République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En Vue de l'Obtention du Diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Thème

Résolution de quelques problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles bornés et non bornés

Réalisé par :

M^elle : HARFOUCHE Kafia

M^elle : YAYA Naima

Devant le Jury :

Mr A. BERBOUCHA	**M.C.A**	**Université A-Mira de Béjaia**	**Président**
M^me K. KHELOUFI	**M.C.B**	**Université A-Mira de Béjaia**	**Examinatrice**
M^me S. ALLILI-ZAHAR	**M.C.B**	**Université A-Mira de Béjaia**	**Promotrice**

Année Universitaire : 2012-2013

Remerciements

*Nous remercions **DIEU** tout puissant de nous avoir donné la foi, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin les bonnes personnes et nous a confié aux bonnes mains.*

*Nous voudrions sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à Madame **S. ALLILI-ZAHAR** notre promotrice pour l'intéressant sujet qu'elle nous a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse naturelle et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. Nous lui devons toute notre reconnaissance.*

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus vifs à Monsieur **A. BERBOUCHA**, pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.*

*Nous remercions également Madame **K. KHELOUFI** qui a accepté d'examiner cet humble travail.*

Nos derniers et profonds remerciements vont à nos chers parents, frères et soeurs, pour leur soutien et leur confiance en nous, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à notre formation.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère pour tous ses sacrifices et son soutien moral.

Mon très cher père qui m'a soutenue et orientée durant tout mon cycle d'étude.

Mes très chers frères : Ali et Badis.

Mes très chères soeurs : Rabha, Nadira, Chaba, Noura et Barkahoum.

Ma très chère grande-mère.

Ma grande famille : mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Mes beaux frères : Kamel, Hamid et Yahya.

Mes très chers et adorables nièce et neveu : Dina et Maroine.

A H. Saad M. A et toute sa famille.

A Celle qui ma partager le travail : Naima.

Toutes mes amies surtout Hayet et Sihem.

Toutes mes copines de chambre.

Tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

KAFIA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs, qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études et à qui je témoigne toute ma gratitude.

A mes chères soeurs : Dalila, Koko, Nacira, Hanane, Souhila et Hiba et mon frère : Riad et sa femme.

A mon adorable Nièce : ***Hadjar****.*

A celui avec lequel je vais partager ma vie, mon cher ***mari*** *Hakim, ainsi que toute sa famille.*

A toutes mes amies surtout Merbouha.

A ma chère binôme Kafia.

A toute ma famille chacun par son nom.

A tous les étudiants de notre département, en particulier notre promotion.

NAIMA

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à la présentation de quelques résultats d'existence et d'unicité pour une classe d'équations différentielles ordinaires du second ordre avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann, on utilisera la théorie du point fixe pour établir des résultats d'existence qui sont illustrés par des exemples d'application.

Les problèmes aux limites sur les intervalles non bornés ont d'abord été étudié à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle avec les travaux importants de A. Kneser [26] sur les solutions monotones sur $[0, +\infty[$ des équations différentielles ordinaires du second ordre de type

$$u''(t) = f(t, u(t)),\ t \in [0, +\infty[. \tag{0.0.1}$$

Ces mêmes types de résultats ont été suivis par A. Mambriani [29] en 1929 (voir aussi Gross [25], Wong [34]), où différentes conditions sont imposées sur f pour assurer l'existence locale d'une unique solution pour l'équation (0.0.1), avec des conditions initiales.

Au début des années cinquante, C. Corduneanu ([15], [16]), considérait les problèmes aux limites du second ordre suivants:

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)),\ t \in [0, +\infty[\\ u(0) = \alpha, \\ u(t) \text{ bornés sur } [0, +\infty[, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)),\ t \in \mathbb{R} \\ u(t) \text{ bornés sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Depuis le début des années soixante-dix, les problèmes aux limites sur des intervalles non bornés ont été étudiés de manière intensive.

Granas, Guenther, Lee et O'Regan [24], Baxley [9], Bobisud [10], Agarwal et O'Regan ([2], [3], [4], [5]), Djebali et Mebarki [19], Ma et Zhu [28], Djebali et Zahar [20] ont utilisé une variété de méthodes pour étudier les problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés.

Pour étudier les problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés, on peut utiliser différentes méthodes :

Etudier ces problèmes sur les intervalles bornés puis étendre la solution à l'intervalle non bornés ou les etudier directement sur les domaines non bornés.

Le mémoire comporte cinq chapitres, organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, on a cru à la fois utile et nécessaire de citer quelques définitions et théorèmes qu' on va utiliser dans les chapitres suivants tels que les théorèmes du point fixe de Schauder et de Furi Pera et quelques critères de compacité (par exemple : Corduneanu, Ascoli-Arzéla).

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \ a < t < b \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

où la nonlinearité $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Le but de ce chapitre est d'établir des résultats d'existence de solution dans l'espace C^2 pour le problème au limite de type Dirichlet sur un intervalle borné, on imposera une hypothèse de monotonie et une condition de Lipschitz locale sur f. Nous avons présenté aussi un résultat d'unicité sous une condition de monotonie sur $f = f(t, u(t))$ par rapport à u.

Dans la première partie du troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions dans l'espace C^2 sur un intervalle non-borné en utilisant les résultats sur les bornés, au problème :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \ t > 0 \\ u(0) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

en imposant l'integrabilité de f, une condition de Lipschitz locale et une condition de coercivité et en utilisant le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla sur les bornés $[0, n]$. On va obtenir des solutions sur $[0, +\infty[$ en utilisant une méthode d'approximation. Un résultat d'unicité est ensuite donné en supposant que $f(t, u(t))$ est monotone par rapport à u.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons étudié l'existence des solutions positives pour le problème du second ordre non linéaire suivant

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \ t > 0, \\ u(0) = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0. \end{cases} \tag{0.0.2}$$

On montre l'existence d'une solution u du problème (0.0.2) dans $C^1([0, +\infty[)$ avec $u > 0$ sur $]0, +\infty[$.

On va utiliser l'alternative de Leray-Schauder pour établir un résultat d'existence sur les bornés $[0, n]$ et on utilise dans cette partie l'argument de diagonalisation pour étendre les solutions positives sur l'intervalle non bornés $[0, +\infty[$.

Dans le quatrième chapitre, on va étudier quelque problèmes posés sur $[0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$ en travaillant directement sur les intervalles non bornés (sans passer par les bornés).

Dans la première partie de ce chapitre, on va établir l'existence de solution pour le problème :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)), \ \text{p.p } t \geq 0 \\ u(0) = a, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

avec $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et u prend des valeurs dans $\mathbb{R}$, on utilisera le théorème du point fixe de Furi Pera.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} u''(t) - cu'(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t)), \ \ -\infty < t < +\infty \\ \lim\limits_{|t| \to \infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

avec $c > 0$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t, 0) = 0$.

On montre l'existence d'une solution dans l'espace $E = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Dans ce chapitre, on va utiliser le critère de compacité du Corduneanu pour montrer la compacité de l'opérateur sur les intervalles non bornés.

Dans le chapitre 5 on va essayer d'établir un résultat d'existence pour un problème implicite associé à l'équation $u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t))$ c'est un problème ouvert pour le quel, on essayera de donner des conditions suffisantes pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Nous présentons dans ce chapitre quelques notations et définitions, théorèmes de point fixe et quelques critères de compacité sur les intervalles bornés et non bornés.

1.1 Quelques notations et définitions

$C^k(I,J) :=$ l'ensemble des fonctions $f : I \to J$, k fois continûment dérivables.

$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \lim\limits_{|t|\to\infty} u(t) = 0\}$, muni de la norme $\|u\|_\infty$.

$C_b := C_b(I,\mathbb{R}^n)$ l'espace de toutes les fonctions de $C(I,\mathbb{R}^n)$ bornées.

$C^k(I) := C^k(I,\mathbb{R})$.

$C^0 := C$.

$\|u\|_{C^k} := \max\limits_{i=0,1,2,\dots k}\{\sup\limits_{t\in I}|u^{(i)}(t)|\}$.

$\|u\|_\infty := \|u\|_C = \sup\limits_{t\in I}|u(t)|$.

$L^p(I) := \{u,\ \int_I |u(t)|^p dt < +\infty\}$.

$\|u\|_2 := (\int_I |u(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$, (c'est la norme usuelle dans l'espace $L^2(I)$).

$\|u\|_{L^p(I)} := (\int_I |u(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$.

$\|u\|_{H^1(I)} := (\int_I |u(t)|^2 dt + \int_I |u'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.

$W^{k,p}(I) := \{u \in C^{k-1}(I),\ u^{(k)} \in L^p(I)\}$.

$W^{k,p}_{loc}(I) := \{u \in C^{k-1}(I),\ u^{(k)} \in L^p_{loc}(I)\}$.

$H^k(I) := W^{k,2}(I)$.

Définition 1.1.1 (Espace métrique) *On appelle espace métrique tout couple constitué d'un ensemble E et d'une application $(x, y) \to d(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$, possédant les proprietés suivantes :*

$$\begin{aligned} M1 &: d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ M2 &: d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in E, \\ M3 &: d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in E \text{ (inégalité triangulaire).} \end{aligned}$$

L'application d est appellée une distance sur E et $d(x, y)$ est la distance de x et y.

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel normé) *On prend $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $K-$ espace vectoriel, une norme sur E est une application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} N1 &: \forall x \in E,\ \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ N2 &: \forall x \in E,\ \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ N3 &: \forall x,\ y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

On dit alors que $(E, \|.\|)$ ou simplement E est un e.v.n.

Soit X un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble de l'espace vectoriel X.

Définition 1.1.3 (Fermé) *On appelle A un sous-ensemble fermé de X si, pour toute suite convergente $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$ le point limite est aussi dans A.*

Définition 1.1.4 (Ouvert) *On dit que A est un sous-ensemble ouvert de X si, $\forall x \in A$, $\exists \delta > 0$ tel que $y \in X$, $\|y - x\| < \delta \Rightarrow y \in A$.*

Définition 1.1.5 (Borné) *On dit que A est un sous-ensemble borné de X si, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| < M$.*

Définition 1.1.6 (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite.*

Si $K = \mathbb{R}$ on dit que X est un espace de Banach réel, si $K = \mathbb{C}$ on dit que X est un espace de Banach complexe.

Définition 1.1.7 *Soit X et Y deux espaces de Banach, Ω un ouvert de X et $f : \Omega \to Y$ une fonction continue.*

1. f est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compacte.
2. f est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.

Soit E un espace vectoriel sur un corp K.

Définition 1.1.8 *Soit A un sous-ensemble de E, on dit que A est convexe si, pour chaque $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in A$.*

Définition 1.1.9 *Si la famille P des semi-normes p_i, est dénombrable et induit une topologie d'espace séparé E, alors E est métrisable.*

Définition 1.1.10 (Espace de Fréchet) *On appelle espace de Fréchet tout espace vectoriel topologique localement convexe, séparé, métrisable par une distance invariante par translation et complet.*

Définition 1.1.11 (Isomorphisme) *Si E et F sont des espaces de Banach, toute application linéaire continue et bijective f de E dans F est un isomorphisme (ie f^{-1}est aussi continue).*

Définition 1.1.12 (Isometrie) *Soit E et F deux K-espaces vectoriels normés, une application $f : E \to F$ est une isometrie si f est une bijection linéaire qui conserve la norme c'est à dire : $\forall x \in E$ on a $\|f(x)\| = \|x\|$.*

Définition 1.1.13 ***a.*** *On dit que $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *l'application $t \to f(t,s)$ est mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$.*
2. *l'application $s \to f(t,s)$ est continue pour presque tout $t \in [0, +\infty[$.*

b. *f est L^p-Carathéodory $(p \geq 1)$ si elle est de Carathéodory et pour tout réel $r > 0$, il existe $h_r \in L^p([0, +\infty[)$, telle que : $\forall s \in [-r, r]$, et pour presque tout $t \in [0, +\infty[$ on a :*

$$|f(t,s)| \leq h_r(t).$$

Définition 1.1.14 ***a.*** *On dit que* $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *l'application* $t \to f(t, s, z)$ *est mesurable pour tous* $(s, z) \in \mathbb{R}^2$.
2. *l'application* $(s, z) \to f(t, s, z)$ *est continue pour presque tout* $t \in [0, +\infty[$.

b. f *est* L^p*-Carathéodory* $(p \geq 1)$ *si elle est de Carathéodory et pour tout réel* $r > 0$, *il existe* $h_r \in L^p([0, +\infty[)$, *telle que :* $\forall (s, z) \in ([-r, r])^2$, *et pour presque tout* $t \in [0, +\infty[$ *on a :*

$$|f(t, s, z)| \leq h_r(t).$$

Proposition 1.1.1 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach.*

Une application continue $f : X \to Y$ *est dite compacte si et seulement si de toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X, *on peut extraire une sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* Y.

Proposition 1.1.2 *Soit* C *un fermé borné d'un espace de Banach* X *et* $f : C \to X$ *une application. Alors,* f *est compact si et seulement si* f *est limite uniforme d'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'applications compactes de rangs finis.*

1.2 Quelques théorèmes de points fixes

Théorème 1.2.1 (Brouwer) *Soit* C *un compact, convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : C \to C$ *une application continue. Alors* f *admet au moins un point fixe dans* C.

En particulier, pour $C = \overline{B}$, *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.2 (Schauder) *[37], [21] Soit* E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$, C *une partie non vide de* E, *convexe, fermée et bornée. Si* K *est une application continue de* C *dans* C *telle que* $K(C)$ *soit relativement compact, alors* K *admet un point fixe dans* C.

Théorème 1.2.3 (Furi-Pera) *[23] Soit* E *un espace de Fréchet,* Q *un sous ensemble convexe fermé de* E, $0 \in Q$, *et soit l'application* $T : Q \to E$ *continue et compacte. De plus,* *(i) pour toute suite* $(u_j, \mu_j)_{j\geq 1}$ *de* $\partial Q \times [0,1]$ *qui converge vers* (u, μ) *avec* $u = \mu T(u)$ *et* $0 \leq \mu < 1$, *on a* $\mu_j T(u_j) \in Q$ *pour tout* j *assez grand. Alors,* T *a un point fixe dans* Q.

Théorème 1.2.4 (Leray-Schauder) *Soit* B *la boule unité fermée, toute application compact* $T : B \to E$, *telle que* λT *n'ait pas de point fixe sur* ∂B *pour tout* $\lambda \in \,]0,1[$ *possède au moins un point fixe dans* B.

Théorème 1.2.5 (Alternative de Leray-Schauder) *[37], [17], [33], [21], [30] Soit* X *un espace de Banach et* f *une application continue, alors ou bien il existe pour chaque* $\lambda \in [0,1]$ *au moins un* x *tels que* $x = \lambda f(x)$, *ou bien l'ensemble* $\{x \in X : x = \lambda f(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ *n'est pas borné.*

1.3 Quelques critères de compacité

1.3.1 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

On peut trouver les résultats de cette section dans [12].

Théorème 1.3.1 *: Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ *une suite vérifiant :*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, i.e* $\exists g \subset C_b([a,b],\mathbb{R})$,

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq c\,\|g\|\,.$$

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue, i.e*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall t,\ s \in [a,b] : |t-s| \leq \delta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte. (i.e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente).*

Corollaire 1.3.1 *: Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^1([a,b],\mathbb{R})$, *(i.e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées dans* $C([a,b],\mathbb{R})$, *indépendamment de* n, *alors elle admet une sous-suite convergente dans* $C([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b],\mathbb{R}) \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $C([a,b],\mathbb{R})$, (evident).

$(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C([a,b],\mathbb{R}) \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue dans $C([a,b],\mathbb{R})$.

En effet, pour tout t, $s \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$, $\exists\delta \in]t,s[$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(s)| &\leq |f'_n(\delta)|\,|t-s|\,,\ n\in\mathbb{N} \\ &\leq c\,|t-s|\,,\ \text{avec } c = \sup_{t\in[a,b]} |f'_n(t)| \end{aligned}$$

il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, (indépendant de n). ∎

1.3.2 Critère de compacité sur des intervalles non-bornés

Critère de compacité de Corduneanu

On peut trouver les résultats de cette section dans [36].

Dans cette section, nous présentons le critère de compacité de Corduneanu, prolongeant le théorème d'Ascoli-Arzéla.

Soit I un intervalle, borné où non borné et on pose

$$C(I,\mathbb{R}^n) = \{u : I \to \mathbb{R}^n,\ u \text{ continue}\}.$$

$C(I,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet muni de la norme de la convergence uniforme i.e

$$\|u\| = \sup_{t\in I} \|u(t)\|\,. \tag{1.3.1}$$

Soit $C_b := C_b(I,\mathbb{R}^n)$ muni de la même norme que C.
C_b est un espace de Banach.

Considérons les espaces de Banach suivants munis de la norme (1.3.1)

$$\begin{aligned} C_l &= \{u \in C_b,\ \lim_{t\to\pm\infty} u(t) \text{ existe}\}, \\ C_{ll} &= \{u \in C_b,\ \lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to-\infty} u(t)\}, \\ C_{]a,b[} &= \{u : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ u \text{ continue}\}, \\ C_{[a,b]} &= \{u \in C_{]a,b[},\ u(a) = u(b)\}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.1 *Les espaces C_l et $C_{]a,b[}$ (respectivement C_{ll} et $C_{[a,b]}$) sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante avec $\lim_{t\to a^+} \varphi(t)=-\infty$, $\lim_{t\to b^-} \varphi(t)=+\infty$, on définie l'application

$$(\Phi u)(t) = \begin{cases} u(\varphi(t)), \text{ si } t \in]a,b[\\ u(-\infty), \text{ si } t = a \\ u(+\infty), \text{ si } t = b. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Il est clair que Φ est un isomorphisme isométrique entre C_l et $C_{]a,b[}$ et entre C_{ll} et $C_{[a,b]}$.

■

Définition 1.3.1 *Une famille $A \subset C_l$ est dite équi-continue sur chaque intervalle compact I de $\mathbb{R}$ si elle satisfait :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall (t_1,t_2) \in I^2,\ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon,\ \forall u \in A. \tag{1.3.4}$$

Définition 1.3.2 *Une famille $A \subset C_l$ est dite équi-convergente si elle satisfait :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T = T(\varepsilon) > 0,\ \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ |t_1| > T,\ \ |t_2| > T \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon, \forall u \in A. \tag{1.3.5}$$

Remarque 1.3.1 *D'une manière équivalente, A est équi-convergente si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T = T(\varepsilon) > 0$ tels que $|u(t) - l_u^+| \leq \varepsilon$ et $|u(t) - l_u^-| \leq \varepsilon$ pour tout $|t| \geq T$ et pour tout $u \in A$; ici $l_u^+ := \lim_{t\to+\infty} u(t)$ et $l_u^- := \lim_{t\to-\infty} u(t)$.*

Proposition 1.3.2 (Critère de Corduneanu) *[7], [8], [6], [13], [14] Une famille $A \subset C_l$ est relativement compacte si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *A est uniformément bornée dans C_l.*

(ii) *A est équi-continue sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}$.*

(iii) *A est équi-convergente.*

Démonstration. A partir de (ii) et de (iii), nous obtenons que A est équi-continue en C_l. D'après la proposition 1.3.1, $\Phi(A)$ est équi-continu et uniformément borné dans $C_{]a,b[}$. Par le théorème d'Ascoli-Arzéla, nous concluons que $\Phi(A)$ est relativement compact dans $C_{]a,b[}$. ■

On définie l'ensemble

$$C_l([0,+\infty[,\mathbb{R}) = \{u \in C([0,+\infty[,\mathbb{R}) : \lim_{t\to+\infty} u(t) \text{ existe}\}.$$

De [13], nous savons que C_l muni de la norme $\|u\| = \sup_{t\in[0,+\infty[} |u(t)|$ est un espace de Banach. Il existe d'autre critères de compacité sur les intervalles non bornés tels que le critère de Zima, Frechet Kolmogorov. On va les citer dans l'annexe.

CHAPITRE 2

Etude de quelques problèmes aux limites sur les intervalles bornés

2.1 Le problème de Dirichlet sur un intervalle fini

On peut trouver les résultats de cette section dans [32].

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \ a < t < b, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où la fonction $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H_1) (**Hypothèse de monotonie**)

$\int\limits_a^b [u(t) - v(t)][f(t, u(t)) - f(t, v(t))]dt \geq 0, \forall u, v \in C([a, b])$.

(H_2) (**Condition de Lipschitz locale**)

Pour tout $K > 0$, $\exists C_K > 0$, tels que $\forall u, v \in C([a, b])$ satisfaisant les conditions aux bords dans (2.1.1) avec $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq K$, on a :

$$\|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|_2 \leq C_K \|u - v\|_2 .$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *[32] Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)*, le problème* (2.1.1) *admet une solution unique* u *dans* $C^2([a,b])$.

Démonstration.

– **Unicité** : Soit u et v deux solutions du problème (2.1.1), et soit $w = u - v$. Alors

$$w''(t) = f(t, u(t)) - f(t, v(t)).$$

On multiplie cette équation par, w et on intègre par parties sur $]a, b[$ en utilisant l'hypothèse (H_1); i.e

$$\begin{aligned}
\int_a^b w''(t)w(t)dt &= \int_a^b f(t, u(t))w(t)dt - \int_a^b f(t, v(t))w(t)dt \\
&= \int_a^b [f(t, u(t)) - f(t, v(t))](u(t) - v(t))dt \\
&= [w'(t)w(t)]_a^b - \int_a^b (w'(t))^2 dt, \text{ (par parties)} \\
&\geq 0, \text{ d'après } (H_1).
\end{aligned}$$

Puisque $[w'(t)w(t)]_a^b = 0$, il suit que $\int_a^b (w'(t))^2 dt = 0$; alors $w(t) = c^{\underset{=}{ste}} = w(a) = 0$ sur $]a, b[$. D'où $u = v$.

– **Estimations a priori :** Nous avons

1. $\|u\|_\infty \leq (b - a) \int_a^b |f(t, 0)|\, dt := M$,
2. $\|u'\|_2 \leq \sqrt{b - a} \int_a^b |f(t, 0)|\, dt$,
3. $\|u''\|_2 \leq \|f(t, 0)\|_2 + MC_M\sqrt{b - a}$.

   En effet, on multiplie l'équation dans le problème (2.1.1) par u puis on intègre par parties sur $]a, b[$ on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int_a^b |u'(t)|^2\, dt &= \int_a^b u(t)f(t, u(t))dt = \int_a^b u(t)[f(t, u(t)) - f(t, 0)]dt \\
&\quad + \int_a^b u(t)f(t, 0)dt,
\end{aligned}$$

   et aussi, par l'hypothèse (H_1),

$$\int_a^b |u'(t)|^2\, dt \leq -\int_a^b u(t)f(t, 0)dt \leq \|u\|_\infty \int_a^b |f(t, 0)|\, dt. \tag{2.1.2}$$

Ecrivons $u(t) = \int_a^t u'(s)ds$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on déduit que, $|u(t)| \leq (\int_a^t ds)^{\frac{1}{2}}(\int_a^t |u'(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$, d'où $\|u\|_\infty \leq \sqrt{b-a}\,\|u'\|_2$; on revient à l'inégalité (2.1.2) on obtient :

$$\|u'\|_2^2 \leq \sqrt{b-a}\,\|u'\|_2 \int_a^b |f(t,0)|\,dt.$$

D'où :

$$\|u'\|_2 \leq \sqrt{b-a}\int_a^b |f(t,0)|\,dt \text{ et } \|u\|_\infty \leq (b-a)\int_a^b |f(t,0)|\,dt := M.$$

Puisque

$$u''(t) = f(t,u(t)) = [f(t,u(t)) - f(t,0)] + f(t,0),$$

et d'après (H_2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u''\|_2 &\leq \|f(t,u(t)) - f(t,0)\|_2 + \|f(t,0)\|_2 \\
&\leq C_M \|u\|_2 + \|f(t,0)\|_2 \\
&\leq C_M\sqrt{b-a}\,\|u\|_\infty + \|f(t,0)\|_2 \\
&\leq MC_M\sqrt{b-a} + \|f(t,0)\|_2 .
\end{aligned}$$

Il reste à montrer l'existence d'une solution.

- **Existence d'une solution :**

Soit $\alpha > 0$ un paramètre réel à choisir, alors on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : $u_0(t) = 0, \forall t \in]a,b[$ et pour donner u_n, on définit v_n la solution unique du problème linéaire :

$$\begin{cases} v_n''(t) - \alpha v_n(t) = f(t,u_n(t)) - \alpha u_n(t), \; a < t < b, \\ v_n(a) = v_n(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

u_{n+1} est donc définie en utilisant la troncature :

$$u_{n+1}(t) = \begin{cases} -2M, \; v_n(t) < -2M, \\ v_n(t), \; -2M \leq v_n(t) \leq 2M, \\ 2M, \; v_n(t) > 2M. \end{cases}$$

Les estimations suivantes sont directes :

$$\|u_n\|_\infty \leq 2M, \; \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.4}$$

$$\|u_{n+1} - u_n\|_2 \leq \|v_n - v_{n-1}\|_2\,, \tag{2.1.5}$$

l'estimation (2.1.4) découle de : $|u_{n+1}(t)| = \min(2M, |v_n(t)|)$ alors que (2.1.5) est une conséquence du fait que

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \begin{cases} 0, \text{ si } v_n \in]-\infty, +\infty[\text{ et } v_{n-1} \in]-\infty, -2M[\cup]2M, +\infty[\\ \text{ou} \\ |v_n(t) - v_{n-1}(t)|\,, \text{ si } v_n, v_{n-1} \in [-2M, 2M]. \\ \text{ou} \\ 4M, \text{ sinon,} \end{cases}$$

maintenant, on introduit les fonctions $p(t) = p_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t)$ et $q(t) = q_n(t) = v_n(t) - v_{n-1}(t)$. On obtient :

$$\begin{cases} q''(t) - \alpha q(t) = f(t, u_n(t)) - f(t, u_{n-1}(t)) - \alpha p(t), \ a < t < b \\ q(a) = q(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

On met les carrés dans les deux côtés de l'équation (2.1.6) puis on intègre par parties sur $]a, b[$, on obtient de (H_1) et (H_2) :

$$\begin{aligned} \left\|q''\right\|_2^2 + \alpha^2 \|q\|_2^2 + 2\alpha \|q'\|_2^2 &= \|f(t, u_n(t)) - f(t, u_{n-1}(t))\|_2^2 + \alpha^2 \|p\|_2^2 \\ &\quad -2\alpha \int_a^b p\,[f(t, u_n(t)) - f(t, u_{n-1}(t))]\,dt, \end{aligned}$$

et alors

$$\alpha^2 \|q\|_2^2 + 2\alpha \|q'\|_2^2 \leq (C_{2M}^2 + \alpha^2) \|p\|_2^2\,. \tag{2.1.7}$$

De plus,

$$\|q\|_2 \leq \sqrt{b-a}\, \|q\|_\infty \leq (b-a) \|q'\|_2\,. \tag{2.1.8}$$

On combine (2.1.7) et (2.1.8), on trouve l'estimation suivante pour tout $\alpha > \frac{(b-a)^2 C_{2M}^2}{2}$

$$\|q\|_2^2 \leq \|p\|_2^2 \frac{\alpha^2 + C_{2M}^2}{\alpha^2 + \frac{2\alpha}{(b-a)^2}} := (1-\varepsilon)^2 \|p\|_2^2\,, \ (0 < \varepsilon < 1),$$

puisque $\frac{\alpha^2 + C_{2M}^2}{\alpha^2 + \frac{2\alpha}{(b-a)^2}} < 1$, en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 + C_{2M}^2}{\alpha^2 + \frac{2\alpha}{(b-a)^2}} &= \frac{(\alpha^2 + C_{2M}^2)(b-a)^2}{(b-a)^2\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(b-a)^2\alpha^2}{(b-a)^2\alpha^2 + 2\alpha} + \frac{C_{2M}^2(b-a)^2}{(b-a)^2\alpha^2 + 2\alpha} \\ &< \frac{(b-a)^2\alpha^2}{(b-a)^2\alpha^2 + 2\alpha} + \frac{2\alpha}{(b-a)^2\alpha^2 + 2\alpha} = 1, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (2.1.5) on obtient :

$$\|u_{n+1}-u_n\|_2 \leq \|v_n - v_{n-1}\|_2 = ||q||_2 \leq (1-\varepsilon)\|u_n - u_{n-1}\|_2 \leq$$

$$... \leq (1-\varepsilon)^n \|u_1 - u_0\|_2 ,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $H^2(]a,b[)$ qui converge vers une certaine limite dans $C^1([a,b])$. De l'équation dans (2.1.6), on obtient quand $n \to +\infty$

$$\|v_{n+1}-v_n\|_2 , \ \left\|v'_{n+1}-v'_n\right\|_2 , \ \left\|v''_{n+1}-v''_n\right\|_2 \to 0.$$

En effet, u_n converge dans C^1 alors $\|u_{n+1}-u_n\|_2 \to 0$ et $\left\|u'_{n+2}-u'_{n+1}\right\|_2 \to 0$ et comme $\|v_{n+1}-v_n\|_2 \leq (1-\varepsilon)\|u_{n+1}-u_n\|_2 \to 0$ donc $\|v_{n+1}-v_n\|_2 \to 0$ et $\left\|v'_{n+1}-v'_n\right\|_2 = \left\|u'_{n+2}-u'_{n+1}\right\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\left\|v'_{n+1}-v'_n\right\|_2 \to 0$.
Il reste a montrer que $\left\|v''_{n+1}-v''_n\right\|_2 \to 0$.
D'après le problème (2.1.3) on obtient

$$v''_{n+1}(t)-v''_n(t) = \alpha(v_{n+1}(t)-v_n(t)) - \alpha(u_{n+1}(t)-u_n(t)) + f(t,u_{n+1}(t)) - f(t,u_n(t)).$$

Donc

$$\begin{aligned} ||v''_{n+1}(t)-v''_n(t)||_2 &\leq \alpha||v_{n+1}(t)-v_n(t)||_2 + \alpha||u_{n+1}(t)-u_n(t)||_2 \\ &\quad +||f(t,u_{n+1}(t)) - f(t,u_n(t)||_2, \end{aligned}$$

et comme $\|v_{n+1}-v_n\|_2 , \|u_{n+1}-u_n\|_2 \to 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait l'estimation (2.1.4), la limite u satisfait aussi cette estimation et nous avons, de (H_2)

$$\|f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\|_2 \leq C_{2M}\|u_n - u\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

alors

$$||v''_{n+1}(t)-v''_n(t)||_2 \to 0.$$

De plus, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^2(]a,b[)$ et alors converge fortement dans $C^1([a,b])$ vers v. Donc les limites u et v vérifient

$$\begin{cases} v''(t) - \alpha v(t) = f(t,u(t)) - \alpha u(t), \ a < t < b, \\ v(a) = v(b) = 0, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

et

$$u(t) = \begin{cases} -2M, \ v(t) < -2M, \\ v(t), \ \ -2M \leq v(t) \leq 2M, \\ 2M, \ v(t) > 2M. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

En particulier $\|u\|_2 \leq \|v\|_2$ et $\|u\|_\infty \leq 2M$ pour $|u(t)| = \min(2M, |v(t)|)$. On vérifie que $u = v$ dans ce cas avec v est une solution du problème (2.1.9). On met les carrés dans les deux côtés de l'équation (2.1.9) puis on intègre par parties sur $]a, b[$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|v''\|_2^2 + \alpha^2 \|v\|_2^2 + 2\alpha \|v'\|_2^2 &= \|f(t, u(t))\|_2^2 + \alpha^2 \|u\|_2^2 - 2\alpha \int_a^b u(t) f(t, u(t)) dt \\
&= \|[f(t, u(t)) - f(t, 0)] + f(t, 0)\|_2^2 + \alpha^2 \|u\|_2^2 \\
&\quad -2\alpha \int_a^b u(t) f(t, u(t)) dt \\
&\leq (\|f(t, u(t)) - f(t, 0)||_2 + ||f(t, 0)\|_2)^2 + \alpha^2 \|u\|_2^2 \\
&\quad -2\alpha \int_a^b u(t) f(t, u(t)) dt \\
&\leq (\|f(t, 0)\|_2 + C_{2M} \|u\|_2)^2 + \alpha^2 \|u\|_2^2 \\
&\quad -2\alpha \int_a^b u(t) f(t, u(t)) dt \\
&\leq \|f(t, 0)\|_2^2 + C_{2M}^2 \|u\|_2^2 + 2C_{2M} \|u\|_2 \|f(t, 0)\|_2 \\
&\quad +\alpha^2 \|u\|_2^2 + 2\alpha \|u\|_\infty \int_a^b |f(t, 0)| \, dt \\
&\leq \|f(t, 0)\|_2^2 + C_{2M}^2 \|u\|_2^2 + 2C_{2M} \|u\|_2 \|f(t, 0)\|_2 \\
&\quad +\alpha^2 \|u\|_2^2 + 4\alpha M \int_a^b |f(t, 0)| \, dt.
\end{aligned}$$

Notons que $\|v\|_2 \leq (b-a) \|v'\|_2$ et $\|u\|_2 \leq \|v\|_2$,on arrive aux estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
2\alpha \|v'\|_2^2 &\leq \|f(t, 0)\|_2^2 + C_{2M}^2 \|v\|_2^2 + 2C_{2M} \|v\|_2 \|f(t, 0)\|_2 + 4\alpha M \int_a^b |f(t, 0)| \, dt \\
&\leq C_{2M}^2 (b-a)^2 \|v'\|_2^2 + 2C_{2M}(b-a) \|f(t, 0)\|_2 \|v'\|_2 + \|f(t, 0)\|_2^2 + \\
&\quad 4\alpha M \int_a^b |f(t, 0)| \, dt.
\end{aligned}$$

Enfin, en prenant $A = 2\alpha - C_{2M}^2 (b-a)^2, \ B = 2C_{2M}(b-a) \|f(t, 0)\|_2$,
$C = \|f(t, 0)\|_2^2 + 4\alpha M \int_a^b |f(t, 0)| \, dt$ et en choisissant $\alpha > \frac{(b-a)^2 C_{2M}^2}{2}$, on obtient l'inégalité :

$$A \|v'\|_2^2 - B \|v'\|_2 - C \leq 0, \ \text{i.e} \ \|v'\|_2 \leq \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}.$$

Une condition suffisante pour que $\|v\|_\infty \leq \sqrt{b-a}\,\|v'\|_2 \leq \sqrt{b-a}\frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A} < 2M$ soit vérifiée est :

$$\frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A} \leq 2\sqrt{b-a}\int_a^b |f(t,0)|\,dt.$$

D'une manière équivalente, nous avons $B \leq 4A\sqrt{b-a}\int_a^b |f(t,0)|\,dt - \sqrt{B^2+4AC}$, ce qui est possible si on choisit α assez grand dans l'expression de A et gràce au fait que B est indépendant de α. Enfin $\|v\|_\infty < 2M$ et $u = v$ est une solution du problème (2.1.1), la démonstration du théorème 2.1.1 est alors complète. ■

2.1.1 Application

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda u(t), \ 0 < t < 1, \ \lambda > 0 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Le problème (2.1.11) admet une solution qui s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} -(1-s)t \text{ pour } 0 \leq t \leq s \\ -(1-t)s \text{ pour } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

est la fonction de Green associée au problème (2.1.11), (voir Annexe).

On va vérifier les hypothèses du théorème 2.1.1 i.e :

(H_1) : est vérifiée puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u(t)-v(t)][f(t,u(t))-f(t,v(t))]dt &= \int_0^1 [u(t)-v(t)][\lambda u(t) - \lambda v(t)]dt \\ &= \int_0^1 \lambda[u(t)-v(t)]^2 dt \\ &\geq 0, \forall u,v \in C([0,1]) \text{ et } \lambda > 0. \end{aligned}$$

(H_2) : Soient $K > 0$ et $u, v \in C([0,1])$ satisfaisant les conditions aux bords dans le problème (2.1.11) avec $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq K$. On a :

$$\begin{aligned}\|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\|_2^2 &= \int_0^1 |\lambda u(t) - \lambda v(t)|^2 dt \\ &= \lambda^2 \int_0^1 |u(t) - v(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Puis

$$\|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\|_2 \leq \lambda \|u - v\|_2 .$$

Il suffit donc de prendre $C_K = \lambda > 0$.

CHAPITRE 3

Etude de quelques problèmes aux limites sur les intervalles non bornés en utilisant des résultats sur les bornés

Ce chapitre est partagé en deux sections, on va montrer l'existence de solutions pour deux problèmes sur $[0, +\infty[$ en résolvant des problèmes analogues sur des intervalles $[0, n]$. Dans la première section, la non linearité de f est de la forme $f(t, u)$, et on obtient la solution sur $[0, +\infty[$ en utilisant une méthode d'approximation.
Dans la seconde section, la non linearité de f dépend aussi de la derivé u', et dans cette partie les solutions sont étendues à $[0, +\infty[$ par une méthode de diagonalisation.

On peut trouver les résultats de la section suivantes dans [32].

3.1 Résolution d'un problème aux limites sur $[0,+\infty[$ avec une méthode d'approximation

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)), \ t > 0 \\ u(0) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H_1) (**Hypothèse de monotonie**)

$\int\limits_0^{+\infty} [u(t)-v(t)][f(t,u(t))-f(t,v(t))]dt \geq 0, \forall u,v \in C([0,+\infty[).$

(H_2) (**Condition de Lipschitz locale**)

Pour tout $K > 0$, $\exists\ C_K > 0$, tels que $\forall u,v \in C([0,+\infty[)$ satisfaisant les conditions aux bords dans (3.1.1) avec $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq K$, on a

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|_2 \leq C_K \|u-v\|_2 .$$

(H_3) $f(t,0) \in L^1([0,+\infty[)$, i.e $\int_0^{+\infty} |f(t,0)|\, dt < +\infty$.

(H_4) (**Condition de coercivité**)

$\exists\beta > 0$ tels que $\forall u \in C^1([0,+\infty[) \cap L^2(]0,+\infty[)$,

$$\int_0^{+\infty} u(t)[f(t,u(t))-f(t,0)]dt \geq \beta \int_0^{+\infty} |u(t)|^2\, dt.$$

Le résultat principal dans cette section est :

Théorème 3.1.1 *[32] Sous les hypothèses* $(H_1),(H_2),(H_3)$ *et* (H_4)*, le problème* (3.1.1) *admet une solution unique* $u \in C^2([0,+\infty[)$.

Démonstration. (**du théorème** 3.1.1)

Puisque l'unicité est evidente (voir la démonstration du théorème 2.1.1) nous montrerons seulement l'existence d'une solution.

Étape1 : Convergence d'une suite de solutions approchées.

Soit u_n une solution du problème (2.1.1) avec $a=0$ et $b=n$, prolongée par 0 pour $t \geq n$ (cette solution existe d'après le théorème 2.1.1). On multiplie l'équation dans (2.1.1) par, u_n et on intègre de 0 à n ; par les hypothèses (H_3) et (H_4) on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int_0^n |u_n'(t)|^2\,dt &= \int_0^n u_n(t)f(t,u_n(t))dt \\
&= \int_0^{+\infty} u_n(t)f(t,u_n(t))dt - \int_n^{+\infty} u_n(t)f(t,u_n(t))dt \\
&= \int_0^{+\infty} u_n(t)[f(t,u_n(t)) - f(t,0)]dt + \int_0^{+\infty} u_n(t)f(t,0)dt \\
&\quad - \int_n^{+\infty} u_n(t)f(t,u_n(t))dt \\
&= \int_0^{+\infty} u_n(t)[f(t,u_n(t)) - f(t,0)]dt + \int_0^{n} u_n(t)f(t,0)dt \\
&\quad + \int_n^{+\infty} u_n(t)\left[f(t,0) - f(t,u_n(t))\right]dt \\
&= \int_0^{+\infty} u_n(t)[f(t,u_n(t)) - f(t,0)]dt + \int_0^{n} u_n(t)f(t,0)dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$-\int_0^n |u_n'(t)|^2\,dt \geq \beta \int_0^{+\infty} |u_n(t)|^2\,dt + \int_0^n u_n(t)f(t,0)dt.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\beta \int_0^{+\infty} |u_n(t)|^2\,dt + \int_0^n |u_n'(t)|^2\,dt &\leq \sup_{0\leq t\leq n} |u_n(t)| \int_0^n |f(t,0)|\,dt \\
&\leq \sup_{0\leq t<+\infty} |u_n(t)| \int_0^{+\infty} |f(t,0)|\,dt.
\end{aligned}$$

De façon continue

$$H^1(]0,+\infty[) \hookrightarrow C^0([0,+\infty[),$$

ce qui implique qu'il existe un certain $\gamma > 0$ qui satisfait

$$\|u_n\|_{C^0([0,+\infty[)} = \sup_{0\leq t<+\infty} |u_n(t)| \leq \gamma \|u_n\|_{H^1(]0,+\infty[)},$$

d'où

$$\delta \|u_n\|^2_{H^1(]0,+\infty[)} \leq \gamma \|u_n\|_{H^1(]0,+\infty[)} \int_0^{+\infty} |f(t,0)|\,dt,$$

où $\delta = \min(1,\beta)$. Par conséquent :

$$\|u_n\|_{H^1(]0,+\infty[)} \leq \frac{\gamma}{\delta}\int_0^{+\infty} |f(t,0)|\,dt,$$

et

$$\|u_n\|_{C^0([0,+\infty[)} \leq \frac{\gamma^2}{\delta}\int_0^{+\infty} |f(t,0)|\,dt.$$

Donc $(u_n)_n$ est uniformément bornée en t et n. De plus, pour tout $0 < t < s < +\infty$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
|u_n(t) - u_n(s)| &= |\int_t^s u_n'(x)dx| \\
&\leq \int_t^s |u_n'(x)|\,dx \\
&\leq \sqrt{s-t}(\int_0^{+\infty} |u_n'(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s-t}\,\|u_n'\|_{L^2(]0,+\infty[)} \\
&\leq \sqrt{s-t}\,\|u_n\|_{H^1(]0,+\infty[)} \\
&\leq \frac{\gamma}{\delta}\sqrt{s-t}\int_0^{+\infty} |f(t,0)|\,dt.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $(u_n)_n$ est équi-continue et puisqu'elle est uniformément bornée sur $]0,+\infty[$ indépendament de n, alors d'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, il existe une sous suite noté aussi $(u_n)_n$ convergente sur chaque intervalle compact $[0,a]$ ($a > 0$ est arbitraire).

Étape 2 : La limite d'une solution

Puisque f est continue et

$$u_n'(t) = u_n'(0) + \int_0^t f(s,u_n(s))ds,$$

la suite $(u_n')_n$ converge vers $v = u'$. De plus, $v(t) = K + \int_0^t f(s,u(s))ds$ pour un certain K ; alors $v'(t) = f(t,u(t))$. De l'équation $u_n''(t) = f(t,u_n(t))$ et la continuité de $f(t,.)$ on trouve que $(u_n'')_n$ converge vers $v'(.) = f(.,u(.))$ dans $C([0,a])$. Alors nous avons montré que $(u_n')_n$ converge vers $v = u'$ dans $C^1([0,a])$. Par conséquent, la limite u satisfait

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)),\ 0 < t < a, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

pour tout $a > 0$.

Étape 3 : u s'annulle à l'infinie

On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'un certain $\alpha > 0$ et d'une suite croissante $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui peut être choisit telle que $t_{k+1} > 1+t_k$ avec $|u(t_k)| > \alpha$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$I := \int_0^{+\infty} (u^2(t) + u'^2(t))dt \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{t_k}^{1+t_k} (u^2(t) + u'^2(t))dt := \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$

Afin d'obtenir une limite inférieure pour les intégrales I_k, on considère la solution v du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} v''(t) = v(t),\ 0 < t < 1, \\ v(0) = u(t_k), \\ v'(1) = 0. \end{cases}$$

La solution $v(t) = k_1e^t + k_2e^{-t}$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et $k_2 > k_1$ minimise la fonctionnelle $J(\varphi(t)) = \int_0^1 (\varphi^2(t) + \varphi'^2(t))dt$ dans l'espace $C^2([0, 1])$. Donc

$$\begin{aligned} I &\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} J(v(t)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^1 (v^2(t) + v'^2(t))dt = \sum_{k\in\mathbb{N}} -v(0)v'(0) > \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(k_2 - k_1) \\ &\geq M \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha = +\infty, \end{aligned}$$

pour un certain $M > 0$, on trouve une contradiction par conséquent $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$ et u est la solution cherchée. ■

3.1.1 Application

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = (1 + e^{-2t})u(t),\ t > 0 \\ u(0) = \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On va vérifier les hypothèses du théorème 3.1.1 :

(H_1) : est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}(u(t)-v(t))(f(t,u(t))-f(t,v(t)))dt &= \int_0^{+\infty}(u(t)-v(t))((1+e^{-2t})u(t) \\
&\quad -(1+e^{-2t})v(t))dt \\
&= \int_0^{+\infty}(1+e^{-2t})(u(t)-v(t))^2dt \\
&\geq 0, \forall u,v \in C([0,+\infty[).
\end{aligned}$$

(H_2) : Soient $K>0$ et $u,v \in C([0,+\infty[)$ satisfaisant les conditions aux bords dans le problème (3.1.2) avec $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq K$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f(t,u(t))-f(t,v(t))\|_2^2 &= \int_0^{+\infty}|(1+e^{-2t})u(t)-(1+e^{-2t})v(t)|^2dt \\
&= \int_0^{+\infty}(1+e^{-2t})^2|u(t)-v(t)|^2dt \leq 4\|u-v\|_2^2.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $C_K = 2 > 0$.

(H_3) : $f(t,0) \in L^1([0,+\infty[)$, car

$$\int_0^{+\infty}|f(t,0)|\,dt = 0 < +\infty.$$

(H_4) : Soit $u \in C^1([0,+\infty[) \cap L^2(]0,+\infty[)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}u(t)[f(t,u(t))-f(t,0)]dt &= \int_0^{+\infty}u(t)((1+e^{-2t})u(t))dt \\
&= \int_0^{+\infty}(1+e^{-2t})|u(t)|^2dt \\
&\geq \int_0^{+\infty}|u(t)|^2\,dt.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\beta = 1 > 0$.

On peut trouver les résultats de cette section dans [27].

3.2 Résolution d'un problème dépendant de la derivée sur $[0,+\infty[$ avec la méthode de diagonalisation

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t,u(t),u'(t)) = 0, \ t > 0 \\ u(0) = 0, \ u \text{ bornée sur } [0,+\infty[. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Définition 3.2.1 *Une solution du problème*

$$\begin{cases} u''(t) + f(t,u(t),u'(t)) = 0, \ t > 0 \\ u(0) = 0, \ u \textit{ bornée sur } [0,+\infty[, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

est une fonction $u(t)$ satisfaisant les conditions de (3.2.2) *avec :*

1. $u \in C^1([0,+\infty[)$,
2. $u(t) > 0$ *pour* $t \in]0,+\infty[$.

Théorème 3.2.1 *[27] Soit $f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\times[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction L^1-Carathéodory qui satisfait les conditions (A_1) et (A_2) avec :*

(A_1) *Pour toute constante $H > 0$, $\exists \Psi_H \in C([0,+\infty[,[0,+\infty[)$ avec $\Psi_H \not\equiv 0$ sur chaque sous intervalle de $]0,+\infty[$, et une constante $\gamma \in [0,1[$ avec*

$$f(t,u(t),v(t)) \geq \Psi_H(t)v^\gamma(t), \ \textit{sur } [0,+\infty[\times[0,H]^2.$$

(A_2) *Il existe trois fonctions $p,q,r : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ tels que :*

$$\begin{aligned} P_1 &:= \int_0^{+\infty} sp(s)ds < +\infty, \ R := \int_0^{+\infty} r(s)ds < +\infty, \ R_1 := \int_0^{+\infty} sr(s)ds < +\infty, \\ Q &:= \int_0^{+\infty} q(s)ds < +\infty, \ Q_1 := \int_0^{+\infty} sq(s)ds < +\infty, \end{aligned}$$

et

$$|f(t,u(t),v(t))| \leq p(t)|u(t)| + q(t)|v(t)| + r(t), p.p(t,u,v) \in ([0,+\infty[)^3.$$

Alors le problème (3.2.1) *admet une unique solution* $u \in C^1([0,+\infty[)$ *à condition que,*

$$P_1 + Q < 1.$$

On va commencer d'abord par la résolution du problème sur un intervalle borné $[0,n]$.

Considérons le problème

$$\begin{cases} u''(t) + f(t,u(t),u'(t)) = 0, \ 0 < t < n \\ u(0) = u'(n) = 0, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Théorème 3.2.2 *[27] Soit* $f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\times[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *une fonction* L^1*-Carathéodory qui satisfait les conditions* (A_1) *et* (A_2)*. Soit* n *un entier positif. Alors le problème* (3.2.3) *admet une unique solution strictement positive* $u_n \in C^1([0,n])$ *telle qu'il existe une constante* $M > 0$ *indépendante de* n *vérifiant*

$$\int_0^t ((1-\gamma)\int_x^n \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{1-\gamma}} dx \leq u_n(t) \leq M, \ pour \ t \in [0,n],$$

$$((1-\gamma)\int_t^n \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq u_n'(t) \leq M, \ pour \ t \in [0,n].$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Soit* $e \in L^1(]0,n[)$ *et* $u \in W^{2.1}(]0,n[)$ *tels que*

$$\begin{cases} u''(t) + e(t) = 0 \ pour \ p.p \ t \in]0,n[\\ u(0) = 0, \ u'(n) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\|u'\|_\infty \leq \|e\|_{L^1(]0,n[)}.$$

Démonstration. (du lemme 3.2.1**)**

Puisque $-u''(t) = e(t)$ p.p. $t \in]0,n[$, alors on a

$$u'(t) = \int_t^n [-u''(s)]ds = \int_t^n e(s)ds.$$

Ceci implique

$$\|u'\|_\infty \leq \|e\|_{L^1(]0,n[)}.$$

D'où le résultat. ■

Démonstration. (du théorème 3.2.2)

Soit $n \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, ...\}$ fixé et $Y = L^1(]0, n[)$. Soit $X = C^1([0, n])$ muni de la norme

$$\|u\| = \max\{\|u\|_\infty\,,\ \ \|u'\|_\infty\},$$

où

$$\|u\|_\infty = \max\{|u(t)|,\ t \in [0, n]\}.$$

On définit l'opérateur linéaire $L_n : D(L_n) \subset X \to Y$ par :

$$D(L_n) = \{u \in W^{2,1}(]0, n[),\ u(0) = u'(n) = 0\},$$

et pour $u \in D(L_n)$,

$$L_n u(t) = -u''(t).$$

On définit aussi l'application non linéaire $N : X \to Y$ par :

$$(Nu)(t) = f(t, u(t), u'(t)).$$

Nous avons du fait que f est L^1-Carathéodory (voir définition 1.1.13) que l'application $N : X \to Y$ est bornée. D'autre part, il est facile de voir que L_n est une application linéaire de $D(L_n) \subset X$ à valeurs dans Y. On démontre facilement en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzéla que l'application $(L_n)^{-1}N : X \to X$ est compacte.

En effet, il est clair que l'application $(L_n)^{-1}N$ est uniformément bornée car l'application N est bornée.

Il reste à montrer que $(L_n)^{-1}N$ est équi-continue sur X i.e :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, $\forall u \in X : |t - s| \leq \delta \Rightarrow |(L_n)^{-1}N(u(t)) - (L_n)^{-1}N(u(s))| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ à choisir, tel que $|t - s| \leq \delta$. Alors :

$$\begin{aligned} |(L_n)^{-1}N(u(t)) - (L_n)^{-1}N(u(s))| &= |(L_n)^{-1}f(t, u(t), u'(t)) - (L_n)^{-1}f(s, u(s), u'(s))| \\ &= |u(t) - u(s)| \\ &\leq \varepsilon,\ \text{pour}\ |t - s| \leq \delta. \end{aligned}$$

Grâce à la continuité uniforme de u qui s'obtient par sa continuité sur le compact $[0, n]$

Notons que $u \in C^1([0,n])$ est une solution du problème (3.2.3) si et seulement si u est un point fixe de l'équation

$$u(t) = (L_n)^{-1}Nu(t).$$

On va appliquer l'alternative de Leray-Schauder (voir le théorème 1.2.5) pour obtenir l'existence d'une solution $u(t) = (L_n)^{-1}Nu(t)$.

D'abord, on vérifié que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille de problèmes

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda f(t,u(t),u'(t)) = 0, \text{ p.p } 0 < t < n \\ u(0) = u'(n) = 0, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

est borné dans $C^1([0,n])$ par une constante indépendante de λ avec $0 < \lambda < 1$.

Soit $u \in C^1([0,n])$ solution du problème (3.2.4), alors $u \geq 0$ et $u' \geq 0$ sur $[0,n]$ (d'après la définition 3.2.1 et la croissance de u). De plus, $u(t) = \int_0^t u'(s)ds$, donc

$$|u(t)| \leq t \left\|u'\right\|_\infty .$$

D'après le lemme 3.2.1 et la condition (A_2) on obtient

$$\begin{aligned} \left\|u'\right\|_\infty &\leq \left\|f(t,u(t),u'(t))\right\|_{L^1(]0,n[)}, \text{ car } 0 < \lambda < 1 \\ &\leq \left\|p(t)u(t)\right\|_{L^1(]0,n[)} + \left\|q(t)u'(t)\right\|_{L^1(]0,n[)} + \left\|r(t)\right\|_{L^1(]0,n[)} \\ &\leq \left(\left\|tp(t)\right\|_{L^1(]0,n[)} + \left\|q(t)\right\|_{L^1(]0,n[)}\right)\left\|u'\right\|_\infty + \left\|r(t)\right\|_{L^1(]0,n[)} \\ &\leq (P_1 + Q)\left\|u'\right\|_\infty + R, \end{aligned}$$

et puisque $P_1 + Q < 1$, alors :

$$\left\|u'\right\|_\infty \leq \frac{R}{1 - P_1 - Q} := M_1. \tag{3.2.5}$$

D'après le problème (3.2.4), on sait que $u(t) = \lambda \int_0^t (\int_s^n f(x,u(x),u'(x))dx)ds$, de sorte que

$$u(n) = \lambda \int_0^n (\int_s^n f(x,u(x),u'(x))dx)ds.$$

Posons $\int_s^n f(x,u(x),u'(x))dx = F(n)-F(s)$ telle que F est primitive de f, donc

$$\begin{aligned}
u(n) &= \lambda\int_0^n (\int_s^n f(x,u(x),u'(x))dx)ds \\
&= \lambda[\int_0^n (F(n)-F(s))ds] \\
&= \lambda F(n)\int_0^n ds - \lambda\int_0^n F(s)ds \\
&= \lambda nF(n) - \lambda\int_0^n F(s)ds,
\end{aligned}$$

par intégration par parties on obtient

$$\int_0^n F(s)ds = [sF(s)]_0^n - \int_0^n sf(s,u(s),u'(s))ds.$$

Donc

$$\begin{aligned}
u(n) &= \lambda nF(n) - \lambda([sF(s)]_0^n - \int_0^n sf(s,u(s),u'(s))ds) \\
&= \lambda\int_0^n sf(s,u(s),u'(s))ds.
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq u(n) \leq \int_0^n sf(s,u(s),u'(s))ds.\ \forall t\in]0,n[\\
&\leq \|sf(s,u(s),u'(s))\|_{L^1(]0,n[)} \\
&\leq \|sp(s)\|_{L^1(]0,n[)}\|u\|_\infty + \|sq(s)\|_{L^1(]0,n[)}\|u'\|_\infty + \|sr(s)\|_{L^1(]0,n[)} \\
&\leq P_1\|u\|_\infty + Q_1\|u'\|_\infty + R_1.
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité (3.2.5) et le fait que $P_1 \leq P_1 + Q < 1$, on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{R_1+Q_1M_1}{1-P_1} := M_2. \tag{3.2.6}$$

Ainsi

$$\|u\| \leq M,$$

où

$$M := \max\{M_1, M_2\}. \tag{3.2.7}$$

M est indépendant de λ.

Finalement, il est facile de voir que dans l'inégalité (3.2.5) et (3.2.6), M est indépendante de n, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Donc la famille $\{u \in X : u(t) = \lambda(L_n)^{-1}Nu(t),\ 0 < \lambda < 1\}$ est bornée. D'après l'alternative de Leray Schauder : $\exists\ u : u(t) = \lambda(L_n)^{-1}Nu(t)$ pour chaque $\lambda \in]0,1[$ donc le problème (3.2.3) admet une solution u_n avec,

$$0 \le u_n(t) \le M,\ \ 0 \le u_n'(t) \le M,\ \text{ pour } t \in [0,n]. \tag{3.2.8}$$

Maintenant (A_1) assure l'existence d'une fonction Ψ_M continue sur $[0,+\infty[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$, et une constante $\gamma \in [0,1[$ avec $f(t,u_n(t),u_n'(t)) \ge \Psi_M(t)(u_n'(t))^{\gamma}$ pour $(t,u_n(t),u_n'(t)) \in [0,n] \times [0,M]^2$. Aussi, nous avons du problème (3.2.3) et du fait que $u_n'(t) > 0$ sur $]0,n]$ que

$$-u_n''(t) \ge \Psi_M(t)(u_n'(t))^{\gamma}.$$

On intègre de t à n, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_t^n \tfrac{u_n''(s)}{(u_n'(s))^{\gamma}}ds \ge \int_t^n \Psi_M(s)ds \quad &\Rightarrow \quad -[\tfrac{1}{1-\gamma}(u_n'(s))^{1-\gamma}]_t^n \ge \int_t^n \Psi_M(s)ds \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{1-\gamma}(u_n'(t))^{1-\gamma} \ge \int_t^n \Psi_M(s)ds \\ &\Rightarrow \quad u_n'(t) \ge ((1-\gamma)\int_t^n \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \end{aligned}$$

et si on intègre de 0 à t, on obtient :

$$u_n(t) \ge \int_0^t ((1-\gamma)\int_x^n \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{1-\gamma}}dx,\ \text{ pour } t \in [0,n].$$

D'où le résultat demandé. ■

Démonstration. (**du théorème** 3.2.1)

Pour obtenir une solution du problème (3.2.1) sur $[0,+\infty[$ on va utiliser la méthode de diagonalisation .

Soit u_n une solution du problème (3.2.4) (qui existe d'après le théorème 3.2.2). De (3.2.3) et (3.2.8), on sait que :

$$0 \le -u_n^{''}(t) \le \Phi(t),\ \text{ p.p. } t \in]0,n],$$

où

$$\Phi(t) := (p(t)+q(t))M + r(t),$$

et M définie par (3.2.7), ce qui implique que :

$$u_n^{'}(t) \leq \int_t^n \Phi(s)ds \leq \int_t^{+\infty} \Phi(s)ds, \text{ pour } t \in [0,n].$$

Soit

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t), \ t \in [0,n] \\ u_n(n), \ t \in [n,+\infty[. \end{cases}$$

On note que $v_n \in C^1([0,+\infty[)$ avec

$$0 \leq v_n(t) \leq M, \ 0 \leq v_n'(t) \leq M, \text{ pour } t \in [0,+\infty[.$$

De la définition de v_n, on obtient pour $t, s \in [0,+\infty[$:

$$|v_n'(t) - v_n'(s)| \leq |\int_t^s \Phi(x)dx|.$$

De plus,

$$v_n^{'}(t) \leq \int_t^{+\infty} \Phi(s)ds, \text{ pour } t \in [0,n],$$

et

$$v_n(t) \geq \int_0^t ((1-\gamma)\int_x^n \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}dx, \text{ pour } t \in [0,n]. \tag{3.2.9}$$

En particulier,

$$v_n(t) \geq \int_0^t ((1-\gamma)\int_x^1 \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}dx \equiv a_1(t), \text{ pour } t \in [0,1]. \tag{3.2.10}$$

Le théorème d'Ascoli-Arzéla assure l'existence d'une sous suite θ_1 de $\mathbb{N}^*$ et d'une fonction $z_1 \in C^1([0,1])$ avec $v_n^{(j)}$ converge uniformément vers $z_1^{(j)}$ sur $[0,1]$ quand $n \to +\infty$ et $n \in \theta_1$, ici $j = 0, 1$.

De même pour (3.2.10), $z_1(t) \geq a_1(t)$ pour $t \in [0,1]$ (en particulier, $z_1 > 0$ sur $[0,1]$).

Soit $\theta_1^+ = \theta_1 \backslash \{1\}$. D'après (3.2.9) on a

$$v_n(t) \geq \int_0^t ((1-\gamma)\int_x^2 \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{(1-\gamma)}}dx \equiv a_2(t), \text{ pour } t \in [0,2]. \tag{3.2.11}$$

Le théorème d'Ascoli-Arzéla assure l'existence d'une sous suite θ_2 de θ_1^+ et d'une fonction $z_2 \in C^1([0,2])$ avec $v_n^{(j)}$ converge uniformément vers $z_2^{(j)}$ sur $[0,2]$ quand $n \to +\infty$ et $n \in \theta_2$, ici $j = 0, 1$.

De même pour (3.2.11), $z_2(t) \geq a_2(t)$ pour $t \in [0,2]$ (en particulier, $z_2 > 0$ sur $[0,2]$). On note $z_2(t) = z_1(t)$ sur $[0,1]$, puisque $\theta_2 \subset \theta_1^+$. Soit $\theta_2^+ = \theta_2 \backslash \{2\}$. Avec la même procédure pour $k = 1, 2, \ldots$, on obtient une sous suite θ_k de θ_{k-1} et une fonction $z_k \in C^1([0,k])$ avec $v_n^{(j)}$ converge uniformément vers $z_k^{(j)}$ sur $[0,k]$ quand $n \to +\infty$ et $n \in \theta_k$, ici $j = 0, 1$. De même,

$$z_k(t) \geq \int_0^t ((1-\gamma)\int_x^k \Psi_M(s)ds)^{\frac{1}{(1-\gamma)}} dx \equiv a_k(t), \text{ pour } t \in [0,k]$$

(ainsi en particulier, $z_k > 0$ sur $[0,k]$). On note $z_k(t) = z_{k-1}(t)$ sur $[0,k-1]$.

On définit la fonction u comme suit, soit t fixé dans $]0,+\infty[$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $t < k$,

$$u(t) = z_k(t).$$

u est bien définie et $u(t) = z_k(t) > 0$. On peut faire ceci pour chaque $t \in]0,+\infty[$ ainsi $u \in C^1([0,+\infty[)$.

De plus, $0 \leq u(t) \leq M$, $0 \leq u'(t) \leq M$, et

$$u'(t) \leq \int_t^{+\infty} \Phi(s)ds, \text{ pour } t \in [0,+\infty[.$$

On fixe $t \in [0,+\infty[$ et choisi $k \geq t$, $(k \in \mathbb{N}^*)$. Alors pour chaque $n \in \theta_k^+ = \theta_k \backslash \{k\}$, on a

$$v_n(t) = v_n'(k)t + \int_0^t (\int_r^k f(s, v_n(s), v_n'(s))ds)dr.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$z_k(t) = z_k'(k)t + \int_0^t (\int_r^k f(s, z_k(s), z_k'(s))ds)dr.$$

Ainsi

$$u(t) = u'(k)t + \int_0^t (\int_r^k f(s, u(s), u'(s))ds)dr.$$

Par conséquent, $u \in C^1([0,+\infty[)$ avec $u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0$, p.p $t \in [0,+\infty[$. Alors u est la solution du problème (3.2.1) avec $u > 0$ sur $]0,+\infty[$. ■

3.2.1 Application

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + \eta e^{-t}|\cos t|u^{\delta}(t) + \theta e^{-2t}|\sin t|(u'(t))^{\beta} + \mu e^{-t} = 0, \ 0 < t < +\infty, \\ u(0) = 0, \ u \text{ est borné sur } [0, +\infty[\end{cases} \tag{3.2.12}$$

avec $\beta \in [0, 1[$, $\delta \in [0, 1]$ et $\mu > 0$.

On applique le théorème 3.2.1 pour montrer que le problème (3.2.12) a une solution $u \in C^1([0, +\infty[)$ strictement positive à condition que $\eta + \frac{1}{2}\theta < 1$. On pose

$$f(t, u(t), v(t)) = \eta e^{-t}|\cos t|u^{\delta}(t) + \theta e^{-2t}|\sin t|v^{\beta}(t) + \mu e^{-t},$$

donc

$$|f(t, u(t), v(t))| \leq \eta e^{-t}|u(t)| + \theta e^{-2t}|v(t)| + \mu e^{-t},$$

on prend $p(t) = \eta e^{-t}$, $q(t) = \theta e^{-2t}$ et $r(t) = \mu e^{-t}$, alors f satisfait l'hypothèse (A_2) et

$$\begin{aligned} P_1 + Q &= \int_0^{+\infty} sp(s)ds + \int_0^{+\infty} q(s)ds = \eta \int_0^{+\infty} se^{-s}ds + \theta \int_0^{+\infty} e^{-2s}ds \\ &= \eta([-se^{-s}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-s}ds) + \theta[-\frac{1}{2}e^{-2s}]_0^{+\infty} \\ &= \eta[-e^{-s}]_0^{+\infty} + \theta[-\frac{1}{2}e^{-2s}]_0^{+\infty} = \eta + \frac{1}{2}\theta < 1. \end{aligned}$$

Pour tout $H > 0$, si $u, v \in [0, H]$:

$$f(t, u(t), v(t)) \geq \theta e^{-2t}|\sin t|v^{\beta}(t) \geq \Psi_H(t)v^{\beta}(t).$$

On prend $\Psi_H(t) = \theta e^{-2t}|\sin t|$ et $\gamma = \beta$, alors f satisfait (A_1). Donc, le théorème 3.2.1 assure l'existence d'une solution $u \in C^1([0, +\infty[)$ avec $u > 0$ sur $]0, +\infty[$.

CHAPITRE 4

Etude de quelques problèmes aux limites (directement) sur les intervalles non bornés

Dans ce chapitre, on va présenter des résultats d'existence pour des problèmes aux limites posés sur $[0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$. Contrairement au chapitre précedent, on ne va pas passer par les intervalles bornés. La compacité des opérateurs de point fixe est montrée en utilisant le critère de Corduneanu.

On peut trouver les résultats de cette section dans [1].

4.1 Etude d'un problème sur la demi-droite réelle

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)), \ \text{p.p } t \geq 0 \\ u(0) = a, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $m > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

(1) f est une fonction de L^1-Carathéodory avec

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-mt}\int_0^t e^{ms}h_r(s)ds = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} e^{mt}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds = 0,$$

(avec h_r est la fonction qui majore f dans la définition de L^1-Carathéodory).

(2) $\exists M_0 > |a|$ tel que pour toute fonction $u \in C_b([0,+\infty[,\mathbb{R}) \cap W^{2,1}_{loc}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ qui satisfait

$$\begin{cases} -u''(t) + m^2u(t) = \lambda f(t,u(t)), \text{ p.p } t \geq 0, \\ u(0) = a, \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0 \text{ pour tout } 0 \leq \lambda < 1, \end{cases}$$

on a : $|u(t)| \leq M_0$, $t \in [0,+\infty[$.

La fonction de Green associée au problème (4.1.1) est donnée par :

$$G(t,s) = \frac{1}{2m}\begin{cases} e^{-ms}(e^{-mt} - e^{mt}) \text{ si } t \leq s, \\ e^{-mt}(e^{-ms} - e^{ms}) \text{ si } t \geq s. \end{cases}$$

Théorème 4.1.1 [1] *Sous les hypothèses* (1) *et* (2) *le problème* (4.1.1) *admet une solution* $u \in C_b([0,+\infty[,\mathbb{R}) \cap W^{2,1}_{loc}([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

Démonstration. On va utiliser le théorème du point fixe de Furi Pera (théorème 1.2.3), il est facile de voir de (1) que résoudre le problème (4.1.1) est équivalent à trouver un u qui satisfait

$$\begin{aligned} u(t) &= ae^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds \\ &\quad -\frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds - \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{ms}f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

En fait :

$$\begin{aligned} u'(t) = &\ -ame^{-mt} + \tfrac{1}{2m}e^{-2mt}f(t,u(t)) + \tfrac{1}{2m}\textstyle\int_0^t -me^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds \\ &-\tfrac{1}{2m}e^{-2mt}f(t,u(t)) + \tfrac{1}{2m}\textstyle\int_t^{+\infty} -me^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds + \tfrac{1}{2m}f(t,u(t)) \\ &-\tfrac{1}{2m}\textstyle\int_t^{+\infty} me^{m(t-s)}f(s,u(s))ds - \tfrac{1}{2m}f(t,u(t)) - \tfrac{1}{2m}\textstyle\int_0^t -me^{m(s-t)}f(s,u(s))ds \\ = &\ -ame^{-mt} - \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds - \tfrac{1}{2}\textstyle\int_t^{+\infty} e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds \\ &-\tfrac{1}{2}\textstyle\int_t^{+\infty} e^{m(t-s)}f(s,u(s))ds + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t e^{-m(t-s)}f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''(t) &= am^2e^{-mt} - \frac{1}{2}e^{-2mt}f(t,u(t)) + \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds + \frac{1}{2}e^{-2mt}f(t,u(t)) \\ &\quad + \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds + \frac{1}{2}f(t,u(t)) - \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{m(t-s)}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{1}{2}f(t,u(t)) + \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t-s)}f(s,u(s))ds. \\ &= am^2e^{-mt} + \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds + \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{m(t-s)}f(s,u(s))ds - \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t-s)}f(s,u(s))ds + f(t,u(t)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -u''(t) + m^2u(t) &= -am^2e^{-mt} - \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds - \frac{m}{2}\int_t^{\infty} e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds \\ &\quad + \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{m(t-s)}f(s,u(s))ds + \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t-s)}f(s,u(s))ds + f(t,u(t) \\ &\quad + am^2e^{-mt} + \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds + \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{-m(t+s)}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{m}{2}\int_t^{+\infty} e^{m(t-s)}f(s,u(s))ds - \frac{m}{2}\int_0^t e^{-m(t-s)}f(s,u(s))ds + f(t,u(t) \\ &= f(t,u(t). \end{aligned}$$

Soit $Q = \{u \in C_b([0,+\infty[,\mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq M_0 + 1 = r\}$ et soit l'opérateur $T : Q \to C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= ae^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds - \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{ms}f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Q est un sous ensemble bornée, convexe fermé de $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$, on va montrer que $T : Q \to C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ est continu et compact. D'abord, on montre la continuité.

Soit $u_k \to u$ dans Q on doit montrer $Tu_k \to Tu$ dans $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$. Puisque f est L^1-Carathéodory et $\|u\|_\infty < r$, il existe $h_r \in L^1([0,+\infty[)$ avec $|f(s,u_k(s))| \leq h_r(s)$ et $|f(s,u(s))| \leq h_r(s)$ pour presque tout $s \in [0,+\infty[$. De même pour presque tout $s \in [0,+\infty[$ on a

$$f(s,u_k(s)) \to f(s,u(s)),$$

ainsi d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue $Tu_k(s) \to Tu(s)$ ponctuellement sur $[0, t_m]$. Soit $t, t' \in [0, t_m]$ avec $t < t'$. Alors

$$\begin{aligned}
|Tu_k(t) - Tu_k(t')| &= |ae^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds - \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds \\
&\quad - \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{t} e^{ms} f(s, u_k(s))ds - ae^{-mt'} - \frac{e^{-mt'}}{2m}\int_0^{\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds \\
&\quad + \frac{e^{mt'}}{2m}\int_{t'}^{+\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds + \frac{e^{-mt'}}{2m}\int_0^{t'} e^{ms} f(s, u_k(s))ds| \\
&= |a(e^{-mt} - e^{-mt'}) + \frac{e^{-mt} - e^{-mt'}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds \\
&\quad - \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds - \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{t} e^{ms} f(s, u_k(s))ds \\
&\quad + \frac{e^{-mt'}}{2m}\int_0^{t'} e^{ms} f(s, u_k(s))ds + \frac{e^{mt'}}{2m}\int_{t'}^{+\infty} e^{-ms} f(s, u_k(s))ds| \\
&\le |a||e^{-mt} - e^{-mt'}| + \frac{1}{2m}|e^{-mt} - e^{-mt'}|\int_0^{+\infty} h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{t'} e^{-ms} h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_t^{t'} e^{ms} h_r(s)ds \\
&\le |a||e^{-mt} - e^{-mt'}| + \frac{1}{2m}|e^{-mt} - e^{-mt'}|\int_0^{+\infty} h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{t'} e^{-mt} h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_t^{t'} e^{mt'} h_r(s)ds \\
&\le |a||e^{-mt} - e^{-mt'}| + \frac{1}{2m}|e^{-mt} - e^{-mt'}|\int_0^{+\infty} h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2m}\int_t^{t'} h_r(s)ds + \frac{e^{m(t'-t)}}{2m}\int_t^{t'} h_r(s)ds.
\end{aligned}$$

Puisque $h_r \in L^1([0, +\infty[)$ et la fonction exponentielle est continue, alors

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $t, t' \in [0, t_m]$ et $|t - t'| < \delta$ implique

$$|Tu_k(t) - Tu_k(t')| < \varepsilon, \tag{4.1.2}$$

et ceci pour tout k, et en effectuant les mêmes estimations pour $Tu(t) - Tu(t')$ on obtient aussi :

$$|Tu(t) - Tu(t')| < \varepsilon. \tag{4.1.3}$$

Par conséquent, (4.1.2), (4.1.3) et la limite ponctuelle sur $[0, t_m]$ impliquent la convergence uniforme sur $[0, t_m]$, ainsi l'application $T : Q \to C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ est continue.

On montre maintenant que T est relativement compact dans $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$. Pour le faire, on montre que $T(Q)$ est uniformément borné, équi-continue sur $[0,t_m]$ et équi-convergent. On sait qu'il existe $h_r \in L^1([0,+\infty[)$ avec $|f(s,u(s))| \leq h_r(s)$ pour p.p $s \in [0,+\infty[$ et $|u| \leq M_0 < r$. L'équi-continuité de $T(Q)$ sur $[0,t_m]$, se fait de la même manière que la démonstration de (4.1.2). De même, $T(Q)$ est uniformément borné puisque pour $t \in [0,t_m]$ et pour tout $u \in Q$ on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq |a| + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{-ms}h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{ms}h_r(s)ds \\
&\leq |a| + \frac{1}{2m}\int_0^t h_r(s)ds + \frac{1}{2m}\int_t^{+\infty} h_r(s)ds + \frac{1}{2m}\int_t^{+\infty} h_r(s)ds + \frac{1}{2m}\int_0^t h_r(s)ds \\
&= |a| + \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} h_r(s)ds.
\end{aligned}$$

$T(Q)$ est équi-convergent puisque pour $t \in [0,+\infty[$ et pour tout $u \in Q$ on a :
$\lim_{t\to+\infty} Tu(t) = 0$ i.e $\forall\varepsilon > 0$, $\exists t_0 > 0$, $\forall t \geq t_0 \Rightarrow |Tu(t)| < \varepsilon$. Donc :

$$\begin{aligned}
0 \leq \sup_{u\in Q}|Tu(t)| &\leq |a|e^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{ms}h_r(s)ds \\
&\leq |a|e^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^t e^{ms}h_r(s)ds \\
&\quad \to 0, \text{ lorsque } t \to +\infty \text{ (d'après la condition (1)).}
\end{aligned}$$

Alors $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall t > N$:

$$\sup_{u\in Q}|Tu(t)| < \varepsilon.$$

Donc $T(Q)$ est relativement compact dans $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$, ainsi $T : Q \to C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ est compact.

On montre maintenant que la condition (i) du théorème 1.2.3 de Furi Pera est satisfaite.

On prend une suite $(u_j, \mu_j)_{j\geq 1}$ de $\partial Q \times [0,1]$ qui converge vers (u,μ) avec $u(t) = \mu Tu(t)$ et $0 \leq \mu < 1$, on doit montrer que $\mu_j Tu_j \in Q$ pour tout j assez grand. Soit $u \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ avec $|u(t)| \leq r$ pour $t \in [0,+\infty[$. Alors

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq |a|e^{-mt} + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds \\
&\quad + \frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}h_r(s)ds + \frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{t} e^{ms}h_r(s)ds \\
&\equiv \Psi_r(t).
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{t\to+\infty}\Psi_r(t) = 0$. Ceci, ainsi que le fait que $u_j \in \partial Q$ impliquent qu'il existe $a_0 \geq 0$ avec $|Tu_j(t)| \leq M_0 + 1 = r$ pour $t \in [a_0,+\infty[$ et $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Par conséquent

$$\mu_j Tu_j(t) \leq r,\ t \in [a_0,+\infty[\text{ et } j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{4.1.4}$$

Etudions maintenant le cas $t \in [0,a_0]$. Puisque T est équi-continue sur Q on a $Tu_j(t) \to Tu(t)$ uniformément sur $[0,a_0]$. De plus, puisque $\mu_j \to \mu$, $h_r \in L^1([0,+\infty[)$ et $T(Q)$ est borné dans $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ on a $\mu_j Tu_j(t) \to \mu Tu(t)$ uniformément sur $[0,a_0]$, car

$$\begin{aligned}
|\mu_j Tu_j(t) - \mu Tu(t)| &= |\mu_j a e^{-mt} + \mu_j\frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}f(s,u_j(s))ds \\
&\quad -\mu_j\frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}f(s,u_j(s))ds - \mu_j\frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{t} e^{ms}f(s,u_j(s))ds \\
&\quad -\mu a e^{-mt} - \mu\frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds \\
&\quad +\mu\frac{e^{mt}}{2m}\int_t^{+\infty} e^{-ms}f(s,u(s))ds + \mu\frac{e^{-mt}}{2m}\int_0^{t} e^{ms}f(s,u(s))ds| \\
&\leq |\mu_j-\mu||a| + |\mu_j-\mu|\frac{1}{2m}\int_0^{+\infty} h_r(s)ds + |\mu_j-\mu|\frac{1}{2m}\int_0^{t} h_r(s)ds \\
&\quad +|\mu_j-\mu|\frac{1}{2m}\int_t^{+\infty} h_r(s)ds \\
&= |\mu_j-\mu|(|a| + \frac{1}{2m}\int_0^{t} h_r(s)ds + \frac{1}{2m}\int_0^{+\infty} h_r(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2m}\int_t^{+\infty} h_r(s)ds) \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Ainsi il existe $j_0 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ avec

$$|\mu_j Tu_j(t)| \leq |\mu Tu(t)| + 1,\ t \in [0,a_0] \text{ pour } j \geq j_0. \tag{4.1.5}$$

Puisque, $u(t) = \mu T u(t)$ alors

$$|\mu T u(t)| \leq M_0,$$

donc (4.1.5) implique pour $j \geq j_0$

$$|\mu_j T u_j(t)| \leq M_0 + 1 = r \text{ pour } t \in [0, a_0]. \tag{4.1.6}$$

Donc (4.1.4) et (4.1.6) implique que $\mu_j T(u_j) \in Q$ pour $j \geq j_0$.

Par conséquent toutes les conditions du théorème 1.2.3 sont satisfaites donc l'opérateur T admet un point fixe u dans Q.

Et puisque $-u''(t) + m^2 u(t) = f(t, u(t)) \in L^1([0, +\infty[)$ alors $u \in C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) \cap W^{2,1}_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{R})$. ■

4.1.1 Application

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = \frac{e^{-t}}{u^2(t)+1}, \text{ p.p } t \geq 0, \\ u(0) = 0, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0. \end{cases}$$

Avec $f(t, u(t)) = \frac{e^{-t}}{u^2(t)+1}$.

On applique les hypothèses du théorème 4.1.1 :

(1) est vérifiée puisque : $|f(t, u(t))| \leq e^{-t} := h_r(t) \in L^1([0, +\infty[)$ et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} e^{-t} \int_0^t e^s e^{-s} ds &= \lim_{t \to +\infty} e^{-t} \int_0^t ds = \lim_{t \to +\infty} t e^{-t} = 0, \\ \lim_{t \to +\infty} e^{t} \int_t^{+\infty} e^{-s} e^{-s} ds &= \lim_{t \to +\infty} e^{t} \int_t^{+\infty} e^{-2s} ds = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{2} = 0. \end{aligned}$$

(2) est vérifiée puisque :

Soit u solution du problème

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = \lambda \frac{e^{-t}}{u^2(t)+1}, \text{ p.p } t \geq 0, \ 0 \leq \lambda < 1, \\ u(0) = 0, \ \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= |\int_0^{+\infty} \lambda G(t,s) f(s,u(s)) ds| \leq \int_0^{+\infty} |G(t,s)||f(s,u(s))| ds, \text{ car } 0 \leq \lambda < 1 \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-s} ds, \text{ car } |G(t,s)| \leq 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc $\exists M_0 = 1 > 0$, telle que $|u(t)| \leq M_0$.

4.2 Etude d'un problème aux limites posé sur $\mathbb{R}$

On peut trouver les résultats de cette section dans [18].

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) - cu'(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t)), \; -\infty < t < +\infty \\ \lim\limits_{|t| \to +\infty} u(t) = 0. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Avec $c > 0$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(t, 0) = 0$.

La fonction de Green associée au problème (4.2.1) est donnée par :

$$G(t, s) = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{cases} e^{r_1(t-s)} \text{ si } t \leq s \\ e^{r_2(t-s)} \text{ si } t \geq s \end{cases} \tag{4.2.2}$$

où

$$r_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2} > 0 \text{ et } r_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2} < 0.$$

En effet, la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation dans (4.2.1) est

$$u(t) = a_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_2 t}.$$

Ensuite, les conditions aux limites entraînent que la seule solution du problème homogène est $u = 0$. Soit donc

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1(s) e^{r_1 t} + a_2(s) e^{r_2 t}, \; -\infty < \; t \leq s \\ b_1(s) e^{r_1 t} + b_2(s) e^{r_2 t}, \; s \leq t < +\infty. \end{cases}$$

En utilisant la continuité de G au point (s, s) on aura :

$$[a_1(s) - b_1(s)] e^{r_1 s} + [a_2(s) - b_2(s)] e^{r_2 s} = 0.$$

En posant $c(s) = a_1(s) - b_1(s)$ et $d(s) = a_2(s) - b_2(s)$, on trouve

$$c(s) e^{r_1 s} + d(s) e^{r_2 s} = 0. \tag{4.2.3}$$

Comme $\frac{\partial G}{\partial t}(s^+, s) = r_1 a_1(s) e^{r_1 s} + r_2 a_2(s) e^{r_2 s}$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(s^-, s) = r_1 b_1(s) e^{r_1 s} + r_2 b_2(s) e^{r_2 s}$, d'après la propriété (d) de la fonction de Green dans le théorème 1 (voir Annexe) on doit avoir

$$r_1 c(s) e^{r_1 s} + r_2 d(s) e^{r_2 s} = 1. \tag{4.2.4}$$

De (4.2.3) et (4.2.4) on obtient $c(s) = \frac{e^{-r_1 s}}{r_1 - r_2}$ et $d(s) = -\frac{e^{-r_2 s}}{r_1 - r_2}$. On a $t \longmapsto G(t,s)$ vérifie les conditions aux bords dans (4.2.1) donne :

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} G(t,s) &= 0 \Rightarrow a_2(s) = 0, \\ \lim_{t \to +\infty} G(t,s) &= 0 \Rightarrow b_1(s) = 0. \end{aligned}$$

On trouve alors $a_2(s) = b_1(s) = 0$, et donc $a_1(s) = \frac{e^{-r_1 s}}{r_1 - r_2}$, $b_2(s) = \frac{e^{-r_2 s}}{r_1 - r_2}$, d'où le résultat.

Soit $E = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni de la norme

$$||u|| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|.$$

Le résultat d'existence principal dans cette partie est le suivant.

Théorème 4.2.1 *[18]. Soit G la fonction de Green définie par* (4.2.2), *on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} (1)\ \exists \Psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\textit{ continue et croissante ;} \\ (2)\ \exists q \in E \textit{ strictement positive, continue telle que} \\ |f(t, u(t))| \leq q(t)\Psi(|u(t)|),\ \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2; \\ (3)\ \exists M_0 \in \mathbb{R}^+_*,\ \frac{\alpha \Psi(M_0)}{M_0} \leq 1 \textit{ avec } \alpha := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) q(s) ds < +\infty. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Alors le problème (4.2.1) *admet une solution $u \in E$.*

Démonstration. On va utiliser le théorème du point fixe de Schauder 1.2.2. Il est clair que le problème (4.2.1) est équivalent à trouver une solution pour l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, u(s)) ds,$$

avec $G(t,s)$ est la fonction de Green définie dans (4.2.2).

En fait

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s,u(s)) ds = \int_{-\infty}^{t} G(t,s) f(s,u(s)) ds + \int_{t}^{+\infty} G(t,s) f(s,u(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= G(t,t)f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds - G(t,t)f(t,u(t)) \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds + \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u''(t) &= \frac{\partial}{\partial t}G(t,t^{-})f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds - \frac{\partial}{\partial t}G(t,t^{+})f(t,u(t)) \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= (\frac{\partial}{\partial t}G(t,t^{-}) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,t^{+}))f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= (\frac{\partial}{\partial t}G(t^{+},t) - \frac{\partial}{\partial t}G(t^{-},t))f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds. \text{ D'après la proprietè (d) de} \\
&\quad \text{la fonction de Green (voir l'annexe).}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u''(t) - cu'(t) - \lambda u(t) &= f(t,u(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&\quad -c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)f(s,u(s))ds - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s) - c\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) - \lambda G(t,s))f(s,u(s))ds. \\
&\quad + f(t,u(t)) \\
&= f(t,u(t)) \text{ puisque G(.,s) satisfait l'équation homogène.}
\end{aligned}$$

On définie l'opérateur $T : E \to E$ par

$$Tu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u(s))ds.$$

On recherche donc les points fixes pour l'opérateur T dans l'espace de Banach E. La démonstration est partagée en quatre étapes.

Étape 1 : L'opérateur T est bien défini.

En effet, pour tout $u \in E$, on obtient, par l'hypothèse (4.2.5), les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)|f(s,u(s))|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\
&\leq \Psi(||u||)\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)ds, \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ (car } \Psi \text{ est croissante)} \\
&\leq \alpha\Psi(||u||) < +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $G(+\infty, s) = G(-\infty, s) = 0$, et alors, en prenant la limite quand $t \to \pm\infty$ dans l'expression de $Tu(t)$, on obtient : $Tu(+\infty) = Tu(-\infty) = 0$. Par conséquent, l'opérateur $T : E \to E$ est bien défini.

Étape 2 : L'opérateur T est continu

Soit $(u_n)_n \in E$ une suite convergente uniformément vers une certaine limite u_0 sur tout sous intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $a > 0$, on montre la convergence uniforme de $(Tu_n)_n$ vers Tu_0 sur l'intervalle $[-a, a]$. Pour $t \in [-a, a]$, on a

$$\begin{aligned}
Tu_n(t) - Tu_0(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_n(s))ds - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_0(s))ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{-b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))]ds \\
&\quad + \int_{-b}^{+b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))]ds \\
&\quad + \int_{+b}^{+\infty} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))]ds \\
&= \int_{-\infty}^{-b} G(t,s)f(s,u_n(s))ds - \int_{-\infty}^{-b} G(t,s)f(s,u_0(s))ds \\
&\quad + \int_{+b}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_n(s))ds + \int_{-b}^{+b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))]ds \\
&\quad - \int_{+b}^{+\infty} G(t,s)f(s,u_0(s))ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} Tu_n(t) - Tu_0(t) &= \int_{-b}^{+b} G(t,s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))]ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}-[-b,+b]} G(t,s)f(s,u_n(s))ds - \int_{\mathbb{R}-[-b,+b]} G(t,s)f(s,u_0(s))ds. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} |Tu_n(t) - Tu_0(t)| &\leq \int_{-b}^{+b} G(t,s)|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))|ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}-[-b,+b]} G(t,s)|f(s,u_0(s))|ds + \int_{\mathbb{R}-[-b,+b]} G(t,s)|f(s,u_n(s))|ds \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et on choisit un certain $b > a$ assez grand. Par la convergence uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[-b,b]$ et la continuité de f, il existe un entier $N = N(\varepsilon, b)$ tel que si $n \geq N$ on a :

$$I_1 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-b}^{+b} G(t,s)|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))|ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

puisque $|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))| \to 0$ et $|f(s,u_n(s)) - f(s,u_0(s))| \in L^1[-b,b]$, on a aussi

$$\begin{aligned} I_2 &:= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)|f(s,u_0(s))|ds \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \Psi(||u||)\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)q(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

(d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la condition (3) dans 4.2.5). Enfin :

$$\begin{aligned} I_3 &:= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)|f(s,u_n(s))|ds \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)q(s)\Psi(|u_n(s)|)ds \\ &\leq \Psi(||u_n||)\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}-[-b,b]} G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}, \text{ (d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue).} \end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(Tu_n)_n$ vers la limite Tu_0 sur l'intervalle $[-a, a]$.

Étape 3 : Pour tout $M > 0$, l'ensemble $\{Tu,\ ||u|| \leq M\}$ est relativement compact dans E.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, il suffit de montrer que toutes les fonctions de cet ensemble sont équi-continues sur chaque sous intervalle $[-a, a]$ et que cet ensemble est borné i.e (il existe une fonction $\gamma \in E$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|Tu(t)| \leq \gamma(t)$).

Soit $t_1, t_2 \in [-a, a]$; on a successivement les estimations :

$$\begin{aligned} |Tu(t_1) - Tu(t_2)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_2, s) - G(t_1, s)||f(s, u(s))|ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_2, s) - G(t_1, s)|q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \Psi(M) \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_2, s) - G(t_1, s)|q(s)ds. \end{aligned}$$

Par la continuité de la fonction de Green G, le second membre de cette inégalité tend vers 0, quand $t_2 \to t_1$, d'où l'équicontinuité de l'ensemble $\{Tu,\ ||u|| \leq M\}$.

Soit maintenant, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)|f(s, u(s))|ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \Psi(M) \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)q(s)ds := \gamma(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a $\gamma \in E$. En effet, γ est continue grâce à la continuité de la fonction de Green, la fonction q et Ψ. De plus

$$\lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t) = 0,\ \text{puisque } G(\pm\infty, s) = 0.$$

Étape 4 : Il existe $R > 0$ tels que $T(B(0, R)) \subset B(0, R)$.

D'après l'hypothèse (4.2.5), on sait que $\exists M_0 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\frac{\alpha\Psi(M_0)}{M_0} \leq 1$.

Si $||u|| \leq M_0$, alors

$$\begin{aligned} ||Tu(t)|| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)\Psi(|u(s)|)ds \\ &\leq \alpha\Psi(M_0) \\ &\leq M_0, \end{aligned}$$

donc : $Tu \in B(0, M_0)$. Il suffit de prendre $R = M_0$.

Par conséquent toutes les hypothèses du théorème 1.2.2 sont satisfaites donc l'opérateur T admet un point fixe u dans E. ■

4.2.1 Application

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = f(t, u(t)), \quad -\infty < t < +\infty \\ \lim\limits_{|t|\to+\infty} u(t) = 0. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Avec $f(t, u(t)) = \frac{e^{-t}}{t^2+1} \frac{\sqrt{|u(t)|+1}}{u^2(t)+1} = g(t)h(u(t))$, telle que $|g(t)| \leq \frac{1}{t^2+1} := q(t)$ et $|h(u(t))| \leq \sqrt{|u(t)|+1} := \Psi(|u(t)|)$. La fonction de Green associée au problème (4.2.6) est définie par :

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{3}\begin{cases} e^{2(t-s)} \text{ si } t \leq s \\ e^{-(t-s)} \text{ si } t \geq s \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)q(s)ds \\ &\leq \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}dt \\ &= \frac{\pi}{3} < +\infty. \end{aligned}$$

De plus $\exists M_0 \in \mathbb{R}_*^+$, tels que $\frac{\pi}{3}\sqrt{M_0+1} \leq M_0$ i.e $\alpha\Psi(M_0) \leq \frac{\pi}{3}\Psi(M_0) \leq M_0$ et ainsi les hypothèses (4.2.5) sont satisfaits. Donc le problème (4.2.6) admet une solution qui s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s, u(s)) ds.$$

CHAPITRE 5

Etude d'un problème implicite sur $[0, +\infty[$

Dans ce chapitre, on va essayer de montrer un résultat d'existence pour le problème aux limites implicite du second ordre suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \ t \in I = [0, +\infty[\\ u(0) = \lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

avec f est continue et vérifiée les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \begin{cases} |f(t, u(t), v(t), w(t))| \leq a_1(t)|u(t)|^{\alpha_1} + a_2(t)|v(t)|^{\alpha_2} + a_3(t)|w(t)|^{\alpha_3} + a_4(t), \\ \forall (t, u, v, w) \in I \times \mathbb{R}^3, \text{ avec } 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1 \text{ et } a_i \text{ sont des fonctions} \\ \text{continues et positives satisfaisant :} \\ A_i := \int_0^{+\infty} (\int_s^{+\infty} a_i(\tau) d\tau) ds < +\infty; \ B_i := \int_t^{+\infty} a_i(s) ds < +\infty \\ \text{ et } C_i := \sup\limits_{t \in I} a_i(t) < +\infty. \end{cases}$$

$$(H_2) \begin{cases} |f(t_2, u_1(t_2), v_2(t_2), w_2(t_2)) - f(t_1, u_1(t_1), v_1(t_1), w_1(t_1))| \to 0 \text{ uniformément} \\ \text{quand } t_1 \to t_2, \ \forall \ u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \text{ avec } u_1 \to u_2, \ v_1 \to v_2, \ w_1 \to w_2. \end{cases}$$

$$(H_3) \begin{cases} |f(t_1, u_1(t_1), v_1(t_1), w_1(t_1)) - f(+\infty, u_2(t_2), 0, w_2(t_2))| \to 0 \text{ uniformément} \\ \text{quand } t_1 \to +\infty, \ \forall u_1, u_2, v_1, w_1, w_2 \text{ avec : } u_1 \to u_2, \ v_1 \to 0, \ w_1 \to w_2. \end{cases}$$

Lemme 5.0.1 *[11] Soit $h \in L^1(I)$, alors $u \in C^2(I)$ est une solution du problème*

$$\begin{cases} -u''(t) = h(t), \ t \in I \\ u(0) = \lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0, \end{cases}$$

si et seulement si

$$u(t)=\int_0^t(\int_s^{+\infty}h(\tau)d\tau)ds.$$

Théorème 5.0.2 *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *le problème* (5.0.1) *a une solution* $u\in C^2([0,+\infty[)$.

Démonstration. Soit $X=\{u\in C^2([0,+\infty[),\ \lim_{t\to+\infty}u(t)$ existe, $\lim_{t\to+\infty}u'(t)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}u''(t)$ existe$\}$, muni de la norme

$$\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty,\|u''\|_\infty\}.$$

Considérons l'opérateur

$$\begin{array}{rrl} \mathrm{T}: & X\longrightarrow & X \\ & u\longmapsto & Tu. \end{array}$$

Où

$$Tu(t)=\int_0^t(\int_s^{+\infty}f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau)ds.$$

- T est bien défini

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= |\int_0^t(\int_s^{+\infty}f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau)ds| \\
&\le \int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}|f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))|d\tau)ds \\
&\le \int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}(a_1(\tau)|u(\tau)|^{\alpha_1}+a_2(\tau)|u'(\tau)|^{\alpha_2}+a_3(\tau)|u''(\tau)|^{\alpha_3}+a_4(\tau))d\tau)ds \\
&\le \sup_{t\in I}|u(t)|^{\alpha_1}\int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}a_1(\tau)d\tau)ds+\sup_{t\in I}|u'(t)|^{\alpha_2}\int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}a_2(\tau)d\tau)ds \\
&\quad +\sup_{t\in I}|u''(t)|^{\alpha_3}\int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}a_3(\tau)d\tau)ds+\int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}a_4(\tau)d\tau)ds. \\
&\le A_1\|u\|^{\alpha_1}+A_2\|u\|^{\alpha_2}+A_3\|u\|^{\alpha_3}+A_4<+\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^t (\int_s^{+\infty} f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d\tau)ds]| \\
&= |\int_t^{+\infty} f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d\tau| \\
&\leq \int_t^{+\infty} |f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))|d\tau \\
&\leq \int_t^{+\infty} [a_1(\tau)|u(\tau)|^{\alpha_1} + a_2(\tau)|u'(\tau)|^{\alpha_2} + a_3(\tau)|u''(\tau)|^{\alpha_3} + a_4(\tau)]d\tau \\
&\leq \sup_{t\in I}|u(t)|^{\alpha_1} \int_t^{+\infty} a_1(\tau)d\tau + \sup_{t\in I}|u'(t)|^{\alpha_2} \int_t^{+\infty} a_2(\tau)d\tau \\
&\quad + \sup_{t\in I}|u''(t)|^{\alpha_3} \int_t^{+\infty} a_3(\tau)d\tau + \int_t^{+\infty} a_4(\tau)d\tau \\
&\leq B_1 \|u\|^{\alpha_1} + B_2 \|u\|^{\alpha_2} + B_3 \|u\|^{\alpha_3} + B_4 < +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu)''(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t} \int_t^{+\infty} f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d\tau| \\
&= |f(t, u(t), u'(t), u''(t))| \\
&\leq a_1(t)|u(t)|^{\alpha_1} + a_2(t)|u'(t)|^{\alpha_2} + a_3(t)|u''(t)|^{\alpha_3} + a_4(t) \\
&\leq \sup_{t\in I}|u(t)|^{\alpha_1} a_1(t) + \sup_{t\in I}|u'(t)|^{\alpha_2} a_2(t) + \sup_{t\in I}|u''(t)|^{\alpha_3} a_3(t) + a_4(t) \\
&\leq C_1 \|u\|^{\alpha_1} + C_2 \|u\|^{\alpha_2} + C_3 \|u\|^{\alpha_3} + C_4 < +\infty.
\end{aligned}$$

Et d'après l'hypothèse (H_1) on a

$$\begin{cases}
\lim\limits_{t\to+\infty} Tu(t) \text{ existe} \\
\lim\limits_{t\to+\infty} (Tu)'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d\tau = 0 \\
\lim\limits_{t\to+\infty} (Tu)''(t) \text{ existe.}
\end{cases}$$

Donc $Tu \in X$. Soit $u \in B$ telle que $B = \{u \in X : ||u|| < R\}$,

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= |\int_0^t (\int_s^{+\infty} f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))d\tau)ds| \\
&\leq \int_0^{+\infty} (\int_s^{+\infty} |f(\tau, u(\tau), u'(\tau), u''(\tau))|d\tau)ds \\
&\leq A_1 \|u\|^{\alpha_1} + A_2 \|u\|^{\alpha_2} + A_3 \|u\|^{\alpha_3} + A_4 \\
&\leq A_1 R^{\alpha_1} + A_2 R^{\alpha_2} + A_3 R^{\alpha_3} + A_4 \\
&\leq R(A_1 + A_2 + A_3) + A_4 < +\infty.
\end{aligned}$$

Car R est assez grand et $\alpha_i < 1$.

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^t (\int_s^{+\infty} f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau)ds]| \\
&= |\int_t^{+\infty} f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau| \\
&\leq B_1\|u\|^{\alpha_1} + B_2\|u\|^{\alpha_2} + B_3\|u\|^{\alpha_3} + B_4 \\
&\leq B_1R^{\alpha_1} + B_2R^{\alpha_2} + B_3R^{\alpha_3} + B_4 \\
&\leq R(B_1+B_2+B_3) + B_4 < +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu)''(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{+\infty} f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau| \\
&= |f(t,u(t),u'(t),u''(t))| \\
&\leq C_1\|u\|^{\alpha_1} + C_2\|u\|^{\alpha_2} + C_3\|u\|^{\alpha_3} + C_4 \\
&\leq C_1R^{\alpha_1} + C_2R^{\alpha_2} + C_3R^{\alpha_3} + C_4 \\
&\leq R(C_1+C_2+C_3) + C_4 < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $T(B) \subset B$.

- T est équi-continu. Soit $t_1 < t_2 < +\infty$:

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2) - Tu(t_1)| &= |\int_0^{t_2}(\int_s^{+\infty} f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau)ds \\
&\quad - \int_0^{t_1}(\int_s^{+\infty} f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau)ds| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty} |f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))|d\tau)ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty} a_1(\tau)|u(\tau)|^{\alpha_1} + a_2(\tau)|u'(\tau)|^{\alpha_2}ds \\
&\quad +a_3(\tau)|u''(\tau)|^{\alpha_3}d\tau)ds + \int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty} a_4(\tau)d\tau)ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2)-Tu(t_1)| &\leq \sup_{t\in I}|u(t)|^{\alpha_1}\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_1(\tau)d\tau)ds \\
&\quad +\sup_{t\in I}|u'(t)|^{\alpha_2}\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_2(\tau)d\tau)ds \\
&\quad +\sup_{t\in I}|u''(t)|^{\alpha_3}\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_3(\tau)d\tau)ds+\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_4(\tau)d\tau)ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{3}||u||^{\alpha_i}\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_i(\tau)d\tau)ds+\int_{t_1}^{t_2}(\int_s^{+\infty}a_4(\tau)d\tau)ds \\
&\to 0,\ \text{quand } t_2\to t_1 \text{ car } A_i<+\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)| &= |\int_{t_1}^{+\infty}f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau \\
&\quad -\int_{t_2}^{+\infty}f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))d\tau| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2}|f(\tau,u(\tau),u'(\tau),u''(\tau))|d\tau \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2}[a_1(\tau)|u(\tau)|^{\alpha_1}+a_2(\tau)|u'(\tau)|^{\alpha_2}+a_3(\tau)|u''(\tau)|^{\alpha_3} \\
&\quad +a_4(\tau)]d\tau \\
&\leq \sup_{t\in I}|u(t)|^{\alpha_1}\int_{t_1}^{t_2}a_1(\tau)d\tau+\sup_{t\in I}|u'(t)|^{\alpha_2}\int_{t_1}^{t_2}a_2(\tau)d\tau \\
&\quad +\sup_{t\in I}|u''(t)|^{\alpha_3}\int_{t_1}^{t_2}a_3(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t_2}a_4(\tau)d\tau \\
&\leq \sum_{i=1}^{3}\|u\|^{\alpha_i}\int_{t_1}^{t_2}a_i(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t_2}a_4(\tau)d\tau \\
&\quad \to 0,\ \text{quand } t_2\to t_1 \text{ car } B_i<+\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu)''(t_2)-(Tu)''(t_1)| = &\ |f(t_2,u(t_2),u'(t_2),u''(t_2))-f(t_1,u(t_1),u'(t_1),u''(t_1))| \\
&\to 0 \text{ d'après } (H_2).
\end{aligned}$$

- T est compact : Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $C^2([0,+\infty[)$ i.e $\exists M : \|u_n\| < M$.

  Puisque T est borné, $T(u_n)$ est aussi bornée dans $C^2([0,+\infty[)$, et on a :

$$\begin{aligned}
|(Tu_n)'(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^t (\int_s^{+\infty} f(\tau, u_n(\tau), u_n'(\tau), u_n''(\tau))d\tau)ds]| \\
&= |\int_t^{+\infty} f(\tau, u_n(\tau), u_n'(\tau), u_n''(\tau))d\tau| \\
&\leq \int_t^{+\infty} |f(\tau, u_n(\tau), u_n'(\tau), u_n''(\tau))|d\tau \\
&\leq \int_t^{+\infty} [a_1(\tau)|u_n(\tau)|^{\alpha_1} + a_2(\tau)|u_n'(\tau)|^{\alpha_2} + a_3(\tau)|u_n''(\tau)|^{\alpha_3} + a_4(\tau)]d\tau \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} M^{\alpha_i} \int_t^{+\infty} a_i(\tau)d\tau + \int_t^{+\infty} a_4(\tau)d\tau < +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tu_n)''(t)| &= |\frac{\partial}{\partial t}[\int_t^{+\infty} f(\tau, u_n(\tau), u_n'(\tau), u_n''(\tau))d\tau]| \\
&= |f(t, u_n(t), u_n'(t), u_n''(t))| \\
&\leq a_1(t)|u_n(t)|^{\alpha_1} + a_2(t)|u_n'(t)|^{\alpha_2} + a_3(t)|u_n''(t)|^{\alpha_3} + a_4(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} M^{\alpha_i} \sup_{t\in I} a_i(t) + \sup_{t\in I} a_4(t) < +\infty.
\end{aligned}$$

- équi-convergence :

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \sup_{u\in X} |(Tu)''(t) - \lim_{t\to+\infty} (Tu)''(t)| \\
&= \sup_{u\in X} |f(t, u(t), u'(t), u''(t)) - f(+\infty, u(t), 0, u''(t))|. \\
&\to 0 \text{ d'après } (H_3).
\end{aligned}$$

  On montre que :

$$\sup_{u\in X} |(Tu)(t) - \lim_{t\to+\infty} (Tu)(t)| \to 0$$

  et

$$\sup_{u\in X} |(Tu)'(t) - \lim_{t\to+\infty} (Tu)'(t)| \to 0.$$

  De plus $T(u_n)$ est bornée dans $C^2([0,+\infty[)$, donc $T(u_n)$ est relativement compact dans $C^1([0,+\infty[)$ et d'après le théorème du point fixe de Schauder T admet un point fixe dans $C^1([0,+\infty[)$.

■

Annexes

Fonction de Green

On peut trouver les résultats de cette section dans [31].

Existence et unicité de la fonction de Green

Considérons les équations de Sturm Liouville linéaires sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$

$$(H): \ (pu')' + qu = 0, \ (NH): \ (pu')' + qu = f,$$

associées aux conditions aux bords :

$$(CB)_h \quad : \quad \begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \quad : \quad \begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = \gamma, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = \delta, \end{cases}$$

où $\gamma, \delta, a_1, a_2, b_1, b_2$ sont des constantes réelles telles que $|a_1| + |a_2| \neq 0$ et $|b_1| + |b_2| \neq 0$.

Théorème 1. *On suppose que le problème $(H) - (CB)_h$ admet une solution unique triviale nulle, alors il existe une et une seule fonction G (dite de Green), telle que pour toute fonction f, la solution u du problème $(NH) - (CB)_h$ s'écrit d'une façon unique sous la forme :*

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

De plus, G vérifie les propriétés suivantes :

a. *G est continue sur $[a, b]^2$;*

b. *G est symétrique ;*

c. $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour* $t \neq s$;

d. $\frac{\partial G}{\partial t}(u^+,u) - \frac{\partial G}{\partial t}(u^-,u) = \frac{1}{p(u)}$ *pour tout* $u \in [a,b]$;

e. *la fonction partielle* $t \to G(t,s)$ *est solution de l'équation* (H) *pour tout* $t \neq s$;

f. *la fonction partielle* $t \to G(t,s)$ *vérifie les conditions* $(CB)_h$ *pour tout* $s \in [a,b]$.

Et pour la résolution du problème $(NH) - (CB)_{nh}$, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 2. *Supposons que le problème* $(H) - (CB)_h$ *admet une solution unique triviale nulle, et soit G la fonction de Green associée.*

On désigne par Ψ_1 *et* Ψ_2 *les solutions respectives des problèmes :*

$$\begin{cases} (H), \\ a_1\Psi_1(a) + a_2\Psi_1'(a) = 1, \\ b_1\Psi_1(b) + b_2\Psi_1'(b) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (H), \\ a_1\Psi_2(a) + a_2\Psi_2'(a) = 0, \\ b_1\Psi_2(b) + b_2\Psi_2'(b) = 1, \end{cases}$$

alors le problème non homogène $(NH) - (CB)_{nh}$ *admet une unique solution qui s'écrit sous la forme :*

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds + \gamma\Psi_1 + \delta\Psi_2.$$

Théorème 3. *On Suppose que le problème* $(H) - (CB)_h$ *admet une solution non triviale* φ_0, *alors le problème non homogène* $(NH) - (CB)_h$ *admet une solution si et seulement si* $\int_a^b f(t)\varphi_0(t)dt = 0$.

Dans ce cas, il existe une fonction G continue (dite fonction de Green généralisée), telle qu'une solution du problème $(H) - (CB)_h$ *s'écrit sous la forme :*

$$u_1(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

et toute autre solution s'écrit :

$$u(t) = u_1(t) + k\varphi_0(t), \; k \in \mathbb{R}.$$

De plus G vérifie les conditions a, b, c, d et

g. *la fonction partielle* $g : t \to G(t,s)$ *est solution de l'équation* $(pg')' + qg = -\varphi_0(t)\varphi_0(s)$ *pour tout* t, $t \neq s$;

h. $\int_a^b G(t,s)\varphi_0(s)ds = 0$.

Alternative de Fredholm

On considère le problème du second ordre non homogène suivant :

$$(P) : \begin{cases} (NH) : u'' + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \\ (CB)_{NH} : \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \gamma, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \delta, \end{cases} \end{cases}$$

où p, q, $f \in C([a,b])$, α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$ et $|b_1| + |b_2| \neq 0$.

Théorème 4. *On a l'altenative : le problème homogène associé à* (P) *soit n'admet aucune solution non triviale (auquel cas* (P) *admet une unique solution), soit il admet une solution non triviale (auquel cas* (P) *a une solution si et seulement si* f *vérifie* n *conditions d'orthogonalité).*

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 5. [12] *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions appartenant à* $L^1(\Omega)$ *avec* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *On suppose que :*

1. $f_n \to f$ *p. p sur* Ω,
2. *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que :* $\forall n$, $|f_n(t)| \leq g(t)$ *p. p* $t \in \Omega$.

   Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Théorème du point fixe de Brouwer, 1912

Théorème 6. *Soit* C *un compact, convexe non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : C \to C$ *une application continue. Alors* f *admet au moins un point fixe dans* C. *En particulier, pour* $C = \overline{B}$, *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Démontrons ce théorème dans le cas où $C = \overline{B}(0, R)$, $R > 0$.

- Si $f(x_0) = x_0$, pour $x_0 \in \partial C$, alors le théorème est démontré.
- Sinon, $f(x) \neq x$, $\forall x \in \partial C$. Dans ce cas, on considère la déformation continue

$$f_t(x) = x - tf(x).$$

Pour $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial C$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|f_t(x)\| & = & ||x - tf(x)|| \\ & \geq & |\|x\| - t\|f(x)\|| \\ & \geq & |R - t\|f(x)\|| \\ & \geq & (1-t)R \\ & > & 0, \end{array}$$

car : $\forall x \in \overline{B}(0, R)$, $f(x) \in \overline{B}(0, R) \Rightarrow \|f(x)\| \leq R$. Donc, $f_t(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial C$, d'où $y_0 = 0 \notin f_t(\partial C)$.

Le degré $Deg(I_d - tf, \mathring{C}, 0)$ est donc bien défini et vaut, par homotopie,

$$Deg(f_1, \mathring{C}, 0) = Deg(I_d - f, \mathring{C}, 0) = Deg(f_0, \mathring{C}, 0) = Deg(I_d, \mathring{C}, 0) = 1.$$

Alors f admet au moins un point fixe sur C. ■

Remarque Ce théorème a une extention en dimension infinie, le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème du point fixe de Schauder

Proposition 1. *Soit B la boule unité ouverte d'un espace vectoriel normé X. Alors on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \dim X & < & +\infty \Leftrightarrow \text{toute application continue } f : \overline{B} \to \overline{B} \text{ admet au moins un point fixe,} \\ & \Leftrightarrow & \text{la boule unité fermée } \overline{B} \text{ est compacte,} \\ & \Leftrightarrow & \text{la frontière } \partial B \text{ est compacte,} \\ & \Leftrightarrow & \text{de toute suite de } \overline{B}\text{, on peut extraire une sous-suite convergente.} \end{array}$$

Théorème 7. (Schauder, 1930) *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, convexe, fermée et bornée. Si K est une application compacte de C dans C, alors K admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration. La preuve classique du théorème du point fixe de Schauder est probablement celle qui consiste à se ramener au théorème du point fixe de Brouwer en utilisant le fait qu'une application compacte en dimension infinie est approchable par des applications continues de rangs finis. Elle se fait en deux étapes ;

1ère étape : $C = \overline{B}(0, R)$, $R > 0$ (une boule fermée centrée en 0 de rayon R).

- S'il existe $x_0 \in \partial C : K(x_0) = x_0$, alors il n'y a rien à démonter.
- Sinon $\forall x \in \partial C$, $K(x) \neq x$. Dans ce cas, on considère la déformation compacte

$$K_t = I_d - tK,$$

où $t \in [0, 1]$. S'il existe $x \in \partial C : tK(x) = x$, alors $R = ||x|| = ||tK(x)|| = t||K(x)|| \leq tR$, car $K(x) \in \overline{B}(0, R)$, $\forall x \in \overline{B}(0, R)$. Donc : $t \geq 1$, et comme $t \in [0, 1]$, alors $t = 1$ et $K(x) = x$ ce qui contredit le fait que $K(x) \neq x$ sur ∂C. Par conséquent, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in \partial C$, on a :

$$\begin{aligned} tK(x) &\neq x \Rightarrow x - tK(x) \neq 0 \\ &\Rightarrow y_0 = 0 \notin K_t(\partial C). \end{aligned}$$

D'où le degré $Deg(K_t, \mathring{C}, 0)$ est bien défini et vaut, par homotopie,

$$Deg(K_1, \mathring{C}, 0) = Deg(I_d - K, \mathring{C}, 0) = Deg(K_0, \mathring{C}, 0) = Deg(I_d, \mathring{C}, 0) = 1.$$

Alors, $\exists x \in \mathring{C}$ tel que $(I_d - K)(x) = 0 \Rightarrow K(x) = x$. D'où l'existence d'au moins un point fixe K dans C.

2ème étape : C est un convexe, fermé, borné, non vide. On considère l'application continue $r : B \to C$ telle que C soit contenu dans B. Soit le diagramme $B \xrightarrow{r} C \xrightarrow{K} B$ et $r(x) = x$, $\forall x \in C$. L'application $K \circ r$ est compacte car K est compacte et r est continue.

D'après la première étape, $K \circ r$ admet un point fixe $x_0 \in B$, i.e $x_0 = (K \circ r)(x_0)$. Or, $r(x_0) \in C$ et par hypothèse, $K(C) \subset C$, alors $K(r(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$. ∎

Théorème 8. (Schaefer) *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une application compacte, alors ou bien pour chaque $t \in [0,1]$ l'équation $x = tf(x)$ a une solution, ou bien l'ensemble $S = \{x \in X : x = tf(x),\ 0 < t < 1\}$ n'est pas borné.*

Corollaire (Alternative non-linéaire) *Soit Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte. Alors,*

(i) *f a un point fixe dans Ω, où bien*

(ii) $\exists\ x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$, *tels que $x = tf(x)$.*

Démonstration. Si la condition (ii) n'est pas vérifie, alors

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0,1],\ (I - tf)(x) \neq 0.$$

Ceci implique que le degré $Deg(I - tf, \Omega, 0)$ est bien défini et vaut, par homotopie,

$$Deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

Donc, si $t = 1$, on obtient, f a un point fixe dans Ω. ■

Théorème 9. (Tychonoff, 1935) *Soit X un espace localement convexe, C une partie non vide de X, convexe, fermée et bornée. Si f est une application continue de X dans X. Alors f admet un point fixe.*

Démonstration. (voir ([22], Th.(1.10),P 147) ■

Critères de compacité sur des intervalles non-bornés

Soit $\theta > r_1$ un paramètre réel et on considère l'espace

$$X = C^1_\infty([0,+\infty[,\mathbb{R}) = \{u \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R}) : \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{e^{\theta t}} \text{ et } \lim_{t\to+\infty} \frac{u'(t)}{e^{\theta t}} \text{ existent}\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_\theta = \max\{\|u\|_1, \|u\|_2\}.$$

Où

$$\|u\|_1 = \sup_{t\in[0,+\infty[} \frac{|u(t)|}{e^{\theta t}} \text{ et } \|u\|_2 = \sup_{t\in[0,+\infty[} \frac{|u'(t)|}{e^{\theta t}}.$$

Lemme 1. $X = C^1_\infty$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $\{u_n\} \subseteq X$ une suite de Cauchy, alors

$$\left\{v_n : v_n(t) = \frac{u_n(t)}{e^{\theta t}}\right\} \text{ et } \left\{w_n : w_n(t) = \frac{u'_n(t)}{e^{\theta t}}\right\}$$

sont des suites de Cauchy dans l'espace de Banach C_l ; ainsi ils existent $(v_0, w_0) \in C_l$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|v_n - v_0\|_l = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|w_n - w_0\|_l = 0$. Soit $u_0(t) = v_0(t)e^{\theta t}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Sur chaque intervalle compact $[0,T]$, $\{u_n\}$ converge uniformément à u_0 et $\{u'_n\}$ converge vers la fonction $t \to w_0(t)e^{\theta t}$. Alors u_0 est différentiable sur $[0,T]$ et $u'_0(t) = w_0(t)e^{\theta t}$ pour $t \in [0,T]$. Il suit que u_0 est différentiable sur $\mathbb{R}^+$ et $u'_0(t) = w_0(t)e^{\theta t}, \forall t \geq 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u_0\|_\theta = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \max\{\|v_n - v_0\|_l, \|w_n - w_0\|_l\} = 0$, d'où le résultat. ■

De la proposition 1.3.2, nous déduisons

Proposition 2. Soit $M \subseteq C^1_\infty([0,\infty[,\mathbb{R})$. Alors M est relativement compact en $C^1_\infty([0,\infty[,\mathbb{R})$ si les conditions suivantes ont lieu :

(a) M est uniformément borné en $C^1_\infty([0,\infty[,\mathbb{R})$.

(b) Les fonctions appartenant aux ensembles

$$A = \{v : v(t) = \frac{u(t)}{e^{\theta t}},\ u \in M\} \text{ et } B = \{w : w(t) = \frac{u'(t)}{e^{\theta t}},\ u \in M\},$$

sont équi-continues sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^+$.

(c) Les fonctions de A et de B sont équi-convergentes à $+\infty$.

Démonstration. Puisque l'ensemble A satisfait les conditions de la proposition 1.3.2 il existe une suite $\{v_n\}_{n\geq 1} \subseteq A$ et une limite $v_0 \in C_l$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|v_n - v_0\|_l = 0$. Soit $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset M$ et $v_n(t) = e^{-\theta t}u_n(t)$, $n \geq 1$, on considère l'ensemble $B_n = \{w_n : w_n(t) = \frac{u'_n(t)}{e^{\theta t}}, t \in \mathbb{R}^+\}$. Encore, de la proposition 1.3.2, il existe une sous-suite $\{w_{n_j}\} \subseteq \{w_n\}$ et $w_0 \in C_l$ tels que $\lim\limits_{j\to+\infty} \left\|w_{n_j} - w_0\right\|_l = 0$. De plus, pour tout $T > 0$, $\{u_{n_j}\}$ converge uniformément à u_0 sur $[0,T]$ et u'_{n_j} converge uniformément à la fonction $t \to w_0(t)e^{\theta t}$ sur $[0,T]$. Par conséquent u_0 est différentiable sur $[0,T]$ et $u'_0(t) = w_0(t)e^{\theta t}$. Puisque T est arbitraire, il suit que u_0 est différentiable sur $\mathbb{R}^+$ et que $u'_0(t) = w_0(t)e^{\theta t}$, $\forall t \geq 0$. Finalement, $\lim\limits_{j\to+\infty} \left\|u_{n_j} - u_0\right\|_\theta = \lim\limits_{j\to+\infty} \max\{\left\|v_{n_j} - v_0\right\|_l, \left\|w_{n_j} - w_0\right\|_l\} = 0$. Par conséquent, la suite $\{u_{n_j}\} \subseteq M$ est convergente, d'où le résultat. ■

Critère de compacité de Zima

Soit $p : I \to I$ une fonction continue sur $I =]0, +\infty[$. On désigne par X l'espace de Banach défini par

$$X = \left\{ u \in C(I) : \sup_{t \in I} |u(t)|\, p(t) < +\infty \right\},$$

muni de la norme de type Bieleck's suivante :

$$\|u\|_p = \sup_{t \in I} |u(t)|\, p(t) < +\infty.$$

Finalement, donnons la définition suivante :

Définition. Un ensemble de fonctions $u \in \Omega \subset X$ est dit presque équi-continu, s'il l'est aussi sur tout intervalle $[0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Lemme 2. [38], [39] Si la fonction $u \in \Omega$ est complètement équi-continue sur $I =]0, +\infty[$ et uniformément bornée au sens de la norme $\|.\|_q$ telle que $q \in C(I, I)$ vérifiant

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0.$$

Alors, Ω est relativement compact dans X.

Critère de compacité dans les espaces L^p

Nous notons par le même symbole un élement de $L^p(\mathbb{R}^n)$ et un de ses représentants. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on note $\tau_h(f)$ la classe de la fonction $u : \mathbb{R}^n \to f(u - h)$. La norme d'un élément $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est notée par $\|f\|_p$.

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ étant fixée, on note B_r la boule fermée centrée à l'origine et de rayon r.

Théorème 10. (Fréchet-Kolmogorov) [35, p.275] Soit $1 \leq p < +\infty$, un sous ensemble A de $L^p(\mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si

(i) A est bornée.

(ii) $\lim_{h \to 0} \|\tau_h(u) - u\|_p = 0$ uniformément sur A. En d'autres termes, pour chaque réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$, tels que tout $u \in A$ et tout $h \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|h| \leq r$, on a $\|\tau_h(u) - u\|_p \leq \varepsilon$.

(iii) $\lim_{R\to+\infty} \int_{\{t\in\mathbb{R}:|t|\geq R\}} |u(t)|^p\, dt = 0$, uniformément sur A. En d'autres termes, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R' > 0$, tels que pour chaque $u \in A$ et chaque $R \geq R'$, on a

$$\int_{\{t\in\mathbb{R}:|t|\geq R\}} |u(t)|^p\, dt \leq \varepsilon.$$

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude de quelques équations différentielles ordinaires du second ordre de la forme $u''(t) = f(t, u(t))$, $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$, $-u''(t) + m^2u(t) = f(t, u(t))$, $u''(t) - cu'(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t))$ et $u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t))$ avec des conditions aux bords de type Dirichlet et Neumann sur les intervalles $[a, b]$, $[0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

Nous avons présenté quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions sous différentes conditions sur la non-linéarité.

Pour la compacité d'opérateur, nous avons utilisé le théorème d'Ascoli-Arzéla sur des intervalles bornés ainsi que le critère de Corduneanu sur des intervalles non bornés.

Pour nous assurer que la solution peut être prolongée à $[0, +\infty[$, nous avons employé une méthode d'approximation ou un processus de diagonalisation.

Nous espérons que ce mémoire aidera le lecteur interessé a approfondir ses connaissances et à avoir la bonne méthode pour traiter les problèmes aux limites sur les domaines non bornés.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Infinite Interval Problems For Differential, Difference and Integral Equations,* Kluwer Acadimic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[2] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *An infinite interval problem arising in circularly symmetric deformations of shallow membrane caps*, Internal. J. Nonlin. Mech. 39, 2004, 779-784.

[3] R. P. Agarwal and D. O'Regan, I*nfinite interval problems modelling the flow of a gas through a semi-infinite porous medium,* Stud. Appl. Math. 108, 2002, 245-257.

[4] R. P. Agarwal and D. O'Regan, I*nfinite interval problems modeling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory,* Stud. Appl. Math. 111, 2003, 339-358.

[5] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Nonlinear boundary value problems on the semi infinite interval : an upper and lower solution approach*, Mathematikа 49, 2002, 129-140.

[6] C. Avramescu, *Existence problems for homoclinic solutions*, Abstr. Appl. Anal. 7(1), 2002, 1-27.

[7] C. Avramescu, *Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires*, Ann. Math. Pura. 481, 1969, 147-168.

[8] C. Avramescu and C. Vladimirescu, *Homoclinic solutions for linear and linearisable ordinary differential equations*, Abstr. Appl. Anal. 5(2), 2000, 65-85.

[9] J. V. Baxley, *Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite intervals,* J. Math. Anall. Appll 147, 1990, 122-133.

[10] L. E. Bobisud, *Existence of positive solutions to some nonlinear singular boundary value problems on infinite intervals,* J. Math. Anal. Apl 173, 1993, 69-83.

[11] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, *On nonlinear contractions* ; Proc. Amer. Math. Soc. 20, 1969, 364-371.

[12] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : *Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.

[13] C. Corduneanu, *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, New York, 1973.

[14] C. Corduneanu, *Principles of Differential and Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp, New York, 1977.

[15] C. Corduneanu, *Citive probleme globale referitoare la ecuatiile differentiale nelineare de ordinne al doilea,* Acad. Rep. Pop. Rom. 7, 1956, 1-7.

[16] C. Corduneanu, *Existenta solutiilar marginuite pentru unele ecuatii differentiale de ordinue al doilea*, Acad. Rep. Pop. Rom. Fil. Iasi. Stud. Cer. St. Mat. 7, 1957, 127-134.

[17] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[18] S. Djebali and T. Moussaoui, *A class of second order BVPs on infinite intervals*, Elec. Jour. Qual. Theo. Diff. Eq, No. 4, 2006, 1-19.

[19] S. Djebali and K. Mebarki, *Multiple positive solutions for singular BVPs on the positive half-line*, Comput. Math. with Appli. 55(12), 2008, 2940-2952.

[20] S. Djebali and S. Zahar, *Upper and lower solutions for BVPs on the half-line with variable coefficient and derivative depending nonlinearity*, Elec. J. Qual. Dif. Eq. 4 2011, 1-18.

[21] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1982.

[22] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[23] M. Furi and P. Pera, *A continuation method on locally convex spaces and applications to ODE on noncompact intervals*, Annales Polonici Mathematici, 47, 1987, 331-346.

[24] A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee and D. O'Regan, *Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices*, J. Math. Anal. Appl. 116, 1986, 335-348.

[25] O. A. Gross, *The boundary value problem on an infinite interval*, J. Math. Anal. Appl. 7, 1963, 100-109.

[26] A. Kneser, *Untersuchung und asymptotische darstellung der integrale gewisser differentialgleichungen bei grossen werthen des arguments*, J. Reine Angen. Math 1(116), 1896, 178-212.

[27] R. Ma, *Existence of positive solutions for second-order boundary value problems on infinity intervals*, Applied Mathematics Letters 16, 2003, 33-39.

[28] R. Ma and B. Zhu, *Existence of positive solutions for a semipositone boundary value problem on the half line,* Comput. Math. Appl. 58(8), 2009, 1672-1686.

[29] A. Mambriani, *Su un teoreme relativo alle equazioni diferenziali ordinarie del 20 ordine*, Atii Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 9, 1929, 620-622.

[30] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, In NSF-CBMS Regional Conference Series in Math, Volume 40, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1979.

[31] H. Reinhard, *Equations Différentielles : Fondements et Applications*, Bordas, Paris, 1982.

[32] M. Sever, *Ordinary Differential Equations*, Boole Press, 1987.

[33] D. R. Smart, *Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, 1974.

[34] P. K. Wong, *Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second order nonlinear differential equations*, Pacific J. Math. 13, 1963, 737-760.

[35] K. Yoshida, *Functional Analysis*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[36] S. Zahar, *Résultats D'existence Pour des Problèmes aux Limites du Second Ordre sur les Intervalles Bornés et non Bornés*, thèse de doctorat, ENS-Kouba, Alger, 2012.

[37] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

[38] K. Zima, *Sur l'existence des solutions d'une équation integro-différentielle*, Annales Polonici Mathematici, 27, 1973, 181-187.

[39] M. Zima, *On positive solutions of boundary value problems on the half-line*, Jour. of Math. Anal. and Applications, 259, 2001, 127-136.