République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse et Probabilités

THÈME

Etude de quelques problèmes aux valeurs propres non-linéaires aux p-Laplacien

Par :
Melle. HAMADOUCHE Taklit

Devant le jury :

Mr.	**A. DAHMANI**	Professeur	U. Béjaïa	Président.
Mme.	**S. TAS**	Professeur	U. Béjaïa	Promotrice.
Mr.	**F. BOUHMILA**	Maître de Conférences (A)	U. Béjaïa	Examinateur.
Mr.	**A. KANOUNE**	Maître de Conférences (B)	U. Béjaïa	Examinateur.

JUIN 2012

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Mme.Tas pour son encadrement, sa patience, sa disponibilité et ses précieuses remarques.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr.Dahmani pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je remercie également Mr.Bouhmila et Mr.Kanoune d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Mes vifs remerciements vont aussi à tous les membres du département de Mathématiques de l'université A. Mira de Béjaïa, les enseignants, ainsi que tous mes camarades et amis.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leurs encouragements et leur soutien.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents.

A mes chers frères et soeurs.

A mon adorable neveu et mes chères nièces.

A toute ma famille.

A toutes mes amies, en particulier Sonia, Thiziri, Farida, Daouia, Hanane, Leila et Chafia.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

Table des matières

Introduction générale

L'opérateur p-Laplacien est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que l'écoulement des fluides non-Newtoniens, les systèmes de réaction-diffusion, l'élasticité non-linéaire, extraction de pétrole, l'astronomie, la propagation à travers des milieux poreux, et la glaciologie. A titre d'exemple dans les années 70 M.C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le p-Laplacien.

Cet opérateur sous forme divergence est défini par

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$$

Il est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et équivalent à l'opérateur de Laplace usuel lorsque $p = 2$. Il apparaît dans de nombreux contextes, citons par exemple

- le problème aux valeurs propres non-linéaire

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

- l'équation de p-Poisson

$$\Delta_p u = f(x)$$

- les équations de la forme

$$\Delta_p u + |u|^{\alpha} u = 0$$

qui présentent notamment un interêt particulier lorsque l'exposant α est "critique".

- les équations paraboliques de type

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_p v$$

où $v = v(x,t)$.

L'objectif de ce travail est l'étude du problème aux valeurs propres non-linéaire suivant

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0 \quad \text{sur } \Omega \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$.

Il s'agit de trouver les couples de solutions (u, λ) où λ est appelée valeur propre de l'opérateur p-Laplacien et u fonction propre associée. Pour cela, nous utilisons des méthodes variationnelles et plus précisément la théorie des points critiques qui occupe une place importante dans le vaste champ de l'analyse non-linéaire.

Notons que pour $p = 2$, nous retrouvons le problème aux valeurs propres linéaires pour le Laplacien

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

qui admet une suite de valeurs propres tendant vers l'infini en vertu de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.

L'essentiel de notre travail est consacré à l'étude de la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien ainsi qu'à la fonction propre associée qui sont d'une grande utilité dans la résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Notre travail est organisé de la manière suivante

Dans un premier temps, nous commençons par rappeler quelques notions et résultats sur les espaces de Sobolev et quelques éléments de base de la théorie des points critiques qui seront utilisés tout au long de ce travail. De plus, nous faisons appel à la théorie des opérateurs monotones en vue d'étudier les différentes propriétés de l'opérateur p-Laplacien défini sur un espace de Sobolev.

Dans la seconde partie, nous étudions l'existence et les différentes propriétés de la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien, ainsi que l'existence d'une suite de valeurs propres pour le p-Laplacien qui tend vers l'infini en utilisant le principe du Min-Max.

Dans la dernière partie, nous nous intéressons à un problème elliptique non-linéaire avec des conditions au bord de type Dirichlet. Nous étudions l'existence des solutions non triviales. Ce résultat repose sur la caractérisation variationnelle et les différentes propriétés de la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien ainsi que l'un des outils les plus puissants de la théorie des points critiques en l'occurrence le théorème du col de la montagne dû à Rabinowitz et Ambrosetti .

CHAPITRE 1

Préliminaires et outils de base

Ce premier chapitre a pour objet la présentation des notions et des résultats utilisés dans les chapitres suivants (théorèmes d'injection de Sobolev, éléments de la théorie des points critiques, opérateurs de Nemytskii,...) ainsi que l'introduction des notions de la théorie des opérateurs monotones qui nous permettra d'étudier les différentes propriétés de l'opérateur p-Laplacien.

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de H. Brezis [3] ou R. A. Adams [1]. Soit p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω, à support compact inclus dans Ω.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur* Ω *l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\mid\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \;\; , \quad \forall i = 1, 2, ..., N \right\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *désigne la dérivée partielle de* u *au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction* $u \in L^p(\Omega)$ *est dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'il existe* N *fonctions* $v_1, ..., v_N \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$\int_\Omega u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx \quad , \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \ , \forall i \in \{1, 2, ..., N\}$$

On note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\forall i = 1, 2, ..., N$.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1.1 *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$, *il est réflexif pour* $1 < p < \infty$ *et séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

L'espace $\left(H^1(\Omega), \|\|_{H^1(\Omega)}\right)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

Définition 1.1.2 *Soit* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel p vérifiant $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1.1 *On suppose que* Ω *est de classe* C^1. *Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \textit{avec} \quad 1 \leq p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.1.1 *(voir[7]) Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *alors* $u^+, u^-, |u|$ *sont dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $u^+ = \max\{u(x), 0\}$, $u^- = \min\{u(x), 0\}$ *de sorte que* $u = u^+ - u^-$ *et* $|u| = u^+ + u^-$. *De plus*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & si\ u > 0 \\ 0\ si\ u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & si\ u \geq 0 \\ \nabla u\ si\ u < 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u\ si\ u > 0 \\ 0\ si\ u = 0 \\ -\nabla u\ si\ u < 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\left(u_{|\partial\Omega}\right)^+ = u^+_{|\partial\Omega}$ *et* $\left(u_{|\partial\Omega}\right)^- = u^-_{|\partial\Omega}$.

Théorème 1.1.2 *(Inégalité de Poincaré voir [3])*

Soit p *un réel avec* $1 \leq p < \infty$, *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *alors*

$$\exists\ C > 0,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$$

De plus, l'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalente à celle induite par* $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.3 *(Inégalités de Clarkson voir [1, p.44]) Soit* $u, v \in L^p(\Omega)$. *Pour* $1 < p < \infty$, *soit* $p' = p/(p-1)$. *Si* $2 \leq p < \infty$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right),$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \geq \left(\frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1}.$$

Si $1 < p \leq 2$, *alors*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1},$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right).$$

Théorème 1.1.4 *L'espace* $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$ *est uniformément convexe.*

Démonstration. Soit $p \in [2, \infty[$,et $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$ et $\|u - v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq \varepsilon \in]0, 2]$.

On a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p &= \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^p\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right) = 1\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{1.1}$$

Si $p \in]1, 2[$ alors on a pour tout $f, g \in L^p(\Omega)$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\left(\|f\|^p + \|g\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Si $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $|\nabla v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$ et $\left\||\nabla v|^{p'}\right\|_{L^{p-1}(\Omega)} = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p'}$.

Soit $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $|\nabla v_1|^{p'}$, $|\nabla v_2|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$. D'après l'inégalité inverse de Minkowski (voir Adams [1, p.28]) et étant donné que : $0 < p - 1 < 1$ et,

$$\left\||\nabla v_1|^{p'} + |\nabla v_2|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} \geq \left\||\nabla v_1|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \left\||\nabla v_2|^{p'}\right\|_{L^{p-1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p'} &= \left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \left\|\left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} \\ &\leq \left\|\left|\nabla\frac{v_1+v_2}{2}\right|^{p'} + \left|\nabla\frac{v_1-v_2}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} \\ &\leq \left[\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_1|^p + |\nabla v_2|^p\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \left[\frac{1}{2}\|v_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|v_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

Soit $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$ et $\|u - v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq \varepsilon \in]0, 2]$.
On a

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p'} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|u + v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$. ∎

Définition 1.1.3 *Soit p et q deux réels vérifiant, $1 < q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

1.1.1 Théorèmes d'injection de Sobolev

Enonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.4 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si:*

(a) *X est un sous-espace de Y.*

(b) *$\exists\, C > 0$ tel que pour tout $u \in X$: $\|u\|_Y \leq C\, \|u\|_X$*

Définition 1.1.5 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si:*

(i) *X s'injecte de façon continue dans Y.*

(ii) *toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.*

Théorème 1.1.5 *(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) Soit $1 \leq p < N$ alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Soit $1 \leq p < N$. *Alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

et pour le cas limite $p = N$, *on a*

$$W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \forall q \in [N, +\infty[$$

Théorème 1.1.6 (*Morrey*) *Soit* $p > N$. *Alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$$

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *on a*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha \,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p \;\; x,\; y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et* C *est une constante qui dépend seulement de* p *et* N.

Corollaire 1.1.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^1, *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *borné,*

soit $1 \leq p \leq \infty$, *on a*

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } 1 \leq p < N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) & \text{où } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} \\
\text{Si } p = N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [p, +\infty[\\
\text{Si } p > N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) &
\end{array}$$

De plus, si $p > N$ *alors on a pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \;\; |x-y|^\alpha \quad p.p \;\; x,\; y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et* C *dépend seulement de* Ω, p *et* N. *En particulier* $W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Théorème 1.1.7 (*Rellich-Kondrachov*) *Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *.On a*

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } p < N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*[\;\; \text{où } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} \\
\text{Si } p = N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, +\infty[\\
\text{Si } p > N & \textit{alors} \;\; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right) &
\end{array}$$

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, *pour tout* p.

Théorème 1.1.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$ et $1 < p < N$. Alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \text{pour tout } q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right[$$

Le nombre $p^* = \frac{Np}{N-p}$ est appelé exposant critique de Sobolev.

1.2 Quelques éléments de la théorie des points critiques

1.2.1 Différentiabilité et points critiques

Définition 1.2.1 *(Différentiabilité au sens de Fréchet). Soient X un espace de Banach, w un ouvert de X et $J : w \to \mathbb{R}$ une fonction. Considérons $u \in w$, on dit que J est différentiable au sens de Fréchet au point u, s'il existe $\varphi \in X'$ tel que*

$$\forall v \in w \ : \ J(v) - J(u) = \langle \varphi, v-u \rangle + o(v-u)$$

Posons $\varphi = J'(u)$ que l'on appelle la différentielle de J au sens de Fréchet au point u.

Définition 1.2.2 *(Dérivée directionnelle). Soient w une partie d'un espace de Banach X et $J : w \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in w$ et $v \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in w$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite par $J'_v(u)$.

Définition 1.2.3 *(Différentiabilité au sens de Gâteaux). On dit que la fonction J d'un ouvert w d'un espace de Banach X, à valeurs réelles, est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en $u \in w$, s'il existe $\varphi \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J(u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \langle \varphi, v \rangle$$

L'application φ est appelée la différentielle de J au sens de Gâteaux au point u (ou la G-différentielle de J au point u), on note $J'(u) = \varphi$

Remarque 1.2.1 *Si J est différentiable au sens de Fréchet, alors J est différentiable au sens de Gâteaux.*

La réciproque est fausse, mais on a le résultat qui suit

Proposition 1.2.1 *(voir[9]). Soit J une fonction continue de w dans $\mathbb{R}$ et G-différentiable dans un voisinage de $u \in w$. On désigne par $J^{'}(v)$ la G-différentielle de J en v et on suppose que l'application $v \longmapsto J^{'}(v)$ est continue au voisinage de u. Alors*

$$J(v) = J(u) + \langle J^{'}(u), v - u\rangle + o(v - u),$$

c'est à dire que J est différentiable au sens de Fréchet et sa différentielle coïncide avec $J^{'}(u)$.

Définition 1.2.4 *Soient X un espace de Banach, $w \subset X$ un ouvert et $J \in C^{1}(w, \mathbb{R})$. On dit que $u \in w$ est un point critique de J si $J^{'}(u) = 0$. avec $J^{'}(u)$ est la G-différentielle de J au point u. Si u n'est pas un point critique alors on dit que u est un point régulier de J. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in w$ tel que $J(u) = c$ et $J^{'}(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique alors on dit que c est une valeur régulière de J.*

Définition 1.2.5 *Soient X un espace de Banach, F et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes*

$$S = \{v \in X;\ Fv = 0\}$$

Nous supposons que $F'v \neq 0$ pour tout $v \in S$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$J(u) = c \quad et \quad J'(u) - \lambda\ F'(u) = 0$$

Le point u est un point critique de J et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c ou le point critique u.

Définition 1.2.6 *Soit X un espace de Banach et w est une partie de X. Une fonction $J : w \to \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour toute suite $(u_n)_n$ de w convergeant faiblement vers $u \in w$ on a $J(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n)$.*

Proposition 1.2.2 *(voir [9]) Soit X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \to \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(u_n)_n$ de K telle que $\|u_n\| \to \infty$, on a $J(u_n) \to \infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e.*

$$\exists\ u \in K,\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v)$$

1.2.2 Théorème du col de la montagne

Soient X un espace de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et Γ une famille non vide de parties non vides de X.

Dans la théorie des points critiques, les théorèmes de Min-Max caractérisent une valeur critique c de la fonctionnelle J comme un Min-Max sur Γ, càd

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{v \in A} J(v).$$

Définition 1.2.7 *(Condition de Palais-Smale) Soient X un espace de Banach et*

$J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est une suite de Palais-Smale de J si elle vérifie

$$\begin{cases} (J(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée,} \\ J'(u_n) \to 0 \quad \text{dans } X'. \end{cases}$$

On dit que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale (PS) si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Palais-Smale de J contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 1.2.8 *(Condition de Palais-Smale au niveau c) Soient X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (PS_c) au niveau c , si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X telle que*

$$\begin{cases} J(u_n) \to c \quad \text{dans } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \quad \text{dans } X' \end{cases}$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Théorème 1.2.1 *(du col de la montagne voir [18]) Soit X un espace de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et*

(I_1) *il existe des constantes ρ, $\alpha > 0$ telles que $J\mid_{\|u\|=\rho} \geq \alpha$*

(I_2) *il existe un élément $e \in X$, $\|e\| > \rho$ tel que $J(e) \leq 0$.*

Alors J possède une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus c est caractérisée par

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u)$$

où

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], X) \mid g(0) = 0 \text{ et } g(1) = e\}.$$

1.3 Quelques critères de convergence

Théorème 1.3.1 (*de la convergence dominée de Lebesgue*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $\|f_n\| \leq g$ p.p sur Ω alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0, \quad \int_\Omega f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)\ dx$$

Proposition 1.3.1 *Soient $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite extraite $(f_{n_i})_i$ telles que:*

(i) $f_{n_i}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω

(ii) $|f_{n_i}(x)| \leq g(x)$ *pour tout i et p.p sur Ω.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. On extrait une sous-suite $(f_{n_i})_i$ telle que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^i} \quad \text{pour tout } i \geq 1 \tag{1.3}$$

En effet, il existe n_1 tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour } m, n \geq n_1$$

On prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^2} \quad \text{pour } m, n \geq n_2$$

On poursuit ainsi de proche en proche jusqu'à l'obtention de (1.3). Montrons que $(f_{n_i})_i$ converge dans $L^p(\Omega)$. On a

$$\left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^i} \quad \text{pour tout } i \geq 1$$

Posons

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right|$$

On a alors

$$\|h_n\| \leq 1$$

Du théorème de la convergence monotone, il vient que p.p sur Ω, (h_n) converge vers une limite finie que l'on notera h avec $h \in L^p(\Omega)$.

D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq h(x) - h_{n-1}(x)$$

Il en résulte que p.p sur Ω , $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite que l'on note $\overline{f}(x)$.

On a

$$\left|\overline{f}(x) - f_n(x)\right| \leq h(x) \quad \text{pour tout } i, \text{ et } p.p \text{ sur } \Omega \quad \text{avec } h \in L^p(\Omega).$$

Il en résulte, en vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, que

$\overline{f} \in L^p(\Omega)$ et que $f_n \to \overline{f}$ dans $L^p(\Omega)$. Ce qui achève la démonstration du point (i). Pour la démonstration du point (ii), il suffit de réitérer le raisonnement en posant $g = \overline{f} + h$. ■

1.4 Opérateurs de Nemytskii

Définition 1.4.1 *(Fonction de Carathéodory) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *une fonction* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite de Carathéodory si elle vérifie:*
(i) L'application : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(x, \ t)$ *est continue pour presque tout* $x \in \Omega$.
(ii)L'application : $\Omega \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x, \ t)$ *est mesurable pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.4.2 *On dit que* N_f *est un opérateur de Nemytskii, associé à une fonction de Carathéodory* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s'il est défini par*

$$(N_f \ u)(x) = f(x, \ u(x))$$

Proposition 1.4.1 *Pour toute fonction mesurable* u, *l'opérateur de Nemytskii* N_f *associé à une fonction de Carathéodory* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est mesurable sur* Ω.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite de fonctions $(u_n)_n$, telle que $u_n \to u$ *p.p*, $f(x, \ u_n(x))$ est mesurable grâce à (ii) et d'après (i) on a
$f(x, \ u_n(x)) \to f(x, \ u(x))$ *p.p*, donc $f(x, \ u(x))$ est mesurable sur Ω. ■

Proposition 1.4.2 *Soit* $1 \leq p, \ q \leq \infty$ *des réels et* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory. On suppose qu'il existe* $b \in L^q(\Omega)$ *et* $C \geq 0$ *tels que la condition de croissance suivante:*

$$|f(x, \ u)| \leq C |u|^{\frac{p}{q}} + b(x) \quad \text{p.p sur } \Omega \text{ et pour tout } u \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

soit satisfaite. Alors $N_f \ (L^p(\Omega)) \subset L^q(\Omega)$ *et* N_f *est un opérateur continu de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in L^p(\Omega)$ d'après (1.4) et de l'inégalité de Minkowski on a

$$\int_\Omega |f(x, \ u(x))|^q \, dx \leq C \int_\Omega |u(x)|^p \, dx + \int_\Omega |b(x)|^q \, dx < \infty$$

Donc $N_f \ (u) \in L^q(\Omega)$.
Montrons maintenant la continuité de N_f

Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u. D'après la Proposition 1.3.1, il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_i})_i$ telles que

$$u_{n_i} \to u, \quad |u_{n_i}(x)| \leq g(x) \;\; p.p \text{ sur } \Omega.$$

On en déduit que $p.p$ sur Ω on a $f(x,\ u_{n_i}(x)) \to f(x,\ u(x))$ et

$$|f(x,\ u_{n_i}(x))| \leq C\,|u_{n_i}(x)|^{\frac{p}{q}} + b(x) \leq C\,|g(x)|^{\frac{p}{q}} + b(x).$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut que $N_f(u_{n_i}) \to N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$. En vertu de l'unicité de la limite, toute la suite $(N_f(u_n))_n$ converge vers $N_f(u)$ dans $L^q(\Omega)$.
Ce qui prouve que N_f est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. ■

Proposition 1.4.3 *(voir[5]) Supposons que $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory et satisfait la condition de croissance suivante*

$$|f(x,s)| \leq C\,|s|^{q-1} + b(x) \quad \textit{pour } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

où $C \geq 0$ est une constante, $q > 1$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,s) = \int\limits_0^s f(x,\tau)\, d\tau$. Alors
(i) la fonction F est de Carathéodory et il existe $C_1 \geq 0$ et $c \in L^1(\Omega)$ tels que

$$|F(x,s)| \leq C_1\,|s|^q + c(x) \quad \textit{pour } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

(ii) la fonctionnelle $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u) = \int\limits_\Omega F(x,u)$ est continûment Fréchet différentiable et $\Phi'(u) = N_F u$ pour tout $u \in L^q(\Omega)$.

Proposition 1.4.4 *(voir [12]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p et q deux réels, $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'opérateur défini sur $L^p(\Omega)$ par*

$$u \longmapsto |u|^{p-2}\, u$$

est à valeurs dans $L^q(\Omega)$, de plus il est continu.

1.5 Théorie des opérateurs monotones

1.5.1 Opérateurs monotones, définitions et premières propriétés

Dans ce qui suit, X est un espace de Banach réflexif et séparable et A un opérateur de X dans X'.

Définition 1.5.1 *On dit que*

(i) A est monotone si $\forall u, v \in X, \quad \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0$

(ii) A est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ *implique* $u = v$.

(iii) A est hémicontinu si pour tous $u, v \in X$, l'application $t \to \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.5.1 1) *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable au sens de Gâteaux. Alors sa différentielle $J' : X \to X'$ est monotone. En effet, soit $w = u - v$. Alors $j(t) = J(v + tw)$ est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $j(0) = J(v)$, $j(1) = J(u)$, j est différentiable (de classe C^1) avec $j'(t) = \langle J'(v + tw), w\rangle$. Comme j est convexe, j' est croissante, et écrire que $j'(0) \leq j'(1)$ n'est rien d'autre qu'écrire la monotonie de J' de plus, comme j est C^1 J' est hémicontinue.*

2) *Si X est un espace de Hilbert et A est l'opérateur linéaire associé à une forme bilinéaire $a(.,.)$ continue par le théorème de représentation de Riesz alors A est hémicontinu. Il est monotone si et seulement si a est positive et strictement monotone si et seulement si a est définie positive.*

Définition 1.5.2 *On dit que*

a) *A est demi-continu (continu de X fort dans X' faible) si*

$$u_n \to u \quad \textit{quand } n \to \infty \textit{ implique } Au_n \rightharpoonup Au \textit{ quand } n \to \infty.$$

b) *A est fortement continu si*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{quand } n \to \infty \textit{ implique } Au_n \to Au \textit{ quand } n \to \infty$$

c) *A est borné si l'image par A de tout borné de X est un borné de X'.*

Remarque 1.5.1 *Si A est demi-continu, alors A est hémicontinu.*

Cette remarque admet une réciproque assez surprenante, dans la mesure où l'hémicontinuité est une condition très faible.

Lemme 1.5.1 *Soit A un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors A est demi-continu.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans X . Cette suite est donc bornée, et comme A envoie les bornés dans les bornés, $A(u_n)$ reste dans un borné de X'. On extrait une sous-suite $(u_{n'})$ telle que $A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi$ (car X' est réflexif). En raison de la monotonie, pour tout $v \in X$, on a

$$0 \leq \langle A(u_{n'}) - A(v)\,,\ u_{n'} - v\rangle = \langle A(u_{n'})\,,\ u_{n'} - v\rangle - \langle A(v)\,,\ u_{n'} - v\rangle$$

Il est bien clair que $\langle A(v)\,, u_{n'} - v\rangle \to \langle A(v)\,, u - v\rangle$. Par ailleurs, comme $A(u_{n'})$ converge faiblement dans X' et $u_{n'}$ fortement dans X, leur crochet de dualité converge:

$$\langle A(u_{n'})\,,\ u_{n'} - v\rangle \to \langle \xi,\ u - v\rangle$$

Par conséquent, on obtient à la limite

$$\forall v \in X, \quad 0 \leq \langle \xi - A(v)\,,\ u - v\rangle \tag{1.5}$$

On va montrer que cette inégalité détermine en fait ξ en utilisant un procédé caractéristique des opérateurs monotones et appelé "astuce de Minty". Soit $w \in X$ quelconque et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquant (1.5) à $v = u + tw$ et divisant l'inégalité obtenue par $t > 0$, on obtient

$$\langle \xi - A(u + tw)\,, w\rangle \leq 0$$

Faisons alors tendre t vers 0. Comme A est hémicontinu, il vient

$$\forall w \in X, \quad \langle \xi - A(u)\,, w\rangle \leq 0$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-w$, donc en fait

$$\forall w \in X, \quad \langle \xi - A(u), w \rangle = 0$$

soit

$$\xi = A(u)$$

On conclut par unicité de la limite faible des sous-suites extraites de la suite $A(u_n)$ et faiblement convergentes. ■

Proposition 1.5.1 *Tout opérateur monotone A est localement borné.*

Démonstration. Soit A un opérateur monotone. Montrons que pour tout $u \in X$, il existe un voisinage V de u tel que $A(V)$ est borné. On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe $u \in X$ et une suite $(u_n)_n$ avec

$$u_n \to u \quad \text{et} \qquad \|Au_n\| \to \infty \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Sans perte de généralité, soit $u = 0$. On pose

$$a_n = (1 + \|Au_n\| \|u_n\|)^{-1}.$$

Comme A est monotone il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \pm a_n \langle Au_n, v \rangle &\leq a_n (\langle Au_n, u_n \rangle - \langle A(\pm v), u_n \pm v \rangle) \\ &\leq a_n (\|Au_n\| \|u_n\| + \|A(\pm v)\| \|u_n \pm v\|) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_n |\langle a_n A u_n, v \rangle| < \infty \quad , \quad \forall v \in X.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe un nombre N tel que

$$\sup_n \|a_n \; Au_n\| \leq N.$$

On pose $b_n = \|Au_n\|$. Alors

$$b_n \leq a_n^{-1} N = (1 + b_n \|u_n\|) N \quad \text{pour tout } n.$$

Puisque $\|u_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$, la suite $(b_n)_n$ est bornée. Contradiction avec le fait que $\|Au_n\| \to \infty$ quand $n \to \infty$. ■

Définition 1.5.3 *On dit que A est fortement monotone s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq C \left\| u - v \right\|^2 \quad \textit{pour tout } u, v \in X$$

Définition 1.5.4 *On dit que A est coercif si*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty$$

1.5.2 Théorème de Minty-Browder

Théorème 1.5.1 *Soit X un espace de Banach réflexif, séparable et A un opérateur de $X \to X'$ borné, hémicontinu, monotone, coercif alors A est surjectif de $X \to X'$, i.e. pour tout $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que $A(u) = f$.*

Démonstration. Soit f un élément de X'.

1^{ere} étape

a. Comme X est séparable, il existe une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de vecteurs de X, vérifiant les propriétés suivantes:

i. Toute famille finie de vecteurs est libre,

ii. Si X_m désigne l'espace vectoriel engendré par $(u_j)_{1 \leq j \leq m}$, alors $X = \overline{\cup_{m \in \mathbb{N}^*} X_m}$.

b. Résolution dans les espaces vectoriels X_m :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, existe-t-il

$$(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m, w_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \langle A(w_m), u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle, \forall j, 1 \leq j \leq m$$

On considère l'application F de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par:

$$F(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \left(\langle A \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right), u_j\rangle - \langle f, u_j\rangle \right)_{1 \leq j \leq m}$$

On cherche à appliquer le théorème suivant :

Théorème 1.5.2 (Point fixe de Brouwer) *(voir[10]) Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$ dans elle-même admet un point fixe.*

i. De l'hémicontinuité de A, on déduit la continuité de F.

ii. Il existe $k > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m \quad |\lambda| \geq k \Longrightarrow F(\lambda).\lambda > 0$$

En effet comme A est coercif

$$\forall C > 0, \ \exists \ R, \ \forall u \in X \quad \|u\| \geq R \Longrightarrow \langle A(u), u \rangle \geq C \|u\|$$

D'autre part on a $|\langle f, u \rangle| \leq \|f\| \|u\|$, d'où

$$\forall C > 0, \exists R > 0, \forall u, \ \ \|u\| \geq R, \ u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i.$$

Or

$$F(\lambda).\lambda = \langle A\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\right), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \rangle - \langle f, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \rangle \geq \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\| (C - \|f\|)$$

Par ailleurs, soit g l'application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda \longmapsto \|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\|$. L'application g est continue sur la sphère $S = \{\lambda \in \mathbb{R}^m | \ |\lambda| = 1\}$. Soit $\alpha = \inf\limits_{\lambda \in S} g$, comme α est atteint et que les $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ forment une famille libre, α est positif et

$$\lambda \in \mathbb{R}^m, \ \ |\lambda| = k \Longrightarrow g(\lambda) \geq k\alpha.$$

Soit $C > \|f\|$ pour $k > \frac{R}{\alpha}$, on déduit de ce qui précède que pour tout λ de $\mathbb{R}^m$ $|\lambda| > k$, on a $F(\lambda) \cdot \lambda > 0$.

iii. De (ii) on déduit que la fonction F ne peut s'annuler que sur la boule B_k avec $B_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \ \ |\lambda| \leq k\}$. Supposons que F ne s'annule pas. Soit F_1 l'application

$$B_k \to B_k, \ \lambda \to F_1(\lambda) = -\frac{F(\lambda)\, k}{|F(\lambda)|}.$$

La fonction F_1 est continue, d'après le théorème de Brouwer, on déduit l'existence de λ dans B_k tel que $F_1(\lambda) = \lambda$, alors $|\lambda| = k$, d'où $F(\lambda) \cdot \lambda \geq 0$.
Mais $F(\lambda) \cdot \lambda = -|F(\lambda)|\, k < 0$. Contradiction
Donc il existe λ de B_k tel que $F(\lambda) = 0$.

c. Conclusion

$$\forall X_m, \exists \ w_m \in X_m : \langle A(w_m), u_j \rangle = \langle f, u_j \rangle \ \ \forall j, \ \ 1 \leq j \leq m.$$

2eme étape: Convergence de la suite $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

a. De la coercivité de A on déduit que la suite$(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée, en effet

$$\langle A(w_m), w_m\rangle = \langle f, w_m\rangle \leq \|f\| \|w_m\| \Longrightarrow \frac{\langle A(w_m), w_m\rangle}{\|w_m\|} \leq \|f\| .$$

Comme $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|} = +\infty$, on obtient

$$\exists C > 0, \quad \forall m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|w_m\| \leq C.$$

b. L'opérateur A étant borné, la suite $(A(w_m))_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans X'.

c. Comme X est un espace réflexif séparable, il en est de même de son dual, et toute boule fermée de X, ou de X', est compacte pour la topologie de dualité, topologie qui est métrisable sur les boules. On note $\sigma\left(X, X'\right)$ la topologie de dualité sur X (resp.$\sigma\left(X', X\right)$ sur X'). Alors il existe une sous-suite extraite de $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, notée $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists w \in X, \ \exists\, \xi \in X' \Longrightarrow \begin{cases} w_p \rightharpoonup w, & \text{pour } \sigma\left(X, X'\right) \\ A(w_p) \rightharpoonup \xi & \text{pour } \ \sigma\left(X', X\right) \end{cases}$$

3eme étape :De la monotonie et de l'hémicontinuité on déduit $\xi = A(w)$

a. En effet, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \ \forall p \geq j, \ \langle A(w_p), u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle \Longrightarrow \langle \xi, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle.$$

De la densité de $\cup_{m\in\mathbb{N}^*} X_m$ dans X, on déduit

$$\langle \xi, v\rangle = \langle f, v\rangle \ , \ \ \forall v \in X.$$

b. Mais pour tout p, on a $\langle A(w_p), w_p\rangle = \langle f, w_p\rangle$, d'où on déduit

$$\lim_{p\to\infty} \langle A(w_p), w_p\rangle = \langle f, w\rangle = \langle \xi, w\rangle. \tag{1.6}$$

Comme A est monotone, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall v \in X \Longrightarrow \langle A(w_p) - A(v), w_p - v\rangle \geq 0,$$

qui joint à (1.6) donne à la limite

$$\langle \xi - A(v), w - v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in X$$

En particulier, on a

$$v = w - \alpha u,\ \forall \alpha > 0,\ \forall u \in X \Longrightarrow \langle \xi - A(w - \alpha u), u \rangle \geq 0\ .$$

Puis en utilisant l'hémicontinuité de A, on obtient

$$\lim_{\alpha \to 0} \langle \xi - A(w - \alpha u), u \rangle = \langle \xi - A(w), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X..$$

De même pour $v = w + \alpha u$, on obtient

$$\lim_{\alpha \to 0} \langle \xi - A(w + \alpha u), u \rangle = \langle \xi - A(w), u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in X.$$

Donc

$$\langle \xi - A(w), u \rangle = 0 \quad \forall u \in X.$$

D'où $\xi = A(w)$. ■

1.5.3 Exemple d'opérateur monotone

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1, +\infty[$ et $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. On se donne une application $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et monotone au sens où pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$:

$$(F(\lambda) - F(\mu)) \cdot (\lambda - \mu) \geq 0$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que F satisfait la condition de croissance

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N,\ \ |F(\lambda)| \leq C\left(1 + |\lambda|^{p-1}\right)$$

pour une certaine constante C.

Proposition 1.5.2 *L'opérateur $A(u) = -div(F(\nabla u))$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. Il est borné, hémicontinu et monotone.*

Démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p. Montrons que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $A(u)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle -div\left(F\left(\nabla u\right)\right), v\rangle = -\sum_{i=1}^{N}\langle \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\left(\nabla u\right), v\rangle = \sum_{i=1}^{N}\langle F_i\left(\nabla u\right), \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle$$
$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} F_i\left(\nabla u\right) \ \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega F\left(\nabla u\right) \ \nabla v \ dx$$

et l'application $W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $v \longmapsto \langle -div\left(F\left(\nabla u\right)\right), v\rangle$ est bien linéaire et d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\langle -div\left(F\left(\nabla u\right)\right), v\rangle\right| \leq \int_\Omega \left|F\left(\nabla u\right) \ \nabla v\right| \ dx \leq \left(\int_\Omega \left|F\left(\nabla u\right)\ \right|^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \left|\nabla v\right|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $\nabla u \in L^p(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \left|F\left(\nabla u\right)\right|^q dx = \int_\Omega \left|F\left(\nabla u\right)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq \int_\Omega C\left(1+\left|\nabla u\right|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx \leq \int_\Omega C'\left(1+\left|\nabla u\right|^p\right) dx < \infty.$$

donc $\left|\langle -div\left(F\left(\nabla u\right)\right), v\rangle\right| \leq C\left\|v\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Par conséquent, $-divF\left(\nabla u\right) \in W^{-1,q}(\Omega)$.

De plus, si u est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors ∇u est dans un borné de $L^p(\Omega)$ et par le calcul précédent, $F\left(\nabla u\right)$ est dans un borné de $L^q(\Omega)$. Par conséquent, $A(u)$ reste dans un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$.

Enfin, pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = \int_\Omega \left(F\left(\nabla u\right) - F\left(\nabla v\right)\right)\cdot\left(\nabla u - \nabla v\right) \ dx \geq 0$$

car $F(\lambda) - F(\mu)\cdot(\lambda - \mu) \geq 0$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$. Donc A est monotone. ■

Un exemple d'une telle fonction F est donné par $F(\lambda) = |\lambda|^{p-2}\lambda$. L'objet de la section suivante est l'étude de l'opérateur A associé a cette fonction.

1.6 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) = \left|\nabla u\right|^{p-4}\left\{\left|\nabla u\right|^{p-2}\Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}.$$

avec $1 < p < +\infty$, cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$, le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel Δ.

1.6.1 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien

Considérons maintenant l'opérateur p-Laplacien défini sur l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p et q deux réels, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Quel que soit u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout i, $1 \leq i \leq N$, on déduit de la proposition (1.4.4) que $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient à $L^q(\Omega)$, d'où on peut définir l'application suivante sur $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Théorème 1.6.1 *Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v \longmapsto a(u,v)$$

est une forme linéaire continue, d'où il existe un unique élément, noté $A(u)$ de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, tel que

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, $u \longmapsto A(u)$, est notée

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Démonstration. Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ qui à v associe $a(u,v)$ est bien linéaire, de plus elle vérifie

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^q} \leq C\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où elle est continue et il existe un unique f de $W^{-1,q}(\Omega)$, tel que $a(u,v) = \langle f, v\rangle$. De l'unicité de f on déduit l'existence d'une application A de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, telle que $A(u) = f$.

Pour tout φ de $D(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où, $A = -\Delta_p$, avec

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$-\Delta_p$ est l'opérateur p-Laplacien. ■

Définition 1.6.1 *Soit $r \longmapsto \Phi(r)$ une fonction continue monotone strictement croissante de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) \to \infty$ si $r \to \infty$. Une application J de $X \to X'$ avec X un espace de Banach, est dite "application de dualité" relative à Φ si les conditions suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned} \langle J(u), u \rangle &= \|J(u)\|_* \|u\| \quad \forall u \in X \\ \|J(u)\|_* &= \Phi(\|u\|) \qquad \forall u \in X \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 *Naturellement cette notion dépend de la norme choisie sur X.*

Par exemple

Si $X = L^p(\Omega)$, $\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$ alors $J(u) = |u|^{p-2} u$.

Si $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$ alors

$$J(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = -\Delta_p(u).$$

avec $\|-\Delta_p(u)\|_* = \Phi(\|u\|) = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}$.

Proposition 1.6.1 *L'opérateur $-\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. De l'expression de la norme dans un espace dual, on déduit

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)\ \|v\| \leq 1} |\langle -\Delta_p(u), v\rangle| .$$

Pour tout v de $W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$|\langle -\Delta_p(u), v\rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{p}{q}} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{p}{q}} \right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Donc

$$\|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{q}} .$$

Soit B un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\exists\ M > 0, \forall u \in B, \|u\| \leq M \Longrightarrow \|-\Delta_p(u)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq M^{\frac{p}{q}},$$

Ainsi l'image par $-\Delta_p$ d'un borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un borné de $W^{-1,q}(\Omega)$. ■

Proposition 1.6.2 *L'opérateur $-\Delta_p$ est hémicontinu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que pour tout $(u, v, w) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \langle -\Delta_p(u + tv), w\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + t\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx$$

est continue. ■

Proposition 1.6.3 *L'opérateur $-\Delta_p$ est monotone de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. L'application qui à t de $\mathbb{R}$ associe $|t|^p$ dans $\mathbb{R}$ étant convexe, on déduit que sa dérivée est une fonction croissante, donc

$$\forall (t, r) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(|t|^{p-2}t - |r|^{p-2}r\right)(t - r) \geq 0.$$

D'où

$$\langle -\Delta_p(u) - (-\Delta_p(v)), u - v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \geq 0.$$

Par conséquent $-\Delta_p$ est monotone. ■

Proposition 1.6.4 *L'opérateur $-\Delta_p$ est coercif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on déduit de l'inégalité de Poincaré que

$$\langle -\Delta_p(u), u\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

D'où $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|} = \lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\|u\|^p}{\|u\|} = \lim\limits_{\|u\|\to\infty} \|u\|^{p-1} = +\infty$ car $p > 1$. ■

Corollaire 1.6.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, p un réel vérifiant $1 \leq p \leq \infty$; alors l'opérateur $-\Delta_p$ est surjectif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Démonstration. $-\Delta_p$ est un opérateur borné, hémicontinu, monotone, coercif . On déduit du théorème de Minty-Browder que l'opérateur $-\Delta_p$ est surjectif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. ■

Lemme 1.6.1 *(voir [8]) Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$.Alors*

$$\left||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right| \leq \begin{cases} c_p|x-y|\,(|x|+|y|)^{p-2} & si \;\; p \geq 2 \\ c_p|x-y|^{p-1} & si\; 1 \leq p < 2 \end{cases}$$

avec c_p indépendante de x et y.

Lemme 1.6.2 *Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y,\; x-y\rangle \geq \begin{cases} c_p|x-y|^p & si \;\; p \geq 2 \\ c_p\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & si\; 1 < p < 2 \end{cases}$$

Démonstration. Par homogénéité, on peut supposer que $|x| = 1$ et $|y| \leq 1$. Par ailleurs en choisissant une base dans $\mathbb{R}^N$, nous posons

$$x = (1, 0, ..., 0),\; y = (y_1, y_2, 0, ..., 0) \;\text{ et }\; \sqrt{y_1^2+y_2^2} \leq 1.$$

(i) Cas $1 < p < 2$. Il est clair que l'inégalité est équivalente a la suivante

$$\left\{\left(1-\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)(1-y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right\}\frac{\left(1+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\left(1-y_1^2\right)^2+y_2^2} \geq C.$$

Or

$$1-\frac{y_1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}} \geq \begin{cases} 1-\frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1-y_1), & si\ 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 1-y_1 \geq (p-1)(1-y_1), & si\ y_1 \leq 0 \end{cases}$$

Alors

$$(p-1)\left\{\left(1-y_1^2\right)^2+y_2^2\right\}\frac{\left(1+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{\left(1-y_1^2\right)^2+y_2^2} \geq p-1$$

(ii) Cas $p \geq 2$, il suffit de montrer que

$$\frac{\left[1-y_1\left(y_1^2+y_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right](1-y_1)+y_2^2\left(y_1^2+y_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}}}{\left((1-y_1)^2+y_2^2\right)^{\frac{p}{2}}} \geq C \tag{1.7}$$

Posons $t=\frac{|y|}{|x|}$ et $s=\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$ puis, il faut montrer que la fonction

$$f(t,s)=\frac{1-\left(t^{p-1}+t\right)\ s+t^p}{\left(1-2ts+t^2\right)^{\frac{p}{2}}}$$

est borné inférieurement. On a pour un t fixé, $\frac{\partial f}{\partial s}=0$ si

$$1-\left(t^{p-1}+t\right)\ s+t^p=\frac{t^{p-2}+1}{p}\left(1-2ts+t^2\right).$$

Alors pour un point critique s de f, on a

$$f(t,s)=\frac{t^{p-2}+1}{p}\frac{1}{\left(1-2ts+t^2\right)^{\frac{p-2}{2}}} \geq \frac{1}{p}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p}.$$

D'où f est bornée inférieurement. ∎

Théorème 1.6.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*

a) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ est uniformément continu sur tout ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

b) $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.

c) L'opérateur composé $(-\Delta_p)^{-1}$:

$$W^{-1,q}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compact si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.

Démonstration. *a*) Considérons un ensemble borné B de $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e.

$$\exists\ M>0,\quad \forall u\in B\ :\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}<M.$$

Alors pour tout $u,v\in B$ on obtient

$$\begin{aligned}\|-\Delta_p u-(-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1}\left|\langle -\Delta_p u-(-\Delta_p v),\varphi\rangle\right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1}\left|\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla\varphi dx\right|.\end{aligned}$$

D'après le lemme (1.6.1), on obtient

$$\|-\Delta_p u-(-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\le\begin{cases} c_p\displaystyle\sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1}\int_\Omega (|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-2}|\nabla u-\nabla v|\,|\nabla\varphi|\,dx, & \text{si } p\ge 2\\ c_p\displaystyle\sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1}\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx, & \text{si } 1<p<2\end{cases}$$

Par l'inégalité de Hölder, on conclut que

$$\|-\Delta_p u-(-\Delta_p v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)}\le\begin{cases} 2\ C_p\ M^{p-2}\|\nabla u-\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, & \text{si}\quad p\ge 2\\ C_p\ M\,\|\nabla u-\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, & \text{si } p<2\end{cases}$$

D'où $-\Delta_p$ est uniformément continu sur B.

b) D'après le corollaire (1.6.1), on a $-\Delta_p$ est surjectif, il reste a montrer l'unicité d'un élément u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $-\Delta_p(u)=f$. Soit $u_1,u_2\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que

$$-\Delta_p u_1=f_1,\quad -\Delta_p u_2=f_2\ .$$

Alors

$$\langle -\Delta_p(u_1)-(-\Delta_p(u_2)),(u_1-u_2)\rangle=\langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle.$$

D'après le lemme (1.6.2), on a

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p(u_1)-(-\Delta_p(u_2)),(u_1-u_2)\rangle &= \int_\Omega\langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2,\nabla(u_1-u_2)\rangle\,dx\\ &\ge\begin{cases} C_p\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx, & \text{si } p\ge 2\\ C_p\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}dx, & \text{si } 1<p<2,\end{cases}\end{aligned}$$

Si $p \geq 2$ alors

$$\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^p \, dx \leq D_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \|\nabla (u_1 - u_2)\|_{L^p}.$$

D'où

$$\|\nabla (u_1 - u_2)\|_{L^p} \leq D^{\frac{1}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

En particulier, si $f_1 \equiv f_2$ alors $u_1 \equiv u_2$.

Si $1 < p < 2$ alors

$$\int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \leq C_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^p \, dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{(2-p)p}{2}}} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{(2-p)p}{2}} \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \, dx \right)^{\frac{2-p}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\left(\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \right)^{\frac{2-p}{p}}} \leq C_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,q}(\Omega)}.$$

Dans ce cas, on a démontré à la fois l'existence et la continuité de l'inverse de l'opérateur $-\Delta_p$.

c) D'après *b*), on a $(-\Delta_p)^{-1}$ est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^q(\Omega)$ si $1 \leq q < \frac{pN}{N-p}$. alors l'opérateur composé

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ est compact.}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 1.6.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 3$. Pour $p \in]1, +\infty[$, nous définissons la fonctionnelle $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par*

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

alors Ψ *est différentiable sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle -\Delta_p u, v\rangle$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$, qui est une fonction de classe C^1 et $\nabla\varphi(x) = |x|^{p-2}x$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t} = |x|^{p-2} x \cdot y.$$

Par conséquent

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\ \nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \quad p.p\ sur\ \Omega.$$

Par le théorème de Lagrange il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $|\theta| \leq |t|$ et

$$\left|\frac{|\nabla u + t\ \nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\right| \leq \left||\nabla u + \theta\nabla v|^{p-2} (\nabla u + \theta\nabla v) \cdot \nabla v\right| \leq C\left(|\nabla u|^{p-1} |\nabla v| + |\nabla v|^p\right) \in L^1(\Omega).$$

Grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u + t\ \nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\ dx.$$

Enfin Ψ est Gâteaux différentiable et

$$\langle \Psi'_G(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\ dx.$$

Nous allons maintenant montrer que $\Psi'_G : W_0^{1,p}(\Omega) \to \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ est continue. A cet effet nous considérons une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la proposition $(1.3.1)$, il existe une sous-suite qu'on note aussi (u_k) telle que

► $\nabla u_k(x) \to \nabla u(x)$ p.p sur Ω quand $k \to \infty$.

► Il existe $w \in L^1(\Omega)$ telle que $|\nabla u_k(x)|^p \leq w(x)$ $p.p$ sur Ω, et pour tout $k \in \mathbb{N}$

Nous avons

$$\langle \Psi'_G(u) - \Psi'_G(u_k), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k\right) \cdot \nabla v\ dx$$

et

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right) \cdot \nabla v \, dx \right| \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\left\| \Psi_G^{'}(u) - \Psi_G^{'}(u_k) \right\| = \sup \left\{ \left| \langle \Psi_G^{'}(u) - \Psi_G^{'}(u_k), v \rangle \right|, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|v\| = 1 \right\}$$

donc

$$\left\| \Psi_G^{'}(u) - \Psi_G^{'}(u_k) \right\| \leq \left(\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Or

$$|\nabla u_k(x)|^{p-2} \nabla u_k(x) \to |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \quad \text{p.p sur } \Omega$$

et

$$\left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq C \left(|\nabla u_k|^p + |\nabla u|^p \right) \leq C \left(w + |\nabla u|^p \right) \in L^1(\Omega) .$$

Par le théorème de la convergence dominée, nous obtenons

$$\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \to 0$$

et donc

$$\left\| \Psi_G^{'}(u_k) - \Psi_G^{'}(u) \right\| \to 0.$$

D'où $\Psi_G^{'}$ est continue. Par conséquent Ψ est Fréchet différentiable avec $\Psi^{'} = \Psi_G^{'}$. ■

CHAPITRE 2

Première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien

Une valeur propre de l'opérateur p-Laplacien est un nombre réel λ pour lequel il existe une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution non-triviale de

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Les solutions faibles de cette équation sont les fonctions propres. Nous étudions dans ce chapitre les différentes propriétés de la première valeur propre (simplicité, isolation,...), Concernant le problème de l'existence d'autres valeurs propres, nous allons voir qu'il est possible de construire par des méthodes variationnelles une suite de valeurs propres positives tendant vers l'infini en considérant la fonctionnelle $B(u) = \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |u|^p \, dx$ restreinte à la variété $M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \alpha \right\}$.

Posons $\tilde{B} = B_{|M}$. Les valeurs propres de $-\Delta_p$ peuvent alors être sous la forme $\frac{\alpha}{\beta_k}$ où β_k sont les valeurs critiques de la fonctionnelle $\tilde{B}$.

2.1 Existence de la première valeur propre

L'interprétation variationnelle de l'équation (2.1) est la suivante:

Définition 2.1.1 *On dit que* λ *est une valeur propre, s'il existe une fonction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, *telle que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \, v \, dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.2}$$

La fonction u *est appelée fonction propre. On dit aussi que* (u, λ) *est une solution propre de* (2.1).

Remarquons que si on remplace v par $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dans (2.2) on obtient λ comme le quotient fonctionnel suivant:

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \tag{2.3}$$

Ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh.

La première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien est notée par λ_1 et elle est définie par

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \tag{2.4}$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant

Théorème 2.1.1 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ *et* $1 < p < N$. *Considérons* λ_1 *définie par* (2.4). *Alors* $\lambda_1 > 0$ *et cette borne inférieure est atteinte par une certaine fonction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$. *La fonction* u *peut être choisie positive et satisfait (au sens faible) l'équation* (2.1), u *est appelée la première fonction propre.*

Démonstration. Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, posons $I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$, $J(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx$, et on définissons le quotient fonctionnel $Q : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $Q(u) = \frac{I(u)}{J(u)}$ alors

$\lambda = \inf\limits_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} Q(u)$. D'après l'inégalité de Poincaré, $\exists C > 0 : \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p$.
Par conséquent $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $(u_k)_k$ est une suite minimisante telle que $\frac{\|\nabla u_k\|_{L^p}^p}{\|u_k\|_{L^p}^p} \to \lambda_1$, il est clair que $|u_k|$ est aussi une suite minimisante de Q, ainsi on peut supposer que $u_k(x) \geq 0$ p.p sur Ω. On peut normaliser (u_k) en posant $\|u_k\|_{L^p} = 1$ pour tout k. Alors, d'après le théorème d'injection de Sobolev 1.1.4 On déduit que

- ▶ $u_k \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
- ▶ $u_k \to u$ dans $L^p(\Omega)$.
- ▶ $u_k(x) \to u(x)$ p.p sur Ω.

En particulier $J(u) = 1$ et $u(x) \geq 0$ p.p sur Ω. Par la semi-continuité inférieure pour la topologie faible de la norme, on a

$$Q(u) = I(u) \leq \liminf_k I(u_k) = \liminf_k Q(u_k) = \lambda_1.$$

Ainsi $\exists\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $Q(u) = \lambda_1$. Les fonctionnelles I et J sont différentiables alors il en est de même pour Q, et

$$\langle Q'(u), v\rangle = \frac{1}{J(u)} \Big(\langle I'(u), v\rangle - Q(u) \langle J'(u), v\rangle \Big).$$

Comme u est un point minimum de Q donc $Q'(u) = 0$ et par conséquent

$$\langle I'(u), v\rangle = Q(u) \langle J'(u), v\rangle = \lambda_1 \langle J'(u), v\rangle \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

qui n'est rien d'autre qu'une solution faible de (2.1). ■

Lemme 2.1.1 *Toute fonction propre u_1 associée à la première valeur propre λ_1 est de signe constant sur Ω (c-à-d $u_1 > 0$ ou bien $u_1 < 0$ sur Ω).*

Démonstration. Si u_1 est une fonction propre associée à λ_1 i.e. u_1 minimise le quotient de Rayleigh (2.3) alors $v = |u_1|$ est aussi un minimiseur et donc une fonction propre. Comme $v \geq 0$ alors $v > 0$ car s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $v(x_0) = 0$, d'après l'inégalité de Harnack (voir [7]) pour toute fonction propre positive

$$\max_{B_r} v \leq C_{n,p} \cdot \min_{B_r} v$$

où $B_r = B(x_0, r)$ et $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Il en résulte que $v \equiv 0$ dans B_r pour tout $r > 0$. En conclusion $v \equiv 0$, ce qui est impossible car v est une fonction propre. Par conséquent $|u_1| > 0$ sur Ω, par continuité u_1 est de signe constant. ∎

Proposition 2.1.1 *Soit $(\Omega_j)_j$ une suite exhaustive de $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ telle que*

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ...$$

Alors

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_1(\Omega_j) = \lambda_1(\Omega).$$

Démonstration. On a $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2) \geq ... \geq \lambda_1(\Omega)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in D(\Omega)$ telle que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, dx}{\int_\Omega |\varphi|^p \, dx} < \lambda_1(\Omega) + \varepsilon,$$

car $\lambda_1(\Omega)$ est l'infimum. Pour j assez grand, supp$(\varphi) \subset \Omega_j$. D'où

$$\lambda_1(\Omega_j) \leq \frac{\int_{\Omega_j} |\nabla\varphi|^p \, dx}{\int_{\Omega_j} |\varphi|^p \, dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, dx}{\int_\Omega |\varphi|^p \, dx} < \lambda_1(\Omega) + \varepsilon.$$

Par conséquent $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega_j) \leq \lambda_1(\Omega) + \varepsilon$ pour j suffisamment grand.

D'où $\lim_{j\to\infty} \lambda_1(\Omega_j) = \lambda_1(\Omega)$. ∎

Lemme 2.1.2 *Si $\lambda > \lambda_1$ alors il n'existe pas de fonction propre positive associée à la valeur propre λ.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction propre v positive associée à la valeur propre $\lambda > \lambda_1$. En utilisant la proposition précédente, on peut construire un ouvert régulier $\Omega^* \subset\subset \Omega$ tel que

$$\lambda_1^* = \lambda_1(\Omega^*) < \lambda.$$

Soit v_1^* la première fonction propre sur Ω^*. Comme $\partial\Omega^*$ est régulier, on a $v_1^* \in C\left(\overline{\Omega^*}\right)$ et $v_1^* = 0$ sur $\partial\Omega^*$.Car

$$\min_{\overline{\Omega^*}} v > 0.$$

Nous pouvons arranger de telle sorte que

$$v_1^* \leq v \quad \text{sur } \overline{\Omega^*}. \tag{2.5}$$

On définit

$$\kappa = \left(\frac{\lambda_1^*}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{avec } 0 < \kappa < 1. \tag{2.6}$$

Montrons que

$$-div\left(\left|\nabla v_1^*\right|^{p-2} \nabla v_1^*\right) \leq -div\left(\left|\nabla\left(\kappa v\right)\right|^{p-2} \nabla\left(\kappa v\right)\right),$$

et par suite

$$v_1^* \leq \kappa v \quad \text{sur } \Omega^*. \tag{2.7}$$

Pour une fonction test $\varphi \geq 0$, en utilisant (2.5) et (2.6) pour vérifier

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} \langle\left|\nabla v_1^*\right|^{p-2} \nabla v_1^*, \nabla\varphi\rangle\, dx &= \lambda_1^* \int_{\Omega^*} \left(v_1^*\right)^{p-1} \varphi\, dx \\
&\leq \lambda_1^* \int_{\Omega^*} v^{p-1}\varphi\, dx = \lambda \int_{\Omega^*} \left(\kappa v\right)^{p-1} \varphi\, dx \\
&= \int_{\Omega^*} \langle\left|\nabla\left(\kappa v\right)\right|^{p-2} \nabla\left(\kappa v\right), \nabla\varphi\rangle\, dx.
\end{aligned}$$

on peut prendre $\varphi = \left(v_1^* - \kappa v\right)_+$. Il s'ensuit que

$$\int_{v_1^* \geq \kappa v} \langle\left|\nabla v_1^*\right|^{p-2} \nabla v_1^* - \left|\nabla\left(\kappa v\right)\right|^{p-2} \nabla\left(\kappa v\right), \nabla v_1^* - \nabla\left(\kappa v\right)\rangle dx \leq 0$$

et donc $v_1^* \leq \kappa v$ par l'inégalité élémentaire

$$\langle|b|^{p-2}\, b - |a|^{p-2}\, a, b - a\rangle > 0 \;\; \text{pour } a \neq b.$$

On répéte la procédure, maintenant avec κv à la place de v et on conclut que $v_1^* \leq \kappa^2 v$. Par récurrence

$$0 \leq v_1^* \leq \kappa^j v \to 0 \;\; \text{quand } j \to \infty,$$

d'où $v_1^* = 0$. Ce qui est impossible car v_1^* est une fonction propre. ■

Remarque 2.1.1 *Ce lemme montre que l'équation* (2.1) *n'admet pas de solution faible positive pour* $\lambda > \lambda_1$.

2.2 Simplicité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est unique à une constante multiplicative près.

Lemme 2.2.1 *(voir [13 p.162])(i) Pour tout* $p > 1$ *et* $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $w_1 \neq w_2$*, on a*

$$|w_2|^p > |w_1|^p + p\,|w_1|^{p-2}\,w_1 \cdot (w_2 - w_1)\,. \tag{2.8}$$

(ii) Si $p \geq 2$ *alors*

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p\,|w_1|^{p-2}\,w_1 \cdot (w_2 - w_1) + \frac{|w_2 - w_1|^p}{2^{p-1} - 1} \tag{2.9}$$

pour tout w_1, w_2 *dans* $\mathbb{R}^N$.

(iii) Si $1 < p < 2$ *alors*

$$|w_2|^p \geq |w_1|^p + p\,|w_1|^{p-2}\,w_1 \cdot (w_2 - w_1) + C\,(p)\,\frac{|w_2 - w_1|^2}{(|w_1| + |w_2|)^{2-p}} \tag{2.10}$$

pour tout w_1, w_2 *dans* $\mathbb{R}^N$. ($C\,(p)$ *est une constante positive qui dépend seulement de* p)

Théorème 2.2.1 *La première valeur propre* λ_1 *est simple, i.e. si* u *et* v *sont deux fonctions propres associées à* λ_1 *alors* $u = \alpha v$ *pour un certain* α.

Démonstration. Considérons les fonctions $\eta_1 = u - v^p u^{1-p}$ et $\eta_2 = v - u^p v^{1-p}$ comme fonctions test dans

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \cdot \nabla \eta_i\;dx = \lambda_1 \int_\Omega |u|^{p-2}\,u\;\eta_i\;dx, \qquad i = 1, 2, \tag{2.11}$$

Posons pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$ et

$$\eta_1 = \frac{u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^{p-1}} \text{ et } \eta_2 = \frac{v_\varepsilon^p - u_\varepsilon^p}{v_\varepsilon^{p-1}}.$$

Donc le gradient de η_1 est

$$\nabla\eta_1 = \left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right)\nabla u_\varepsilon - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}\nabla v_\varepsilon$$

et par symétrie, nous obtenons $\nabla\eta_2$ de la même façon. Nous substituons η_1 et η_2 dans l'équation (2.11) et en sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \int_\Omega \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right)(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(\left(1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right)|\nabla u_\varepsilon|^p + \left(1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right)|\nabla v_\varepsilon|^p\right)dx \\
&- \int_\Omega \left(p\,\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v_\varepsilon + p\,\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}|\nabla v_\varepsilon|^{p-2}\nabla v_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\right)dx \\
&= \int_\Omega (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\left(|\nabla\log u_\varepsilon|^p - |\nabla\log v_\varepsilon|^p\right)dx \\
&- \int_\Omega p v_\varepsilon^p\,|\nabla\log u_\varepsilon|^{p-2}\,\nabla\log u_\varepsilon\cdot(\nabla\log v_\varepsilon - \nabla\log u_\varepsilon)\,dx \\
&- \int_\Omega p u_\varepsilon^p\,|\nabla\log v_\varepsilon|^{p-2}\,\nabla\log v_\varepsilon\cdot(\nabla\log u_\varepsilon - \nabla\log v_\varepsilon)\,dx,
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.8) le dernier membre est ≤ 0 et grâce au théorème de la convergence de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right)(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\,dx = 0. \tag{2.12}$$

Maintenant, si $p \geq 2$, nous appliquons l'estimation (2.9) pour $w_1 = \nabla\log u_\varepsilon$, $w_2 = \nabla\log v_\varepsilon$ et vice versa nous obtenons

$$0 \leq c\,(p)\int_\Omega\left(\frac{1}{v_\varepsilon^p} + \frac{1}{u_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^p\,dx \leq\ -\lambda_1\int_\Omega\left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right)(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\,dx$$

D'après (2.12) nous concluons que $v\nabla u = u\nabla v$ sur Ω. Par suite $u = \alpha v$ pour une certaine constante α. De même si $1 < p < 2$ nous utilisons l'estimation (2.10) pour les mêmes fonctions w_1 et w_2 et nous obtenons

$$0 \leq c\,(p)\int_\Omega (v_\varepsilon + u_\varepsilon)^p\,(v_\varepsilon u_\varepsilon)^p\,\frac{|v_\varepsilon\nabla u_\varepsilon - u_\varepsilon\nabla v_\varepsilon|^2}{(v_\varepsilon\,|\nabla u_\varepsilon| + u_\varepsilon\,|\nabla v_\varepsilon|)^{2-p}}dx \leq -\lambda_1\int_\Omega\left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right)(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\,dx.$$

En utilisant (2.12), nous arrivons de nouveau à la dépendance souhaitée $u = \alpha v$ pour une certaine constante α. ■

2.3 Isolation

Théorème 2.3.1 *L'ensemble des valeurs propres de l'opérateur p-Laplacien est un fermé.*

Démonstration. Supposons que $\lambda_1, \lambda_2, ...$ est une suite de valeurs propres qui converge vers $\lambda \neq \infty$ et soit $u_1, u_2, ...$ sont les fonctions propres normalisées, $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. On a

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \cdot \nabla \eta dx = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k \eta dx \quad \forall \eta \in D(\Omega) \tag{2.13}$$

Nous montrons que λ est une valeur propre. Pour $\eta = u_k$ dans (2.13) nous obtenons

$$\lambda_k = \int_\Omega |\nabla u_k|^p \, dx.$$

D'après le théorème de Rellich-Kondrachov il existe une sous suite (u_{k_j}) et une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_{k_j} \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$. Il s'agit de montrer que cette fonction u est la fonction propre associée à λ.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\left|\nabla u_{k_j}\right|^{p-2} \nabla u_{k_j} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \nabla \left(u_{k_j} - u\right) \, dx \\
&= \lambda_{k_j} \int_\Omega \left|u_{k_j}\right|^{p-2} u_{k_j} \left(u_{k_j} - u\right) dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \left(\nabla u_{k_j} - \nabla u\right) dx.
\end{aligned}$$

La première intégrale du second membre tend vers 0, car $\left\|u_{k_j} - u\right\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ et de même pour la deuxième intégrale par la convergence faible du gradient. Par conséquent on obtient

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \left[\left|\nabla u_{k_j}\right|^{p-2} \nabla u_{k_j} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \left[\nabla u_{k_j} - \nabla u\right] \, dx = 0.$$

D'après l'inégalité

$$2^{1-p} |w_2 - w_1|^p \leq \left[|w_2|^{p-2} w_2 - |w_1|^{p-2} w_1\right] \cdot (w_2 - w_1) \quad \text{pour } w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N \text{ et } \; p \geq 2$$

on a

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \left|\nabla u_{k_j} - \nabla u\right|^p dx = 0.$$

Donc $u_{k_j} \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. pour $p < 2$ il existe une inégalité similaire. Ainsi on peut passer à la limite sous le signe intégrale dans (2.13) et on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \eta dx.$$

ce qui montre que λ est une valeur propre. ■

Corollaire 2.3.1 *(voir [17]) Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^1 et (u, λ) est une solution propre de (2.2) et $\Omega^+ = \{x \in \Omega,\ u(x) > 0\}$ tel que $|\Omega^+| > 0$. Alors il existe deux constantes c et r indépendante de u et λ telle que*

$$\left|\Omega^+\right| \geq [(\lambda + 1)\ \ c^p]^r = \beta > 0.$$

Ce résultat est vraie pour $\Omega^- = \{x \in \Omega,\ u(x) < 0\}$, si $|\Omega^-| > 0$.

Théorème 2.3.2 *La première valeur propre λ_1 est isolée dans l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur p-Laplacien.*

Démonstration. Supposons que λ_1 n'est pas isolée. Alors par le théorème (2.3.1) il existe une suite d'éléments propres $\{(u_n, \lambda_n)\}$ tels que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\lambda_n \to \lambda_1$, où u est la fonction propre associée à λ_1.

Supposons que $\|u_n\| = \|u\| = 1$ pour tout n et que $u > 0$ sur Ω. Définissons pour tout n

$$\Omega_n^- = \{x \in \Omega \ \ u_n(x) < 0\} \quad \text{et} \quad \Omega_n^+ = \{x \in \Omega \ \ u_n(x) > 0\}.$$

D'après le corollaire (2.3.1), il existe $a > 0$ tel que $|\Omega_n^-| \geq a > 0$ pour tout n, i.e. la mesure $|\Omega_n^-|$ est uniformément bornée inférieurement. Comme u est continue et positive sur Ω, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\Omega_\varepsilon| > |\Omega| - \frac{a}{4}$, où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega,\ u(x) > \varepsilon\}$. Par le théorème d'Egorov il existe un sous ensemble E de Ω_ε tel que $|E| > |\Omega_\varepsilon| - \frac{a}{4}$ et u_n converge uniformément vers u dans E. Ainsi il existe n_ε tel que $|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq n_\varepsilon$. En particulier $E \subset \Omega_{n_\varepsilon}^+$. Ainsi $\left|\Omega_{n_\varepsilon}^-\right| < |\Omega| - |E| < |\Omega| - |\Omega_\varepsilon| + \frac{a}{4} < |\Omega| - |\Omega| + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$. Contradiction , Par conséquent λ_1 est isolée. ■

Remarque 2.3.1 *Le fait que λ_1 est isolée dans l'ensemble des valeurs propres nous permet de définir la deuxième valeur propre par $\lambda_2 = \min\{\lambda \in VP(-\Delta_p) : \lambda > \lambda_1\}$.*

2.4 Existence d'une suite de valeurs propres par le principe du Min-Max

Dans cette section nous montrons qu'il existe une suite de valeurs propres positives qui tend vers l'infini par une technique de Min-Max.

Considérons la fonctionnelle suivante

$$B : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad B(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx$$

et

$$b : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega) \quad \text{définie par} \quad b(u) \ = |u|^{p-2} u$$

telle que

$$\langle B'(u), v\rangle = \langle b(u), v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'opérateur b et B ont les propriétés suivantes:

► B est compact en vertu du théorème d'injection de Sobolev.

► b et uniformément continu sur tout ensemble borné (il suffit de remplacer l'opérateur $-\Delta_p$ par b dans le théorème$(1.6.2\,(a))$.

► b est impair et B est pair.

L'idée consiste à obtenir les points critiques de $B(u)$ sur la variété

$$M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \alpha \right\}$$

L'opérateur $-\Delta_p$ étant borné. Par ailleurs , nous pouvons définir une application $\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \to]0, \infty[$ par

$$\lambda(u) = \left(\frac{p\alpha}{\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx} \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est pair et bornée sur un sous ensemble ne contenant pas l'origine, de plus $\lambda(u)\, u \in M$ et sa dérivée est donnée par

$$\langle \lambda'(u), v\rangle = -\frac{1}{p}\alpha^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{-(p+1)}{p}} \langle -\Delta_p u, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par conséquent

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle \ = 0 \ \text{ implique } \langle \lambda^{'}(u), v\rangle = 0 \tag{2.14}$$

et $$\langle -\Delta_p u, u\rangle = p\alpha, \quad \text{si } u \in M$$

Pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$

$$\langle -\Delta_p u, u\rangle \ = \left(\frac{1}{\lambda(u)}\right)^p \langle -\Delta_p(\lambda(u)u), \lambda(u)u\rangle = \frac{\alpha p}{(\lambda(u))^p}.$$

La prochaine étape consiste à construire une application appelée flot sur M relative à B et le lemme de déformation correspondant qui nous permet d'appliquer la théorie de Min-Max.

Soit $J : W^{-1,q}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est une application dualité telle que pour $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ on a

$$\langle f, J(f)\rangle = \|f\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|J(f)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)}$$

En tenant compte des propriétés de J, nous définissons les applications

$D : M \to W^{-1,q}(\Omega)$ et $T : M \to W_0^{1,p}(\Omega)$ par

$$D(u) = b(u) - \frac{\langle b(u), u\rangle}{\langle -\Delta_p u, u\rangle}(-\Delta_p u)$$

et

$$T(u) = J(D(u)) - \frac{\langle -\Delta_p u, J(D(u))\rangle}{\langle -\Delta_p u, u\rangle} u.$$

Par un calcul direct nous vérifions que

$$\langle b(u), T(u)\rangle = \|D(u)\|^2 \ \text{ pour } u \in M$$

et

$$\langle -\Delta_p u, T(u)\rangle = 0 \quad \text{pour } u \in M. \tag{2.15}$$

Par ailleurs, par définition, T est impair,uniformément continu et borné sur M. Par conséquent, il existe deux constantes $\gamma_0 > 0, t_0 > 0$, telle que

$$\|u + tT(u)\| \geq \gamma_0, \quad \text{pour tout } (u, t) \in M \times [-t_0, t_0]$$

Par conséquent nous définissons l'application flot comme suit

$$\begin{cases} H : M \times [-t_0, t_0] \to M \\ (u,t) \longmapsto H(u,t) = \lambda(u + tTu)(u + tTu). \end{cases} \tag{2.16}$$

telle que

▶ H est impair, i.e. $H(u,t) = -H(-u,t)$ pour t fixé.

▶ H est uniformément continu.

▶ $H(u,0) = u$ pour tout $u \in M$.

le prochain résultat montre que H défini une trajectoire sur M pour laquelle la fonctionnelle B est croissante.

Lemme 2.4.1 *Soit H l'application définie par* (2.16). *Alors il existe une application $r : M \times [-t_0, t_0] \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\tau \to 0} r(u,\tau) = 0$ uniformément en $u \in M$, et*

$$B(H(u,t)) = B(u) + \int_0^t \left\{ \|Du\|^2 + r(u,s) \right\} ds \qquad \textit{pour tout } u \in M, \quad t \in [-t_0, t_0].$$

Démonstration. On a $\langle B'(u), v \rangle = \langle b(u), v \rangle$ et $H(u,0) = u$ donc

$$B(H(u,t)) = B(u) + \int_0^t \left\langle b(H(u,s)), \frac{\partial}{\partial s} H(u,s) \right\rangle ds \tag{2.17}$$

En tenant compte de (2.14) et (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} H(u,s) &= \frac{\partial}{\partial s} (\lambda(u + sT(u)))(u + sT(u)) \\ &= \langle \lambda'(u + sT(u)), T(u) \rangle (u + sT(u)) + \lambda(u + sT(u)) T(u) \\ &= \langle \lambda'(u + sT(u)) - \lambda'(u), T(u) \rangle (u + sT(u)) \\ &\quad + (\lambda(u + sT(u)) - \lambda(u)) T(u) + \lambda(u) T(u). \end{aligned}$$

Posons

$$R(u,s) = \langle \lambda'(u + sT(u)) - \lambda'(u), T(u) \rangle (u + sT(u)) + (\lambda(u + sT(u)) - \lambda(u)) T(u)$$

donc $\frac{\partial}{\partial s} H(u,s) = R(u,s) + T(u)$. Comme T est borné et λ, λ' sont uniformément continu

$$\lim_{s \to 0} R(u,s) = 0 \text{ uniformément en } u \in M.$$

D'où (2.17) devient

$$\begin{aligned} B(H(u,t)) &= B(u) + \int_0^t \langle b(H(u,s)), R(u,s) + T(u) \rangle ds \\ &= B(u) + \int_0^t \langle b(u), T(u) \rangle + r(u,s)\, ds \end{aligned}$$

où $r(u,s) = \langle b(u), R(u,s) \rangle + \langle b(H(u,s)) - b(u), R(u,s) + T(u) \rangle$.

et ainsi $r(u,s) \to 0$ uniformément en $u \in M$, quand $s \to 0$. Mais

$$\langle b(u), T(u) \rangle = \| D(u) \|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}$$

D'où le résultat. ■

Nous pouvons maintenant formuler le résultat de déformation nécessaire, pour tout $\beta > 0$, considérons l'ensemble suivant

$$\Lambda_\beta = \{ u \in M \mid B(u) \geq \beta \}$$

Lemme 2.4.2 *Soit $\beta > 0$ fixé et supposons qu'il existe un ouvert $U \subset M$, telle que pour $\delta, \rho > 0$ avec $0 < \rho < \beta$, la condition suivante*

$$\| D(u) \|_{W^{-1,q}(\Omega)} \geq \delta, \quad \text{si } u \in V_\rho = \{ u \in M \mid u \notin U, \ |B(u) - \beta| \leq \rho \}$$

est satisfaite. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, et un opérateur H_ε impair et continu tel que

$$H_\varepsilon (\Lambda_{\beta - \varepsilon} \backslash U) \subset \Lambda_{\beta + \varepsilon}.$$

Démonstration. Avec t_0 et $r(u,s)$ du lemme (2.4.1), considérons $t_1 \in]0, t_0]$ telle que pour $s \in [-t_1, t_1]$

$$|r(u,s)| \leq \frac{1}{2}\delta^2, \qquad \text{pour tout } u \in M.$$

Alors, pour $u \in V_\rho$ et $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned} B(H(u,t)) &= B(u) + \int_0^t \left\{ \|Du\|^2 + r(u,s) \right\} ds \\ &\geq B(u) + \int_0^t \left(\delta^2 - \frac{1}{2}\delta^2 \right) ds = B(u) + \frac{1}{2}\delta^2 t. \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \min \left\{ \rho, \ \frac{1}{4}\delta^2 t_1 \right\}$. Si $u \in V_\rho \cap \Lambda_{\beta-\varepsilon}$, nous avons $|B(u) - \beta| \leq \rho$ et alors

$$B(H(u, t_1)) \geq B(u) + 2\varepsilon \geq \beta + \varepsilon.$$

D'après le lemme $(2.4.1)$, fixons $u \in V_\rho$, $B(H(u, .))$ est croissante sur un intervalle $[0, s_0[\subset [0, t_1[$. Alors pour $u \in V_\varepsilon = \{u \in M \ |u \notin U, \ |B(u) - \beta| \leq \varepsilon\}$ la fonctionnelle

$$t_\varepsilon(u) = \min \{t \geq 0 | \ B(H(u, t)) = \beta + \varepsilon\}$$

est bien définie et vérifie

▶ $0 < t_\varepsilon(u) \leq t_1$

▶ $t_\varepsilon(u)$ est continue sur V_ε.

Nous définissons l'application

$$H_\varepsilon : \Lambda_{\beta-\varepsilon} \backslash U \to \Lambda_{\beta+\varepsilon}$$

par

$$H_\varepsilon(u) = \begin{cases} H(u, t_\varepsilon(u)), \ \text{si } u \in V_\varepsilon \\ u, \ \text{si } u \in \Lambda_{\beta-\varepsilon} \backslash \{U \cup V_\varepsilon\}. \end{cases}$$

Dans ce cas H_ε est impair et continu. ■

Définition 2.4.1 *Soit X un espace de Banach, considérons l'ensemble*

$$\Sigma = \{A \subset X, \ A \neq \emptyset, 0 \notin A, \ A \textit{ symétrique et fermé}\}.$$

Nous appelons "genre" de $A \in \Sigma$ le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par:

$$\gamma(A) = \inf \left\{ n \geq 1; \ \exists \Phi : A \to \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \Phi \textit{ continue et impaire } \right\}$$

avec $\gamma(\emptyset) = 0$.

Si pour $A \in \Sigma$, un tel entier n'existe pas alors nous posons $\gamma(A) = +\infty$.

Afin de montrer l'existence d'une suite de solutions propres pour le problème (2.1), nous utilisons essentiellement le théorème suivant

Théorème 2.4.1 *Soit* β_k *défini par*

$$\beta_k = \sup_{C\in\Sigma_k} \min_{u\in C} B(u) \tag{2.18}$$

où $\Sigma_k = \{C \subset M;\ C \text{ compact},\ C = -C \ \ \gamma(C) \geq k\}$.

Alors, $\beta_k > 0$, *et il existe* $u_k \in M$ *telle que* $B(u_k) = \beta_k$, *et* u_k *est une solution du problème* (2.1) *pour* $\lambda_k = \frac{\alpha}{\beta_k}$.

Démonstration. L'inégalité $\beta_k > 0$ est une conséquence du fait que $\gamma(M) = +\infty$, pour tout $k > 0$, $\Sigma_k \neq \emptyset$, et étant donné $C \in \Sigma_k$, nous avons $\min\limits_{u\in C} B(u) > 0$, donc $\beta_k > 0$ pour tout k. Pour tout k un entier positif fixé, il existe une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ telle que

$$\begin{aligned} (i)\ & B(u_j) \to \beta_k, \\ (ii)\ & D(u_j) \to 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

car si non il peut exister $\delta, \rho > 0$ telle que

$$\|D(u)\| \geq \delta \ \ si\ u \in \{u \in M,\ |B(u) - \beta_k| \leq \rho\}.$$

Nous pouvons supposer que $\delta < \beta_k$ et d'après le lemme (2.4.2) avec $U = \emptyset$, il existe $\varepsilon > 0$ et une application impair et continue H_ε, telle que

$$H_\varepsilon\left(\Lambda_{\beta_k-\varepsilon}\right) \subset \Lambda_{\beta_k+\varepsilon}.$$

d'après (2.18) il existe $C_\varepsilon \in \Sigma_k$ telle que $B(u) \geq \beta_k - \varepsilon$ en C_ε; avec $C_\varepsilon \subset \Lambda_{\beta_k-\varepsilon}$. Alors, $B(u) \geq \beta_k + \varepsilon$ dans $H_\varepsilon(C_\varepsilon)$. On a $\gamma(H_\varepsilon(C_\varepsilon)) \geq k$, car $\gamma(C_\varepsilon) \geq k$, donc $H_\varepsilon(C_\varepsilon) \in \Sigma_k$, ce qui contredit la définition de β_k.

Donc il existe une suite $(u_j)_j$, vérifiant (2.19) et pour une sous-suite vérifiant $u_j \rightharpoonup u_k$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et Comme B est compact, $B(u_j) \to \beta_k$ et par continuité $D(u_k) = 0$. D'où

$$-\Delta_p u_k = \lambda_k |u_k|^{p-2} u_k \ \ \text{avec } \lambda_k = \frac{\alpha}{\beta_k}.$$

Par conséquent u_k est une solution du problème (2.1) pour $\lambda_k = \frac{\alpha}{\beta_k}$. ∎

Lemme 2.4.3 *Soit* β_k *définie par* (2.18). *Alors* $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$. *Par conséquent* $\lambda_k = \alpha\ \beta_k^{-1} \to \infty$ *quand* $k \to \infty$.

Démonstration. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable alors il existe une suite de sous-espaces$\{E_j\}$ vérifiant

(i) $E_k \subset E_{k+1}$,

(ii) le sous espace engendré par les E_k est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$,

(iii) $\dim E_k = k$.

On pose

$$\tilde{\beta}_k = \sup_{C\in\Sigma_k} \min_{u\in C\,\cap\,E_{k-1}^c} B(u)$$

où E_k^c est le complémentaire topologique de E_k.

Il est clair que $\tilde{\beta}_k \geq \beta_k > 0$. Donc il suffit de montrer que $\lim_{k\to\infty} \tilde{\beta}_k = 0$. Supposons que pour toute constante positive, $\gamma > 0$, $\tilde{\beta}_k > \gamma > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k \in \Sigma_k$ telle que

$$\tilde{\beta}_k > \min_{u\in C_k\cap E_{k-1}^c} B(u) > \gamma,$$

et il existe $u_k \in C_k \cap E_{k-1}^c$ telle que

$$\tilde{\beta}_k > B(u_k) > \gamma.$$

donc $(u_k) \subset M$, $B(u_k) > \gamma > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc pour une sous-suite verifiant

$$u_k \rightharpoonup v \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$
$$u_k \to v \quad \text{dans } L^p(\Omega)$$

on a $B(v) > \gamma$. Contradiction car $u_k \in E_{k-1}^c$ implique $v = 0$. ■

2.5 Régularité des fonctions propres

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, 1 < p < \infty$. Considérons l'équation elliptique dégénéré

$$-\Delta_p u(x) = f(x, u(x)) \quad \text{sur } \Omega, \tag{2.20}$$

où $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Définition 2.5.1 *une fonction $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est dite solution faible de* (2.20) *si*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \quad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Définition 2.5.2 *Soit* Ω *est un ouvert (ou un fermé) de* $\mathbb{R}^N$, *et* $0 \leq \alpha < 1$, *on dit qu'une fonction* u *est höldérienne d'exposant* α *en tout point* x_0 *de* Ω *si*

$$\exists\ \delta,\ M > 0 \quad \forall x \in \Omega \cap B\left(x_0, \delta\right), \quad \left|u\left(x\right) - u\left(x_0\right)\right| \leq M \left|x - x_0\right|^{\alpha}$$

On désigne par $C^{k,\alpha}\left(\Omega\right)$ *les fonctions de* $C^k\left(\Omega\right)$ *telles que les dérivées d'ordre* k *sont höldériennes d'exposant* α *au voisinage de tout point* $x_0 \in \Omega$.

Théorème 2.5.1 *(voir [19]) Soit* u *est une solution faible de* (2.20) *et soit*

$g\left(x\right) = f\left(x, u\left(x\right)\right)$ *p.p* $x \in \Omega$.

Si g *appartient à* $L^q\left(\Omega\right)$ *avec* $q > \frac{p}{p-1}N$, *alors* u *est dans* $C^{1,\alpha}\left(\Omega\right)$ *pour* $\alpha > 0$. *En particulier, ce résultat est valable si* $g \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$.

Lemme 2.5.1 *Soit* $(u, \lambda) \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right) \times \mathbb{R}$ *est une solution faible de* (2.1), *telle que* $u \in W^{2,p}\left(\Omega\right)$ *alors* (u, λ) *est une solution au sens classique de l'équation* (2.1).

Démonstration. Soit $u \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ vérifiant (2.2), en particulier pour tout $v \in D\left(\Omega\right)$

$$\int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u v dx$$

et comme $u \in W^{2,p}\left(\Omega\right)$

$$\int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \left(-\Delta_p u\right) v dx$$

d'où

$$\int_{\Omega} \left(-\Delta_p u\right) v dx = \lambda \int_{\Omega} \left|u\right|^{p-2} u v dx \quad \forall v \in D\left(\Omega\right).$$

Par conséquent

$$-\Delta_p u = \lambda \left|u\right|^{p-2} u \qquad sur\ \Omega$$

et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ car $u \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$. ■

Théorème 2.5.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *de classe* C^1, *et* $(u, \lambda) \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right) \times \mathbb{R}^+$ *est une solution propre de* (2.1) *alors* $u \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$.

Démonstration. Dans cette démonstration nous utilisons la technique d'itération de Moser . Supposons d'abord que $u \geq 0$. Pour $M > 0$ posons

$v_M(x) = \min\{u(x), M\}$, $f(x) = x$ si $x \leq M$ et $f(x) = M$ si $x > M$. On a $v_M \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Soit $k > 0$, choisissons $\varphi = v_M^{kp+1}$, alors $\nabla\varphi = (kp+1)\nabla v_M^{kp}$. Il s'ensuit que $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

En utilisant φ comme fonction test dans (2.2) nous obtenons

$$(kp+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v_M v_M^{kp} dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u\, v_M^{kp+1} dx \leq \lambda \int_\Omega |u|^{(k+1)\,p}\, dx$$

or

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega \left|\nabla v_M^{k+1}\right|^p dx = \lambda \int_\Omega u^{(k+1)p} dx$$

et ensuite

$$\frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\int_\Omega \left(\left|\nabla v_M^{k+1}\right|^p + \left|v_M^{k+1}\right|^p\right) dx \leq \left(\lambda + \frac{(kp+1)}{(k+1)^p}\right)\int_\Omega u^{(k+1)p} dx$$

ainsi

$$\left\|v_M^{k+1}\right\|^p \leq \left(\lambda\frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)\|u\|_{(k+1)p}^{(k+1)p}.$$

Mais d'après le théorème d'injection de Sobolev, il existe une constante $c_1 > 0$ tel que

$$\left\|v_M^{k+1}\right\|_{p^*} \leq c_1 \left\|v_M^{k+1}\right\|$$

ici nous prenons $p^* = \frac{Np}{N-p}$, si $p < N$ et $p^* = 2p$, si $p = N$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|v_M^{k+1}\right\|_{(k+1)p^*} &\leq \left\|v_M^{k+1}\right\|_{p^*}^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq c_1^{\frac{1}{k+1}}\left(\lambda\frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p(k+1)}} \|u\|_{(k+1)p}\end{aligned}$$

Mais nous pouvons trouver une constante $c_2 > 0$ tel que

$$\left(\lambda\frac{(k+1)^p}{(kp+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p\sqrt{(k+1)}}} \leq c_2 \quad \text{pour tout } k > 0.$$

Ainsi

$$\|v_M\|_{(k+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|$$

En faisant tendre $M \to \infty$, et d'après le lemme de Fatou

$$\|u\|_{(k+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \|u\|_{(k+1)p} . \tag{2.21}$$

En choisissant k_1 tel que $(k+1)\,p = p^*$, alors (2.21) devient

$$\|u\|_{(k_1+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k_1+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}}} \|u\|_{p^*} .$$

Ensuite, nous choisissons k_2 telle que $(k_2+1)\,p = (k_1+1)\,p^*$, puis nous prenons $k_2 = k$ dans (2.21) , nous avons

$$\|u\|_{(k_2+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{(k_2+1)p} = c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{(k_1+1)p^*}$$

Par récurrence nous obtenons

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k_n+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_n+1}}} \|u\|$$

où la suite $(k_n)_n$ est choisie de telle sorte que $(k_n+1)\,p = (k_{n-1}+1)\,p^*, k_0 = 0$. Il est facile de voir que $k_n + 1 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^n$. Donc

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq c_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} c_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}} \|u\|_{p^*} .$$

Comme $\frac{p}{p^*} < 1$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $n = 1, 2, ...$

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \leq C \|u\|_{p^*} .$$

avec $r_n = (k_n+1)\,p^* \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Supposons maintenant que $u \notin L^\infty(\Omega)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble A de mesure positive sur Ω tel que $|u(x)| > C\|u\|_{p^*} + \varepsilon = K$, pour tout $x \in A$. Puis

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|u\|_{r_n} \geq \lim_{n\to\infty} \inf \left(\int_A K^{r_n} \right)^{\frac{1}{r_n}} = \lim_{n\to\infty} \inf K\,|A|^{\frac{1}{r_n}} = A > C\|u\|_{p^*} ,$$

ce qui contredit ce qui a été établi ci-dessus.

Si u une fonction propre de (2.2) change de signe, nous considérons u^+. d'après le lemme $(1.1.1)$, $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour tout $M > 0$, $v_M(x) = \min\{u^+(x), M\}$, nous remplaçons encore une fois $\varphi = v_M^{kp+1}$ et nous obtenons

$$(kp+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v_M v_M^{kp} dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \; v_M^{kp+1} dx$$

d'où

$$(kp+1)\int_\Omega \left|\nabla u^+\right|^{p-2}\nabla u^+ \cdot \nabla v_M v_M^{kp} dx = \lambda \int_\Omega \left|u^+\right|^{p-2} u^+ \; v_M^{kp+1} dx.$$

En procédant de la même façon que ci-dessus, nous concluons que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$. De même nous avons $u^- \in L^\infty(\Omega)$. Par conséquent $u = u^+ + u^-$ est dans $L^\infty(\Omega)$. ■

Théorème 2.5.3 *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est une fonction propre de* (2.2), *alors u est dans* $C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Démonstration. D'après le théorème précédent toute fonction propre u de (2.2) est dans $L^\infty(\Omega)$. Posons $g(x) = |u(x)|^{p-2} u(x)$ sur Ω, alors g est aussi dans $L^\infty(\Omega)$. Il résulte du théorème (2.5.1) que toute fonction propre de (2.2) est dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$. ■

CHAPITRE 3

Etude d'un problème elliptique non-linéaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons a une classe de problèmes elliptiques non-linéaire de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, Δ_p est l'opérateur p-Laplacien avec $1 < p < \infty$. Nous allons traiter le problème (3.1) par deux méthodes l'une est une méthode variationnelle directe et l'autre en utilisant le théorème du col de la montagne cité dans le chapitre 1, et nous allons voir que sous certaines conditions sur le comportement de $f(x,s)/|s|^{p-2}s$ et $pF(x,s)/|s|^p$ par rapport à la première valeur propre du p-Laplacien, ce problème admet des solutions non triviales.

Considérons le problème de Dirichlet (3.1) avec $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance suivante

$$|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

où $C \geq 0$ est une constante. $q \in (1,\ p^*)$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Cette restriction $q \in (1,\ p^*)$ assure que l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte. Donc on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{I_d}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \overset{N_f}{\hookrightarrow} L^{q'}(\Omega) \overset{I_d^*}{\hookrightarrow} W^{-1,p'}(\Omega)$$

ce qui montre que l'opérateur de Nemytskii N_f est compact de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Un élément $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution du problème (3.1) si

$$-\Delta_p u = N_f(u) \tag{3.3}$$

au sens de $W^{-1,p'}(\Omega)$ i.e.

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x,u) \; v \, dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

3.1 Résultat d'existence par une méthode variationnelle directe

Nous avons d'une part $-\Delta_p = \psi'$ où la fonctionnelle $\psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ est continûment Fréchet différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et d'autre part sous la condition de croissance (3.2) sur f et en tenant compte de l'injection

$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, la fonctionnelle $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$ avec $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\; d\tau$, est continûment Fréchet différentiable dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\Phi'(u) = N_f\, u$. Par conséquent, la fonctionnelle $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \psi(u) - \Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

est C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$J'(u) = (-\Delta_p)\, u - N_f u.$$

Il est donc équivalent de résoudre le problème (3.1) et de chercher les points critiques de la fonctionnelle J.

Soit $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, telle que pour tout $R > 0$,

$$\Omega \ni x \to \sup_{|s| \le R} |G(x,s)| \in L^1(\Omega). \tag{3.4}$$

On pose $G(x,s) = \frac{\lambda_1 |s|^p}{p} + H(x,s)$, où λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et on définit $H^{\pm}(x)$ comme limite supérieur de $\frac{H(x,s)}{|s|^p}$ quand $s \to \pm\infty$ respectivement.

Théorème 3.1.1 *Supposons que* (3.4) *est satisfaite et*

(i) $H^{\pm}(x) \leq 0$ *p.p uniformément en* x

(ii) $H^{+}(x) < 0$ *dans* Ω^{+} *et* $H^{-}(x) < 0$ *dans* Ω^{-} *pour des sous ensembles* $\Omega^{\pm}$ *de mesures positives. Alors*

$$Q(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \int_{\Omega} G(x,u)\, dx$$

est bien définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ *à valeurs dans* $]-\infty, +\infty]$*, est faiblement semi-continue inférieurement et coercive.*

En vertu de la proposition $(1.4.3\,(i))$, que pour tout $R > 0$

$$\sup_{|s|\leq R} |F(x,s)| \leq C_1 R^q + c(x) \in L^1(\Omega)$$

donc on peut prendre $G(x,s) = F(x,s)$ dans (3.4) avec $H(x,s) = F(x,s) - \frac{\lambda_1 |s|^p}{p}$. Supposons qu'il existe une fonction $\alpha(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ avec $\alpha(x) < \lambda_1$, sur un ensemble de mesure positive, telle que

$$\lim_{s\to\pm\infty} \sup \frac{p\; F(x,s)}{|s|^p} \leq \alpha(x) \leq \lambda_1 \;\; \text{uniformément sur } \Omega. \tag{3.5}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} H^{\pm}(x) &= \lim_{s\to\pm\infty} \sup \frac{H(x,s)}{|s|^p} = \lim_{s\to\pm\infty} \sup \left(\frac{F(x,s)}{|s|^p} - \frac{\lambda_1}{p} \right) = \\ &= \lim_{s\to\pm\infty} \sup \frac{F(x,s)}{|s|^p} - \frac{\lambda_1}{p} \leq \frac{\alpha(x) - \lambda_1}{p} \end{aligned}$$

ce qui donne $H^{\pm}(x) \leq 0$ uniformément sur Ω, d'où (i) du théorème (3.1.1)

D'autre part, il est clair que

$$H^{\pm}(x) \leq \frac{\alpha(x) - \lambda_1}{p} < 0$$

sur un ensemble de mesure positive $\Omega_1 = \{x \in \Omega |\; \alpha(x) < \lambda_1\}$, d'où (ii) du théorème $(3.1.1)$.

Théorème 3.1.2 *Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance* (3.2) . *Supposons qu'il existe* $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ *avec* $\alpha(x) < \lambda_1$ *sur un ensemble de mesure positive tel que* (3.5) *est satisfaite. Alors* J *est coercive. Par conséquent le problème* (3.1) *admet une solution.*

Démonstration. On définit $N : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$N(v) = \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p\,dx$$

et on veut montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$N(v) \geq \varepsilon_0 \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ avec } \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1. \tag{3.6}$$

On rappel que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx}{\int_\Omega |v|^p\,dx} \tag{3.7}$$

D'après (le théorème (2.2.1)) λ_1 est simple i.e. si l'infimum est atteint en une certaine fonction v alors nécessairement cette fonction est un multiple de la première fonction propre $u_1 > 0$.

De (3.5) et (3.6) il résulte que $N(v) \geq 0$ pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (v_n) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$ et $N(v_n) \to 0$. Et par l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite de (v_n), notée encore (v_n), telle que $v_n \rightharpoonup v_0$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v_n \to v_0$ dans $L^p(\Omega)$. La fonctionnelle $v \longmapsto \int_\Omega \alpha(x)|v|^p\,dx$ est continue sur $L^p(\Omega)$ et faiblement continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Par la semi-continuité faible de N sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$0 \leq \|v_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf N(v_n) = 0$$

et ainsi, $\|v_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p\,dx$. Mais $N(v_n) \to 1 - \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p\,dx$, donc

$$\|v_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p\,dx = 1$$

ce qui donne $v_0 \not\equiv 0$.

Alors par (3.5) et (3.7) on a

$$\lambda_1 \|v_0\|_{L^p}^p \leq \|v_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p = \int_\Omega \alpha(x) |v_0|^p \, dx \leq \lambda_1 \|v_0\|_{L^p}^p \tag{3.8}$$

d'où $\lambda_1 = \frac{\|v_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p}{\|v_0\|_{L^p}^p}$.

Il résulte que v_0 est un multiple non identiquement nulle de u_1. Par conséquent, $|v_0(x)| > 0$ p.p sur Ω.

Mais, notons par $\Omega_1 = \{x \in \Omega | \ \alpha(x) < \lambda_1\}$, comme $mes(\Omega_1) > 0$, on obtient

$$\int_\Omega \alpha(x) |v_0|^p \, dx = \int_{\Omega_1} \alpha(x) |v_0|^p \, dx + \int_{\Omega \backslash \Omega_1} \alpha(x) |v_0|^p \, dx < \lambda_1 \|v_0\|_{L^p}^p$$

ce qui contredit (3.8). D'où la démonstration de (3.6).

De (3.6) on a

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - \int_\Omega \alpha(x) |v_0|^p \, dx \geq \varepsilon_0 \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.9}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $\varepsilon < \lambda_1 \varepsilon_0$.

En utilisant (3.5) et d'après la proposition (1.4.3(i)) il existe une constante $k = k(\varepsilon)$ telle que

$$F(x,s) \leq \frac{\alpha(x) + \varepsilon}{p} |s|^p + k + c(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Maintenant, par (3.9) et (3.10) nous estimons J comme suit

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{p}\left(\varepsilon_0 \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - \varepsilon \|v\|_{L^p(\Omega)}^p\right) - k_1 \\ &\geq \frac{\lambda_1 \varepsilon_0 - \varepsilon}{p} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p - k_1 \to \infty \quad \text{quand } \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty. \end{aligned}$$

D'où $J(v) \to \infty$ quand $\|v\| \to \infty$, et par l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ on a J est faiblement semi-continue inférieurement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En vertu de la proposition (1.2.2) que J admet un minimum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et par suite $J'(u) = 0$ et donc u est un point critique de J. Par conséquent u est une solution du problème (3.1). ■

3.2 Résultat d'existence par le théorème du col de la montagne

Proposition 3.2.1 *(voir [6]) Si* X *est localement uniformément convexe et* $J_\phi : X \to X'$, *où* J_ϕ *est l'application de dualité associée à* φ *alors* J_φ *satisfait la condition* (S_+)*: si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\langle Ju_n, u_n - u\rangle \leq 0$ *alors* $u_n \to u$ *dans* X.

Théorème 3.2.1 *L'opérateur p-Laplacien* $-\Delta_p$ *satisfait la condition* (S_+) *: si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \leq 0,$ *alors* $u_n \to u$ *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. il suffit d'appliquer la proposition (3.2.1) avec $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $J_\varphi = -\Delta_p$ où $-\Delta_p$ est l'opérateur p-Laplacien associé à $\varphi(t) = t^{p-1}$. ■

Lemme 3.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $J'(u_n) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Comme $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $J'(u_{n_k}) \to 0$, on obtient

$$\langle J'(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle = \langle -\Delta_p(u_{n_k}) - N_f(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \to 0. \tag{3.11}$$

Mais

$$\langle N_f\, u_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle \to 0$$

car

$$|\langle N_f\, u_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle| \leq \|N_f\, u_{n_k}\|_{L^{q'}} \|u_{n_k} - u\|_{L^q}$$

et comme $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, par l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, on obtient $u_{n_k} \to u$ dans $L^q(\Omega)$. Il est clair que $(N_f\, u_{n_k})$ est bornée dans $L^{q'}(\Omega)$.

De (3.11) on obtient

$$\langle -\Delta_p u_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle \to 0.$$

En vertu du théorème (3.2.1) que $u_{n_k} \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Théorème 3.2.2 *S'il existe $\theta > p$ et $s_0 > 0$ telle que*

$$\theta F(x,s) \leq s\ f(x,s) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ \ |s| \geq s_0, \tag{3.12}$$

alors J satisfait la condition de Palais-Smale (PS).

Démonstration. Il suffit de montrer que toute suite $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $J(u_n)$ est bornée et $J'(u_n) \to 0$, est bornée.

Soit $d \in \mathbb{R}$ tel que $J(u_n) \leq d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons par

$$\Omega_n = \{x \in \Omega |\ \ |u_n(x)| \geq s_0\},\quad \Omega_n' = \Omega \backslash \Omega_n.$$

On a

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u_n|^p\, dx - \left(\int_{\Omega_n} F(x,u_n)\, dx + \int_{\Omega_n'} F(x,u_n)\, dx\right) \leq d. \tag{3.13}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier arbitraire.

Si $x \in \Omega_n'$, alors $|u_n(x)| < s_0$ et d'après la proposition $(1.4.3\,(i))$, on a

$$F(x,u_n) \leq C_1 |u_n(x)|^q + c(x) \leq C_1 s_0^q + c(x)$$

et donc

$$\int_{\Omega_n'} F(x,u_n) \leq C_1 s_0^q \cdot mes(\Omega) + \int_{\Omega} c(x) = K_1. \tag{3.14}$$

Si $x \in \Omega_n$, alors $|u_n(x)| \geq s_0$ et de (3.12) on a

$$F(x,u_n) \leq \frac{1}{\theta} f(x,u_n(x))\, u_n(x)$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega_n} F(x,u_n) \leq \int_{\Omega_n} \frac{1}{\theta} f(x,u_n)\, u_n = \frac{1}{\theta}\left(\int_{\Omega} f(x,u_n)\, u_n - \int_{\Omega_n'} f(x,u_n)\, u_n\right). \tag{3.15}$$

et d'après la condition de croissance (3.2), on déduit

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_n'} f(x,u_n)\, u_n\right| &\leq \int_{\Omega_n'} \left(C|u_n|^q + b(x)|u_n|\right) \\ &\leq C\ s_0^q \cdot mes(\Omega) + s_0 \int_{\Omega} b(x) = K_2\end{aligned}$$

par suite

$$-\frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega_n'} f(x,u_n)\,u_n \le \frac{K_2}{\theta}. \tag{3.16}$$

Enfin, par $(3.13),(3.14),(3.15)$ et (3.16) on obtient

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^p\,dx - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)\,u_n \le d + K_1 + \frac{K_2}{\theta} = K,$$

$$\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^p\,dx - \frac{1}{\theta}\langle N_f\ u_n, u_n\rangle \le K. \tag{3.17}$$

D'autre part, comme $J'(u_n) \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$\left|\langle J'(u_n), u_n\rangle\right| \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ pour $n \ge n_0$,.

Par conséquent, pour tout $n \ge n_0$, on a

$$|\langle -\Delta_p u_n, u_n\rangle - \langle N_f\ u_n, u_n\rangle| \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

or

$$\left|\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \langle N_f\ u_n, u_n\rangle\right| \le \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\theta}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le -\frac{1}{\theta}\langle N_f\ u_n, u_n\rangle. \tag{3.18}$$

Il résulte de (3.17) et (3.18)

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le K$$

et en tenant compte de $\theta > p$, on conclut que (u_n) est bornée. ■

Lemme 3.2.2 *La fonctionnelle J admet les propriétés suivantes*

(i) $J(0) = 0$;

(ii) *l'image par J de tout borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un borné.*

Démonstration. (i) Evidente

(ii) Comme

$$J'(u) = -\Delta_p u - N_f u$$

il est clair que

$$\begin{aligned}\left\|J'(u)\right\|_* &\le \|-\Delta_p u\|_* + \|N_f u\|_* \\ &\le \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + K\|N_f u\|_{L^{q'}}\end{aligned}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mais on sait que l'image par N_f de tout borné de $L^q(\Omega)$ est un borné de $L^{q'}(\Omega)$ et par l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, on conclut que l'image par J' de tout borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un borné de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Soit v est arbitraire dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On a

$$|J(v)| = |J(v) - J(0)| = \left|\langle J'(\xi v), v\rangle\right| \le \left\|J'(\xi v)\right\|_* \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

avec $\xi \in (0,1)$. D'où le résultat découle de la conclusion ci-dessus sur J'. ■

Remarque 3.2.1 *Supposons que J est non bornée inférieurement. Alors, pour tout $\rho > 0$ il existe un élément $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|e\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \ge \rho$, telle que $J(e) \le 0$.*

En effet, on raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe un certain $\rho > 0$ tel que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|u\| \ge \rho$, on a $J(u) \ge 0$. Alors d'après le lemme (3.2.2 (ii)), l'ensemble $\{J(u) \mid \|u\| < \rho\}$ est borné. Il résulte que J est bornée inférieurement.

Théorème 3.2.3 *-(voir[6])- Si l'une des conditions suivantes*

(i) il existe un nombre $\theta > p$ et $s_1 > 0$ tels que

$$0 < \theta F(x,s) \le s\ f(x,s) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ s \ge s_1,$$

(ii) il existe un nombre $\theta > p$ et $s_1 < 0$ tels que

$$0 < \theta F(x,s) \le s\ f(x,s) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ s \le s_1,$$

est satisfaite. Alors J est non bornée inférieurement.

Concernant la condition (I_1) du théorème (1.2.1), on a le résultat suivant

Théorème 3.2.4 *Supposons que la fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes*

(i) il existe $q \in (1, p^*)$ tel que

$$|f(x,s)| \leq C\left(|s|^{q-1} + 1\right) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}$$

avec $C \geq 0$;

(ii)

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s} < \lambda_1 \text{ uniformément en } x \in \Omega$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Alors il existe des constantes $\rho, \alpha > 0$ telles que $J_{|||u||=\rho} \geq \alpha$.

Démonstration. On définit $h : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s}.$$

Par (ii) on peut trouver $\mu \in]0, \lambda_1[$ telle que $h(x) < \mu$ uniformément en $x \in \Omega$.

Par conséquent, il existe $\delta_\mu > 0$ telle que

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s} \leq \mu \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad 0 < |s| < \delta_\mu$$

ou

$$f(x,s) \leq \mu\ s^{p-1} \text{ pour } x \in \Omega,\ s \in (0, \delta_\mu) \tag{3.19}$$

$$-\mu |s|^{p-1} \leq f(x,s) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ s \in (-\delta_\mu, 0). \tag{3.20}$$

Remarquons que la fonction de Carathéodory f satisfait $f(x,0) = 0$ pour $x \in \Omega$.

Par $(3.19), (3.20)$ et par la définition de F, on obtient

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p} |s|^p \quad \text{pour } x \in \Omega,\ |s| < \delta_\mu. \tag{3.21}$$

En tenant compte de (i), il est facile de voir que F satisfait

$$|F(x,s)| \leq C_1 (|s|^q + 1) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

avec $C_1 \geq 0$.

Choisissons $q_1 \in (\max\{p,q\}, p^*)$. Alors par (3.22), il existe une constante $C_2 \geq 0$ telle que

$$|F(x,s)| \leq C_2 |s|^{q_1} \quad \text{pour } x \in \Omega, \ \ |s| \geq \delta_\mu. \tag{3.23}$$

Par (3.21) et (3.23), on a

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p + C_2 |s|^{q_1} \quad \text{pour } x \in \Omega, \ \ s \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Par la caractérisation variationnelle de la première valeur propre λ_1, et de l'estimation (3.24) et par l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$, il résulte que

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u) \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{\mu}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - C_2 \int_\Omega |u|^{q_1} \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{\mu}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - C_3 \|u\|^{q_1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \mu\frac{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\right) - C_3\|u\|^{q_1-p}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right] \\
&\geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) - C_3\|u\|^{q_1-p}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right] \geq \alpha > 0,
\end{aligned}$$

ce qui fourni $\|u\| = \rho$ avec ρ suffisamment petit. ■

Lemme 3.2.3 **(i)** *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution du problème* (3.1) *avec $f(x,s) \geq 0$ pour $x \in \Omega$ et $s \leq 0$, alors $u \geq 0$.*

(ii) *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution du problème* (3.1) *avec $f(x,s) \leq 0$ pour $x \in \Omega$ et $s \geq 0$, alors $u \leq 0$.*

Démonstration.

(i) Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution de (3.1) et $\Omega_- = \{x \in \Omega |\ u(x) < 0\}$. On définit $u^- = \max\{-u, 0\}$. D'après le lemme $(1.1.1)$ on a $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u & \text{dans } \Omega_- \ , \\ 0 & \text{dans } \Omega \backslash \Omega_-. \end{cases}$$

On a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \ \nabla u^{-} dx = \int_{\Omega} f(x,u) \ u^{-} dx$$

on obtient

$$-\int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p-2} dx = -\int_{\Omega_-} f(x,u) \ u \ dx \geq 0.$$

Ainsi, $\nabla u = 0$ p.p sur Ω_-, par suite $\nabla u^- = 0$ p.p sur Ω. D'où $\|u^-\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$ ce qui implique $u^- = 0$ p.p sur Ω.

On conclut que $mes\,(\Omega_-) = 0$, i.e. $u \geq 0$ sur Ω.

(ii) Analogue. ■

Théorème 3.2.5 *Supposons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory et satisfait*

(i) *il existe $q \in (1, p^*)$ tel que*

$$|f(x,s)| \leq C\left(|s|^{q-1} + 1\right) \quad \textit{pour } x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R},$$

avec $C \geq 0$

(ii)

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2} s} < \lambda_1 \quad \textit{uniformément en } x \in \Omega$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$

(iii) *il existe une constante $\theta > p$ et $s_0 > 0$ telles que*

$$0 < \theta \ F(x,s) \leq s \ f(x,s) \quad \textit{pour } x \in \Omega, \ |s| \geq s_0.$$

Alors le problème (3.1) *admet des solutions non triviales $u_- \leq 0 \leq u_+$.*

Démonstration. Montrons que le problème (1.3) admet une solution non triviale $u_+ \geq 0$.

On définit $f_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_+(x,s) = f\left(x, \frac{s+|s|}{2}\right)$ i.e.

$$f_+(x,s) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } s \leq 0, \\ f(x,s) \quad \text{si } s > 0, \end{cases}$$

et soit $F_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)\ d\tau.$$

les assertions suivantes sont vraie

$(i)_+$ la fonction f_+ est de Carathéodory et satisfait

$$|f_+(x,s)| \leq C\left(\left|s^{q-1}+1\right|\right) \quad \text{pour } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

$(ii)_+$ $\limsup\limits_{s\to 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1$ uniformément en $x \in \Omega$;

$(iii)_+$ $\theta\ F_+(x,s) \leq s\ f_+(x,s)$ pour $x \in \Omega$, $|s| \geq s_0$;

$(iv)_+$ $0 < \theta F_+(x,s) \leq s\ f_+(x,s)$ pour $x \in \Omega$, $s \geq s_0$.

En effet, $(i)_+, (iii)_+$ et $(iv)_+$ sont facile à voir.

Concernant $(ii)_+$, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} &= \max\left\{\limsup_{s\nearrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} \\ &= \max\left\{0, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} < \lambda_1 \quad \text{uniformément en } x \in \Omega.\end{aligned}$$

De $(i)_+ - (iv)_+$ on conclut que la C^1 fonctionnelle $J_+ : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J_+(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega F_+(x,u)$$

admet un point critique non trivial $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour cela on applique le théorème du col de la montagne (1.2.1) à la fonctionnelle J_+.

En effet, tout d'abord, on remarque que par le condition $(i)_+$, le résultat concernant J reste valable pour J_+, avec f_+ au lieu de f.

Il est clair que $J_+(0) = 0$.

Par $(i)_+, (ii)_+$ et le théorème (3.2.4), il existe des constantes $\alpha, \rho > 0$ telle que $J_+|_{\|u\|=\rho} \geq \alpha$.

Par conséquent, d'après $(iv)_+$, théorème (3.2.3 (i)) et le lemme (3.2.2 (ii)) (ainsi la remarque (3.2.1)), il existe un élément $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|e\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq \rho$ tel que $J_+(e) \leq 0$.

Enfin, par $(iii)_+$ et le théorème (3.2.2) , J_+ satisfait la condition de Palais -Smale.

L'existence d'un point critique non triviale $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, est assuré par le théorème du col de la montagne (1.2.1) et qui satisfait

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2} \nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f_+(x, u_+) v \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.25}$$

Comme $f_+(x,s) = 0$ pour $x \in \Omega$, $s \leq 0$, d'après le lemme $(3.2.3\,(i))$ on a $u_+ \geq 0$.

Par définition de f_+, (3.25) devient

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2} \nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f(x, u_+) v \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

D'où u_+ est une solution de (3.1), et de la même façon on montre que u_- est une solution de (3.1). ■

Conclusion

L'objet de ce travail a été l'étude de quelques équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien qui est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires.

Nous avons abordé le problème typique aux valeurs propres pour le p-Laplacien, et plus précisement l'une de ses solutions qui est la première valeur propre et sa fonction propre associée qui admet plusieurs propriétés que les autres solutions ne possèdent pas. Ainsi nous avons vu qu'il est possible de construire par des méthodes variationnelles une suite de valeurs propres pour le p-Lapalcien tendant vers l'infini comme dans le cas linéaire $p = 2$. Néanmoins, plusieurs questions restent ouvertes concernant le spectre de l'opérateur p-Laplacien dont la description complète n'a pas été faite.

En guise de perspectives, nous envisageons d'explorer:

- la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien avec poids.
- l'alternative de Fredholm pour le p-Laplacien.
- le spectre de Fučik pour le p-Laplacien.
- la théorie spectrale des opérateurs non linéaires.

Bibliographie

[1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] M. Badiale. E. Serra. Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approch. Springer, 2010.

[3] H. Brézis. Analyse fonctionnelle: Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[4] J. H. Chabrowski. Variational Methods for Potential operator equations. De Gruyter Studies in Mathematics 24, 1998.

[5] D. G. De Figueiredo. Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours. Tata Inst. of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.

[6] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin. Variational and Topological Methods for Dirichlet Problems with p-Laplacian. Portugaliae Mathematica, Vol. 58 Fasc. 3, 2001.

[7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] R. Glowinski and A. Marroco. Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires, Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle, Analyse numérique, tome (9), n°2, p.41-76, 1975.

[9] O. Kavian. Introduction à La Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques. Springer-Verlag, 1993.

[10] B. Kawohl, P.Lindqvist. Positive eigenfunctions for the p-Laplace operator. Revisited, Analysis 19, 331–366 (2001).

[11] H. Le Dret. Notes de cours M2: Équations aux dérivées partielles elliptiques. Université Pierre et Marie Curie, 4 mars 2010.

[12] M. T. Lacroix-Sonrier. Distributions, Espaces de Sobolev, Applications. Ellipses marketing, Paris, 1999.

[13] P. Lindqvist. On a nonlinear eigenvalue problem. Norwegian University of Science and Technology N-7491, Trondheim, Norway.

[14] P. Lindqvist. On The Equation $div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \lambda\ |u|^{p-2}\,u = 0$. Proc. AMS 109, 157–164, May 1990.

[15] J.L. Lions. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[16] A. Lê. Eigenvalue problems for the p-Laplacian. Nonlinear Analysis 64, 1057 – 1099, 2006.

[17] I. Peral. Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian, International Center For Theoretical Physics Trieste, 9 May1997.

[18] P.H. Rabinowitz. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Conference Board of the Math. Sci. Regional Conference Series in Math, no. 65, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1986.

[19] P. Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. J. Differential Equations 51, 126–150, 1984.

[20] E. Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and its Applications II-B. Springer-Verlag, New York, 1980.