République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira - Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

THEME

Résolution de l'équation de Schrödinger linéaire

et

l'étude de l'équation non-linéaire avec une non-linéarité compacte

Présenté par : Melle. Thiziri CHERGUI

Soutenu le ..../06/2012

Devant le jury :

Mr.	**Abdelnasser DAHMANI**	Professeur	U. Bejaia	Président
Mme.	**Saadia TAS**	Professeur	U. Bejaia	Promotrice
Mr.	**Fatah BOUHMILA**	Maître de Conférences (A)	U. Bejaia	Examinateur
Mme.	**Halima BECHIR**	Maître-Assistant (A)	U. Bejaia	Examinatrice

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir donné la force et la patience afin de parvenir à terminer ce mémoire.

J'exprime toute ma gratitude à M^{me} S. TAS pour son encadrement, sa disponibilité et ses précieuses remarques. Je lui suis redevable à bien des égards, pour le temps qu'elle m'a consacrée et les nombreux conseils dont elle m'a fait bénéficier, comme pour la confiance et la liberté qu'elle m'a accordées au cours de ces trois mois.

Je remercie Monsieur A. DAHMANI pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury de soutenance et de juger ce travail. Je tiens également à le remercier pour son aide précieuse durant mon cursus.

Je remercie Monsieur F. BOUHMILA et M^{me} H. BECHIR qui ont accepté d'examiner cet humble travail.

Je remercie tous les membres du Département de Mathématiques pour la très bonne compréhension qui règne entre nous. Je pense tout particulièrement à M. DAHMANI, M. BOUHMILA, M. TAS, M. BECHIR, M. BERBOUCHA, M. MEHIDI, M. AKROUNE, M^{me}. et M. BOURAINE, M. KANOUNE, Mme. TALBI et M. BENMEZIANE.

La vie estudiantine est parsemée d'embûches, de problèmes techniques, de livres et d'articles introuvables, un grand merci à M.B. KERAI et M.L. BLIDI de les avoir résolus.

Bien sûr, je ne saurai oublier de remercier vivement mes parents qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A ma mère qui m'a entouré de sa sollicitude

et de son soutien moral.

A mon père qui m'a encouragé par ses conseils.

A mes sœurs et mes frères pour leur soutien moral sans faille

et leurs précieux conseils.

A toute ma grande famille.

A ma très chère nièce Maelys.

A mes amies, en particulier Sonia, Radia, Katia, Farida, Lehna, Lamía, Howa,

Meriem, Leila et Chafia.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

Résolution de l'équation de Schrödinger linéaire et l'étude de l'équation non-linéaire avec une non-linéarité compacte

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation de Schrödinger linéaire et non-linéaire. Dans un premier temps, des notions de base et des résultats préliminaires sont énoncés. Le second chapitre concerne l'étude mathématique de l'équation de Schrödinger linéaire. L'existence et l'unicité d'une solution ainsi que les propriétés de dispersion et de régularité de cette solution sont analysées. La dernière partie est dédiée à l'étude de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\,w = 0,\ w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (NLS)$$

Où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Le coefficient V fait l'objet de diverses hypothèses. En particulier, il est toujours supposé que $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$.

La recherche des solutions sous la forme d'ondes stationnaires $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ conduit naturellement à l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0,\ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Les deux principaux objectifs pour l'équation non-linéaire sont

(1) Etablir des résultats d'existence, de régularité et d'unicité pour (E_λ).

(2) Discuter la stabilité orbitale des ondes stationnaires de (NLS) correspondant aux solutions trouvées en (1).

Mots-clés : Equation de Schrödinger linéaire. Equation de Schrödinger non-linéaire. Equations elliptiques semi-linéaire.

Table des matières

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, par exemple dans les domaines de la physique et de la chimie. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des équations d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et événements.

L'équation de Schrödinger est l'équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état (ψ) d'un système quantique arbitraire. Elle est équivalente à un problème aux valeurs propres dans la théorie des espaces de Hilbert comme Von Neumann l'a démontré. On la rencontre lors de la description de phénomènes assez variés, que ce soit dans l'optique quantique (laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semi-conducteurs, transistors), la physique des plasmas, l'astrophysique, la microscopie électronique, la chimie ou encore la biologie.

L'équation de Schrödinger a été établie sous sa forme primitive en 1926 par Erwin Schrödinger et a été généralisée par Paul Dirac quelques années après. Initialement, elle reprenait les idées des mathématiciens Hamilton et Félix Klein pour prolonger la théorie des ondes de matière de De Broglie.

Tout d'abord, Schrödinger considéra le cas particulier d'une onde harmonique de masse m, de quantité de mouvement p, de pulsation w, nombre d'onde k, et d'énergie E, qui est associée à une onde plane du type :

$$\Psi(r,t) = \Psi_0 e^{i(kr-wt)}$$

Puis, en utilisant les relations proposées par De Broglie
$(E = h\ w,\ p = h\ k$ où h est la constante de Dirac), on a

$$\Psi\left(r,t\right) = \Psi_0 e^{\frac{i}{h}(pr-Et)}$$

Il remarqua alors qu'en dérivant l'onde par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(r,t\right) = \frac{-i}{h}E\Psi_0 e^{\frac{i}{h}(p\ r-E\ t)} = \frac{-i}{h}E\Psi\left(r,t\right)$$

De même, le gradient de cette fonction d'onde donne :

$$\nabla\Psi\left(r,t\right) = \frac{i}{h}p\Psi\left(r,t\right)$$

Nous avons donc, pour toute onde Ψ de cette forme, en tout point et à tout instant :

$$i\ h\frac{\partial}{\partial t}\Psi = E\Psi$$
$$-i\ h\nabla\Psi = p\Psi$$

Pour une particule donnée, d'après la mécanique classique, l'énergie mécanique est donnée par :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\ v^2 + V\left(r\right) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V\left(r\right) \end{aligned}$$

Cette quantité apparaît en fait plus naturellement dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique: la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique est appelée hamiltonien, qui s'identifie ici à l'énergie mécanique totale. En multipliant par la fonction d'onde, il vient que

$$\frac{p^2}{2m}\Psi + V\ \Psi = E\Psi$$

Enfin, en utilisant les résultats précédents, nous obtenons

$$\frac{\left(i\ h\nabla\right)^2}{2m}\Psi + V\ \Psi = i\ h\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Donc on peut écrire l'équation de Schrödinger sous l'une ou l'autre des deux formulations suivantes :

Pour toute fonction d'onde Ψ

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi\left(r,t\right)+V\left(r\right)\Psi\left(r,t\right)=i\ h\frac{\partial\Psi\left(r,t\right)}{\partial t}$$

ou bien

$$H\Psi=E\Psi$$

où la quantité H est appelée "opérateur hamiltonien" ou plus souvent "hamiltonien".

Notre objectif est de donner quelques résultats mathématiques de base concernant l'équation de Schrödinger issue de la physique quantique et dont la solution est appelée fonction d'onde. Elle se présente donc sous la forme suivante :

$$i\partial_t u\left(t,x\right)+\Delta u\left(t,x\right)+f\left(t,x,u\left(t,x\right)\right)=0,\ u=u(t,x):I\times\mathbb{R}^N\rightarrow\mathbb{R}$$

La fonction d'onde u décrit ici l'état d'une particule quantique, $\partial_t u$ est sa dérivée en temps, Δ est l'opérateur de Laplace. Le terme $f(u)$ modélise l'ensemble des influences subies par la particule.

Rappelons tout d'abord que l'équation de Schrödinger est un postulat. Elle ne découle d'aucune démonstration formelle ni d'aucun axiome. Schrödinger a postulé cette équation pour représenter les états d'un système quantique. Elle a été confrontée à l'expérience et celle-ci a montré que, jusqu'à présent, on pouvait déduire toutes les données expérimentales de l'équation.

Les physiciens font aussi un autre postulat : la fonction d'onde d'un système, contient toute l'information que l'on peut connaître du système. Il n'existe pas d'autre moyen d'aborder les propriétés de ce système.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est réservé a quelques rappels d'analyse fonctionnelle et de calcul différentiel introduits pour faciliter la compréhension des sections ultérieures (Points critiques, multiplicateurs de Lagrange, fonctionnelles minorées, la symétrisation de Schwarz, les variétés différentielles).

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Schrödinger linéaire. La propriété principale exposée est la dispersion. Celle-ci est caractérisée par le fait que si l'on n'impose aucune condition au bord, alors les solutions de l'équation ont tendance à s'étaler dans le temps. Pour formaliser cette assertion, nous considérons l'équation de Schrödinger linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0 \text{ dans } D'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ u_0 = g \end{cases}$$

Grâce à la transformation de Fourier, nous avons une forme explicite de la solution

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4}sgn\ t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}}g\right)\right]\left(\frac{x}{2t}\right)$$

Alors $u_t(x)$ satisfait l'estimation de dispersion suivante

$$\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi|t|)^{\frac{-N}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

Pour l'équation de Schrödinger non-linéaire, nous étudions dans le dernier chapitre quelques aspects de l'équation stationnaire avec une non-linéarité compacte

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)|w|^{p-1}w = 0,\ w = w(t,x) : I\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (NLS)$$

Où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Δ désigne le Laplacien par rapport à la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^N$.

Nous faisons diverses hypothèses sur la puissance p et sur le coefficient V.

Pour assurer l'existence de solutions, nous supposons toujours que p est borné supérieurement par une quantité qui dépend de V.

On suppose de plus que $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, hypothèse justifiant le vocable "non linéarité compacte".

Nous nous intéressons spécialement à l'existence et aux propriétés de solutions particulières de (NLS) qui sont des ondes stationnaires. Celles-ci sont des fonctions de la forme $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$, où u définie sur $\mathbb{R}^N$, est à valeurs réelles.

Le problème de l'existence de solutions stationnaires pour l'équation (NLS) est ramené à celui de l'existence de solutions d'une équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\left|u\right|^{p-1} u = 0,\; u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\;\; N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Ainsi nous prouvons l'existence pour tout $\lambda > 0$ d'un état fondamental de (E_λ). Celui-ci est une solution faible qui minimise la fonctionnelle dont (E_λ) est l'équation d'Euler-Lagrange, sur la variété de $Nehari$ dans $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. La méthode de minimisation sous contrainte que nous employons est due à $Nehari$.

Pour obtenir ce résultat d'existence en dimension $N \geq 2$, nous formulons des hypothèses assez fortes sur le coefficient V. Nous supposons que $V \in C^2\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ est une fonction radiale telle que $V(r) = V(x) > 0$ est décroissante en $r > 0$ et qu'il existe $k \in (0, 2)$ tel que $\left|x\right|^k V(x)$ est borné sur $\mathbb{R}^N$. En particulier, V tend vers zéro à l'infini. Nous supposons également que $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$. Nous obtenons alors des solutions positives, radiales et radialement décroissantes.

La suite du chapitre est consacrée à l'étude de certaines propriétés des états fondamentaux de (E_λ). Ces solutions sont radiales et nous ferons donc largement recours à des équations différentielles ordinaires. La section qui suit traite de la régularité des états fondamentaux, sous les mêmes hypothèses, le Théorème (3.2.2) résume ces propriétés. Dans l'autre section, nous supposons que $V \in C^1\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ et nous faisons de plus l'hypothèse (H_4), qui stipule que $\frac{rV'(r)}{V(r)} < 0$ est une fonction décroissante. Nous prouvons alors, grâce au théorème de Yanagida [23], un résultat d'unicité des états fondamentaux de (E_λ), valable en dimension $N \geq 3$. La dernière section est consacrée à l'étude de la stabilité orbitale des ondes stationnaires de (NLS).

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

Notions de base

Dans ce chapitre, nous avons compilé un certain nombre de définitions, notations, propositions, lemmes et énoncés de théorèmes qui sont utilisés à un moment ou un autre dans ce mémoire.

1.1 Résultats préliminaires

1.1.1 Inégalité de Hölder

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, c-à-d: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 1.1.1 (*Inégalité de Hölder*)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors

$$\begin{cases} f.g \in L^1(\Omega) \\ \int\limits_{\Omega} |f.g|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 *Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder*

Soient $f_1, f_2, ..., f_k$ des fonctions telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \ 1 \leq i \leq k \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

En particulier si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *alors* $f \in L^r(\Omega)$ *pour tout* $p \leq r \leq q$ *et on a l'inégalité d'interpolation*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} \qquad (0 \leq \theta \leq 1)$$

1.1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit p un réel avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre un et on note* $W^{1,p}(\Omega)$, *l'ensemble des fonctions de* $L^p(\Omega)$ *dont les dérivées partielles premières au sens des distributions sont des fonctions de* $L^p(\Omega)$, *c-à-d*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega);\ \exists\ g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} g_i \varphi\ dx,\ \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega),\ \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ *alors* $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 1.1.2 *Nous désignons par* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $C_c^{\infty}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *En particulier pour* $p = 2$,

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

la fermeture de $C_c^{\infty}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$, *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$.

Voici maintenant quelques résultats fondamentaux concernant les espaces de Sobolev, il s'agit des théorèmes d'injection de Sobolev qui sont très utiles dans les applications.

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) *E est un sous-espace de F.*

(ii) $\exists\ C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_F \leq C \|u\|_E \text{, pour tout } u \in E$$

Autrement dit, toute suite convergente dans E est convergente dans F.

Définition 1.1.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que l'injection de E dans F est compacte et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ si*

(i) *E s'injecte continûment dans F.*

(ii) *L'application $I : E \longrightarrow F$ est compacte.*

Autrement dit, toute suite bornée dans E est relativement compacte dans F.

Théorème 1.1.1 (*Sobolev, Gagliardo, Nirenberg, Voir*[5], *page 162*)

Soit $1 \leq p < N$, on pose $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (p^* est dit "exposant critique de Sobolev" de p), alors

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Corollaire 1.1.1 *Soit $1 \leq p < N$. Alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right), \forall q \in [p, p^*]$$

avec injection continue.

1.1.3 Estimations utiles

Lemme 1.1.1 *Soit $k \in (0,2)$ et $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ pour $N \geq 2$, alors*

$\exists c > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|\, |x|^{-k} \left| |u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right| |\varphi|\, |\xi|\, dx \leq c\{ \left\| z \left(|u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right) \right\|_{L^\beta} \|\varphi\|_{L^\gamma} \|\xi\|_{L^\gamma}$$

$$+ \left\| z \left(|u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right) \right\|_{L^\sigma} \|\varphi\|_{L^\tau} \|\xi\|_{L^\tau} \} \qquad \text{(A.1)}$$

Pour tout $z \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u, v, \varphi, \xi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, où $(p-1)\beta = \gamma \equiv q \in \left(\frac{N(p+1)}{N-k}, 2^*\right)$ et $(p-1)\sigma = \tau \equiv p+1$.

En particulier, il existe $D > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|\, |x|^{-k} |u|^{p-1} |\varphi|\, |\xi|\, dx \leq D \|z\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|\xi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{(A.2)}$$

Pour tout $z \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u, \varphi, \xi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Démonstration. L'inégalité de Hölder avec quatre exposants donne

$$\int_{\mathbb{B}(0,1)} |z|\, |x|^{-k} \left| |u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right| |\varphi|\, |\xi|\, dx \leq \left\{ \int_{\mathbb{B}(0,1)} |x|^{-k\alpha}\ dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\| z \left(|u|^{p-1} - |v|^{p-1} \right) \right\|_{L^\beta} \|\varphi\|_{L^\gamma} \|\xi\|_{L^\gamma}$$

Où β et γ sont choisis tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\gamma} = 1$, on a alors

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\gamma} = \frac{\beta q - q - 2\beta}{\beta q} = \frac{\beta\,(q-2) - (p-1)\,\beta}{\beta q} = \frac{q-(p+1)}{q}$$

D'où $\alpha = \frac{q}{q-(p+1)}$.

On a $\left\{ \int_{\mathbb{B}(0,1)} |x|^{-k\alpha}\ dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$ est fini si et seulement si $N - k\alpha > 0$, or

$$N - k\alpha > 0 \Longleftrightarrow N > \frac{k\ q}{q-(p+1)} \Longleftrightarrow N\,[q-(p+1)] > q\ k \Longleftrightarrow q > \frac{N\,(p+1)}{N-k}$$

D'après l'hypothèse on a $q \in \left(\frac{N(p+1)}{N-k}, 2^*\right)$.

Donc, $\exists\ K > 0$ tel que,

$$\int\limits_{\mathbb{B}(0,1)} |z|\,|x|^{-k}\left||u|^{p-1}-|v|^{p-1}\right||\varphi|\,|\xi|\,dx \leq K\left\|z\left(|u|^{p-1}-|v|^{p-1}\right)\right\|_{L^{\beta}}\|\varphi\|_{L^{\gamma}}\|\xi\|_{L^{\gamma}}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder avec trois exposants, il vient

$$\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N,|x|\geq 1\}} |z|\,|x|^{-k}\left||u|^{p-1}-|v|^{p-1}\right||\varphi|\,|\xi|\,dx \leq \left\|z\left(|u|^{p-1}-|v|^{p-1}\right)\right\|_{L^{\sigma}}\|\varphi\|_{L^{\tau}}\|\xi\|_{L^{\tau}}$$

Où $\sigma,\tau\in(2,2^*)$ sont choisis comme dans l'énoncé. Il suffit de poser $c=\max\{K,1\}$ pour obtenir (A_1).

Pour (A_2), il suffit de poser $v=0$ dans (A_1) et d'utiliser les inégalités de Sobolev. ■

1.1.4 Convergence faible

Dans les applications, il est rare que l'on puisse montrer qu'une suite converge en exhibant sa limite. Si l'on parvient à démontrer que la suite appartient à un compact, alors l'existence d'une valeur d'adhérence est assurée, ce qui est souvent une étape fondamentale pour résoudre des problèmes d'analyse. En dimension infinie, la topologie de la norme est trop forte en ce sens qu'elle ne fournit que peu d'ensembles compacts. Nous allons dès lors affaiblir la notion de convergence, ou de manière équivalente munir l'espace d'une topologie plus grossière, pour augmenter le nombre d'espaces compacts. Ce but sera atteint grâce à la notion de convergence faible que nous allons introduire dans cette section.

Définition 1.1.4 *Soient E un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x\in E$.*

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E si

$$\forall f\in E',\langle f,x_n\rangle_{E'\times E}\longrightarrow\langle f,x\rangle_{E'\times E}\quad \text{quand}\ \ n\longrightarrow\infty$$

On note $x_n\rightharpoonup x$.

Proposition 1.1.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a*

(i) Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement.

(ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement alors $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Démonstration.

(i) On suppose que $x_n \to x$ c.à.d $\|x_n - x\| \to 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Soit $f \in E'$, on a

$$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\|$$

Or $\|x_n - x\| \to 0$ et $f \in E'$ implique $\|f\| < \infty$, donc

$$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

(ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ il est équivalent à $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ implique la suite $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est convergente.

Donc la suite $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est bornée.

Ainsi $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, x_n\rangle| < \infty$.

On pose $T_n : E' \to \mathbb{R}; f \mapsto \langle f, x_n\rangle$, on a T_n est linéaire continue, de plus $\|T_n\|_{E'} = \sup\limits_{\{f\in E', \|f\|\leq 1\}} |\langle f, x_n\rangle| = \|x_n\|$

D'après ce qui précède on a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty$.

En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus (Voir [5]), on a $\exists\, c > 0$ tel que

$$|T_n(f)| \leq c\|f\|$$

Donc, $\exists c > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E'$

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\| \|x_n\|$$

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\| \|x_n\|$$

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

$$\sup_{\{f\in E', \|f\|\leq 1\}} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

Par conséquent

$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$$

■

1.1.5 Quelques opérateurs continus

Dans l'étude de nombreuses équations aux dérivées partielles nous aurons à considérer des opérateurs locaux définis par des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelés parfois opérateurs de Nemitskii ou encore opérateurs de superposition.

Définition 1.1.5 *Soit une fonction*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ (x,t) \longmapsto f(x,t)$$

On appelle opérateur de Nemitskii associé à f l'application N qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction Nu définie sur Ω par

$$Nu(x) = f(x, u(x))$$

Définition 1.1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous dirons qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ est mesurable en x, continue en t, ou encore une fonction de Carathéodory si la condition suivante est satisfaite*

$$\begin{cases} \text{la fonction } f(.,t) \text{ est mesurable sur } \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{la fonction } f(x,.) \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ \text{p.p en } x \in \Omega \end{cases}$$

1.2 Quelques propriétés de la transformée de Fourier

Définition 1.2.1 *On appelle transformée de Fourier de la fonction $u \in S(\mathbb{R}^N)$, que l'on note $\hat{u}$ ou Fu la fonction définie par*

$$\hat{u}(t) = Fu(t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,t\rangle} u(x)\ dx,\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^N$$

La transformée de Fourier F est une application linéaire bijective bicontinue de $S(\mathbb{R}^N)$ sur $S(\mathbb{R}^N)$.

On définie la transformée de Fourier inverse $\bar{F}v$, $v \in S\left(\mathbb{R}^N\right)$ *par*

$$\bar{F}v\left(t\right) = \left(2\pi\right)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x,t\rangle} v\left(x\right)\ dx,\ \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}^N$$

on a $F\ \bar{F} = \bar{F}\ F = I$ *identité de* $S\left(\mathbb{R}^N\right)$, *c.à.d* $F^{-1} = \bar{F}$.

Remarques 1.2.1 (*Voir* [25], *page 108-115*)

1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re} z > 0$. *Soit* $u\left(x\right) = e^{-z|x|^2}$. *On a*

$$\hat{u}\left(\xi\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{B.1}$$

2. $\langle F\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, F\varphi\rangle = F\varphi\left(0\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi\left(x\right)\ dx = \langle 1, \varphi\rangle$.

3. *Soit* $\left\langle \check{T}, \varphi\right\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ *avec* $\check{\varphi}\left(x\right) = \varphi\left(-x\right)$, *on a*

$$F1 = FF\delta_0 = \left(2\pi\right)^N \check{\delta}_0 = \left(2\pi\right)^N \delta_0 \tag{B.2}$$

4. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ *et* $T = e^{i\lambda|x|^2} \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Alors*

$$FT = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i\ sgn\lambda.\frac{\pi}{4}}\right)^N e^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda}} \tag{B.3}$$

1.2.1 Le produit de convolution

Définition 1.2.2 *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^N$ *et dont l'une au moins est à support compact, on définit leur produit de convolution par*

$$\left(f * g\right)\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\left(x - y\right)\ g\left(y\right)\ dy,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Remarques 1.2.2 (*Voir* [25])

1) *Si* $T \in \xi'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *alors* $\hat{T}$ *est une fonction* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^N$.

2) *Si* $f \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $g \in \xi'\left(\mathbb{R}^N\right)$, *on a*

$$f * g \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{ et } F\left(f * g\right) = \hat{f}.\hat{g}$$

1.3 Rappels sur le calcul différentiel

1.3.1 Différentielle au sens de Fréchet

Définition 1.3.1 *Soient ω un ouvert d'un espace de Banach réel X et $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.*

On dit que F est différentiable en un point $u_0 \in \omega$ au sens de Fréchet s'il existe une application linéaire continue $\varphi \in X'$ telle que

$$\forall \upsilon \in \omega : F(\upsilon) - F(u_0) = \langle \varphi, \upsilon - u_0 \rangle + o(\upsilon - u_0)$$

L'application linéaire continue φ est appelée la différentielle au sens de Fréchet de F au point u_0.

Remarques 1.3.1 1) *Si F est différentiable en u_0 au sens de Fréchet alors f est continue.*

2) *Si f est différentiable en u_0 au sens de Fréchet alors sa différentielle est unique. Elle est notée $Df(u_0)$.*

3) *Si F est différentiable en tout point de X et si l'application $X \to X' : u \mapsto F'(u)$ est continue, on dit que F est continûment différentiable sur X, et on note $C^1(X, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.*

1.3.2 Dérivée directionnelle

Définition 1.3.2 *Soient ω un ouvert d'un espace de Banach réel X et $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.*

Soit $u_0 \in \omega$ et $\upsilon \in X$ tels que pour $t > 0$ assez petit, on a $u_0 + t\upsilon \in \omega$.

On dit que F admet au point u_0 une dérivée dans la direction υ si

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{F(u_0 + t\upsilon) - F(u_0)}{t}$$

existe. On notera cette limite par $F'_\upsilon(a)$.

Une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $\upsilon \in X$, sans être continue.

Lorsque la dérivée directionnelle de F existe pour certains $v \in X$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

1.3.3 Différentielle au sens de Gâteaux

Définition 1.3.3 *Soit ω un ouvert d'un espace de Banach réel X.*

Soit $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que F est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en un point $u_0 \in \omega$ s'il existe $\varphi \in X'$ telle que, dans chaque direction $\upsilon \in X$ où $F(a + t\upsilon)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_\upsilon(u_0)$ existe et on a

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{F(u_0 + t\upsilon) - F(u_0)}{t} = \langle \varphi, \upsilon \rangle .$$

L'application φ est appelée la différentielle de F au sens de Gâteaux au point u_0 (ou la G-différentielle de F au point u_0), on note $F'(u_0) = \varphi$.

Remarques 1.3.2 1) *Si F est différentiable au sens de Fréchet alors elle est différentiable au sens de Gâteaux, de plus les dérivées coïncident.*

En effet, pour une application F différentiable au sens de Fréchet, on a

$$F(u + t\upsilon) - F(u) = \langle F'(u), t\upsilon \rangle + o(t\upsilon) = t \ \langle F'(u), \upsilon \rangle + o(t\upsilon)$$

et

$$\frac{F(u + t\upsilon) - F(u)}{t} = \langle F'(u), \upsilon \rangle + \frac{o(t\upsilon)}{t}$$

Donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{F(u + t\upsilon) - F(u)}{t} = \langle F'(u), \upsilon \rangle$$

2) *Une fonction G-différentiable n'est pas nécessairement continue.*

Proposition 1.3.1 (*Voir* [16], *page* 54)

Soit F une fonction continue d'un ouvert ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et G-différentiable dans un voisinage de $u \in \omega$.

On désigne par $F'(\upsilon)$ la G-différentielle de F au point υ et on suppose que l'application $\upsilon \longmapsto F'(\upsilon)$ est continue au voisinage de u. Alors

$$F(\upsilon) = F(u) + \langle F'(u), \upsilon - u \rangle + o(\upsilon - u)$$

c'est à dire que F est différentiable au sens de Fréchet et sa dérivée classique coïncide avec $F'(u)$.

1.3.4 Points critiques

Définition 1.3.4 *Soit ω un ouvert d'un espace de Banach réel X et $F : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $m \in \omega$ est un maximum relatif (resp. un minimum relatif) s'il existe un voisinage V de m tel que pour tout $x \in \omega \cap V$, on a $f(x) \leq f(m)$ (resp $f(x) \geq f(m)$). Un point qui est un maximum ou un minimum est un extremum.*

Définition 1.3.5 *Soient X un espace de Banach, $w \subset X$ un ouvert et $F \in C^1(w, \mathbb{R})$. On dit que u est un point critique de F, si $F'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de F.*

Remarque 1.3.3 *Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $F'(u) = 0$ correspond a une équation aux dérivées partielles, on dit que $F'(u) = 0$ est l'équation d'Euler satisfaite par le point critique u.*

Exemple 1.3.1 *L'exemple le plus simple de points critiques d'une fonctionnelle $F \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ est un point extrémal, c-à-d le point où F atteint un maximum ou un minimum.*

Définition 1.3.6 *Soit $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de $F \in C^1(w, \mathbb{R})$, s'il existe $u \in w$ tel que $F(u) = c$ et $F'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de F.*

1.3.5 Continuité et différentiabilité de quelques opérateurs

Lemme 1.3.1 (*Voir* [13], *page* 92)

Soit $N \geq 2$, $k \in (0,2)$ et $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$

Pour $z \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, posons $\Psi(u) = z|x|^{-k}|u|^{p-1}u$ et $\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} z|x|^{-k}|u|^{p+1}dx$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées

1. *$\Psi \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^*(\mathbb{R}^N))$ et $\exists c_1 > 0$ telle que*

$$\|\Psi(u)\|_{H^*(\mathbb{R}^N)} \leq c_1 \|u\|^p_{H^1(\mathbb{R}^N)} \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

2. *Nous posons*

$$\Theta(u)[v,w] = \int_{\mathbb{R}^N} z\,|x|^{-k}\,|u|^{p-1}\, v\ w\ dx,\ \ \forall u,v,w \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Alors $\Theta(u)$ *est une forme bilinéaire symétrique bornée* $\forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Il existe un opérateur* $B(u) \in L(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), H^*\left(\mathbb{R}^N\right))$ *tel que*

$$\Theta(u)[v,w] = \langle B(u)v, w\rangle_{H^*(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)},\ \forall v,w \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

De plus $B \in C(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), L(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), H^*\left(\mathbb{R}^N\right)))$ *et*

$$\|B(u)\|_{L(H^1(\mathbb{R}^N),H^*(\mathbb{R}^N))} \leq c_1\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p-1},\ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

En outre $\Psi \in C^1(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), H^*\left(\mathbb{R}^N\right))$ *et* $\Psi'(u) = pB(u),\ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

3. $\Phi(u) \in C^2(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R})$ *avec*

$$\Phi'(u)v = (p{+}1)\,\langle \Psi(u), v\rangle_{H^*(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)} = (p{+}1)\int_{\mathbb{R}^N} z\,|x|^{-k}\,|u|^{p-1}\,u\ vdx,\ \forall u,v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et

$$\Phi''(u)[v,w] = p(p{+}1)\Theta(u)[v,w] = p(p{+}1)\int_{\mathbb{R}^N} z\,|x|^{-k}\,|u|^{p-1}\,v\ wdx,\ \forall u,v,w \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

1.4 Multiplicateurs de Lagrange

Dans plusieurs cas, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes ou sur une variété.

D'où l'utilité de préciser le sens qu'on donne à un point critique ou à une valeur critique sur un ensemble de contraintes.

Définition 1.4.1 *Soit* X *un espace de Banach,* $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ *est un ensemble de contraintes*

$$S = \{v \in X;\ F(v) = 0\}$$

On suppose $\forall u \in S$, *on a* $F'(u) \neq 0$. *Si* $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ *on dit que* $c \in \mathbb{R}$ *est valeur critique de* J *sur* S, *s'il existe* $u \in S$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $J(u) = c$ *et* $J'(u) = \lambda F'(u)$.

Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Remarque 1.4.1 *Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = \lambda F'(u)$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation d'Euler Lagrange satisfaite par le point critique u sur la contrainte S.*

Donnons un résultat qui établie l'existence d'un multiplicateur de Lagrange.

Proposition 1.4.1 (*Voir* [16] , *page* 55)

Sous les hypothèses de la définition précédente, supposons que $u_0 \in S$ est tel que

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$$

Alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$$

1.5 Fonctionnelles minorées

Soit E un espace topologique, une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (en abrégé *s.c.i.*) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E;\ F(x) \leq \lambda\}$ est fermé.
On dit que F est semi-continue supérieurement (en abrégé *s.c.s.*) si $-F$ est *s.c.i.*

Définition 1.5.1 *Soit E un espace de Banach, V est une partie de E. Une fonction $J : V \to \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement s.c.i si pour toute suite (u_n) de V convergeant faiblement vers $u \in V$ on a $J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n)$*

Une fonction $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement continue $(f.s.c)$ si pour toute suite (u_n) de $H^1(\mathbb{R}^N)$ convergeant faiblement vers $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ on a $J(u_n) \to J(u)$ fortement.

1.6 La symétrisation de Schwarz

La symétrisation de Schwarz est une méthode de modélisation de certains problèmes de la physique, et aussi l'un des principaux outils dans l'étude des inégalités isopérimétriques (inégalité portant sur le volume d'une large famille de domaines et le volume de leurs frontières respectives) et les problèmes de compacité.

Plusieurs types de symétrisation sont connus dans la littérature mathématique, on peut citer la symétrisation de Steiner, la symétrisation de chapeau et la symétrisation de Schwarz, que l'on va considérer dans ce mémoire.

La symétrisation de Schwarz est aussi connue comme le réarrangement décroissant des fonctions à symétrie sphérique. Ce type de symétrisation consiste de passer d'une fonction quelconque à une fonction radiale décroissante, tout en conservant la norme dans les espaces L^p, et en faisant décroître la norme du gradient pour certaines classes de fonctions admissibles, alors pour quelques problèmes variationnels on peut utiliser u^* (où u^* est la symétrisation de Schwarz de la fonction u) au lieu de la fonction générale u.

Ces propriétés nous permettent de démontrer l'existence de solutions de quelques équations elliptiques avec perte de compacité où les méthodes classiques sont difficiles à utiliser.

1.6.1 Les fonctions à symétrie sphérique

Une fonction $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, avec $N \geq 2$ est dite à symétrie sphérique si pour toute matrice de rotation S agissant sur $\mathbb{R}^N$ on a

$$u\,(Sx) = u\,(x)\,, \text{ p.p sur } \mathbb{R}^N$$

On dit alors que u est radiale, car pour $r > 0$, en posant $f\,(r) = u\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $|x| = r$, on définit une fonction f p.p sur $\mathbb{R}_+$ qui permet de reconstruire entièrement u.

Si la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$ on dit alors que u radiale décroissante.

1.6.2 Le réarrangement décroissant

Il ya plusieurs réarrangements de fonctions possibles dont l'idée générale est la suivante :

Etant donné une fonction u de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}$ donnée, on cherche une fonction u^* ayant des propriétés fixées à l'avance et équimesurable avec u, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t > \min u,\ mes\left(\{u^* > t\}\right) = mes\left(\{u > t\}\right)$$

Où mes désigne la mesure de Lebesgue et $\{u > t\}$ est l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^N$ tels que $u(x) > t$.

En particulier, cela implique

$$\int_{\mathbb{R}^N} F\left(u\left(x\right)\right)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(u^*\left(x\right)\right)\ dx$$

Où F est une fonction mesurable quelconque sur $\mathbb{R}$, et signifie notamment que les normes L^p de u et u^* sont égales.

De plus si u est une fonction de $H_0^1\left(\Omega\right)$, alors u^* est une fonction de $H_0^1\left(B\right)$, où B est la boule de même volume que Ω, et que sa norme est plus petite, c'est-à-dire que

$$\int_B \left|\nabla u^*\right|^2\ dx \leq \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2\ dx$$

Théorème 1.6.1 (*Voir* [16] , *page* 260)

Soient $1 \leq p \leq \infty$ *et* $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *une fonction positive.*

Il existe une fonction unique $u^* \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *telle que* $u^* \geq 0$ *et* $\forall\lambda > 0$

$$mes\left(\left[u^* \geq \lambda\right]\right) = mes\left(\left[u \geq \lambda\right]\right)$$

Où l'ensemble $[u \geq \lambda]$ *est une boule* $B\left(0, \lambda\right)$*.*

La fonction u^* *est radiale décroissante et on l'appelle le réarrangement décroissant, ou la symétrisée de Schwarz de la fonction* u*.*

De plus pour toute fonction continue et croissante $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $G\left(0\right) = 0$*, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\left(u\left(x\right)\right)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(u^*\left(x\right)\right)\ dx$$

Proposition 1.6.1 (*Voir* [16] , *page* 264)

Soit $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ *une fonction positive. Alors la symétrisée* u^* *appartient à* $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 \ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx$$

1.7 Variétés différentielles

1.7.1 Homéomorphisme

Définition 1.7.1 *Soient* E *et* F *des espaces topologiques.*

On appelle homéomorphisme de E *sur* F *une bijection de l'ensemble des ouverts de* E *sur l'ensemble des ouverts de* F*.*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une bijection de E *sur* F *soit homéomorphisme est qu'elle soit bicontinue.*

Remarque 1.7.1 *Toute bijection continue d'un espace complet sur un autre est un homéomorphisme.*

1.7.2 Difféomorphismes et isomorphismes

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts dans des espaces normés E et F.

Définition 1.7.2 *Un difféomorphisme est une bijection différentiable* $f : U \to V$ *telle que* f^{-1} *soit également différentiable.*

Si $f : U \to V$ *est un difféomorphisme alors*

$$f \circ f^{-1} = I_V \text{ et } f^{-1} \circ f = I_U$$

on peut alors dériver en tous points $x \in U$ *et* $y = f(x) \in V$

$$Df(x) \circ D\left(f^{-1}\right)(y) = I_F \text{ et } D\left(f^{-1}\right)(y) \circ Df(x) = I_E$$

Ce qui indique que $Df(x)$ *et* $D(f^{-1})(y)$ *sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.*

Cela s'écrit

$$D\left(f^{-1}\right)(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$$

Proposition 1.7.1 *(Voir* [8] , *page* 35)

Si f est un difféomorphisme, alors en tout point sa différentielle est un isomorphisme vérifiant

$$D\left(f^{-1}\right)(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$$

Si de plus, f est C^k alors f^{-1} l'est également.

Remarque 1.7.2 *L'existence d'un difféomorphisme entre U et V fait que les espaces E et F sont isomorphes. Il ne peut donc exister de difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$, lorsque $m \neq n$.*

Ce que l'on appelle habituellement un "changement de variables" est en fait un difféomorphisme.

1.7.3 Variété topologique

Définition 1.7.3 *Une variété topologique à m dimensions est un espace topologique M dont tout point a admet un voisinage ouvert U homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$.*

La donnée d'un tel homéomorphisme :

$$x : U \to V \subset \mathbb{R}^m$$

est appelée carte locale de M au voisinage de a.

L'ouvert $U \subset M$ est le domaine de la carte.

1.7.4 Sous variétés

Définition 1.7.4 *Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous variété différentiable de dimension $p \leq n$, si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ de sorte que*

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}\right)$$

Remarque 1.7.3 *Si le difféomorphisme est de classe C^m, M sera dite sous variété de classe C^m.*

1.7.5 Variété de Nehari

Nous terminons ce chapitre en introduisant la notion de variété de Nehari. Cette notion nous permettra dans le chapitre 3, de construire, en minimisant l'énergie sur cette variété en question, des points critiques du problème elliptique semi linéaire (E_λ) soumis aux conditions $(H_0) - (H_4)$.

Définition 1.7.5 *La variété de Nehari, notée N_λ , est l'ensemble des points u de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que*

$$J_\lambda\left(u\right) = 0$$

où J_λ est une fonctionnelle, autrement dit

$$N_\lambda = \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\} : J_\lambda\left(u\right) = 0\right\}$$

CHAPITRE 2

L'équation de Schrödinger linéaire

2.1 Introduction

De nombreuses équations aux dérivées partielles, qui permettent de modéliser l'évolution d'un système au cours du temps, peuvent être reformulées sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait.

On s'intéresse dans ce chapitre à l'opérateur de Schrödinger $P = \frac{\partial}{\partial t} - i\Delta_x$ et à l'équation d'évolution qui lui est associée

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0, \text{ dans } D^{'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \\ \qquad u_0 = g \end{cases} \tag{1.1}$$

dont l'inconnu est une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Les arguments de u sont les variables d'espace $x_1, x_2, ..., x_N$, et le temps t. Le Laplacien Δ_x vaut $\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

2.2 Le problème de Cauchy

Nous étudions le problème de Cauchy avec des données dans $S^{'}(\mathbb{R}^N)$, $S(\mathbb{R}^N)$ et enfin des données dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Avant d'énoncer les théorèmes, nous rappelons d'abord quelques propriétés de l'espace $C^k(I, D^{'}(\Omega))$ et des distributions tempérées.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $t \in I$, tel que T_t est un élément de $D^{'}(\Omega)$.

Définition 2.2.1 *On dit que* $(T_t) \in C^k(I, D^{'}(\Omega))$ *si*
$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *l'application de* I *dans* $\mathbb{R}$, $t \longmapsto \langle T_t, \varphi \rangle$ *est de classe* C^k, *avec* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 2.2.1 *Soit* $(T_t) \in C^k(I, D^{'}(\Omega))$. *Pour tout* $0 \leq s \leq k$ *et pour tout* $t \in I$, *il existe une distribution* $T_t^{(s)}$ *telle que* $\left(T_t^{(s)}\right) \in C^{k-s}(I, D^{'}(\Omega))$ *et*

$$\left[\left(\frac{d}{d\,t}\right)^s \langle T_t, \varphi \rangle\right](t_0) = \left\langle T_{t_0}^{(s)}, \varphi \right\rangle, \ \forall t_0 \in I, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Démonstration. Nous démontrons pour $k = 0$ et $k = 1$ et pour $k > 1$ se démontre par récurrence.

Soit $k = 0$, on a $s = 0$, donc il suffit de prendre $T_t^{(0)} = T_t$.

Pour $k = 1$, $s = 1$. Soit $t_0 \in I$ et (ϵ_j) une suite de réels tendant vers zéro.

Posons $T_j = \frac{T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0}}{\epsilon_j}$, comme $(T_t) \in C^k(I, D^{'}(\Omega))$, alors $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\langle T_j, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{R}$ et qui est égale à $\left[\left(\frac{d}{d\,t}\right) \langle T_t, \varphi \rangle\right](t_0)$.

Donc il existe une distribution $T_{t_0}^{(1)}$ telle que $\langle T_j, \varphi \rangle \to \left\langle T_{t_0}^{(1)}, \varphi \right\rangle$.

Par conséquent, $\left[\left(\frac{d}{d\,t}\right) \langle T_t, \varphi \rangle\right](t_0) = \left\langle T_{t_0}^{(1)}, \varphi \right\rangle$, et comme le membre de gauche est continu, on a $\left(T_{t_0}^{(1)}\right) \in C^0(I, D^{'}(\Omega))$. ■

Proposition 2.2.2 *Soit* (T_t) *une suite de* $C^1(I, D^{'}(\Omega))$ *et* ψ *un élément de* $C_0^\infty(I \times \Omega)$. *Alors l'application* $t \longmapsto \langle T_t, \psi(t,.) \rangle_{\acute{D}(\Omega)}$ *est de classe* C^1 *sur* I *et vérifie*

$$\frac{d}{dt} \langle T_t, \psi(t,.) \rangle = \left\langle T_t^{(1)}, \psi(t,.) \right\rangle + \left\langle T_t, \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,.) \right\rangle \tag{*}$$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ et $(\epsilon_j) \to 0$ lorsque $j \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle T_t, \psi(t,.) \rangle &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\epsilon_j} \left[\left\langle T_{t_0+\epsilon_j}, \psi(t_0+\epsilon_j,.) \right\rangle - \langle T_{t_0}, \psi(t_0,.) \rangle\right] \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\epsilon_j} \left[\left\langle T_{t_0+\epsilon_j}, \psi(t_0+\epsilon_j,.) - \psi(t_0,.) \right\rangle\right] + \frac{1}{\epsilon_j} \left\langle T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0}, \psi(t_0,.) \right\rangle
\end{aligned}$$

D'après la proposition précédente

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\epsilon_j}\left\langle T_{t_0+\epsilon_j}-T_{t_0},\psi(t_0,.)\right\rangle=\left\langle T_t^{(1)},\psi(t,.)\right\rangle$$

D'autre part, $T_{t_0+\epsilon_j}\to T_{t_0}$ dans $D^{'}(\Omega)$ et

$\psi_j=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\epsilon_j}\left(\psi(t_0+\epsilon_j,.)-\psi(t_0,.)\right)\to\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)$ dans $C_0^\infty(K)$, où K est un compact, tel que *supp* $\psi_j\subset K$. D'où le résultat. ■

Maintenant on va rappeler quelques remarques sur les distributions tempérées quand va utiliser dans les démonstrations.

Définition 2.2.2 *$S^{'}(\mathbb{R}^N)$ est le dual topologique de $S(\mathbb{R}^N)$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}$, avec $S(\mathbb{R}^N)$ est constitué des fonctions u appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^N,\ \exists C_{\alpha,\beta}>0,\ \left|x^\alpha\partial^\beta u(x)\right|\leq C_{\alpha,\beta},\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}^N$$

Remarques 2.2.1 *1) Soit $T\in S^{'}(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi\in C^k(I,S)$, où $k\in\mathbb{N}$ et I est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On pose $F(t)=\langle T,\varphi(t,.)\rangle$, alors $F\in C^k(I)$.*

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut définir l'espace $C^k(I,S^{'}(\mathbb{R}^N))$ en disant que $(T_t)\in C^k(I,S^{'}(\mathbb{R}^N))$ si, pour tout $\varphi\in S(\mathbb{R}^N)$, l'application de I dans $\mathbb{R}$, $t\longmapsto\langle T_t,\varphi\rangle$ appartient à $C^k(I)$.

2.2.1 Donnée dans $S^{'}(\mathbb{R}^N)$

Énonçons le théorème qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution u du problème (1.1).

Théorème 2.2.1 *Soit $g\in S^{'}(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe une unique solution $u=(u_t)\in C^\infty(\mathbb{R},S^{'}(\mathbb{R}^N))$ telle que (1.1) soit vérifié.*

Démonstration. a) Existence: Soit $t\in\mathbb{R}$.

$g\in S^{'}(\mathbb{R}^N)$ implique que $\hat{g}\in S^{'}(\mathbb{R}^N)$, et $e^{-it|\xi|^2}\hat{g}\in S^{'}(\mathbb{R}^N)$, posons

$$u_t=\bar{F}(e^{-it|\xi|^2}\hat{g})\tag{1.2}$$

On a donc $u_t \in S^{'}(\mathbb{R}^N)$.

D'autre part $u_0 = g$ et pour $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle u_t, \hat{\varphi} \rangle = \left\langle \bar{F}(e^{-it|\xi|^2} \hat{g}), \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle e^{-it|\xi|^2} \hat{g}, \varphi \right\rangle = \left\langle \hat{g}, e^{-it|\xi|^2} \varphi \right\rangle$$

En utilisant les deux remarques de (2.2.1), on obtient que $u_t \in C^\infty(\mathbb{R}, S^{'}(\mathbb{R}^N))$, et comme $\langle u_t, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u}_t, \varphi \rangle$ on a aussi $\hat{u}_t \in C^\infty(\mathbb{R}, S^{'}(\mathbb{R}^N))$.

Rappelons ensuite que u est définie par

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle u_t, \psi(t,.) \rangle \ dt, \ \forall \psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \tag{1.3}$$

Pour $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, montrons que $\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi \right\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \psi \right\rangle - i \langle \Delta u, \psi \rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle - i \langle u, \Delta \psi \rangle \\
&= - \left\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \bar{F} \ \hat{u}_t, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle dt = - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t, \bar{F}(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi) \right\rangle dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle e^{-it|.|^2} \hat{g}, (\frac{\partial}{\partial t} - i\,|.|^2) \bar{F} \psi(t,.) \right\rangle dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{g}, \frac{\partial}{\partial t} (e^{-it|.|^2} \bar{F} \psi(t,.)) \right\rangle dt \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi \right\rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \hat{g}, (e^{-it|.|^2} \bar{F} \psi(t,.)) \right\rangle dt = 0
\end{aligned}$$

Car $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \bar{F}\psi(t,\xi) = 0$. (puisque $D(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $S(\mathbb{R}^N)$ avec densité)

b) Unicité:

Soit u_1 et u_2 deux solutions de (1.1), et posons $u = u_1 - u_2$,
alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}, S^{'}(\mathbb{R}^N))$ et vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0$, $u_0 = 0$.
Montrons que $u \equiv 0$, pour tout $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi \right\rangle = - \left\langle u, (\frac{\partial}{\partial t} + i\Delta)\psi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, (\frac{\partial}{\partial t} + i\Delta)\psi(t,.) \right\rangle dt = 0$$

D'après $(*)$, on a

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, (\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,.)\right\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t,.)\right\rangle dt - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\left\langle u_t, \psi(t,.)\right\rangle dt$$

D'où

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t,.)\right\rangle dt - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\left\langle u_t, \psi(t,.)\right\rangle dt - i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \Delta\psi(t,.)\right\rangle dt = 0$$

Comme $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \psi(t,\xi) = 0$, alors

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t,.)\right\rangle dt - i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \Delta\psi(t,.)\right\rangle dt = 0,\ \forall\psi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \tag{1.4}$$

D'autre part, on a $Fu_t^{(1)} = \hat{u}_t^{(1)}$. En effet $\forall\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\langle F(u_t^{(1)}), \varphi\right\rangle = \left\langle u_t^{(1)}, \hat{\varphi}\right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle u_t, \hat{\varphi}\right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle \hat{u}_t, \varphi\right\rangle = \left\langle \hat{u}_t^{(1)}, \varphi\right\rangle$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t,.)\right\rangle dt - i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \Delta\psi(t,.)\right\rangle dt &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t^{(1)}, \bar{F}\ \psi(t,.)\right\rangle dt - i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t, \bar{F}\ (\Delta\psi(t,.))\right\rangle dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t^{(1)}, \bar{F}\ \psi(t,.)\right\rangle dt + i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t, |.|^2\, \bar{F}\psi(t,.)\right\rangle dt\end{aligned}$$

D'où

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t^{(1)}, \bar{F}\ \psi(t,.)\right\rangle dt + i\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t, |.|^2\, \bar{F}\psi(t,.)\right\rangle dt = 0 \tag{1.5}$$

Comme (1.5) est vrai $\forall\psi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, en particulier pour ψ telle que $\bar{F}\psi(t,\xi) = e^{it|\xi|^2}\varphi(\xi)\chi(t)$, où $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$ et $\chi \in S(\mathbb{R})$. On déduit que

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\left\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle + i\left\langle \hat{u}_t, |.|^2\, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle\right]\chi(t)dt = 0,\ \ \forall\chi \in S(\mathbb{R}) \tag{1.6}$$

La fonction entre crochets étant une fonction continue de t sur $\mathbb{R}$, il en résulte que

$$\left\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle + i\left\langle \hat{u}_t, |.|^2\, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle = 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ \forall\varphi \in S \tag{1.7}$$

Or d'après $(*)$ on a $\frac{d}{dt}\left\langle \hat{u}_t, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle = \left\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle + \left\langle \hat{u}_t, i\,|.|^2\, e^{it|.|^2}\varphi\right\rangle$.

D'où $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N)$ la fonction $t \longmapsto \left\langle \hat{u}_t, e^{it|.|^2}\varphi \right\rangle$ est constante. Donc

$$\left\langle \hat{u}_t, e^{it|.|^2}\varphi \right\rangle = \langle \hat{u}_0, \varphi \rangle = 0$$

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in S(\mathbb{R}^N)$ quelconque.

La fonction $\varphi(\xi) = e^{-it_0|\xi|^2}\theta(\xi)$ est dans $S(\mathbb{R}^N)$.

D'où

$$\left\langle \hat{u}_{t_0}, e^{it_0|.|^2}\varphi \right\rangle = \langle \hat{u}_{t_0}, \theta \rangle = 0$$

Donc $\hat{u}_{t_0} = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$,et $u_t = 0$,$\forall t \in \mathbb{R}$.

En utilisant (1.3) on aura, $u \equiv 0$. ■

2.2.2 Donnée dans $S(\mathbb{R}^N)$

Théorème 2.2.2 *Si $g \in S(\mathbb{R}^N)$, alors la solution u du problème* (1.1) *appartient à $C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^N))$, et elle est donnée par la formule*

$$u(t,x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi \tag{1.8}$$

Démonstration. Par (1.2) on a $u_t = \bar{F}(e^{-it|\xi|^2}\hat{g})$, et comme $g \in S(\mathbb{R}^N)$ on aura $\hat{g} \in S(\mathbb{R}^N)$ et $e^{-it|.|^2}\hat{g} \in S(\mathbb{R}^N)$, d'où $u_t \in S(\mathbb{R}^N)$.

Montrons que u_t vérifie (1.8), on a

$$u_t = \bar{F}(e^{-it|\xi|^2}\hat{g}) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi$$

D'autre part l'application $(t,x) \longmapsto u_t(x) = u(t,x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
on a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \forall x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
x^\alpha D_x^\beta u(t,x) &= (2\pi)^{-N} x^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\xi|^\beta e^{ix\xi} e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_\xi^\alpha (e^{ix\xi}) e^{-it|\xi|^2} |\xi|^\beta \hat{g}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} \left(-D_\xi^\alpha\right) \left[e^{-it|\xi|^2} |\xi|^\beta \hat{g}(\xi)\right] d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} P_{\alpha,\beta}(t,\xi) e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Où $P_{\alpha,\beta}$ est un polynôme en (t,ξ). D'après le théorème de la convergence dominée; Si $t_n \longrightarrow t_0$, alors $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha D_x^\beta \left(u(t_n,x) - u(t_0,x)\right)\right| \longrightarrow 0$. On montre de la même manière que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial_t^k u \in C^0\left(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^N)\right)$.

Par conséquent, $u_t \in C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^N))$. ■

2.2.3 Donnée dans $H^s(\mathbb{R}^N)$

Théorème 2.2.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$, si $g \in H^s(\mathbb{R}^N)$ alors la solution u du problème* (1.1) *appartient à $C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^N))$, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$(u_t^{(k)}) \in C^0(\mathbb{R}, H^{s-2k}(\mathbb{R}^N))$$

de plus

$$\begin{cases} \|u_t\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \ \forall t \in \mathbb{R} \\ \left\|u_t^{(k)}\right\|_{H^{s-2k}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{1.9}$$

Démonstration. Montrons d'abord (1.9). D'après la formule (1.2), on a $\hat{u}_t = e^{-it|\xi|^2}\hat{g}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $g \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $\hat{g}$ est une fonction mesurable, donc $\hat{u}_t$ l'est aussi.

$$\|u_t\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\|u_t\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|g\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

D'autre part $u_t^{(k)} = \bar{F}\left((-i\xi)^k e^{-it|\xi|^2}\hat{g}\right)$, donc $\exists\, c_k > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left\|u_t^{(k)}\right\|^2_{H^{s-2k}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-2k} (-i\xi)^{2k} \left|e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq c_k \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \|g\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

D'où (1.9) est vérifiée.

Soit t_n une suite qui converge vers t_0 dans $\mathbb{R}$, on a

$$\|u_{t_n} - u_t\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it_0|\xi|^2}\right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi$$

D'après le théorème de la convergence dominée on aura $\|u_{t_n} - u_t\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $t_n \to t_0$.

c.à.d $u \in C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^N))$.

de même

$$\left\|u^{(k)}_{t_n} - u^{(k)}_t\right\|^2_{H^{s-2k}(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-2k} (-i\xi)^{2k} \left|e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it_0|\xi|^2}\right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi$$

Donc $\left\|u^{(k)}_{t_n} - u^{(k)}_t\right\|^2_{H^{s-2k}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ lorsque $t_n \to t_0$, ce qui implique $(u^{(k)}_t) \in C^0(\mathbb{R}, H^{s-2k}(\mathbb{R}^N))$, $\forall k \in \mathbb{N}$. ∎

2.3 Propriétés des solutions

2.3.1 Forme de la solution

Théorème 2.3.1 *Si $g \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors pour tout $t \neq 0$, la solution du problème* (1.1) *s'écrit*

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\ t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right]\left(\frac{x}{2t}\right) \tag{1.10}$$

Où sgn t désigne le signe de t.

Démonstration. *Cas*1. Supposons $g \in C^\infty_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, la formule (1.2) donne $u_t(x) = \bar{F}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right)$ et d'après le théorème (2.2.2) on a

$$u(t,x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-N} \bar{F}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{g}\right)(x)$$

Et comme $T*S = \bar{F}\left(\hat{T}.\hat{S}\right)$, $\forall T \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $\forall S \in \xi'\left(\mathbb{R}^N\right)$ (d'après la remarque (1.2.2)) alors

$$u(t,x) = (2\pi)^{-N}\left[\bar{F}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) * g\right](x)$$

D'après $(B.3)$ dans les remarques (1.2.1) on aura

$$u(t,x) = (2\pi)^{-N} \frac{\pi}{|t|^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\ t} \left(e^{i\frac{.|x|^2}{4t}} * g\right)(x) \tag{1.11}$$

Or

$$\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} * g\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\, e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\ e^{-i\frac{x}{2t}y} e^{i\frac{y^2}{4t}} d\, y$$
$$= e^{i\frac{|x|^2}{4t}} F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\, g\right)\left(\frac{x}{2t}\right)$$

Remplaçant dans (1.11) on obtient le résultat

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi\,|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\ t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\, g\right)\right]\left(\frac{x}{2t}\right)$$

Cas 2. Supposons $g \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

On a $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ dense dans $S'\left(\mathbb{R}^N\right)$, donc

$$\forall g \in S'\left(\mathbb{R}^N\right), \exists\ g_k \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que } g_k \to g \text{ dans } S'\left(\mathbb{R}^N\right)$$

D'après le théorème (2.2.2), on a $u_k \in C^\infty\left(\mathbb{R}, S\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ où u_k est la solution du problème (1.1) avec donnée g_k, et d'après le théorème (2.2.1) on a

$$(u_k)_t = \bar{F}\left(e^{-it|x|^2}\hat{g}_k\right)$$

Or $\hat{g}_k \to \hat{g}$ dans $S'\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $e^{-it|x|^2}\hat{g}_k \to e^{-it|x|^2}\hat{g}$ dans $S'\left(\mathbb{R}^N\right)$,

donc $(u_k)_t \to (u)_t$ dans $S'\left(\mathbb{R}^N\right)$, où u solution de (1.1) avec donnée g.

D'autre part, $e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g_k \to e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g$ dans $S'\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Donc

$$F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g_k\right) \circ A_t \to F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right) \circ A_t \text{ dans } S'\left(\mathbb{R}^N\right)$$

avec $A_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N;\ x \longmapsto \frac{x}{2t}$.

D'où la formule (1.10) est vérifiée pour $g \in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$. ■

2.3.2 Dispersion

Théorème 2.3.2 *Pour tout $t \neq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, si $g \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors la solution u du problème* (1.1) *vérifie*

$$\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi\,|t|)^{\frac{-N}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

Démonstration. D'après (1.10) on a

$$u_t(x) = \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\, t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right]\left(\frac{x}{2t}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\|u_t(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \left\| \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\, t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} |t|^{-\frac{N}{2}} \left\| F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} |t|^{-\frac{N}{2}} \left\| F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} |t|^{-\frac{N}{2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.3.3 Vitesse infinie de propagation

Enonçons le corollaire qui donne la régularité de la solution qui dépend du comportement de la donnée à l'infini et non pas de sa régularité.

Corollaire 2.3.1 (i) *Soit u solution du problème* (1.1).

Si $g \in \varepsilon'\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors

$$u_t \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right),\ \forall t \neq 0$$

(ii) *Soient $\lambda > 0$ et $g(x) = e^{-i\lambda|x|^2}$, alors*

$$u_{\frac{1}{4\lambda}} = (4\pi\lambda)^{\frac{N}{2}} e^{i\lambda|.|^2} e^{-iN\frac{\pi}{4}} \delta_0$$

Démonstration.

(i) Comme $e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g \in \varepsilon'\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors $F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ d'après la remarque (1.2.2), en utilisant (1.10) on aura le résultat.

(ii) Toujours d'après (1.10), on a

$$\begin{aligned}u_{\frac{1}{4\lambda}}(x) &= \lambda^{\frac{N}{2}} \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda|x|^2} F\left(e^{i\lambda|x|^2} e^{-i\lambda|x|^2}\right) \\ &= \lambda^{\frac{N}{2}} \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda|x|^2} F(1) \\ &= \lambda^{\frac{N}{2}} \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda|x|^2} (2\pi)^N \delta_0, \text{ d'après } (B.2) \text{ dans les remarques } (1.2.1)\end{aligned}$$

Donc

$$u_{\frac{1}{4\lambda}} = (4\pi\lambda)^{\frac{N}{2}} e^{i\lambda|.|^2} e^{-iN\frac{\pi}{4}} \delta_0$$

■

Remarque 2.3.1 *On a d'après (i) une donnée qui n'est pas régulière qui a donné une solution de classe $C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. Tandis (ii), une donnée $C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ fournit une solution qui est singulière.*

le corollaire montre que la régularité de la solution pour $t \neq 0$, n'est pas reliée à la régularité de la donné en $t = 0$, mais de son comportement à l'infini.

Ce phénomène est connu sous le nom de propagation à Vitesse infinie.

CHAPITRE 3

L'équation de Schrödinger non-linéaire avec une non linéarité compacte

3.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'existence, régularité, unicité et la stabilité des ondes stationnaires de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\,w = 0,\ w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \ N \geq 2 \tag{NLS}$$

avec $N \geq 3$ et $p > 1$. Les solutions stationnaires sont sous la forme

$$w\,(t,x) = e^{i\lambda t}\ u\,(x)\,,\ \text{où}\ \lambda > 0\ \text{et}\ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

Une telle fonction est solution de (NLS) si et seulement si la fonction u satisfait l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0,\ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \ N \geq 2 \tag{E_λ}$$

Les solutions des équations (NLS) et (E_λ) sont des solutions faibles.

3.2 Etats fondamentaux

Dans cette section, nous présentons une approche variationnelle du problème elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0,\ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \tag{E_λ}$$

Où $p > 1$ et $V : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$. Nous prouvons sous certains hypothèses l'existence d'un état fondamental de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$, par une méthode de minimisation sous contrainte dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Un état fondamental est une solution faible non triviale de (E_λ) qui minimise la fonctionnelle dont (E_λ) est l'équation d'Euler Lagrange sur un certain sous-ensemble de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui contient toutes les solutions faibles non-triviales de (E_λ).

Les états fondamentaux sont des fonctions positives, radiales et radialement décroissantes, qui tendent vers zéro exponentiellement vite à l'infini. Nous établirons aussi des propriétés de régularité des états fondamentaux.

Nous verrons ensuite, pour $N \geq 3$ et pour chaque $\lambda > 0$, qu'il n'existe qu'une seule solution de (E_λ) ayant ces propriétés.

Formulons d'abord les hypothèses sous lesquelles nous démontrerons les résultats mentionnés ci-dessus :

(H_0) $V \in C\left(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}\right)$

(H_1) $V \in C^1\left(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}\right)$

(H_2) $\exists\ k \in (0,2)$ tel que $|x|^k\, V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$

(H_3) $V(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ et V est à symétrie sphérique, radialement strictement décroissante.

Si (H_1) est vérifiée, la fonction

$$\tilde{V}(r) : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ telle que } \tilde{V}(r) = V(x) \text{ pour } r = |x|$$

satisfait $\tilde{V}'(r) < 0$ pour tout $r > 0$.

(H_4) La fonction $\frac{r\tilde{V}'(r)}{\tilde{V}(r)}$ est décroissante sur $(0,\infty)$.

Exemple 3.2.1 *Des exemples typiques de fonctions satisfaisant les hypothèses* (H_0) *à* (H_4) *sont donnés par* $\tilde{V}(r) = r^{-k}$ *pour le cas où* V *est non borné et* $\tilde{V}(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}$ *pour le cas où* V *est borné.*

Remarque 3.2.1 *Les hypothèses* $(H_0), (H_2)$ *et* (H_3) *interviennent dans la démonstration de l'existence d'un état fondamental, les résultats de régularité nécessitent l'hypothèse* (H_1).

L'hypothèse (H_4) *ne sera utilisée que pour démontrer l'unicité de la solution.*

3.2.1 Existence

Soit V une fonction radiale et supposons que les hypothèses (H_0) et (H_2) sont satisfaites.

Nous munissons $H^1(\mathbb{R}^N)$ de la famille de normes équivalentes

$$\|u\|_\lambda = \left\{|\nabla u|_{L^2}^2 + \lambda |u|_{L^2}^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \forall\lambda > 0$$

Nous introduisons également la famille de produits scalaires correspondants à ces normes

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} + \lambda \langle u, v\rangle_{L^2}, \forall\lambda > 0$$

Considérons la fonctionnelle $\phi : H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p+1} dx \tag{2.1}$$

Grâce à l'inégalité $(A.2)$ du lemme $(1.1.1)$ et les hypothèses (H_0), (H_2) on a ϕ est bien définie et qu'il existe des constantes C, $C_\lambda > 0$ telles que

$$\begin{aligned} |\phi(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p+1} dx \right| \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{p+1} \leq C_\lambda \|u\|_\lambda^{p+1}, \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemme 3.2.1 *La fonctionnelle* ϕ *définie par* (2.1) *appartient à* $C^2(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R})$.

De plus, on a les formules suivantes

$$\phi'(u)v = (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u|^{p-1}\,u\ vdx,\ \forall u,v\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et

$$\phi''(u)[v,w] = p(p+1)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u|^{p-1}\,v\ wdx,\ \forall u,v,w\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Démonstration. D'après le lemme (1.3.1), posant $z(x) = V(x)\,|x|^k$ et identifiant ϕ avec Φ on aura $\phi \in C^2(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R})$, de plus

$$\phi'(u)v = (p+1)\int_{\mathbb{R}^N} z(x)\,|x|^{-k}\,|u|^{p-1}\,u\ vdx,\ \forall u,v\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et

$$\phi''(u)[v,w] = p(p+1)\int_{\mathbb{R}^N} z(x)\,|x|^{-k}\,|u|^{p-1}\,v\ wdx,\ \forall u,v,w\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Les deux formules sont ainsi satisfaites. ■

Lemme 3.2.2 *La fonctionnelle ϕ définie précédemment est faiblement séquentiellement continue $(f.s.c.)$ sur $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.*

Démonstration. Montrons que pour toute suite bornée (u_n) de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ on a $|\phi(u_n) - \phi(u)| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Soit $(u_n) \subset H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, et $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tels que $u_n \rightharpoonup u$, alors

$$\begin{aligned}|\phi(u_n) - \phi(u)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u_n|^{p+1}\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u|^{p+1}\,dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)|\,\left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|dx\end{aligned}$$

Or d'après (H_2), on a l'existence de $k \in (0,2)$ tel que $|x|^k\,V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Donc $\exists\ c > 0$ tel que $|V(x)| \leq c\,|x|^{-k}$

D'où

$$|\phi(u_n) - \phi(u)| \leq c\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-k}\,\left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|dx$$

Pour tout $R > 0$, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-k} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx \leq \left\{ \int_{B(0,R)} |x|^{-rk}\, dx \right\}^{\frac{1}{r}} \left\{ \int_{B(0,R)} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|^{s} dx \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$\forall\ r\ ,s \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, la première intégrale du membre de droite converge si $N - kr > 0$ c'est à dire $r < \frac{N}{k}$, donc $1 - \frac{1}{s} > \frac{k}{N}$ ce qui équivaut à $s > \frac{N}{N-k}$.

D'autre part, on a $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et d'après la compacité de l'injection de Sobolev sur les bornés réguliers de $\mathbb{R}^N$ et la continuité de l'application $u \to |u|^{p+1}$ de $L^{(p+1)s}\left(B\left(0,R\right)\right) \to L^{s}\left(B\left(0,R\right)\right)$, $s \geq 1$ impliquent que

$$\left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|_{L^s(B(0,R))} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Par conséquent $\exists\ C > 0$, tel que

$$\int_{B(0,R)} |x|^{-k} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx \leq C \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|_{L^s(B(0,R))} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Traitons maintenant l'intégral sur le complément de $B\left(0,R\right)$. Fixons $\epsilon > 0$, et supposons $R \geq \epsilon^{\frac{-1}{k}}$.

On a $|x| \geq R$ ce qui implique $|x|^{-k} \leq R^{-k} \leq \epsilon$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |x|^{-k} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx$$

Par le prolongement de Sobolev et le fait que (u_n) est bornée dans $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, on aura l'existence de $C_1 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |x|^{-k} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx \leq C_1 \epsilon$$

Donc

$$|\phi\left(u_n\right) - \phi\left(u\right)| \leq K_1 \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right|_{L^s(B(0,R))} + K_2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |x|^{-k} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1}\right| dx \leq \epsilon$$

D'où $\phi\left(u_n\right) \to \phi\left(u\right)$ lorsque $n \to \infty$. ■

Nous commencerons par montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on peut définir sur $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ une fonctionnelle S_λ dont (E_λ) est l'équation d'Euler-Lagrange associée. Ensuite, nous présenterons la méthode de minimisation sous contrainte que nous allons employer, ce qui nous conduira naturellement à la définition d'état fondamental. Le reste de cette partie est consacré à la démonstration d'existence d'un état fondamental de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$.

Soit $S_\lambda : H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{(p+1)}\phi(u)$$

D'après le lemme (1.3.1) on a $S_\lambda \in C^2\left(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$ avec

$$S'_\lambda(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1} u\, v dx,\ \forall u, v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{2.3}$$

et

$$S''_\lambda(u)[v, w] = \langle v, w\rangle_\lambda - p\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1} v\, w dx,\ \forall u, v, w \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{2.4}$$

Maintenant on va définir les solutions faibles non triviales de (E_λ) comme étant les points critiques de S_λ.

Définition 3.2.1 *Une fonction $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ est une solution faible de (E_λ) si $S'_\lambda(u) = 0$ c'est à dire*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\ \nabla v + \lambda u\ v\ dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1} u\, v dx = 0,\ \forall v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Remarques 3.2.2 *(i) Une solution classique est une fonction $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}\right)$ qui vérifie (E_λ).*

(ii) Nous dirons qu'une solution, faible ou classique, est non-triviale si elle n'est pas identiquement nulle.

(iii) En utilisant la densité de $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ dans $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, on montre facilement que toute solution classique est aussi solution faible.

Chercher des solutions faibles de (E_λ) revient à chercher des points critiques de S_λ. Mais la fonctionnelle S_λ n'est ni bornée inférieurement ni supérieurement sur $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Par conséquent, on ne peut pas trouver des points critiques qui soient des points d'extremum global de S_λ. Pour contourner cette difficulté on va utiliser une méthode de minimisation sous contrainte qui due à *Nehari* et qui consiste à minimiser S_λ sur une sous-variété qui contient toutes les solutions faibles non-triviales de (E_λ) et qui est appelée variété de *Nehari*. Il s'avère que, restreinte à cette sous-variété, la fonctionnelle S_λ est bornée inférieurement. Nous allons voir que, grâce à la continuité séquentielle faible de ϕ, et utilisant la technique de symétrisation de Schwarz, il est possible d'établir l'existence d'un minimiseur de S_λ sur la variété de *Nehari* qui soit une fonction positive et radiale. Il découle des propriétés de la variété de *Nehari* et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange que tous les minimiseurs de S_λ sur la variété de *Nehari* sont des points critiques de S_λ.

La contrainte est donnée par la fonctionnelle $J_\lambda \in C^2\left(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$ définie par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(u)$$

La variété de *Nehari* $N_\lambda \subset H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ est ainsi définie par

$$N_\lambda = \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\} : J_\lambda(u) = 0\right\}$$

Maintenant on va étudier le problème de minimisation suivant

$$m_\lambda = \inf\left\{S_\lambda(u) : u \in N_\lambda\right\} \tag{2.5}$$

Définition 3.2.2 *Une fonction $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ est appelée état fondamental de (E_λ) si c'est un minimiseur du problème* (2.5).

Énonçons le lemme qui affirme qu'un état fondamental est une solution faible de (E_λ), et qui donne quelques propriétés importantes de la variété N_λ.

Lemme 3.2.3 *Supposons que les hypothèses (H_0) et (H_2) sont vérifiées.*

(i) Si u est une solution faible de (E_λ), alors $u \in N_\lambda$.

(ii) $\exists\ \delta_\lambda > 0$ *tel que* $\|u\|_\lambda \geq \delta_\lambda$, $\forall u \in N_\lambda$.

(iii) N_λ *est une sous-variété de* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *de classe* C^2.

(iv) *Pour tout* $u \in N_\lambda$, $S_\lambda(u) = A(p)\|u\|_\lambda^2$ *où* $A(p) = \frac{p-1}{2(p+1)} > 0$.

(v) *Si* $u \in N_\lambda$ *et* $S_\lambda(u) = m_\lambda$, *alors* u *est une solution de* (E_λ).

Démonstration.

(i) Soit u solution faible de (E_λ), alors $S'_\lambda(u) = 0$, or $S'_\lambda(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \phi(u) = 2J_\lambda(u)$, c'est à dire

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}S'_\lambda(u)u,\ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{2.6}$$

D'où $J_\lambda(u) = 0$. Donc $u \in N_\lambda$.

(ii) Soit $u \in N_\lambda$ implique que $J_\lambda(u) = 0$, et comme $S'_\lambda(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \phi(u) = 2J_\lambda(u)$, on aura

$$\|u\|_\lambda^2 = \phi(u),\ \forall u \in N_\lambda \tag{2.7}$$

D'après (2.2) on a $|\phi(u)| \leq C_\lambda \|u\|_\lambda^{p+1}$.

Donc

$$\|u\|_\lambda^2 = \phi(u) \leq C_\lambda \|u\|_\lambda^{p+1}$$

où $C_\lambda > 0$.

Le résultat suit du fait que $p > 1$.

Ce qui équivaut à $\|u\|_\lambda \geq \delta_\lambda$ avec $\delta_\lambda = \left(\frac{1}{C_\lambda}\|u\|_\lambda^2\right)^{\frac{1}{p+1}}$.

(iii) Découle du théorème de submersion car, pour tout $u \in N_\lambda$

$$J'_\lambda(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi'(u)u = \phi(u) - \frac{p+1}{2}\phi(u) = \frac{1-p}{2}\phi(u) < 0 \tag{2.8}$$

Puisque $p > 1$ et $\|u\|_\lambda^2 = \phi(u)$, $\forall u \in N_\lambda$ d'après (2.7).

(iv) Pour tout $u \in N_\lambda$, d'après (2.7) on a $\|u\|_\lambda^2 = \phi(u)$.

Or $S_\lambda(u)u = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+1}\phi(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|_\lambda^2 = \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_\lambda^2$.

d'où le résultat.

(v) Soit $u \in N_\lambda$ et $S_\lambda(u) = m_\lambda$, c'est à dire que u est un minimiseur du problème (2.5).

D'après la proposition (1.4.1) il existe un multiplicateur de Lagrange $\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$S'_\lambda(u)v = \xi\ J'_\lambda(u)\ v,\ \forall v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

posons $v = u$, on aura

$$S'_\lambda(u)u = \xi\ J'_\lambda(u)\ u$$

Par (2.6), et le fait que $u \in N_\lambda$, on a $S'_\lambda(u)u = 0$, d'autre par, nous avons $J'_\lambda(u)\,u < 0$ par (2.8).

Par conséquent $\xi = 0$ et $S'_\lambda(u) = 0$. Donc u est une solution de (E_λ).

■

Remarque 3.2.3 (a) *Les points* (ii) *et* (iv) *du Lemme* (2.1.3) *impliquent que* $m_\lambda > 0$, *de sorte que* $S_\lambda > 0$ *sur* N_λ.

(b) *Le point* (iv) *implique que toute suite minimisante pour le problème* (2.5) *est bornée.*

Pour la démonstration de l'existence d'un état fondamental de (E_λ), nous aurons besoin du lemme suivant qui établit l'existence d'une projection lisse de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\}$ sur N_λ.

Lemme 3.2.4 *Soit u solution faible de* (E_λ), *il existe une fonction* $t_\lambda \in C^2\left(H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\}, (0,\infty)\right)$ *qui jouit des propriétés suivantes.*

(i) $\forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\}$ *et* $t \in \mathbb{R}$, $t\ u \in N_\lambda$ *si el seulement si* $t = t_\lambda(u)$.

(ii) *Pour tout* $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\}$, *nous avons que* $t_\lambda(u) \leq 1$ *si* $J_\lambda(u) \leq 0$ *et* $t_\lambda(u) \geq 1$ *si* $J_\lambda(u) \geq 0$.

Démonstration. La fonction définie par

$$t_\lambda(u) = \left\{ \frac{\|u\|_\lambda^2}{\phi(u)} \right\}^{\frac{1}{p-1}}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\}$$

a les propriétés énoncées, en effet

(i) Soit u solution faible de (E_λ), on a d'après (i) du lemme (3.2.3) que $u \in N_\lambda$, donc si $t = t_\lambda(u)$ alors $t\ u \in N_\lambda$.

Supposant maintenant que $t\ u \in N_\lambda$, alors (2.7) donne

$$\begin{aligned} \|tu\|_\lambda^2 = \phi(tu) &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |tu|^{p+1}\, dx = |t|^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p+1}\, dx \\ &= |t|^{p+1} \phi(u) \end{aligned}$$

c'est à dire $t^{p-1} = \frac{\|u\|_\lambda^2}{\phi(u)}$, d'où $t = t_\lambda(u)$.

(ii) Si $J_\lambda(u) \leq 0$ alors

$$\|u\|_\lambda^2 - \phi(u) \leq 0$$

Donc $\|u\|_\lambda^2 \leq \phi(u)$, par conséquent $t_\lambda(u) \leq 1$.

De même pour $J_\lambda(u) \geq 0$ on a $t_\lambda(u) \geq 1$.

■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence d'un état fondamental de (E_λ).

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses (H_0), (H_2) et (H_3) sont satisfaites. Alors $\forall \lambda > 0$, il existe une fonction $\psi_\lambda \in N_\lambda$ telle que $S_\lambda(\psi_\lambda) = m_\lambda$. De plus, ψ_λ est positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Démonstration. Considérons une suite $(u_n) \subset N_\lambda$ telle que $S_\lambda(u_n) \to m_\lambda$ lorsque $n \to \infty$.

Si $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ implique que $|u| \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, donc S_λ et J_λ ne changent pas lorsqu'on remplace u par $|u|$, nous pouvons supposer que $u_n \geq 0$.

Soit alors la suite $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ définie par $v_n = t_\lambda(u_n^*)\, u_n^*$, où u_n^* est la symétrisation de Schwarz de u_n et t_λ est la projection donnée par le lemme (3.2.4).

Nous allons montrer que (v_n) est aussi une suite minimisante pour le problème (2.5).

D'après les propriétés de la symétrisation de Schwarz, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^*)^2 \; dx \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \; dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^*|^2 \; dx$$

De plus puisque la fonction $s \mapsto |s|^{p+1}$ est croissante sur $[0, \infty[$ et comme $V = V^*$ par (H_3), nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \; u_n^{p+1} \; dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V^*(x) \; \left(u_n^{p+1}\right)^* \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \; (u_n^*)^{p+1} \; dx$$

ainsi, $\|u_n\|_\lambda^2 \geq \|u_n^*\|_\lambda^2$ et $\phi(u_n) \leq \phi(u_n^*)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n^*) &= \frac{1}{2}\|u_n^*\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(u_n^*) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(u_n) = J_\lambda(u_n) = 0, \text{ car } (u_n) \subset N_\lambda \end{aligned}$$

Donc $J_\lambda(u_n^*) \leq 0$ et d'après le lemme (3.2.4), on aura $t_\lambda(u_n^*) \leq 1$

Par construction $v_n = t_\lambda(u_n^*)\, u_n^* \in N_\lambda$, et d'après (iv) du lemme (3.2.3) on a

$$\begin{aligned} m_\lambda &\leq S_\lambda(v_n) = A(p)\|v_n\|_\lambda^2 = A(p)\|t_\lambda(u_n^*)\, u_n^*\|_\lambda^2 = A(p)\, t_\lambda(u_n^*)^2 \|u_n^*\|_\lambda^2 \\ &\leq A(p)\|u_n^*\|_\lambda^2 \leq A(p)\|u_n\|_\lambda^2 = S_\lambda(u_n) \to m_\lambda \end{aligned}$$

Donc $(v_n) \subset N_\lambda$ est aussi une suite minimisante.

D'après (b) de la remarque (3.2.3), (v_n) est borné dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nous allons montrer que $v \in N_\lambda$ et $S_\lambda(v) = m_\lambda$.

Puisque ϕ est $(f.s.c)$ par le lemme (3.2.2), nous avons que

$$\phi(v) = \lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_\lambda^2, \text{ d'après } (2.7)$$

$$\phi(v) \geq \delta_\lambda^2 > 0, \text{ d'après } (ii) \text{ du lemme } (3.2.3)$$

On en déduit que $v \neq 0$.

Maintenant, comme $\|.\|_\lambda^2$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement, on a

$$\begin{aligned} J_\lambda(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(v) \\ &\leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\inf\|v_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(v) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\inf\phi(v_n) - \frac{1}{2}\phi(v) = 0 \end{aligned}$$

et donc $t_\lambda(v) \leq 1$ par le lemme (3.2.4).

Nous allons voir que $t_\lambda(v) = 1$. Puisque $t_\lambda(v)\,v \in N_\lambda$ on a

$$\begin{aligned} m_\lambda &\leq S_\lambda(t_\lambda(v)\,v) = A(p)\|t_\lambda(v)\,v\|_\lambda^2 = A(p)\,t_\lambda(v)^2\|v\|_\lambda^2 \leq A(p)\|v\|_\lambda^2 \\ &\leq A(p)\lim_{n\to\infty}\inf\|v_n\|_\lambda^2 = \lim_{n\to\infty}S_\lambda(v_n) = m_\lambda \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ceci montre que $S_\lambda(t_\lambda(v)\,v) = m_\lambda$ et $t_\lambda(v) = 1$ car sinon nous aurions une inégalité stricte dans (2.9), c'est à dire $m_\lambda < m_\lambda$, ce qui est absurde.

Finalement puisque v_n est positive à symétrie sphérique et radialement décroissante par construction, v jouit les mêmes propriétés, donc il suffit de prendre $\psi_\lambda = v$ pour avoir le résultat. ■

3.2.2 Régularité

Dans cette section, nous montrons que l'état fondamental est en fait une solution classique de (E_λ) et nous étudions ses propriétés asymptotiques. Nous travaillons avec $\lambda > 0$ fixé et pour alléger la notation, nous notons simplement ψ l'état fondamental. Comme ψ est une fonction radiale, l'étude de sa régularité se ramène à l'étude de la régularité d'une solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du deuxième ordre.

Nous commençons par introduire deux espaces de fonctions sur la demi-droite.

Définition 3.2.3 *Plaçons-nous en dimension $N \geq 2$ et considérons l'espace H_r^1 des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui sont radiales (ou à symétrie sphérique) c'est-à-dire telles que*

$$u(|x|) = \tilde{u}(r) \ \text{ avec } r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)$$

Définissant les espaces hilbertiens réels L_r^2 *et* $H_r^1 \subset L_r^2$

$$L_r^2 = \left\{ v : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_0^\infty r^{N-1} \; v(r)^2 \, dr < \infty \right\} \text{ et } H_r^1 = \left\{ v \in L_r^2 : v' \in L_r^2 \right\} \subset L_r^2$$

et nous les munissons respectivement des produits scalaires

$$\langle u, v \rangle_{L_r^2} = \int_0^\infty r^{N-1} \; u \; v \; dr \text{ et } \langle u, v \rangle_{r,\lambda} = \langle u', v' \rangle_{L_r^2} + \lambda \langle u, v \rangle_{L_r^2}$$

et des normes correspondantes, $|.|_{L_r^2}$ *et* $\|.\|_{r,\lambda}$.

Proposition 3.2.1 *(Voir* [13] , *page* 22*)*

Soit $N \geq 3$ *et* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *une fonction à symétrie sphérique.*

Soit $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *de telle sorte que* $u(x) = v(r)$ *pour* $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Alors $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *si et seulement si* $v \in H_r^1$.

Notant w_N *la surface de la sphère unité dans* $\mathbb{R}^N$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^2 \, dx = w_N \int_0^\infty r^{N-1} v(r)^2 \, dr$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx = w_N \int_0^\infty r^{N-1} v'(r)^2 \, dr$$

Grâce à la Proposition (3.2.1), *le résultat suivant réduit l'étude des propriétés de* ψ *à celle des propriétés d'une fonction de* H_r^1, *solution d'une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre.*

Proposition 3.2.2 *Supposons que la fonction* V *est radiale et soit* $\tilde{V} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *telle que* $V(x) = \tilde{V}(r)$ *pour* $|x| = r > 0$.

Soit $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *une fonction radiale et* $v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *tel que* $u(x) = v(r)$.

Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *et* u *est une solution faible de* (E_λ) *alors* $v \in H_r^1$ *et* v *une solution au sens de distribution de*

$$v'' + \frac{N-1}{r} \; v' - \lambda v + \tilde{V}(r) \;\; |v|^{p-1} v = 0, \;\; r > 0 \tag{2.10}$$

Démonstration. Nous savons par la Proposition (3.2.1) que $v \in H_r^1$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(0,\infty)$ et posons $\xi(x) = \varphi(r)$. Alors $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$.

D'après la définition (3.2.1) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \ \nabla v + \lambda u \ v \ dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p-1} u \ v dx = 0, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

Et comme $\xi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \ \nabla \xi + \left(\lambda - V(x)|u|^{p-1}\right) u \ \xi dx = w_N \int_0^\infty r^{N-1} \ \left\{ v'\varphi' + \left[\lambda - \tilde{V}(r)|v|^{p-1}\right] v\varphi \right\} dr$$

Donc

$$w_N \int_0^\infty r^{N-1} \ v'\varphi' dr = -w_N \int_0^\infty r^{N-1} \left[\lambda - \tilde{V}(r)|v|^{p-1}\right] v\varphi \ dr$$

ainsi $r^{N-1} \ v'$ possède une dérivée au sens des distributions $\left(r^{N-1}v'\right)' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\left(r^{N-1} \ v'\right)' = r^{N-1} \left[\lambda - \tilde{V}(r)|v|^{p-1}\right] v$$

Puisque $r^{1-N} \in C^\infty(0,\infty)$, v' a une dérivée au sens des distributions $v'' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(v')' = \left(r^{1-N}\left[r^{N-1}v'\right]\right)' = (1-N) r^{-N}\left[r^{N-1}v'\right] + r^{1-N}\left[r^{N-1}v'\right]'$$
$$(v')' = -\frac{N-1}{r}v' + \left[\lambda - \tilde{V}(r)|v|^{p-1}\right] v$$

D'où

$$v'' + \frac{N-1}{r} \ v' - \lambda v + \tilde{V}(r) \ \ |v|^{p-1} v = 0, \ r > 0$$

Ce qui montre que v est une solution au sens des distributions de (2.10). ■

Nous savons donc qu'il existe une fonction $\tilde{\psi} \in H_r^1$ telle que $\psi(x) = \tilde{\psi}(|x|)$ et qui satisfait l'équation (2.10). Afin d'établir que ψ est une solution classique de (E_λ) et d'étudier ses propriétés asymptotiques, nous allons considérer l'équation générale

$$v'' + \frac{N-1}{r} \ v' - \gamma v - \frac{\mu}{r^2} v + Q(r) v = 0, \ r > 0 \tag{2.11}$$

Nous supposons que $\gamma > 0$, $\mu \geq 0$ et $Q : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $r^k Q(r)$ est bornée sur $(0,\infty)$, où $k \in (0,2)$. Les résultats que nous allons prouver concernant (2.11) nous serons utiles plus tard dans un autre contexte.

Lemme 3.2.5 *Soit $v \in H_r^1$ une solution au sens des distributions de* (2.11)*.*

Alors $v \in C^2(0,\infty)$ et v est une solution classique de (2.11)*. Si de plus, $Q \in C^1(0,\infty)$, alors $v \in C^3(0,\infty)$.*

Démonstration. Comme $v \in H_r^1$, $v \in C(0,\infty)$ et $v' \in L^2_{loc}(0,\infty)$.

Alors, il découle de (2.11) que $v \in H^2_{loc}(0,\infty)$, ce qui implique $v \in C^1(0,\infty)$, car $H^m(\Omega)$ s'injecte d'une façon continue dans $C^k(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $m > \frac{N}{2} + k$

toujours d'après (2.11) nous aurons $v \in C^2(0,\infty)$.

Si $Q \in C^1(0,\infty)$, (2.11) implique alors $v \in C^3(0,\infty)$. ■

Définition 3.2.4 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert non-borné de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.*

Nous disons que f tend vers zéro exponentiellement (vite) à l'infini s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\lim\limits_{x\in\Omega,|x|\to\infty} e^{\epsilon|x|} f(x) = 0$. Nous écrivons alors $f(x) \to 0$ exponentiellement (vite) lorsque $|x| \to \infty$ ou simplement $f(x) \to 0$ exponentiellement (vite) à l'infini.

Lemme 3.2.6 *(Voir* [14]*, page* 38*)*

Si $v \in H_r^1$ est une solution de (2.11)*, alors v jouit des propriétés suivantes*

(i) Les limites $\lim\limits_{r\to 0} v(r)$ et $\lim\limits_{r\to 0} r\ v'(r)$ existent et sont finis.

De plus, si $\mu = 0$, on a $\lim\limits_{r\to 0} r\ v'(r) = 0$.

(ii) Si $Q \to 0$ exponentiellement à l'infini, alors v, $v' \to 0$ exponentiellement à l'infini.

Nous pouvons maintenant prouver les propriétés suivantes de l'état fondamental ψ.

Théorème 3.2.2 *Supposons satisfaites les hypothèses (H_0), (H_2) et (H_3) et soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ une solution non-triviale de (E_λ), positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Alors u jouit des propriétés suivantes.

(i) $u \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ et u est une solution classique de (E_λ). De plus, si V satisfait (H_1) alors $u \in C^3(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(ii) u est strictement positive et radialement strictement décroissante sur $\mathbb{R}^N$.

(iii) $u(x) \to 0$ *et* $|\nabla u(x)| \to 0$ *exponentiellement lorsque* $|x| \to \infty$.

Démonstration.

(i) Soit $v \in H_r^1$ tel que $u(x) = v(r)$ pour $|x| = r$, et $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

D'après le lemme $(3.2.5)$, on a $v \in C^2(0, \infty)$.

En posant dans (2.11) $\gamma = \lambda$, $\mu = 0$ et $Q(r) = \tilde{V}(r)|v(r)|^{p-1}$, ainsi u est une solution classique de (E_λ) sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$.

Si $V \in C^1\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ on a également $u \in C^3\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$.

(ii) Nous savons d'après la Proposition (3.2.2) et du Lemme (3.2.5) que v est une solution classique non-triviale de l'équation différentielle ordinaire (2.10), ce qui implique qu'elle ne peut être constante sur un intervalle. De plus, par hypothèse, v est une fonction positive et décroissante sur $(0, \infty)$. Elle est donc strictement positive et strictement décroissante sur $(0, \infty)$. Donc u l'est aussi et on a d'après le théorème d'existence que la solution est radiale, d'où le résultat.

(iii) La décroissance exponentielle résulte du lemme $(3.2.6)$.

■

3.2.3 Unicité

Soit $\mathbb{N} \geq 3$. Nous supposons que les hypothèses (H_1) à (H_4) sont satisfaites.

Nous montrons qu'il est alors justifié d'appliquer à (E_λ) un théorème d'unicité dû à Yanagida [23]. Ce théorème très technique fournit un résultat d'unicité concernant les solutions positives de l'équation

$$\Delta u + g(|x|)u + h(|x|)u^p = 0 \tag{2.12}$$

sur $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$ avec $0 < R \leq \infty$, $\mathbb{N} \geq 3$ et $p > 1$.

Moyennant l'abus de notation $u(|x|) \equiv u(r)$ pour $|x| = r$, toute solution radiale de (2.12) satisfait l'EDO du deuxième ordre

$$u'' + \frac{N-1}{r} u' + g(r)\ u + h(r)\ u^p = 0 \tag{2.13}$$

Nous sommes intéressés par la situation où $R = \infty$.

Le théorème précédent porte plus précisément sur l'unicité des solutions de (2.13) qui satisfont

$$u(0) < \infty,\ u(r) > 0 \text{ pour tout } r > 0 \text{ et } \lim_{r \to \infty} u(r) = 0 \tag{2.14}$$

Les hypothèses de base concernant les coefficients g et h sont les suivantes

(A_1) $g, h \in C^1(0, \infty)$

(A_2) $r^{2-\delta} g(r) \to 0$ et $r^{2-\delta} h(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ pour un $\delta > 0$.

Sous ces conditions, toute solution u de $(2.13) - (2.14)$ appartient à $C(0, R) \cap C^2(0, R)$ et satisfait $ru'(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Dans notre cas, nous intéressons à la situation qui correspond à l'EDO (2.10), à savoir

$$g(r) = -\lambda \text{ et } h(r) = \tilde{V}(r) \tag{2.15}$$

Les hypothèses (A_1) et (A_2) sont satisfaites puisque, par (H_2),

$$r^{k+\epsilon} \tilde{V}(r) \to 0 \text{ lorsque } r \to 0,\ \forall \epsilon > 0$$

avec $k \in (0, 2)$.

Sous ces hypothèses, le Théorème de Yanagida concernant le cas $R = \infty$ peut être formulé comme suit.

Théorème 3.2.3 *(Voir* [23]*)*

Si les conditions $(C_1) - (C_6)$ *ci-dessous sont satisfaites, alors il existe au plus une solution de* $(2.13) - (2.14)$ *qui vérifie* (C_7).

Les hypothèses (C_1) *à* (C_7) *portent sur les trois fonctions suivantes,* J, G *et* H*, dépendant d'un paramètre* $m \in [0, N-2]$

$$J(r; u, m) \equiv r^{m+2} u'(r)^2 + (2N-4-m) r^{m+1} u'(r) u(r) + (N-2-m)(2N-4-m) r^m \frac{u(r)^2}{2} + r^{m+2} g(r) u(r)^2 + 2r^{m+2} h(r) \frac{u(r)^{p+1}}{p+1}$$

$$G(r; m) = r^{m+2} g'(r) - 2(N-3-m) r^{m+1} g(r) + m(N-2-m)(2N-4-m) \frac{r^{m-1}}{2}$$

$$H(r; m) \equiv 2r^{m+2} \frac{h'(r)}{p+1} - \left\{ 2N-4-m-2\frac{m+2}{p+1} \right\} r^{m+1} h(r)$$

(C_1) $h(r) \geq 0$ *pour tout* $r > 0$.

(C_2) $G(r; N-2) \leq 0$ *pour tout* $r > 0$.

(C_3) *Pour tout* $m \in [0, N-2]$*, il existe* $\alpha(m) \in [0, \infty]$ *tel que* $G(r; m) \geq 0$ *pour* $r \in (0, \alpha(m))$ *et* $G(r; m) \leq 0$ *pour* $r \in (\alpha(m), \infty)$. *Si* $\alpha(m) = 0$ *(resp* $\alpha(m) = \infty$*), cela signifie que* $G(r; m) \leq 0$ *(resp* $G(r; m) \geq 0$*) pour tout* $r > 0$.

(C_4) $H(r; 0) \leq 0$ *pour tout* $r > 0$.

(C_5) *Pour tout* $m \in [0, N-2]$*, il existe* $\beta(m) \in [0, \infty]$ *tel que* $H(r; m) \geq 0$ *pour* $r \in (0, \beta(m))$ *et* $H(r; m) \leq 0$ *pour* $r \in (\beta(m), \infty)$. *Si* $\beta(m) = 0$ *(resp* $\beta(m) = \infty$*), cela signifie que* $H(r; m) \leq 0$ *(resp* $H(r; m) \geq 0$*) pour tout* $r > 0$.

(C_6) *Concerne le cas où* $g = 0$ *et n'intervient donc pas dans la discussion.*

(C_7) *Demande que* $J(r; u(r), m) \to 0$ *lorsque* $r \to \infty$ *pour tout* $m \in [0, N-2]$.

Nous utilisons maintenant ce théorème pour prouver le résultat d'unicité suivant.

Corollaire 3.2.1 *Supposons que les hypothèses* (H_1) *à* (H_4) *sont vérifiées et que* $\mathbb{N} \geq 3$. *Alors il existe au plus une solution non-triviale de* (E_λ) *qui soit positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Démonstration. Soit u une solution non-triviale de (E_λ) qui soit positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.

D'après le théorème (3.2.2) on a u est strictement positive et $u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, donc u satisfait (2.14).

Il suffit donc de montrer que les conditions (C_1) à (C_6) sont satisfaites, puis de vérifier que u satisfait la condition (C_7).

D'après (2.15), les fonctions J, G et H sont données explicitement par

$$\begin{aligned} J(r;u,m) \equiv{} & r^{m+2}u'(r)^2 + (2N-4-m)\,r^{m+1}u'(r)\,u(r) \\ & + (N-2-m)(2N-4-m)\,r^m\frac{u(r)^2}{2} \\ & - \lambda r^{m+2}u(r)^2 + 2r^{m+2}\tilde{V}(r)\,\frac{u(r)^{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(r;m) ={} & 2\lambda(N-3-m)\,r^{m+1} \\ & + m(N-2-m)(2N-4-m)\,\frac{r^{m-1}}{2} \end{aligned}$$

$$H(r;m) \equiv 2r^{m+2}\frac{\tilde{V}'(r)}{p+1} - \left\{2N-4-m-2\frac{m+2}{p+1}\right\} r^{m+1}\tilde{V}(r)$$

(C_1) Exige que $\tilde{V}(r) > 0$ pour tout $r > 0$, ce qui est vrai par (H_3).

(C_2) $G(r;N-2) = -2\lambda r^{N-1} \leq 0$ pour tout $r > 0$.

(C_3) Écrivons G comme

$$G(r;m) = r^{m-1}\left\{2\lambda(N-3-m)\,r^2 + m(N-2-m)\left(N-2-\frac{m}{2}\right)\right\}$$

$\alpha(m)$ dépend de m via les coefficients du polynôme du deuxième degré entre accolades.

Si $m \in [0, N-3]$, on a

$$N-3-m \geq 0 \text{ et } m(N-2-m)\left(N-2-\frac{m}{2}\right) \geq 0$$

On peut choisir $\alpha(m) = \infty$.

Si $m \in \,]N-3, N-2[$ on a

$$N-3-m < 0 \text{ et } m(N-2-m)\left(N-2-\frac{m}{2}\right) > 0$$

$\alpha(m)$ est la racine positive de $2\lambda(N-3-m)\,r^2 + m(N-2-m)\left(N-2-\frac{m}{2}\right)$.

(C_4) Exige que $H(r;0) \leq 0$ pour tout $r > 0$.Dans notre cas, cela revient à dire que

$$\frac{2}{p+1} r^2 \tilde{V}'(r) - \left(2N - 4 - \frac{4}{p+1}\right) r\tilde{V}(r) \leq 0, \text{ pour tout } r > 0.$$

Nous avons par l'hypothèse (H_3) que $\tilde{V}(r) > 0$ et $\tilde{V}'(r) < 0$ pour tout $r > 0$.

Donc il suffit d'avoir $\left(2N - 4 - \frac{4}{p+1}\right) \geq 0$ et qui est équivalent à $p \geq \frac{4-N}{N-2}$.

Or $\frac{4-N}{N-2} \leq 1$, $\forall N \geq 3$, et comme $p > 1$, (C_4) est vérifiée.

(C_5) On a

$$H(r;m) \equiv 2r^{m+2} \frac{\tilde{V}'(r)}{p+1} - \left\{2N - 4 - m - 2\frac{m+2}{p+1}\right\} r^{m+1}\tilde{V}(r)$$
$$H(r;m) \equiv r^{m+1}\tilde{V}(r) \left\{\frac{2}{p+1} \frac{r\tilde{V}'(r)}{\tilde{V}(r)} - a_m\right\}$$

Avec $a_m = \left\{2N - 4 - m - 2\frac{m+2}{p+1}\right\}$. D'après l'hypothèse (H_4) la fonction $\frac{r\tilde{V}'(r)}{\tilde{V}(r)}$ est décroissante sur $(0, \infty)$.

Donc $\exists \beta(m) = \infty$ tel que (C_5) est satisfaite.

(C_7) Si u est une solution non triviale de (E_λ), on a $u \to 0, u' \to 0$ lorsque $r \to \infty$. D'ou $J(r; u(r), m) \to 0$ lorsque $r \to \infty$.

Le corollaire est démontré. ■

Donc nous avons montré l'existence, régularité et l'unicité des solutions de (E_λ), de plus les solutions sont positives radiales, et radialement décroissantes.

3.3 Stabilité orbitale des ondes stationnaires

Nous étudions dans cette section la stabilité des ondes stationnaires pour l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\, w = 0,\; w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\;\; N \geq 2 \tag{NLS}$$

Définition 3.3.1 *On dit que w est une solution de (NLS) s'il existe $T \in (0,\infty[$ tel que*

$$w \in C\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)\right) \cap C^1\left((0,T), H^{-1}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)\right)$$

et

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\, w = 0 \;\; dans\; H^{-1}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right),\; \forall t \in (0,T)$$

Où $H^{-1}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ désigne l'espace dual de $H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$.

La solution est dite globale en temps ou simplement globale si on peut prendre $T = \infty$. Sinon, elle est dite locale en temps ou simplement locale.

Une onde stationnaire est une solution de (NLS) de la forme $\varphi\,(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Si la variable $t \in I$ représente le temps, le paramètre λ est interprété physiquement comme une fréquence.

Une telle fonction est solution de (NLS) si et seulement si $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ est une solution de l'équation de Schrödinger stationnaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\, u = 0,\; u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\;\; N \geq 2 \tag{E_λ}$$

qui a été étudiée dans les sections précédentes. Nous avons vu qu'il convient en effet de chercher des solutions de (E_λ) dans l'espace de Sobolev $H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$ et, sous des hypothèses sur p et V , nous avons montré l'existence d'états fondamentaux ψ_λ de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$.

Définition 3.3.2 *Soit u_λ une solution faible de (E_λ). Une onde stationnaire de la forme $\varphi_\lambda\,(t,x) = e^{i\lambda t}u_\lambda(x)$ est dite orbitalement stable dans $H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $w : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de (NLS) satisfaisant $\|w\,(0,.) - u_\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} < \delta$, on a*

$$\sup_{t\geq 0}\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \left\|w\,(0,.) - e^{i\theta}u_\lambda\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})} < \epsilon$$

Remarque 3.3.1 *Nous définissons l'orbite de w comme l'ensemble*

$$\Theta(w) = \left\{ e^{i\theta} w : \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset H^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right), \text{ pour tout } w \in H^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$$

Une onde stationnaire φ_λ, d'orbite $\Theta(u_\lambda)$ est stable si toute solution $w(t,.)$ de (NLS) avec condition initiale $w(0,.)$ proche de $\Theta(u_\lambda)$ reste proche de $\Theta(u_\lambda)$ pour tout $t \geq 0$.

3.3.1 Le problème de Cauchy

Dans cette dernière partie nous discuterons le problème de Cauchy associé à (NLS) et établissons des conditions sous lesquelles ce problème admet des solutions locales ou globales. Nous définissons également les fonctionnelles appelées énergie et charge qui, sous des hypothèses appropriées, sont des constantes du mouvement pour (NLS).

Nous considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + g(w) = 0 \\ w(0) = \varphi \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases} \tag{PC}$$

Où $g \in C\left(H^1, H^{-1}\right)$ est une non-linéarité donnée comme l'opérateur de superposition $w \longmapsto g(w) = V(x)\,|w|^{p-1}\,w$ (voir définition (1.1.5)).

Nous définissons les deux fonctionnelles E et $Q : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, appelées respectivement l'énergie et la charge, par

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, d\,x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u|^{p+1}\, dx$$

et

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\, dx$$

On a $Q \in C^2\left(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ et d'après le lemme (3.2.1), $E \in C^2\left(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$.

Théorème 3.3.1 *(Voir* [6]*)*

Soit $g \in C\left(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right)$ une non linéarité de la forme $g = g_1 + g_2 \in C\left(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right)$ satisfaisant les hypothèses suivante

(1) $g_i(0) = 0$ *et il existe* $G_i \in C^1\left(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ *tel que* $G_i(0) = 0$ *et* $g_i = G_i'$.

(2) *Il existe* $r_i, \rho_i \in [2, 2^*]$ *tels que, pour tout* $M > 0$*, il existe* $C_i(M) > 0$ *tel que*

$$|g_i(u) - g_i(v)|_{L^{\rho_i'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_i(M) |u - v|_{L^{r_i}(\mathbb{R}^N)}$$

pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfaisant*

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq M$$

Alors, pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$*, il existe* $T = T(\varphi) > 0$ *et une unique solution de* (PC)

$$w \in C\left([0, T), H^1(\mathbb{R}^N)\right) \cap C^1\left([0, T), H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right)$$

En outre, il ya conservation de la charge et de l'énergie

$$Q(w(t)) = Q(\varphi) \text{ et } E(w(t)) = E(\varphi) \text{ pour tout } t \in [0, T)$$

(3) *Si de plus, il existe* $\exists\ \epsilon \in (0, 1)$ *et une fonction* $\eta \in C([0, \epsilon), [0, \infty))$*, telle que* $\eta(0) = 0$*, qui satisfont*

$$G_1(u) + G_2(u) \leq \frac{1 - \epsilon}{2} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \eta\left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)$$

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tel que* $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$.

Alors il existe $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfaisant* $\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$*, on peut poser* $T(\varphi) = \infty$ *et on a, de plus*

$$\sup\left\{\|w(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} : t \geq 0\right\} \leq \epsilon$$

(4) *S'il existe* $\epsilon \in (0, 1)$ *et une fonction* $\eta \in C([0, \infty), [0, \infty))$ *telle que* $\eta(0) = 0$*, qui satisfont*

$$G_1(u) + G_2(u) \leq \frac{1 - \epsilon}{2} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \eta\left(|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)$$

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$*. Alors on peut poser* $T(\varphi) = \infty$ *pour tout* $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 3.3.2 *Le résultat* (3) *assure l'existence globale pour des conditions initiales suffisamment petites et* (4) *garantit l'existence globale pour toute condition initiale dans* $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Lemme 3.3.1 *Sous les hypothèses* (H_0) *et* (H_2) . *Soit* $g(u) = V(x)|u|^{p-1}u$, *alors il existe* g_1 *et* g_2 *tels que* $g = g_1 + g_2$ *et qui satisfont les hypothèses* (1) *et* (2) *du théorème* (3.3.1).

La partie (3) *du théorème est vraie, si de plus* $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$, *alors* (4) *est vraie.*

Démonstration. Soient

$$g_1(u) = \chi_{B(0,1)}(x)\ \ g(u)\,,\ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

et

$$g_2(u) = \left[1 - \chi_{B(0,1)}(x)\right]\ \ g(u)\,,\ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

Comme $g(u) = V(x)|u|^{p-1}u$, alors $g_i(0) = 0$, pour $i = 1, 2$

Posons maintenant,

$$G_1(u) = \frac{1}{p+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi_1(x)|x|^{-k}|u|^{p+1}dx,\ \text{avec } \xi_1(x) = \chi_{B(0,1)}V(x)|x|^k$$

et

$$G_2(u) = \frac{1}{p+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi_2(x)|x|^{-k}|u|^{p+1}dx,\ \text{avec } \xi_2(x) = \left[1 - \chi_{B(0,1)}(x)\right]V(x)|x|^k$$

On a d'après (3) du lemme (1.3.1) que $G_i(u) \in C^2(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R})$ et $G_i'(u) = g_i(u)$, d'où (1) est vérifiée.

Montrons (2), Soient $u, v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ satisfaisant

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq M$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}\right)$. Pour la fonction g_1, en utilisant les inégalités de Hölder avec quatre exposants $\alpha, \beta, r_1, \rho_1 \geq 1$ tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} = 1$,on a

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}[g_1(u) - g_1(v)]\varphi\ dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi_{B(0,1)}(x)\ \ |V(x)|\left||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\right||\varphi|\ \ dx$$

Or $\left||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\right| = ||u|^p - |v|^p| = \left|\int\limits_0^1 p\,|t(u-v) + v|^{p-1}(u-v)\ \ dt\right|$ et $|V(x)| \leq C|x|^{-k}$ d'après l'hypothèse (H_2).

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} [g_1(u) - g_1(v)]\,\varphi\ dx\right| &\leq C \int_{B(0,1)} |x|^{-k} \left|\int_0^1 p\,|t(u-v)+v|^{p-1}(u-v)\ dt\right| |\varphi|\ dx \\
&\leq C \int_{B(0,1)} |x|^{-k} (|u|+|v|)^{p-1} |u-v|\,|\varphi|\ dx \\
&\leq C \left\{\int_{B(0,1)} |x|^{-k\alpha}\ dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{\int_{B(0,1)} (|u|+|v|)^{(p-1)\beta}\ dx\right\}^{\frac{1}{\beta}} |u-v|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_1 \,||u|+|v||^{(p-1)}_{L^{(p-1)\beta}(\mathbb{R}^N)} |u-v|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_1 \left(|u|_{L^{(p-1)\beta}(\mathbb{R}^N)} + |v|_{L^{(p-1)\beta}(\mathbb{R}^N)}\right)^{p-1} |u-v|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_2 \left(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)^{p-1} |u-v|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_2\ M^{p-1}\ |u-v|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Si $\alpha, \beta > 1$ vérifiant $N - k\alpha > 0$ et $(p-1)\beta \in [1, 2^*]$,

si $N \geq 3$. Ceci est vrai, si $p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$ qui est vérifier par l'hypothèse (H_2).

Donc (2) est vrai pour g_1.

De même pour g_2, en utilisant l'inégalité de Hölder avec trois exposants $\alpha, r_1, \rho_1 \geq 1$ tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1} = 1$, et $r_1 = \rho_1 = p + 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} [g_2(u) - g_2(v)]\,\varphi\ dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 - \chi_{B(0,1)}(x)\right]\ \ |V(x)| \left||u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v\right| |\varphi|\ dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N \backslash B(0,1)} |x|^{-k} \left|\int_0^1 p\,|t(u-v)+v|^{p-1}(u-v)\ dt\right| |\varphi|\ dx
\end{aligned}$$

or $|x| \geq 1$ sur $\mathbb{R}^N \backslash B(0,1)$ implique $|x|^{-k} \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N \backslash B(0,1)$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} [g_2(u) - g_2(v)]\,\varphi\ dx\right| &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N \backslash B(0,1)} (|u|+|v|)^{p-1} |u-v|\,|\varphi|\,dx \\
&\leq C_2 \left(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)^{P-1} |u-v|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C_2\ M^{p-1} |u-v|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} |\varphi|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

D'où g_2 satisfait l'hypothèse (2).

Pour (3), soit $\alpha, \beta > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|G_1(u)| &= \frac{1}{p+1}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \xi_1(x)\,|x|^{-k}\,|u|^{p+1}\,dx\right| \le \frac{\|\xi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{p+1}\int_{B(0,1)} |x|^{-k}\,|u|^{p+1}\,dx \\
&\le C\left\{\int_{B(0,1)} |x|^{-k\alpha}\,dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\int_{B(0,1)} |u|^{(p+1)\beta}\,dx\right\}^{\frac{1}{\beta}} \\
&\le C_\alpha\left\{\int_{B(0,1)} |u|^{(p+1)\beta}\,dx\right\}^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

avec $0 < C_\alpha < \infty$ et $N - k\alpha > 0$, on va choisir $\alpha \in \left(1, \frac{N}{k}\right)$ tel que $2 < (p+1)\beta < 2^*$ alors

$$|G_1(u)| \le C_\alpha\,|u|^{(p+1)}_{L^{(p+1)\beta}(\mathbb{R}^N)},\ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

de plus, on a pour $N > 2$, $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\forall q \in [2, 2^*]$ avec injection continue.

Dans notre cas, $(p+1)\beta \in [2, 2^*]$ implique $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{(p+1)\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)$ avec injection continue.

donc, $\exists\ \epsilon \in (0,1)$ tel que $|u|_{L^{(p+1)\beta}(\mathbb{R}^N)} \le 1$ pour $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$.

ainsi

$$|G_1(u)| \le C_\alpha\,|u|^2_{L^{(p+1)\beta}(\mathbb{R}^N)},\ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{ tel que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

D'autre part, on a d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg que

$$\begin{cases} |u|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \le C'\,|u|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,|u|^{\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ \text{avec } p < r < p^*,\ \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}, 1 - \frac{N}{p} = \frac{-N}{P^*} \end{cases}$$

Or $|u|^{\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C\,|\nabla u|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Soit $p^* = 2^*$, $p = 2$ et $r = (p+1)\beta$, on a

$$|u|_{L^{(p+1)\beta}(\mathbb{R}^N)} \le C'\,|u|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,|\nabla u|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le C'\,|u|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\|u\|^{\theta}_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

et

$$|G_1(u)| \le C_\alpha\,(C')^2\,|u|^{2(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,\|u\|^{2\theta}_{H^1(\mathbb{R}^N)},\ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\ \text{ tel que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_1(\epsilon) > 0$ tel que

$$|G_1(u)| \leq \epsilon \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_1(\epsilon)|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

Comme $p+1 > 2$, choisissant $\epsilon > 0$ plus petit, nous avons aussi que

$$\begin{aligned}
|G_2(u)| &\leq \frac{\|\xi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{p+1} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,1)} |x|^{-k}|u|^{p+1}\,dx \\
&\leq \frac{\|\xi_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{p+1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\,dx \\
&\leq C_1 |u|^2_{p+1(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve l'existence de $C_2(\epsilon) > 0$ tel que

$$|G_2(u)| \leq \epsilon \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2(\epsilon)|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ tel que } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

D'où (3) est vérifiée.

Pour (4) on va utiliser la même méthode que précédemment, avec $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$.

On va choisir $\frac{1}{\alpha} \in \left(\frac{k}{N}, 1 + \frac{2}{N} - \frac{p+1}{2}\right)$ dans ce cas $(p+1)\gamma < 2$ avec $\gamma = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(p+1)\beta}\right)$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Nous obtenons alors pour tout $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$|G_1(u)| \leq C_\alpha |u|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leq C_\alpha (C')^{p+1} \|u\|^{(p+1)\gamma}_{H^1(\mathbb{R}^N)} |u|^{(p+1)(1-\gamma)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Ainsi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists C_1(\epsilon) > 0$ telle que

$$|G_1(u)| \leq \epsilon \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_1(\epsilon)|u|^\mu_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Où $\mu = \frac{2(1-\gamma)(p+1)}{2-(p+1)\gamma} > 0$.

De même, $\forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$|G_2(u)| \leq C_2 |u|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 (C')^{p+1} \|u\|^{(p+1)\gamma_1}_{H^1(\mathbb{R}^N)} |u|^{(p+1)(1-\gamma_1)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Où $\gamma_1 = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)$ et $(p+1)\gamma_1 < 2$. Donc, $\forall \epsilon > 0, \exists C_2(\epsilon) > 0$ telle que

$$|G_2(u)| \leq \epsilon \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + C_2(\epsilon)|u|^{\mu_1}_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Où $\mu_1 = \frac{2(1-\gamma_1)(p+1)}{2-(p+1)\gamma_1} > 0.$

D'où les hypothèses du point (4) sont vérifiées pour $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N}$.

Donc on a montrer que les solutions de (PC) sont des solutions classiques c-à-d $w \in C\left([0,T), H^1(\mathbb{R}^N)\right) \cap C^1\left([0,T), H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right).$

De plus on a une conservation de charge et d'énergie $Q(w(t)) = Q(\varphi)$ et $E(w(t)) = E(\varphi)$ pour tout $t \in [0,T)$.

Enfin, les solutions sont orbitalement stables. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la résolution de l'équation de Schrödinger linéaire et non linéaire. Pour l'équation linéaire, nous avons utilisé les propriétés de la transformée de Fourier. Pour l'équation non linéaire, nous avons traité le cas stationnaire, ce qui nous a amené à la résolution d'une équation semi-linéaire. Par la méthode de minimisation avec contrainte sur la variété de $Nehari$, nous avons montré l'existence d'états fondamentaux, nous avons obtenu des solutions positives, radiales et radialement décroissantes. Certaines propriétés des états fondamentaux ont été aussi considérées à l'instar la stabilité orbitale. Il existe de nombreuses notions de stabilité différentes, dépendant des équations étudiées. L'idée générale est que, plus le système admet de symétrie, plus la notion de stabilité qui convient est faible.

Nous regrettons de ne pas avoir eu suffisamment de temps pour faire le résultat de non-dégénérescence des solutions qui est un élément essentiel dans la théorie de bifurcation et est un résultat de continuation globale. Cette théorie établie l'existence dans $\mathbb{R} \times H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ d'une branche de solutions de (E_λ) de la forme

$$\{(\lambda, u_\lambda) : 0 < \lambda < \lambda_0\} \subset \mathbb{R} \times H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Bibliographie

[1] A.Ambrosetti and A.Malchiodi.
"Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^N$", Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, (2006).

[2] R.A.Adams.
"Sobolev Spaces", Academic Press, New York, (1975).

[3] P.Begout.
"Necessary Conditions and Sufficient Conditions for Global Existence in the Nonlinear Schrödinger Equation", Universite Pierre et Marie Curie, France, (2000).

[4] A.D.Bouard et R.Fukuizumi.
"Stability of Standing Waves for Nonlinear Schrodinger Equations with Inhomogeneous Nonlinearities", Ann. Henri Poincaré, (2005).

[5] H.Brézis
"Analyse fonctionnelle, théorie et applications", Université Pierre et Marie Curie, (1999).

[6] T. Cazenave.
"Semilinear Schrödinger Equations", Courant Lecture Notes in Mathematics, AMS (2003).

[7] W.Chen and Congming Li.
"Methods on Nonlinear Elliptic Equations", Birkhäuser, (2008).

[8] P.Donato.
"Calcul Différentiel pour la Licence, Cours, Exercices et Problèmes Résolus", Dunod, Paris, (2000).

[9] R.Fukuizumi.
"Stability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with potentials", J. Math. Kyoto Univ, (2003).

[10] L. Jeanjean et S. Le Coz.
"An existence and stability result for standing waves of nonlinear Schrödinger equations", Adv. Differential Equations 11, (2006).

[11] H. Hajaiej.
"On the Variational Approach to the Stability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation", University of Virginia, (2004).

[12] K.Imamura.
"Stability and bifurcation of periodic travelling waves in a derivative non-linear Schrödinger equation", Hiroshima Math, (2009).

[13] F.Genoud.
"Théorie de bifurcation et de stabilité pour une équation de Schrödinger avec une non-linéarité compacte", École Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2008).

[14] F.Genoud and Charles A. Stuart.
"Schrödinger equations with a spatially decaying nonlinearity: existence and stability of standing waves", École Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2007).

[15] J.Ginibre.
"Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires", Université de Paris-Sud, (1994).

[16] O.Kavian.
"Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques", Springer-Verlag, Paris, (1986).

[17] H.Kikuchi.
"Existence and orbital stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations via the variational method", Kyoto University, JAPAN, (1995)

[18] T.Lachand-Robert.
"Equations aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaires, propriétés de monotonie, réarrangement et ruptures de symétrie", Université de Paris VI, (1993).

[19] J.L.Lions.
"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod Gauthier Villars, (1969).

[20] F.Pham.
"Géométrie et calcul différentiel sur les variétés, Cours, études et exercices", DUNOD, Paris, (1999).

[21] J.M.Rakotoson.
"Réarrangement Relatif, Un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).

[22] M.Struwe.
"Variational Methods. Applications to Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems", Springer-Verlag, Switzerland, (2008).

[23] E.Yanagida.
"Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$", Arch. Ration. Mech. Anal, (1991).

[24] E.Zeidler.

"Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics", University of Leipzig, Germany, (1995).

[25] C.Zuily.

"Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris, (2002).