout* $u \in L^p_N(\Omega)$

$$T(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle u_i, v_i \rangle \ \ et \ \ \|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)} = \|T\|_{\left(L^p_N(\Omega)\right)^*} .$$

Théorème 2.6.1 *Soit* $1 \leq p < +\infty$, *pour tout opérateur* $T \in (W^{m,p}(\Omega))^*$, *il existe un élément* $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ *tel que pour tout* $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$T(u) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle \ \ et\ min\ \|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)} = \|T\|_{(W^{m,p}(\Omega))^*} .$$

Où le minimum (atteint) est pris sur tous les $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ *pour qui vérifie la condition précédente.*

Démonstration. *Définissons :*
$T^* : \qquad W \to \mathbb{R}$
$Eu \ \mapsto T^*(\ Eu) = T(u)$
Vu que E *est un isomorphisme isométrique* $T^* \in W^*$ *et* $\|T^*\|_{W^*} = \|T\|_{W^*}$, *grâce au théorème de Hahn-Banach, il existe une extension* $\tilde{T}$ *de* T^* *définit sur tout* $L^p_N(\Omega)$ *et par le corollaire précédente il existe un élément* $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ *tel que si* $u = (u_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^p_N(\Omega)$ *alors*

$$\tilde{T}\ (u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle .$$

Ainsi $\forall u \in W^{m,p}(\Omega)$ *on a*

$$T(u) = T^*(\ Eu) = \tilde{T}(Eu) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle .$$

$$\|T\|_{W^*} = \|T^*\|_{W^*} = \left\|\tilde{T}\right\|_{\left(L^p_N(\Omega)\right)^*} = \|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)} .$$

■

CHAPITRE 3

Espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$

Ce chapitre est une généralisation de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Nous introduisons dans la première section les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ où $0 < s < 1$, nous donnons quelques propriétés essentielles de cet espace ainsi que les théorèmes d'injection et les théorèmes de trace. Dans la deuxième section, nous présentons les $W^{s,p}(\Omega)$ où $s \in]0, +\infty[$ et ses différentes propriétés. Finalement, nous énonçons le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ qui n'est autre que $W^{-m,p'}(\Omega)$.

3.1 *Espaces de Sobolev* $W^{s,p}(\Omega)$ *pour* $0 < s < 1$

Définition 3.1.1 *Soient $s \in]0,1[$ et $p \in]1, +\infty[$.*
On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ / \ \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dxdy < \infty \right\}.$$

Proposition 3.1.1 *Pour $0 < s < 1$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \left[\|u\|'_{W^{s,p}(\Omega)}\right]^p \ \text{où} \ \left[\|u\|'_{W^{s,p}(\Omega)}\right]^p = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dxdy.$$

est un espace de Banach.

Démonstration.

Soit (u_n) une suite de Cauchy pour la norme $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, en particulier (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, elle converge donc dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction u dans $L^p(\Omega)$, d'autre part, la suite v_n des fonctions telles que

$$v_n(x,y) = \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x-y|^{s+N/p}}$$

est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, elle converge donc aussi vers un élément de $L^p(\Omega)$, extrayons une sous suite $u_{\sigma(n)}$ de (u_n) qui converge presque partout vers u, on remarque alors que $v_{\sigma(n)}(x,y)$ converge vers pour presque tout couple (x,y) vers $v(x,y) = \dfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{s+N/p}}$.
En utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dxdy \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dxdy.$$

Donc $u \in W^{s,p}(\Omega)$, en réutilisant un passage à la limite quand $m \to \infty$ dans $\|v_n - v_m\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}$, on obtient : $u_n \to u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$. ■

Exemple 3.1.1

On étudier l'appartenance de la fonction $x \mapsto \ln|x|$ à l'espace $W^{s,p}(]0,1[)$.
On évalue d'abord la semi norme $I = \|\ln|x|\|'_{W^{s,p}(\Omega)}$ lorsque $sp < 1$.

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{1/y} \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} dudy.$$

$$\leq \int_0^1 y^{-sp} \left(\int_0^1 \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} du + \int_1^{1/y} \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} du \right) dy = I_1 + I_2.$$

Dans la première intégrale de la parenthèse, l'intégrant est équivalant en $u = 0$ à $|\ln u|^p$ et en $u = 1, (1-u)^{p-sp-1}$, l'intégrale en u est convergente et l'intégrale en y l'est sous la condition $sp < 1$.
On en déduit toujours sous cette condition, l'existence du premier terme I_1.

Par la formule de Fubini I_2 s'écrit

$$\int_0^1 y^{-sp} \int_0^{1/y} \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} dudy = \int_0^{+\infty} \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} \left(\int_0^1 y^{-sp} dy \right) du.$$

Son étude est ainsi ramenée à celle de

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln|u||^p}{|1-u|^{sp+1}} u^{sp-1} du.$$

Comme pour celle-ci, la fonction intégrant est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $|\ln|u||^p |u|^{-2}$ et en $u = 1$ à $(1-u)^{p(1-s)-1}$, on obtient la convergence de I_2.
La conclusion en résulte .

3.1.1 *Premières propriétés de l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$

Proposition 3.1.2 *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est de type local, c'est à dire que pour tout u dans $W^{s,p}(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ le produit φu appartient à $W^{s,p}(\Omega)$.*

Démonstration. *Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$ il est clair que $\varphi u \in L^p$. On montre que $\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(\varphi u)(x) - (\varphi u)(y)|^P}{|x-y|^{sp+N}} < \infty$.*
Pour ce faire, on décompose la différence située au numérateur en deux morceaux. L'un d'eux est $\varphi(x)(u(x) - u(y))$ qui donnera une intégrale convergente car φ est borné. La deuxième intégrale à savoir

$$J_n = \int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))u(y)}{|x-y|^{sp+N}} \right|^p dxdy.$$

se majore en utilisant le théorème des accroissements finis et en intégrant par rapport à x

$$J_n \leq \left\|\varphi'\right\|_\infty^p \int_{\sup p\varphi} |u(u)|^p \left[\int_{\sup p\varphi} |x-y|^{p(1-s)-N} dx \right] dy.$$

$$\leq C\rho^{(1-s)} \|u\|_{L^P}^p .$$

Où ρ est un majorant du diamètre du support de φ. ■

Proposition 3.1.3 *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. *On utilise classiquement une troncature et une régularisation. On fait la démonstration dans le cas $N = 1$, le cas général s'en déduisant aisément.*

 # Montrons que les fonctions à support compact $W^{s,p}$ sont denses dans $W^{s,p}$.

Soit $u \in W^{s,p}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in D(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur la boule de centre 0 et de rayon 1 et qui est nulle pour $|x| \geq 2$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Soit u_n définit par $\varphi(\frac{x}{n})u(x)$. Il est clair que u_n est à support compact à valeurs dans $W^{s,p}$ et il est classique que $u_n \to u$ dans L^p.

Il reste à montrer que la suite (υ_n) où

$$\upsilon_n(x,y) = ((u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)) \left|x - y\right|^{-s-\frac{1}{p}}.$$

tend vers 0 dans $L^p(\mathbb{R}^2)$. Pour cela on est amené à montrer que les intégrales suivantes et celles que l'on en déduit par l'échange des variables x et y tend vers 0 :

$$I_n = \int_0^n dx(\int_n^{+\infty} \left|\upsilon_n\right|^p (x,y)dy), \quad J_n = \int_n^{+\infty} dx(\int_n^{+\infty} \left|\upsilon_n\right|^p (x,y)dy).$$

En effet $(u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)$ est nulle lorsque x et y sont dans $[-n, n]$.

Pour l'intégrale I_n, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_n^{+\infty} \left|u(y)\right|^p \left|1 - \varphi(\frac{y}{n})\right|^p [\int_0^n \frac{dx}{(y-x)^{sp+1}}]dy. \\ &\leq C \int_n^{+\infty} \left|u(y)\right|^p \left|1 - \varphi(\frac{y}{n})\right|^p \frac{1}{(y-n)^{sp}} dy. \\ &\leq \frac{C}{n^{sp}} \int_n^{+\infty} \left|u(y)\right|^p \sup_{u \geq 1} \left|\frac{1 - \varphi(u)}{(u-1)^s}\right|^p dy. \end{aligned}$$

La fonction $(1 - \varphi(u))((u-1)^{-s})$ est en effet bornée pour $u \geq 1$. Cela résulte, lorsque $u > 2$, de la majoration $(u-1)^{-s} \leq 1$ et lorsque $u \in [1, 2]$, de l'inégalité $|(1 - \varphi(u))(u-1)^{-s}| \leq (u-1)^{1-s} \left\|\varphi'\right\|_\infty$, laquelle est obtenue, puisque $s \in]0, 1[$, en appliquant à φ l'inégalité des accroissements finis. On obtient donc $I_n \to 0$.

Désignons maintenant par w_n la fonction telle que

$$w_n(x,y) = (u_n(x) - u_n(y)) \left|x - y\right|^{-s-\frac{1}{p}}.$$

On montre que $K_n = \int_n^{+\infty} \int_n^{+\infty} \mid w_n(x,y)|^p \, dxdy \to 0$, ce qui suffit pour obtenir $J_n \to 0$, puisque par hypothèse

$$\int_n^{+\infty} \int_n^{+\infty} \mid \upsilon(x,y)|^p \, dxdy \to 0.$$

Pour cela, on remarque d'abord par le choix de φ que

$$K_n = \int_n^{2n}\int_n^{2n} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{sp+1}}dxdy + \int_{2n}^{+\infty}\int_n^{2n} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{sp+1}}dxdy.$$

$$= K_n^{(1)}\ K_n^{(2)}.$$

En intégrant d'abord en x, en utilisant les propriétés de φ ensuite, le terme $K_n^{(2)}$ nous donne :

$$K_n^{(2)} \le \int_{2n}^{+\infty}\int_n^{2n} \frac{|u_n(y)|^p}{|x-y|^{sp+1}}dxdy \le C\int_n^{2n} \frac{|(\varphi(y/n)-\varphi(2))u(y)|^p}{|2n-y|^{sp}}dy.$$

$$\le \frac{C}{n^{sp}}\int_n^{2n} \sup_{y\in[1,2]}\left|\frac{\varphi(2)-\varphi(y)}{(2-y)^s}\right|^p |u(y)|^p\,dy \le \frac{C'}{n^{sp}}\int_n^{2n}|u(y)|^p\,dy.$$

Puisque $u \in L^p$, on a $K_n^{(2)} \to 0$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité des accroissements finis pour φ, l'hypothèse $u \in W^{s,p}$ et le maximum sur $[n, 2n]$ de la fonction $x \mapsto (2n-x)^{p(1-s)} + (x-n)^{p(1-s)}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
K_n^{(1)} &\le 2^{p-1}\int_n^{2n}\int_n^{2n} \frac{|(\varphi(x/n)-\varphi(y/n))|^p\,|u(x)|^p}{|x-y|^{sp+1}}dxdy + 2^{p-1}\int_n^{2n}\int_n^{2n} \frac{|\varphi(x/n)|^p\,|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+1}}dxdy.\\
&\le 2^{p-1}\Big(\int_n^{2n}\int_n^{2n} \frac{|x-y|^{p(1-s)-1}}{n^p}\left\|\varphi'\right\|_\infty^p |u(x)|^p\,dxdy + \int_n^{2n}\int_n^{2n}\left|\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{s+\frac{1}{p}}}\right|^p dxdy\Big).\\
&\le C\int_n^{2n} \frac{(2n-x)^{p(1-s)} + (x-n)^{p(1-s)}}{n^p}|u(x)|^p\,dx + \circ(1).\\
&\le C\int_n^{2n} \frac{n^{p(1-s)}}{n^p}|u(x)|^p\,dx \le \frac{C}{n^p}\int_n^{2n}|u(x)|^p\,dx + \circ(1) \to 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière ligne étant justifiée par l'appartenance de $u \in L^p$.

 # On approche maintenant au moyen d'une régularisation, les fonctions u à support compact par des fonctions de $D(\mathbb{R})$. Soit ρ une fonction de $D(\mathbb{R})$ et $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(x/\varepsilon)$ et u étant une fonction à support compact dans $\mathbb{R}$, on pose $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. La convergence dans L^p de u_ε est connue. Nous montrons que

$$\|u_\varepsilon\|'_{s,p} = \left|\frac{\rho_\varepsilon * u(x) - \rho_\varepsilon * u(y)}{|x-y|^{s+\frac{1}{p}}}\right|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le \left|\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{s+\frac{1}{p}}}\right|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

En effet

$$[\,\|u_\varepsilon\|'_{s,p}\,]^p = \int_{\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}}\rho(t)(u(x-\varepsilon t)-u(y-\varepsilon t))dt\right|\frac{dxdy}{|x-y|^{sp+1}}.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \frac{|u(x-\varepsilon t) - u(y-\varepsilon t)|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdydt.$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u(x-\varepsilon t) - u(y-\varepsilon t)|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdydt \leq [\|u\|'_{s,p}]^p.$$

D'autre part, en posant $\upsilon(x,y) = (u(x) - u(y)) |x-y|^{-s-(1/p)}$, *on a classiquement pour presque tout couple* (x,y) *la convergence*

$$\frac{|\rho_\varepsilon * u(x) - \rho_\varepsilon * u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{1}{p}}} \to \upsilon(x,y).$$

Par le lemme de Fatou, on déduit

$$\|u\|'_{s,p} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \|\rho_\varepsilon * u\|'_{s,p}.$$

On déduit en particulier qu'alors, la suite définie par

$$\upsilon_\varepsilon = (u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)) |x-y|^{-s-\frac{1}{p}}.$$

vérifie $\| \upsilon_\varepsilon\|_p \to \| \upsilon\|_p$.
Nous avons ainsi obtenu la convergence presque partout et la convergence des normes. Or, puisque $p > 1$ *l'espace* L^p *est uniformément convexe et dans un tel espace ces deux convergences entraînent alors* $\| \upsilon_\varepsilon - \upsilon\|_p \to 0$. *Finalement, on en déduit la convergence de* $\| u_\varepsilon - u\|_{s,p}$ *vers* 0, *ce qui achève la démonstration.* ■

Définition 3.1.2 *On dit que* Ω *possède un* (s,p)*-prolongement s'il existe un opérateur* P *linéaire continu qui à* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *associe* $P(u) = \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *tel que*

$$\forall x \in \mathit{\Omega}, Pu(x) = u(x).$$

Proposition 3.1.4 *(voir [5]) Soit* Ω *un ouvert lipschitzien. Alors il possède un opérateur de* (s,p)*-prolongement.*

Théorème 3.1.1 *Soit* $s \in]0,1[$ *et* $p > 1$. *Soit* Ω *un ouvert qui possède un* (s,p)*-prolongement. Alors* $D(\bar{\Omega})$ *espace des restrictions à* Ω *des fonctions de* $D(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{s,p}(\Omega)$.

Démonstration. *Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Soit P un prolongement continu de $W^{s,p}(\Omega)$ sur $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Puisque $Pu \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite (φ_n) des fonctions de $D(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers $P(u)$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Alors la suite des restrictions des φ_n converge vers u dans $W^{s,p}(\Omega)$.* ■

Lemme 3.1.1 *(voir [5])*

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^K)$.

(ii) $\forall i \in [1, K]$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^K}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+te_i)-u(x)|^p}{t^{sp+1}}dxdt < \infty$ *et il existe une constante universelle C telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^K}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+te_i)-u(x)|^p}{t^{sp+1}}dxdt \leq C \int_{\mathbb{R}^{2K}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+K}}dxdy.$$

Corollaire 3.1.1 *Les espaces $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfont aux propriétés d'injection continue suivantes*

(i) si $0 < s' < s < 1$, alors $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s',p}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) si $s \in]0,1[$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. . *On utilise la caractérisation donnée par le lemme précédent. Découpons l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^K}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x)-u(x+te_i)|^p}{t^{s'p+1}}dxdt$$

en la somme

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{|t|\leq 1} \frac{|u(x)-u(x+te_i)|^p}{|t|^{s'p+1}}dxdt + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{|t|>1} \frac{|u(x)-u(x+te_i)|^p}{|t|^{s'p+1}}dxdt.$$

La deuxième intégral est majorée par

$$2^p \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \int_{|t|>1} \frac{1}{|t|^{s'p+1}}dtdx \leq c\, \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour la première intégrale, on utilise pour $|t| \leq 1$ l'inégalité

$$\frac{1}{|t|^{s'p+1}} \leq \frac{1}{|t|^{sp+1}}.$$

Par utilisation du lemme précédent, la démonstration de l'injection annoncée, en outre l'existence d'une constante C qui ne dépend que de N, p, s et s' telle que

$$\|u\|_{s',p}^p \leq C(\|u\|_{s,p}^p + \|u\|_p^p).$$

Pour la deuxième injection, on considère $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On utilise, pour $|t| \leq 1$ l'expression de $|u(x) - u(x+te_i)|^p$ sous forme intégrale et l'inégalité de Hölder, ce qui fournit

$$|u(x) - u(x+te_i)|^p \leq t^{p-1} \int_0^t |\partial_i u|^p (x+s) ds.$$

On déduit par l'utilisation de la formule de Fubini

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(x+te_i)|^p}{|t|^{sp+1}} dxdt \leq \int_0^1 t^{p-sp-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u|^p \leq C \left|\partial_i u\right|^p.$$

En raison de $p - sp - 1 > -1$, l'intégrale en t converge. Par ailleurs la même fonction intégrée sur $[1, \infty[$ donne une expression majorée par $C \|u\|_p^p$. ■

3.1.2 *Espaces $W^{s,p}(\Omega)$ et traces*

Définition 3.1.3 *Les nombres réels ν et p où $1 \leq p \leq +\infty$ étant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $T(p, \nu, \Omega)$ l'espace des fonctions f de $]0, +\infty[$ dans Ω telle que, la dérivée de f étant prise au sens des distributions*

$$t^\nu f \in L^p(]0, +\infty[, W^{1,p}(\Omega)) \text{ et } t^\nu f' \in L^p(]0, +\infty[, L^p(\Omega)).$$

Cet espace est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_T = max\{ \int_0^{+\infty} \|t^\nu f\|_{W^{1,p}(\Omega)} dt, \int_0^{+\infty} \left\|t^\nu f'\right\|_{L^p(\Omega)} dt\}.$$

Proposition 3.1.5 *Soit $f \in T(p, \upsilon, \Omega)$. Alors il existe $a \in L^p(\Omega)$ tel que pour presque tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = a + \int_1^t f'(\tau) d\tau$.*

Démonstration.

Le facteur t^υ étant borné sur tout compact de $I =]0, +\infty[$, on a les appartenances $f \in L^p_{loc}(I, W^{1,p}(\Omega))$ et $f' \in L^p_{loc}(I, L^p(\Omega))$, on peut donc définir presque partout sur I la *fonction g par $g(t) = f(t) - \int_1^t f^{'}(\tau)d\tau$ qui appartient $L^p_{loc}(I, L^p(\Omega))$.*

Soit b appartenant au dual de $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire à $L^{p^{'}}(\Omega)$. Pour montrer que g est une constante presque partout, on considère la fonction

$t \mapsto g_b(t) = \langle g(t), b\rangle_b$ où ce dernier crochet est celui de la dualité $(L^p, L^{p^{'}})$. En utilisant Fubini et Hölder on voit que cette fonction est dans $L^p_{loc}(I)$. Alors le résultat noté $A = \left\langle \left(g_b^{'}\right), \varphi\right\rangle$ de la dérivée de g_b au sens des distributions sur une fonction scalaire $\varphi \in D(I)$ satisfait à

$$\begin{aligned}
A &= -\int_0^{+\infty} g_b(t)\varphi^{'}(t)dt. \\
&= -\int_{\sup p\varphi}\int_{\Omega} b(x)g(t)dx\varphi^{'}(t)dt = -\left\langle \int_0^{+\infty} g(t)\varphi^{'}(t)dt, b\right\rangle_b. \\
&= -\left\langle \int_0^{+\infty} f(t)\varphi^{'}(t)dt - \int_0^{+\infty}\varphi^{'}(t)\int_1^t f^{'}(\tau)d\tau dt, b\right\rangle_b. \\
&= \left\langle \int_0^{+\infty} f(t)\varphi^{'}(t)dt\right\rangle_b + \int_{\Omega} b(x)\left[\int_0^{+\infty}\varphi^{'}(t)\textstyle\int_1^t f^{'}(x)d\tau dt\right]dx.
\end{aligned}$$

La formule de Fubini utilisée pouvant être justifiée par une approximation de $g(t)$ sur le compact $\sup p\varphi$ par des fonctions simples, pour lesquelles cette formule est évidente. Le même procédé permet de remplacer le dernier terme de l'égalité précédente par

$$\int_0^{+\infty}\varphi^{'}(t)\int_1^t f^{'}(\tau)d\tau dt.$$

D'après ce qui précède, la fonction est localement sommable, on peut donc dériver son intégrale sur $[0,t]$. En particulier au sens des distributions, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\varphi^{'}(t)\int_1^t \left\langle f^{'}(\tau), b\right\rangle_b d\tau &= -\int_0^{+\infty}\varphi(t)\left\langle f^{'}(t), b\right\rangle_b dt\ . \\
&= \left\langle \int_0^{+\infty} f^{'}(t)\varphi(t)dt, b\right\rangle_b.
\end{aligned}$$

On déduit $(g_b)^{'} = 0$.

Soit t tel que $g(t)$ existe,d'après ce qui précède que pour presque tout $t^{'}$ et pour tout $b \in L^{p^{'}}$ on a

$$\langle g(t), b\rangle_b = \left\langle g(t^{'}), b\right\rangle_b.$$

Finalement, la fonction $g(t)$ est un élément fixe $a \in L^p(\Omega)$ ce qui assure la relation donnée. ■

Remarque 3.1.1 *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est égal à l'espace des traces au point $t = 0$ des éléments de $T(p, 1 - 1/p - s, \Omega)$.*

Proposition 3.1.6 *Soit $u \in W^{s,p}(\mathbb{R})$ et v définie sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ par*

$$v(t,x) = \frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t u(x+s)ds = \frac{\varphi(t)}{t}\int_x^{x+t} u(s)ds.$$

formule dans laquelle $\varphi \in D(\mathbb{R})$, alors la fonction $t \mapsto v(t,.)$ appartient à $T(p, 1 - 1/p - s, \mathbb{R})$, plus précisément, si v_1, v_2 désignent respectivement les fonctions

$$t \mapsto t^{1-1/p-s}v(t,.) \text{ et } t \mapsto t^{1-1/p-s}\frac{\partial v}{\partial t}(t,.).$$

On a

$$v_1 \in L^p(]0,+\infty[\,, W^{1,p}(]0,+\infty[\times\mathbb{R})) \text{ et } v_2 \in L^p(]0,+\infty[\,, L^p(]0,+\infty[\times\mathbb{R})).$$

Démonstration.

On commence par vérifier que si $\upsilon = 1 - 1/p - s$, $v_\upsilon = t^\upsilon v \in L^p(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$, en effet

$$\begin{aligned}\|v_\upsilon\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} t^{\nu p}|\varphi(t)|^p|u(x+st)ds|^p\,dtdx.\\ &\leq \int_0^{+\infty} t^{\nu p}|\varphi(t)|^p\,dt\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}|u(X)ds|^p\,dXds < \infty.\end{aligned}$$

On montre maintenant que $t^\upsilon\partial_x v \in L^p(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ en effet

$$t^\upsilon\partial_x v = \varphi(t)t^{-1/p-s}(u(x+t) - u(x))\,.$$

D'où en élevant à la puissance p et en intégrant

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}|\varphi(t)|^p\frac{|u(x+t) - u(x))|^p}{|t|^{sp+1}}ds \leq \|\varphi\|_{L^\infty}^p\|u\|_{W^{s,p}}^p < \infty.$$

Enfin vérifions que

$$t^\upsilon\partial_t v \in L^p(]0,+\infty[\times\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned}t^\upsilon\partial_t v &= \varphi(t)t^{-1/p-s}\tfrac{1}{t}\int_0^t(u(x+t) - u(x+s))\,ds + \varphi'(t)t^\upsilon\int_0^1 u(x+st)ds.\\ &= t^\upsilon f(t,x) + \varphi'(t)t^\upsilon\int_0^1 u(x+st)ds.\end{aligned}$$

Il est clair que $t \longmapsto \varphi'(t)t^\upsilon\int_0^1 u(x+st)ds \in L^p$, avec une constante multiplicative prés *par* $\|u\|_p$. *En utilisant l'inégalité de Hölder et un changement de variable on a*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} |t^{\upsilon} f(t,x)|^p \, dxdt \leq \|\varphi\|_\infty^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u(x+t)-u(x))|^p}{|t|^{sp+1}} dzdxdt.$$

Enfin le changement de variable $(x,y,z) \to (x+t, x+tz, z)$ *dont le Jacobien est* $|1-z|$ *permet de majorer la dernière intégrale*

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u(X)-u(T))|^p}{|X-T|^{sp+1}} |1-z|^{sp} \, dzdXdT \leq \|u\|_{W^{s,p}}^p .$$

Ce qui donne le résultat. ■

Lemme 3.1.2 *(voir* [6]*) Soit* υ *un réel,* f *une fonction de* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $0 < 1/p + \upsilon = \theta < 1$ *et* $1 \leq p < \infty$ *alors :*

(i) Si l'application qui à t *associe* $t^{\upsilon} f(t)$ *appartient à* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *et si* g *est définie par*

$$g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds.$$

Alors l'application qui à associe $t^{\upsilon} g(t)$ *appartient à* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *et il existe une constante* $c(p,\upsilon)$ *ne dépend que de* p *et* υ *telle que*

$$\int_0^t t^{\upsilon p} |g(t)|^p \, dt \leq c(p,\upsilon) \int_0^{+\infty} t^{\upsilon p} |f(t)|^p \, dt.$$

(ii) Soient α, β *appartenant à* $\overline{\mathbb{R}},$ $\alpha \leq \beta$, *soit* f *définie sur* $\mathbb{R}^+ \times]\alpha,\beta[$ *et* g *définie par* $g(t,x) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s,x)ds$. Si $t^{\upsilon} f \in L^p(\mathbb{R}^+ \times]\alpha,\beta[)$,*alors* $t^{\upsilon} g \in L^p(\mathbb{R}^+ \times]\alpha,\beta[)$ *et il existe une constante* C *ne dépend pas de* p *et* υ *telle que*

$$\int_\alpha^\beta t^{\upsilon p} |g(t,x)|^p \, dtdx \leq c(p,\upsilon) \int_\alpha^\beta \int_0^{+\infty} t^{\upsilon p} |f(t,x)|^p \, dtdx.$$

Proposition 3.1.7 *Soit* υ *un réel tel que* $0 \leq \upsilon + 1/p \leq 1$, *soit* u *tel que* $t^{\upsilon} u(t,.) \in L^p(]0,+\infty[\,, W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ *et* $t^{\upsilon} \partial_t u(t,.) \in L^p(]0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^N)$ *alors*

$$u(0,.) \in W^{1-1/p-\upsilon,p}(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration.

 # Pour montrer la proposition on utilise le lemme précédente ainsi

que le lemme 3.1.1 on peut ramener à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty}\frac{|u(0,t)-u(0,x+t))|^p}{t^{sp+1}}dxdt<\infty.$$

Pour cela, $u(0,x)-u(0,x+t)$ est décomposé selon trois déférences

$u(0,x)-u(0,x+t)=u(0,x)-u(t,x)+u(t,x)-u(t,x+t)+u(t,x+t)-u(0,x+t)$

que l'on remplace par

$$\int_0^t\partial_\lambda u(\lambda,x)d\lambda,\ \int_0^t\partial_x u(t,x+\lambda)d\lambda \text{ et } \int_0^t\partial_\lambda u(\lambda,x+t)d\lambda.$$

Respectivement, on utilise le lemme 3.1.2 successivement avec les fonctions suivantes :

$$f(t,x,\lambda)=\partial_t u(\lambda,x),\ f(t,x,\lambda)=\partial_x u(\lambda,x+\lambda),\ f(t,x,\lambda)=\partial_t u(\lambda,x+\lambda).$$

On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^+}t^{\upsilon p}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(t,\lambda)d\lambda\right|^p d\lambda dx<\infty.$$

Ce qui entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^+}t^{(\upsilon-1)p}\left|u(0,x)-u(t,x)\right|^p d\lambda dx=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{t^{sp+1}}\left|u(0,x)-u(t,x)\right|^p d\lambda dx<\infty.$$

■

Proposition 3.1.8

$$\gamma_0(T(p,1-\frac{1}{p}-s,\mathbb{R}^N)=W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration.

On s'intéresse d'abord au cas $N=1$, que l'on montre grâce à deux propositions réciproques l'une de l'autre (propositions 3.1.6 et 3.1.7). Pour le cas général on utilisera une récurrence sur la dimension N à l'aide du lemme 3.1.1. ■

Proposition 3.1.9 *Soit $p>1$, $s\in]0,1[$ et $\upsilon=1-1/p-s$ alors, si Ω est un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ on a*

$$\gamma_0(T(p,\upsilon,\Omega))=W^{s,p}(\Omega).$$

Démonstration.

 # Soit $u \in T$, on lui fait correspondre la fonction Eu qui appartient à $T(p, \upsilon, \mathbb{R}^N)$. En effet, par hypothèse $t^\upsilon u(t, .) \in W^{1,p}(]0, +\infty[\, , \mathbb{R}^N)$ on déduit qu'à $t > 0$ fixé

$$t^\upsilon Eu(t, .) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) et \left\| Eu(t, .) \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| u(t, .) \right\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

La constante C étant indépendante de t, on obtient ensuite grâce à cette propriété la convergence

$$\int_0^{+\infty} \left\| t^\upsilon Eu(t, .) \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} dt \leq C \int_0^{+\infty} \left\| t^\upsilon u(t, .) \right\|_{W^{1,p}(\Omega)} dt < \infty.$$

On fait la même démonstration pour $t^\upsilon \partial_i u(t, .)$ d'où résultat.

On en déduit qu'on peut noter $Eu(0, .)$ est un élément de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

P*our tout $x \in \Omega$ on a*

$$Eu(0, x) = \lim_{t \to 0} Eu(t, x) = \lim_{t \to 0} Eu(t, x) = u(0, x).$$

 # Réciproquement, soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$ alors on a

$$Eu \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

et par la proposition précédente, il existe une fonction telle que $v \in T(p, \upsilon, W^{1,p}(\mathbb{R}^N), L^p(\mathbb{R}^N))$ et telle que $v(0, x) = Eu(x)$, par restriction des fonctions de x à l'ouvert Ω, il est facile de voir que $(t, x) \mapsto v(t, x)$ définit un élément v^* de $T(p, \upsilon, W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$ et cette restriction de v vérifie pour tout $x \in \Omega$, la relation $v(0, x) = u(x)$. ■

3.1.3 *Injections de Sobolev*

Théorème 3.1.2 *(Injection continue pour $\Omega = \mathbb{R}^N$)*

Soit $s \in]0, 1[\, , p \in]1, +\infty[$. Alors

- Si $sp < N$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \leq Np/(N - sp)$.

- Si $N = sp$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q < \infty$.

- Si $sp > N$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et plus précisément

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,s-N/p}(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration.

Soit $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ et soit $v \in L^p\left(]0,\infty[\times\mathbb{R}^N\right)$ avec $v(0,x) = u(x)$, tel que $t \longmapsto t^\nu v$ soit dans $L^p\left(]0,\infty[\times W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)$ et tel que $t \longmapsto t^\nu \partial_t v$ soit dans $L^p\left(]0,\infty[\times L^p(\mathbb{R}^N)\right)$ (où $\nu = 1 - 1/p - s$).

On suppose pour commencer que $N > p$. Fixons x et définissons f par $f(t) = v(t,x)$, on a

$$f(0) = f(t) - \int_0^t f'(s)ds$$

de sorte qu'en multipliant et divisant par t^ν, en intégrant sur $]0,1[$, en utilisant ensuite l'inégalité de Hölder et l'inégalité $-vp > -1$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq C\left[\left(\int_0^1 t^v f^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |t^v \partial_t f|^p\, dt\right)^{1/p}\right]. \\ &\leq C\left[\left(\int_0^{+\infty} |t^v f|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^{+\infty} \left|t^v f'\right|^p dt\right)^{1/p}\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ il vient pour tout $\lambda > 0$ l'inégalité

$$|f(0)| \leq C\left[\lambda^{-\nu-1/p}\left(\int_0^\infty |t^v f|^p\, dt\right)^{1/p} + \lambda^{1-\nu-1/p}\left(\int_0^\infty |t^v \partial_t f|^p\, dt\right)^{1/p}\right].$$

Ce qui donne la majoration optimale

$$|f(0)| \leq C'\left[\left(\int_0^{+\infty} |t^v f|^p\, dt\right)^{1/p}\right]^s \left[\left(\int_0^{+\infty} |t^v \partial_t f|^p\, dt\right)^{1/p}\right]^{1-s}.$$

Soit r tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{s(N-p)}{Np} + \frac{(1-s)}{p} \quad \text{càd} \quad r = \frac{Np}{(N-sp)}.$$

En notons $|g|_p = \left(\int_0^1 |g(t)|^p\right)^{1/p}$, l'utilisation de l'inégalité de Hölder nous fournit la majoration de $\int_{\mathbb{R}^N} |v(0,x)|^r\, dx$ par

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |t^v v(t,x)|_p^{sr}\, |t^v \partial_t v|^{(1-s)r}\, dx. \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |t^v v|_p^{Np/(N-p)}\, dx\right)^{(N-p)s/(N-sp)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |t^v \partial_t v|_p^p\, dx\right)^{(1-s)N/(N-sp)} \end{aligned}$$

de sorte qu'en élevant à la puissance $1/r$ on obtient

$$\|v(0,x)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|t^v v\|^s_{L^p(]0,1[,L^{Np/(N-p)}(\mathbb{R}^N))}\, \|t^v \partial_t v\|^{1-s}_{L^p(]0,1[,L^p(\mathbb{R}^N))}.$$

Cette relation nous donne le résultat pour le cas où $N > p$, notons que cette méthode ne s'adapte pas au cas $p > N$.

Lorsque $p > N$ et $sp < N$, on est amené à utiliser d'autre arguments, on utilise la solution élémentaire E du Laplacien qui est définie au dimension $N+1$ par
$E(t,x) = k_{N+1}\left(|x|^2 + t^2\right)^{(1-N)/2}$ *avec k_{N+1} choisi de façon à obtenir exactement*
$\triangle E = \delta_0$.
Soient θ et ψ des fonctions respectivement dans $D(\mathbb{R}^N)$ et $D(\mathbb{R})$, comprises entre 0 et 1 et qui valant 1 et qui valant 1 sur des voisinages de 0.
On peut remplacer δ_0, qui est de support $\{0\}$ par le produit $\theta(x)\psi(t)\delta_0$.
Alors en utilisant la propriété du produit d'une distribution par une fonction de classe C^∞, la formule donnant le Laplacien d'un tell produit et celle donnant la dérivation d'une convolution, à savoir $\partial_i(V) * U = \partial_i(U * V) = V * \partial_i(U)$, on peut écrire v telle que $v(0,x) = u(x)$.

$$\begin{aligned} v = \delta_0 * v &= \triangle\left(\theta(x)\psi(t)E\right) * v - 2(\nabla(\theta(x)\psi(t)) * v - \triangle(\theta(x)\psi(t))E * v. \\ &= \sum_{1\le i\le N} \nabla_i(\theta(x)\psi(t)E) * \nabla_i v + \partial_t(\theta(x)\psi(t)E) * \partial_t v - 2(\nabla(\theta(x)\psi(t))\nabla E) * v \\ &\quad - E\triangle(\theta(x)\psi(t)) * v. \end{aligned}$$

Où encore, en notant $\nabla_x E$ le gradient par rapport à x et $\nabla_x A * \nabla_x B$ la somme des convolées $\partial_i A * \partial_i B$

$$\begin{aligned} v &= (\theta(x)\psi(t)\nabla_x E) * \nabla_x v + (\psi(t)\theta(x)\partial_t E) * \partial_t v + (\psi(t)E\nabla_x\theta(x)) * \nabla_x v \\ &\quad + (\theta(x)E\partial_t\psi) * \partial_t v - 2(\nabla(\theta(x)\psi(t))\nabla E) * v - (E\triangle\theta(x)\psi(t)) * v \end{aligned} \tag{6}$$

Les quatre derniers termes du second membre (6) sont des sommes finies de convolutions du type
$(\xi_1(t,x)E) * v$, $(\xi_2(t,x)\partial_i E) * v$, $(\xi_3(t,x)\partial_t E) * v(\xi_4(t,x)E) * \partial_i v$ *et* $(\xi_5(t,x)E) * \partial_t v$,
où les fonctions ξ_i sont des fonctions de $D(\mathbb{R}^{N+1})$.
On donnera une estimation de ces termes au point $(0,x)$. Après avoir traité les cas des deux premiers termes du second membre de (6), lesquels font intervenir à la fois les dérivées de v et celles de E. Ces premiers termes de (6) sont des sommes de termes de la forme

$$(\theta(x)\psi(t)\partial_i E) * \partial_i v \text{ et } (\theta(x)\psi(t)\partial_t E) * \partial_t v.$$

Il nous faut donc évaluer ces produits de convolution au point $(0,x)$ alors d'une part, la fonction v est telle que $t \longmapsto t^\nu v(t,.)$ est dans l'espace $L^p(]0,+\infty[, W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ ce qui *implique que $t^\nu \partial_i v$ est dans $L^p(]0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^N))$. D'autre part, la fonction $t^\nu \partial_t v$ est aussi dans ce même espace.*

Les deux produits de convolution précédents peuvent donc s'écrire sous la forme

$$I = (\psi(t)\theta(x)\partial_t E) * g \text{ et } J = (\psi(t)\theta(x)\nabla_x E) * g.$$

Où la fonction g est telle que $t^\nu g(t,.)$ est dans l'espace $L^p(]0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^N))$.

Pour traiter I on note $h(t,x) = \theta(x)\psi(t)t(|x|^2 + t^2)^{-(N+1)/2}$ et on calcule le produit de convolution qui exprime I au point $(0,x)$

$$(g * h)(0,x) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty} \frac{\theta(x-x')\psi(-t)tg(t,\ x')}{\left(|x|^2 + t^2\right)^{(N+1)/2}} dt dx'.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans les intégrales en t, on majore $(g * h)(0,x)$ par une convolution $G * H$ dans $\mathbb{R}^N$, les fonctions G et H étant définies par

$$G(x) = \left(\int_0^{+\infty} t^\nu g^p(t,x) dt\right)^{1/p},\ H(x) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\nu p'} |h(t,x)|^{p'} dt\right)^{1/p'}.$$

La fonction H se majore ainsi par

$$|\theta(x)| \|\psi\|_\infty \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{(1-\nu)p'}}{(t^2 + x^2)^{(N+1)p'/2}} dt\right)^{1/p'}.$$

Comme cette dernière intégrale est à une constante près, la puissance de $|x|$ d'exposant $1 - \nu + 1/p' - (N+1) = s - N$, on obtient

$$H(x) \le C |\theta(x)| |x|^{s-N}.$$

Le produit $G*H$ est donc majoré par la convolution en x d'une fonction de L^p à savoir par hypothèse G et d'une fonction de la forme $|x|^{s-N}$ qui appartient à L^k avec $k < N/(N-s)$. Donc la fonction $G * H$ appartient à L^r avec $1/p + 1/k = 1 + 1/r$, c'est-à-dire pour $r < Np/(N - sp)$.

Pour traiter J on note $h_i(t,x) = \theta(x)\psi(t)x_i\left(|x|^2 + t^2\right)^{-(N+1)/2}$.

On calcule le produit de convolution $g * h_i$ au point $(0,x)$, toujours lorsque $t^v g \in L^p\left(]0,+\infty[\times \mathbb{R}^N\right)$. L'expression $(g * h_i)(0,x)$ peut être majoré, au moyen de *l'inégalité de Hölder par*

$$G * H_i(x) \text{ où } H_i(x) = \left(\int_0^{+\infty} (\theta(x)\psi(t))^{p'} \frac{t^{-\nu p'} |x_i|^{p'}}{\left(|x|^2 + t^2\right)^{(N+1)p'/2}} dt \right)^{1/p'}.$$

produit de convolution qui peut aussi être majoré par $C\theta(x)|x|^{s-N}$.

Cela termine le résultat pour I *et* J *et on voit que le cas des deux termes* $(\xi_2(t,x)\partial_i E) * v$, $(\xi_3(t,x)\partial_t E) * v$ *sont également réglés.*

On s'intéresse maintenant aux termes de la forme $(\xi_1 E) * v$ *ou* $(\xi_4 E) * \partial_i v$ *ou* $(\xi_5 E) * \partial_t v$ *c'est-à-dire les termes qui ne font pas intervenir les dérivées de* E *mais* E *lui-même.*

Le procédé est analogue au précédent.

On considère par exemple un terme de la forme $\theta_1(x)\psi_1(t)E(t,x) * v$ *au point* $(0,x)$, *sachant que* θ *et* ψ *sont dans* $D(\mathbb{R}^N)$ *et* $D(\mathbb{R})$ *respectivement on a*

$$I_1(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(x-x')\psi(-t)v(t,\ x')}{\left(|x-x'|^2 + t^2\right)^{(N+1)/2}} dt dx'.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans les intégrales en t, *en multipliant par* $t^{\nu}t^{-\nu}$, *on obtient que* $I_1(x)$ *est majorée en module par le produit de convolution de* $G_1 * H_1$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *avec*

$$G_1(x) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\nu} v^p(t,x) dt \right)^{1/p},\ H_1(x) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{|\theta_1(x)\psi_1(-t)|^{p'} t^{-\nu p'}}{\left(|x|^2 + t^2\right)^{(N+1)p'/2}} \right)^{1/p'}.$$

La fonction H_1 *se majore par*

$$\|\psi_1\|_\infty |\theta_1|(x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\nu p'}}{\left(|x|^2 + t^2\right)^{(N+1)p'/2}} dt.$$

Donc par une fonction du type

$$C|\theta_1(x)| |x|^{(1-\nu p' - (N-1)p')/p'} = C|\theta_1(x)| |x|^{s-N+1}.$$

Le produit $G_1 * H_1$ *est donc la convolution d'une fonction de* L^p *et d'une fonction à support compact multipliée par* $|x|^{s-N+1}$ *laquelle appartient à* L^k *pour tout* $k < N/(N-s-1)$.

En particulier ce produit appartient à L^r pour tout $r < Np/(N-(s+1)p)$, donc aussi à $L^{Np/(N-sp)}$.

Les autres termes se traitent de façon analogue. Le cas $sp < N$ est donc entièrement traité.

Considérons le cas $sp = N$. En utilisant le corollaire 3.1.1 *on a*
$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s',p}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout $s' \in]0,s[$. On déduit en utilisant les injections continue obtenues précédemment pour $sp < N$ que*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{Np/(N-s'p)}(\mathbb{R}^N)$$

Puisque $Np/(N-s'p)$ est arbitrairement grand, on peut conclure que $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p,\infty[$.

On passe au cas $sp > N$. On utilise encore la solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{R}^{N+1}$. Comme dans le cas $sp < N$, on est amené à montrer l'appartenance à L^∞ de sommes de produit de convolution du type $\xi_1 E * v$ ou $\xi_5 E * \partial_t v$ ou $\xi_4 E * \partial_x v$ et enfin $\xi \nabla E * \nabla v$.

Pour ce dernier terme, on note $g(t,x)$ une fonction telle que
$t^\nu g(t,x) \in L^p(]0,\infty[\times\mathbb{R}^N)$ *et* $h(t,x) = \theta(x)\psi(t)t\left(|x|^2+t^2\right)^{-(N+1)/2}$ *où θ est une fonction régulière à support dans $B(0,1)$. On montre que pour $sp > N$, on a*

$$x \longmapsto (h*g)(0,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

En effet

$$\begin{aligned}
(h*g)(0,x) &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty} \frac{\theta(x-x')\psi(-t)tg(x',t)}{\left(|x-x'|^2+\ t^2\right)^{(N+1)/2}}dx'\,dt.\\
&\le \|t^\nu g\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty} \frac{t^{(1-\nu)p'}\left(\theta(x-x')\psi(t)\right)^{p'}}{\left(|x|^2\ +\ t^2\right)^{(N+1)p'/2}}dx'dt\right)^{1/p'}.\\
&\le \|t^\nu g\|_p \left(\int_{|x-x'|\le 1} \frac{\left|x-x'\right|^{(1-\nu)p'+1}}{\left|x-x'\right|^{(N+1)p'}}dx'\right)^{1/p'} \le \|t^\nu g\|_p.
\end{aligned}$$

Car la dernière intégrale s'exprime par

$$\left(\left[\rho^{(sp-N)/(p-1)}\right]_0^1\right)^{1/p'}.$$

qui est borné, puisque $sp > N$. Pour majorer les fonctions du type $\xi_1 E * v$ ou $\xi_5 E * \partial_t v$ ou encore $\xi_4 E * \partial_x v$. Il suffit de remarquer que l'un quelconque de ces produits est majoré par un produit de convolution d'une fonction de L^p et d'une fonction de $L^{p'}$, qui n'est autre que $\theta_i(x)\,|x|^{s-N+1}$ avec θ_i une fonction de $D(\mathbb{R}^N)$.

Montrons à présent, que u est Hölderienne d'exposant $s - N/p$. Pour cela on montre qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|t^\nu v\|_p^{1-\nu-(N+1)/p} \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p^{\nu+(N+1)/p}.$$

En effet, soit u telle que $v(0,x) = u(x)$. Par ce qui précède il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\|u\|_\infty \leq C_1 \|t^\nu v\|_p + C_1 \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p.$$

Soit v_λ définie par $v_\lambda(t,x) = v(\lambda t, \lambda x)$. Le calcul des normes fournit
$\|v_\lambda\|_\infty (0,.) = \|u\|_\infty$, $\|t^\nu v_\lambda\|_p = \lambda^{-\nu-(N+1)/p} \|t^\nu v\|_{L^p(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)}$ *et*
$\left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v_\lambda\right\|_p = \lambda^{1-\nu-(N+1)/p} \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p$.

Donc, en choisissant $\lambda = \left(\|t^\nu v\|_p\right)\left(\left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p\right)^{-1}$ obtient l'inégalité

$$\|u\|_\infty \leq C \|t^\nu v\|_p^{1-\nu-(N+1)/p} \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p^{\nu+(N+1)/p}. \tag{7}$$

Soient $h \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., N\}$ et $h > 0$. Par une inégalité classique on a

$$|v(t, x - he_i) - v(t,x)| \leq \int_0^h |\partial_i v(t, x - se_i)|\, ds.$$

En multipliant par t^ν puis en intégrant à la puissance d'exposant p et en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} t^{\nu p} |v(t, x-he_i) - v(t,x)|^p\, dxdt &\leq \int_0^1 t^{\nu p} h^{p-1} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i v|^p (t, x - se_i) ds \\ &\leq h^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} t^{\nu p} |\nabla v|^p\, dxdt.\end{aligned}$$

En élevant à la puissance $1/p$ on obtient

$$\|t^\nu (\tau_h v - v)\|_p \leq 2\,|h|\, \|t^\nu \nabla v\|_p.$$

D'autre part

$$\left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} (\tau_h v - v)\right\|_p \leq 2 \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p.$$

On obtient, en appliquant l'inégalité (7) à $u_h - u$ la majoration

$$\|u_h - u\|_\infty \leq C\, |h|^{1-\nu-(N+1)/p} \left(\|t^\nu v\|_p + \left\|t^\nu \nabla_{(t,x)} v\right\|_p \right).$$

Puisque $1 - v - (N+1)/p = s - N/p$, il en résulte que u est Hölderienne d'exposant $s - N/p$.

Le théorème est ainsi démontré pour $\Omega = \mathbb{R}^N$. ■

Corollaire 3.1.2 *Soit $s \in \,]0,1[\,$, $p \in \,]1,+\infty[\,$. Soit Ω un ouvert lipschitzien alors :*

- Si $sp < N$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \leq Np/(N - sp)$.

- Si $N = sp$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$.

- Si $sp > N$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ et plus précisément

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,s-N/p}(\Omega).$$

Théorème 3.1.3 *(Injection compacte)*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ qu'est lipschitzien. Soient $s \in [0,1[$, $p > 1$ et $N \geq 1$ alors

- Si $sp < N$ l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte, pour tout $q < Np/(N - sp)$.

- Si $N = sp$ l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ est compacte dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$.

- Si $sp > N$ l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ pour $\lambda < s - N/p$ est compacte.

Démonstration.

On commence par le cas $sp < N$.

Pour montrer l'affirmation énoncée, il suffit de montrer que l'injection est compacte dans L^1. En effet, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{Np/(N-sp)}(\Omega)$ et toute suite bornée dans $L^q(\Omega)$ avec $q > 1$ qui converge dans L^1 est convergente dans $L^{q'}(\Omega)$ pour $q' < q$ (D'après le lemme 2.3.3).

On utilise donc le critère de compacité des bornés dans L^1(Théorème 1.1.3).

Soit B un sous-ensemble borné dans $W^{s,p}(\Omega)$. Soit $u \in B$, $i \in [1,N]$, $h > 0$ et $\Omega_h = \{x \in \Omega \backslash\, d(x,\partial\Omega) > h\}$. Posons $\overrightarrow{h} = he_i$ et considérons l'intégrale

$$I_{\overrightarrow{h}} = \int_{\Omega_h} \int_{B(x,h)} |u(x + he_i) - u(x)|\, dydx.$$

En premier temps l'intégrant ne dépendant pas de y. En désignant w_{N-1} le volume de la boule unité :

$$I_{\overrightarrow{h}} = w_{N-1}\, |h|^N \int_{\Omega_h} \left| u(x + \overrightarrow{h}) - u(x) \right| dx \tag{8}$$

En utilisant alors, pour $x \in \Omega_h$ et $y \in B(x,h)$ l'égalité

$$u(x+\overrightarrow{h}) - u(x) = u(x+\overrightarrow{h}) - u(y) + u(y) - u(x)$$

En posant $\sigma = (sp+N)/p$, l'intégrale $I_{\overrightarrow{h}}$ peut être majorée par

$$I_{\overrightarrow{h}} \leq \int_{\Omega_h} \int_{B(x,h)} \frac{\left|u(x+\overrightarrow{h}) - u(x)\right|}{\left|x+\overrightarrow{h}-y\right|^{\sigma}} \left|x+\overrightarrow{h}-y\right|^{\sigma} dydx + \int_{\Omega_h} \int_{B(x,h)} \frac{\left|u(x+\overrightarrow{h}) - u(x)\right|}{|x-y|^{\sigma}} |x-y|^{\sigma} dydx.$$

$$= I_{\overrightarrow{h}}^{(1)} + I_{\overrightarrow{h}}^{(2)}.$$

En les transformant au préalable, par translation sur y, en intégrales sur le domaine $A_h = \Omega_h \times B(0,h)$, on majore ces intégrales $I_{\overrightarrow{h}}^{(1)}$ et $I_{\overrightarrow{h}}^{(2)}$ au moyen de l'inégalité de Hölder. Par exemple

$$I_{\overrightarrow{h}}^{(2)} = \int_{A_h} \frac{|u(x)-u(z+x)|}{|z|^{\sigma}} |z|^{\sigma} dzdx \leq (\int_{A_h} \frac{|u(x)-u(z+x)|}{|z|^{\sigma}} |z|^{\sigma} dzdx)^{\frac{1}{p}} (\int_{A_h} |z|^{\sigma p'} dzdx)^{\frac{1}{p'}}.$$

La première intégrale dans le deuxième membre, qui est égale à

$$\int_{\Omega_h} \int_{B(x,h)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dydx$$

est majorée d'après les hypothèses $B(x,h) \subset \Omega_h \subset \Omega$ par l'intégrale

$$\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp+N}} dydx$$

qui est bornée lorsque u décrit B. Par ailleurs on a

$$(\int_{A_h} |z|^{\sigma p'} dzdx)^{\frac{1}{p'}} \leq (mes\Omega)^{1-\frac{1}{p}} (\int_0^h \rho^{(\frac{sp+N}{p-1}+N-1)} d\rho)^{1-\frac{1}{p}}.$$
$$\leq (mes\Omega)^{1-\frac{1}{p}} C' |h|^{N+s}.$$

(où la constante à droite ne dépend que de la semi-norme $\|u\|_{s,p}^{'}$).

On peut procéder de manière analogue pour l'intégrale $I_{\overrightarrow{h}}^{(1)}$.

Finalement, en utilisant l'inégalité (8) et les relations suivantes, on parvient à

$$|h|^N \int_{\Omega_h} \left|u(x+\overrightarrow{h}) - u(x)\right| dx \leq C |h|^{N+s}$$

à savoir, la première condition du critère de compacité dans $L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega_h} \left|u(x+\overrightarrow{h}) - u(x)\right| dx \leq C |h|^{s}.$$

D'autre part, comme l'ensemble B est borné dans $L^p(\Omega)$ et puisque Ω est borné on peut trouver un compact K assez grand pour que pour tout $u \in B$
on ait

$$\int_{\Omega-K} |u(x)| \leq (\int_{\Omega-K} |u(x)|^p)^{\frac{1}{p}}((mes(\Omega-K))^{1-\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

On a ainsi obtenu que B est relativement compact dans $L^1(\Omega)$, donc dans tous les $L^q(\Omega)$ avec $q < pN/(N-sp)$.
Si $s = Np$ on utilise $W^{s,p} \hookrightarrow W^{s',p}$ avec $s' < s$, d'où la second affirmation.
On suppose maintenant que $sp > N$. Soit B un sous-ensemble borné dans $W^{s,p}(\Omega)$. Pour montrer que B est relativement compact dans $C(\bar{\Omega})$, on utilise le théorème d'Ascoli. Or, une conséquence du théorème d'injection continue 3.1.2 *est la suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in B$ on a*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \ \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

et comme, pour tout couple d'éléments (x,y) de Ω, on a également

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} |x-y|^{s-\frac{N}{p}}.$$

On en déduit que l'ensemble B est borné dans L^∞ et qu'il est équicontinue ce qui termine pour l'affirmation si $sp > N$ dans le cas de $C(\bar{\Omega})$.
Enfin, on conclut à la compacité dans des espaces Hölderiennes en utilisant le théorème 3.1.2 *et le lemme* 2.3.4. ■

3.2 *Espaces de Sobolev* $W^{s,p}(\Omega)$ *pour* $s \in]0,+\infty[$

Définition 3.2.1 *Soit $[s] \geq 1$, $s \notin \mathbb{N}$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{[s],p}(\Omega)/D^j u \in W^{s-[s],p}(\Omega), \forall \vec{j}, \left|\vec{j}\right| = [s]\}.$$

Il est claire que $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme

$$\|u\|_{s,p} = (\|u\|^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{j,|j|=[s]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|^p}{|x-y|^{(s-[s])p+N}} dxdy)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Remarque 3.2.1 *Il est facile de vérifier que les fonctions de $D(\mathbb{R}^N)$ sont denses dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

3.2.1 *Théorèmes d'injection*

Théorème 3.2.1 *(Injections continues)*

Soit Ω un ouvert lipschitzien alors

- Si $sp < N$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \leq Np/(N-sp)$.

- Si $N = sp$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$.

- Si $sp > N$

- si $s - \frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{N}{p}],s-\frac{N}{p}-[s-\frac{N}{p}]}(\Omega)$.

- si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{N}$, $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < 1$.

Démonstration.

Si $sp < N$, on fait une récurrence sur $[s]$.

Si $[s] = 0$, c'est le théorème 3.1.2. Supposons montré le théorème pour $[s] = m-1$ et soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$ avec $[s] = m$ et $sp < N$. Alors $\nabla u \in W^{s-1,p}(\Omega)$ et $u \in W^{[s],p}(\Omega)$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence $\nabla u \in L^r(\Omega)$ avec $r = Np/(N-(s-1)p)$ et $u \in L^{Np/(N-[s]p)}(\Omega)$.

En utilisant $p \leq Np/(N-(s-1)p) \leq Np/(N-[s]p)$, on obtient alors $u \in W^{1,r}(\Omega)$. Puisque $rp < N$ on obtient $u \in L^{Nr/(N-r)}(\Omega) = L^{Np/(N-sp)}(\Omega)$

Supposons $sp = N$.

Alors $[s]p < N$ et $(s-1)p < N$. Si $u \in W^{s,p}(\Omega)$, en raisonnant comme précédemment $u \in W^{1,r}(\Omega)$ avec $r = Np/(N-(s-1)p) = N$. Comme $r = N$, on en déduit $u \in L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$.

Soit $sp > N$ et j un entier tel que $s - 1 - \frac{N}{p} < j < s - \frac{N}{p}$. Alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $v = \nabla^j u$ vérifie $v \in u \in W^{s-j,p}(\Omega)$, donc v et ∇v appartiennent à $W^{s-j-1,p}$ et $(s-j-1)p < N$ entraîne que v et ∇v appartiennent à $L^r(\Omega)$ avec $r = Np/(N-(s-j-1)p)$. Ainsi $v \in W^{1,r}(\Omega)$ et $r > N$ donc $v \in C_b^{0,1-\frac{N}{r}}(\Omega) = C_b^{0,s-\frac{N}{p}-j}(\Omega)$.

Finalement, on obtient $u \in C^{[s-\frac{N}{p}],s-\frac{N}{p}-[s-\frac{N}{p}]}(\Omega)$.

Si $s - \frac{N}{p} = j \in \mathbb{N}$, alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$ entraîne
$(D^{j-1}u, D^j u) \in (W^{s-j,p}(\Omega))^2 = (W^{\frac{N}{p},p}(\Omega))^2$. *On en déduit $D^{j-1}u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $q < \infty$ et donc $D^{j-1}u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ quel que soit $\lambda < 1$. Finalement $u \in C_b^{s-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < 1$.* ■

Théorème 3.2.2 *(Injections compactes)*
Soit Ω un ouvert borné lipschitzien alors :
- Si $sp < N$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tous les exposants q tels que $q < Np/(N - sp)$.
- Si $sp = N$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q < \infty$.
- Si $sp > N$

  - si $s - \frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{N}{p}],\lambda}(\Omega)$ est compacte pour tout $\lambda < s - \frac{N}{p} - [s - \frac{N}{p}]$.
  - si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{N}$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\Omega)$ est compacte pour tout $\lambda < 1$.

3.2.2 *Dual de* $W_0^{m,p}(\Omega)$

Le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ s'identifié à l'espace $W^{-m,p'}(\Omega)$, mais dans notre étude on énonce le théorème suivant pour $m = 1$ et le cas générale se déduit par récurrence sur m.

Théorème 3.2.3 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Tout élément L du dual de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ lequel est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$, s'identifie à une distribution V conformément à la formule*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ L(u) = \langle V, u \rangle .$$

où V est associée à un élément $(v_i) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ par : $V = [v_0] - \sum_1^N \partial_i [v_i]$.
La norme de cet élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est définie par

$$\|L\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \min\{\|v\|_{p'} \setminus v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}\}.$$

Démonstration.

Soit L un élément de ce dual. Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger cet élément avec conservation de la norme en une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. On déduit qu'il existe des éléments $v_0, v_1, ..., v_N$, tous appartenant à $(L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ tel que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ L(u) = \sum_1^N \langle \partial_i u, v_i \rangle + uv_0.$$

Or, l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. La formule précédente pouvant alors être utilisée pour une suite (φ_n) convergente vers u, on obtient à l'aide de dérivations au sens des distributions et de la continuité des crochets de dualité entre L^p et $L^{p'}$

$$L(u) = \lim_{n\to+\infty} [\langle v_0, \varphi_n \rangle + \textstyle\sum_1^N \langle v_i, \partial_i \varphi_n \rangle].$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle v_0, \varphi_n \rangle - \textstyle\sum_1^N \langle \partial_i v_i, \varphi_n \rangle = \langle V, u \rangle.$$

Le symbole V représentant la distribution $V = [v_0] - \sum_1^N \partial_i [v_i]$.
Il est aisé de voir, réciproquement qu'une telle distribution définit un élément L du dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. La norme de L est toujours la borne inférieur précédente des normes dans $L^{p'}$ des $(N+1)$-uplets (v_i) qui servent à définir V. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité quelques propriétés essentielles et avons présenté des théorèmes incontournables concernant les espaces de Sobolev d'exposant entier et d'exposant fractionnaire. Ces espaces jouent un rôle très important dans la résolution des équations aux dérivées partielles modélisant des phénomènes physiques, mécaniques et même biologiques. Ces sciences ont connu un essor vertigineux grâce en grande partie à la meilleure compréhension des propriétés des solutions des équations aux dérivées partielles obtenus dans des espaces de Sobolev ou dans d'autre espaces similaires.

En perspectives, nous envisageons de faire :

· Une autre approche pour définir les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire à l'instar de la méthode dite d'interpolation.

· L'étude des espaces de fonctions à dérivée mesure qui sont des espaces très proches des espaces de sobolev classiques, ainsi que l'étude des espaces de Sobolev avec poids.

Bibliographie

[1] Adams R.A.
"Sobolev spaces", Academic Press 1975.

[2] Pierre Bérard.
"Institue Fourier", Résumé du cours MEDP maîtrise de mathématiques 2001-2002.

[3] Frank Boyer.
"Analyse numérique des EDP elliptiques", Université de Marseille (19 novembre 2010).

[4] Haïm Brézis.
"Analyse fonctionnelle, théorie et applications", Université Pierre et Marie Curie, 1999.

[5] Françoise et Gilbert Demengel.
"Espaces fonctionnels", Utilisations dans la résolution des équations aux dérivées partielles, EDP Sciences/ CNRS Editions.

[6] Jérone Droniou.
"Quelques résultats sur les espaces de Sobolev", 29 avril 2001.

[7] Antoine Henrot.
"Introduction aux équations aux dérivées partielles", Ecole de mines de Nancy.

[8] Laurant Landry.
"Espaces de Sobolev ", projet de semestre été 2005 (Professeur Marc Troyanov).

[9] Charles-Michel Marle et Philipe Pilibossian.
"Distributions, Espaces de Sobolev, Applications", Marie-Thérèse Lacroix-Sonrier.

[10] A.Munnier.
"Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles", Institue Elie Cartan (2007-2008).

[11] Serge Nicaise.
"Analyse numérique et équations aux dérivées partielles ", cours et problèmes résolus.

[12] P.A.Raviart et J.M.Thomas.
"Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles", Collection Mathématiques Appliquées pour la maîtrise sous la direction de P.G. Ciarlet et J.L. Lions.

[13] Claude.Zuily.
"Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles".