

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques**

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Statistique et Traitement Informatique des Données

THÈME

Inégalités stochastiques pour le modèle d'attente avec rappels à un seul serveur et clients prioritaires

Présenté par:

- Rezki Sofiane
- Amrane Salaheddin

Soutenu publiquement, le 27/06/2016 devant le jury composé de :

Mr	Touche Nassim	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Présidente.
Mr	Ouazine Sofiane	Docteur	Université A-Mira de Béjaia.	Examineur.
Mr	Boualem Mohamed	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia.	Rapporteur.

Promotion: 2015/2016

Remerciements

Nous remercions, avant tout, Dieu le Tout puissant de nous avoir donné patience, santé et volonté tout au long de nos études.

Nous tenons aussi à remercier, notre promoteur, Mr Mohamed BOUALEM pour nous avoir proposé le sujet de ce mémoire, pour sa patience et ses conseils qui nous ont été d'un grand apport.

Nous remercions, ainsi, les membres des jurys pour l'effort qu'ils ont fait pour examiner ce modeste travail.

Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui ont collaboré à la réalisation de ce projet.

Nous exprimons notre reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

Dédicaces

AMRANE SALAHEDDIN

Je dédie ce travail :

A mes sources de courage, qui m'ont aidé pour arriver à ce que je suis aujourd'hui:

Ma chère mère Dellel Hakima.

Mon chère père Moussa.

A mes très chers frères et sœurs.

A mon binôme, en particulier Rezki Sofiane.

A toute ma famille chacun par son nom.

A tous les étudiants de ma promotion.

Dédicaces

REZKI SOFIANE

Je dédie ce travail :

A mon père Mosbah.

A ma mère Zouagri Malika.

A mes frères Salah et Abederrezak.

A ma soeur Kamilia.

A mon binôme Amrane Slaheddin.

A tous ceux qui portent le nom Rezki.

A tous(tes) mes amis(es).

A tous les étudiants de ma promotion.

Table des matières

Introduction	1
1 Systèmes de files d'attente avec rappels	5
1.1 Description du modèle d'attente classique	6
1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	6
1.2.1 Modèles markoviens	7
1.2.2 Modèles non markoviens	7
1.3 Classification des systèmes d'attente	8
1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente	9
1.5 Systèmes d'attente avec rappels	10
1.5.1 Description du modèle d'attente avec rappels	10
1.5.2 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite	13
1.6 Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels	14
1.6.1 Problème de réservation	14
1.6.2 Système informatique à temps réel	14
1.6.3 Réseaux locaux <i>CSMA</i>	15
1.7 Le système M/G/1 avec rappels	16
1.7.1 Variable supplémentaire	17
1.7.2 Chaîne de Markov induite	18
1.8 Quelques modèles d'attente avec rappels	20
1.8.1 Modèles d'attente avec rappels et pannes	20
1.8.2 Modèles d'attente avec rappels et arrivées négatives	21

1.8.3	Modèle d'attente avec rappels et priorité	22
1.8.4	Notes bibliographiques	23
1.8.5	Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels et priorité	25
2	Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques	27
2.1	Introduction	27
2.2	Propriétés générales des ordres partiels	28
2.2.1	Ordre stochastique	30
2.2.2	Ordre convexe	31
2.2.3	Ordre concave	33
2.2.4	Ordre en transformée de Laplace	34
2.2.5	Ordre en fonctions génératrices	35
2.2.6	Relations entre les ordres partiels	36
2.2.7	Propriétés de monotonie	36
2.3	Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes	37
2.3.1	Opérateurs monotones et comparables	37
2.3.2	Conditions de monotonie et de comparabilité	38
2.4	Distributions non-paramétriques	39
2.4.1	Relation avec les distributions paramétriques	40
2.4.2	Relation entre les classes de distributions non-paramétriques	41
2.5	Conclusion	41
3	Inégalités stochastiques pour le système d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité	42
3.1	Description du modèle	42
3.2	Chaîne de Markov incluse	44
3.3	Inégalités préliminaires	45
3.4	Monotonie de la chaîne de Markov incluse	50
3.5	Bornes stochastique des distributions stationnaires	63

Conclusion générale	67
Bibliographie	69

Introduction générale

La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, né en 1917, des travaux de l'ingénieur danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague. Entre 1909 et 1920, elle est étudié notamment les systèmes d'arrivée dans une queue, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d'exécution. C'est grâce aux apports des mathématiciens Khintchine, Palm, Kendall, Pollaczek et Kolmogorov que la théorie s'est vraiment développée. La théorie de files d'attente est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

Dès la fin des années 1940, des chercheurs ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes réels de plus en plus complexes, tels que les systèmes téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition de demandes du service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels. Cependant, l'influence de ce phénomène a été longtemps négligée durant les décennies suivantes. Ce n'est que vers les années 1970 – 1980 qu'on a vu un net regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, avec l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de Yang et Templeton (1987) [60], Falin (1990)[38], Aïssani (1994)[3] et dans la monographie d'Artalejo et Gómez (2008)[12].

Il est apparu ces dernières années dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté, les arrivées négatives, dont la présence dans le système d'attente affecte ce dernier de différentes manières. Pour cela, Plusieurs possibilités différentes ont été introduite dans la littérature à ce sujet : élimination individuelle, élimination par groupe, élimination d'une quantité aléatoire d'activité.

Cependant, la théorie analytique des modèles d'attente avec rappels s'avère d'une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables afin que le praticien puisse en bénéficier. Par ailleurs, on peut citer le degré de difficulté pour l'obtention de certaines caractéristiques (le taux d'arrivée des clients, le taux de service des clients...) dans quelques modèles tels que les modèles de files d'attente avec rappels et vacances, avec rappels et priorité, avec rappels et feedback, avec rappels de distribution générale ayant deux types de clients. Cette difficulté réside essentiellement dans l'utilisation des inverses des transformées de Laplace-Stieljes et des distributions marginales. Pour simplifier à toutes ces difficultés, les chercheurs ont recouru aux méthodes d'approximation qui permettent d'avoir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance (nombre moyen de clients dans le système de files d'attente, nombre moyen de clients dans la files...) . C'est pour toutes ces raisons, qu'on s'intéresse, dans notre étude, d'une manière particulière à la méthode de comparaison stochastique.

La méthode de comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour l'étude des performances de certains systèmes modélisés par des chaînes de Markov à temps continu ou discret. Ces études sont motivées par la difficulté d'obtenir des résultats de performance explicites pour la plupart de ces systèmes. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les

expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative. L'idée générale de cette méthode est de borner un système complexe par un nouveau système, plus simple à résoudre et fournissant des bornes qualitatives pour ces mesures de performance.

Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifique, tels que l'économie, la biologie, la recherche opérationnelle, la théorie de fiabilité, la théorie de décision, les files d'attente et les réseaux informatiques et de télécommunication [45, 56].

Le but de notre travail est d'appliquer la méthode de comparaison stochastique, pour étudier les propriétés de monotonie du modèle $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité relativement à l'ordre stochastique, ordre convexe et à l'ordre de Laplace, afin d'obtenir des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite liée au modèle considéré [15, 16, 17, 18].

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre comprend une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec rappels. Cette synthèse actualise celles de Yang et Templeton (1987)[60], Falin (1990)[38], ainsi que celle de Aïssani (1994)[3]. Une attention particulière est consacrée au système $M/G/1$ avec rappels. De plus, on a introduite la notion de priorité.

Dans le deuxième Chapitre, on donne un aperçu sur la notion des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et de Laplace), ainsi que des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastiques. On présente aussi les classes de distributions d'âges.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude des inégalités stochastiques pour le modèle $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité. On donne les conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe. On étudie la comparabilité des opérateurs de transition associée aux chaînes de Markov induite de deux systèmes $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité. Ainsi que la comparabilité des distributions stationnaires respectives de nombres de clients dans les deux systèmes. De plus, on détermine les bornes stochastiques pour la distribution stationnaires de modèle considéré.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et une bibliographie.

d'attente avec rappels

Introduction

Beaucoup de situations de files d'attente ont la particularité que les clients qui arrivent et trouvent la zone de service occupé quittent le système temporairement et se joignent à un groupe de clients insatisfaits, mais ils répètent leur demande après un certain temps aléatoire. Entre les tentatives du client est dit être en orbite. Ces modèles de files d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de nombreux protocoles de communication, des réseaux locaux et des situations de la vie quotidienne. L'exemple le plus simple et évident est fourni par une personne qui effectue un appel téléphonique, si la ligne est occupée, alors il n'est pas en mesure de faire la queue, mais il tente à nouveau sa chance après un certain temps.

La modélisation des tentatives répétées a été l'objet de nombreuses recherches portant sur l'influence du phénomène de rappel sur la qualité du service et l'analyse des performances des systèmes avec rappels.

Dans ce chapitre nous allons faire une synthèse de certains résultats concernant une nouvelle branche de la théorie de files d'attente, dite théorie des systèmes de files d'attente avec rappels. Un système de files d'attente avec rappels est caractérisé par l'hypothèse de base suivante : « Un client qui arrive et trouve l'espace de service et celui d'attente

(s'il existe) occupés peut faire des tentatives de service après une durée de temps aléatoire ». Son étude est motivée par diverses applications pratiques dans le domaine de télécommunication.

1.1 Description du modèle d'attente classique

Une file d'attente peut se décrire comme un système où les clients (modélisant les activités qui ont besoin d'accéder aux ressources) arrivent à des instants aléatoires vers une station (modélisant les ressources) pour recevoir un service. À la lumière des exemples précédents, on voit que les clients peuvent être de toutes sortes (appels téléphoniques, machines, ...), de même que la station de service (central téléphonique, processeur, ...). La station de service peut comprendre un ou plusieurs serveurs. Quand ceux-ci sont tous occupés, les clients doivent alors patienter dans un espace d'attente (si celui-ci existe) jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible.

Une représentation graphique d'une file d'attente classique est donnée par la figure 1.1.

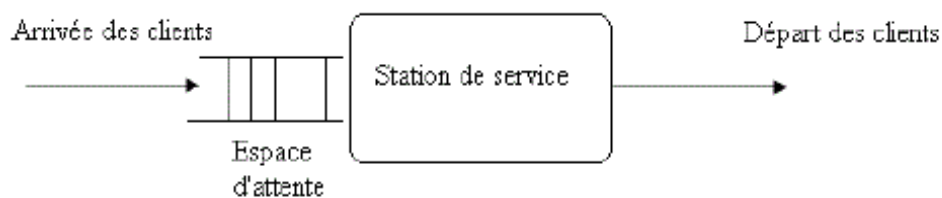


FIGURE 1.1 – Système classique de files d'attente

1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

* Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

* Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n) = P(X = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

1.2.1 Modèles markoviens

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (modèle $M/M/1$). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien est $\{X(t), t \geq 0\}$ complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

1.2.2 Modèles non markoviens

En l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, voire impossible.

On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes [5, 6] :

Méthode des étapes d'Erlang : Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étapes.

Méthode de la chaîne de Markov induite : Cette méthode, élaborée par Kendall (1953) [49], est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instants $1, 2, 3, \dots, n$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $X_n = X(n)$, soit markovienne et homogène.

Méthode des variables auxiliaires : Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$. Les variables $A(t_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites auxiliaires.

Méthode des événements fictifs : Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

Simulation : C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires [34] suivant les lois gouvernant le système.

D'autres méthodes d'analyse de systèmes non markoviens existent, telle que l'approche par les martingales et les méthodes d'approximation .

1.3 Classification des systèmes d'attente

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des spécifications suivantes :

- La nature stochastique du processus des arrivées, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives,
- La distribution du temps aléatoire de service,

– Le nombre s de serveurs (stations de service) qui sont montées en parallèle. On admet généralement que les temps de service correspondants suivent la même distribution et que les clients qui arrivent forment une seule file d'attente,

– La capacité N du système. Si $N < 1$, la file d'attente ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités. Dans ce cas, certains clients arrivant vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente

On note λ le taux d'arrivée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est $E(X) = 1/\lambda$.

On note θ le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est $E(Y) = 1/\theta$.

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{E(Y)}{E(X)},$$

où X est la loi des inter-arrivées et Y est la loi de service.

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les caractéristiques d'exploitation du système, telles que : le temps d'attente d'un client (le temps qu'un client passe dans la file d'attente), le temps de séjour d'un client dans le système (composé du temps d'attente et de la durée de service), le temps de réponse d'un système, le taux d'occupation des dispositifs de service, la durée de la période d'activité (l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système) ainsi que les mesures de performance suivantes:

L : nombre moyen de clients dans le système de files d'attente,

L_q : nombre moyen de clients dans la file,

W : temps moyen de séjour d'un client dans le système,

W_q : temps moyen d'attente d'un client dans la file.

Ces valeurs sont liées les unes aux autres par les relations suivantes :

$$L = \lambda W,$$

$$L_q = \lambda W_q,$$

$$L = L_q + \lambda/\theta,$$

$$W = W_q + 1/\theta.$$

Les deux premières relations sont appelées "formules de Little". Il est à noter que ces formules sont valables sous la vérification de la condition d'ergodicité du système $\rho = \lambda/\theta < 1$. Ces formules expriment tout simplement le fait qu'en régime stationnaire le nombre moyen de clients dans la file est égal au taux d'arrivée des clients multiplié par le temps moyen d'attente des clients. Elles rappellent un comportement poissonien de la longueur de la file d'attente en régime stationnaire.

1.5 Systèmes d'attente avec rappels

Plusieurs situations d'attente ont la caractéristique que les clients doivent rappeler, pour une certaine raison, pour être servis.

Quand le service d'un client est insatisfait, il doit rappeler jusqu'à l'accomplissement de son service.

Ces modèles d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis.

1.5.1 Description du modèle d'attente avec rappels

Un système d'attente avec rappels (Retrial Queue) est un système composé de s ($s \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer de capacité $N - s$ ($N \geq s$) et d'une orbite de capacité M . À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans le buffer, le client le rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions d'attente

du buffer occupés, il quittera le système définitivement avec la probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire .

Les clients qui reviendront et rappelleront pour le service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie. Dans le cas d'une orbite à capacité finie, si elle est pleine, un client qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente du buffer occupés, sera obligé de quitter le système définitivement sans être servi.

Chaque client en orbite appelé aussi client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité et une intensité de rappels bien définie (rappels constants, rappels classiques, ou bien rappels linéaires, ...). Chacun de ces clients secondaires est traité comme un client primaire, c'est-à-dire un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système. S'il trouve un serveur libre, il sera servi immédiatement puis quittera le système. Sinon, s'il y a des positions d'attente disponibles dans le buffer, il le rejoindra. Par contre, si tous les serveurs et les positions d'attente sont encore occupés, le client quittera le système pour toujours avec la probabilité $1 - H_k$ (si c'est le $k^{\text{ème}}$ rappel sans succès) ou bien entre en orbite avec la probabilité H_k si l'orbite n'est pas plein.

le schéma général d'un système d'attente avec rappels est donné par la Figure 1.2

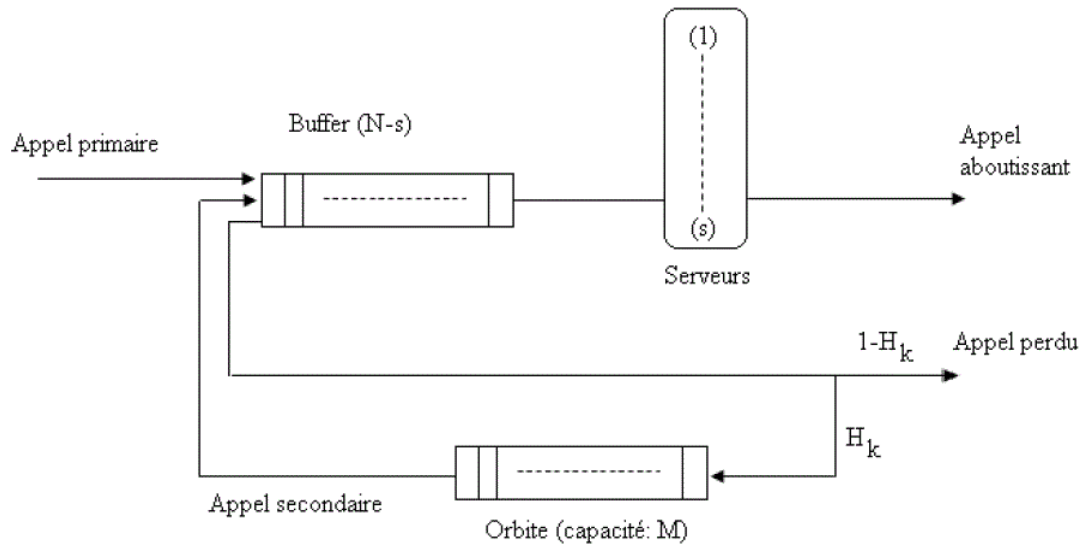


FIGURE 1.2 – Système d'attente avec rappels.

Remarques 1.1.

1. Le modèle d'attente avec rappels décrit ci-dessus est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers tels que : les systèmes sans buffer, les systèmes à un seul serveur, ...

2. La description d'un système de files d'attente ordinaire (classique) se fait avec ses éléments principaux : le processus d'arrivées, le mécanisme de service (disponibilité et nombre de serveurs) et la discipline d'attente. Pour un système avec rappels, on doit ajouter un élément décrivant la loi des répétitions d'appels. En fonction du modèle considéré, on pourra introduire d'autres éléments décrivant la fiabilité du serveur, les types de priorité, ...

3. Les clients primaires ou secondaires qui arrivent durant un temps de service, entrent en orbite sans aucune influence sur le processus de service.

Notation [60] :

En utilisant la notation de Kendall, un modèle de files d'attente avec rappels est noté comme suit : $A/B/s/N/M/H$, où

A : décrit la distribution des temps des inter-arrivées des clients.

B : décrit la distribution du temps de service de chaque client.

s : est le nombre de serveurs dans le système.

N : est la capacité du système.

M : est la taille de la population (source) de clients.

H : est la fonction de persévérance qui permet de définir le comportement du client devant une situation de blocage (serveurs occupés).

H peut être décrite par un vecteur $H = (H_0, H_1, H_2, \dots, H_k, \dots)$, où H_k est la probabilité qu'après que la $k^{\text{kème}}$ tentative échoue, un abonné rappelle pour la $(k + 1)^{\text{kème}}$ fois.

– Quand $H_k = 1$ pour $k \geq 0$, le système devient un système sans perte. Ainsi, chaque client reçoit éventuellement le service si M est infinie. Dans ce cas, $H = NL$ (sans perte).

– Quand $H_k = \alpha < 1$ pour $k \geq 0$, le système est dit un système à perte géométrique et $H = GL$ (Geometric Loss).

1.5.2 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse et concerne l'aspect modélisation du système sous étude. Le protocole le plus décrit dans la théorie classique des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classiques dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre α . Donc, il y a une probabilité $n\alpha dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t, t + dt)$ sachant que n clients sont en orbite à l'instant t . Une telle politique a été motivée par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940, Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle (1986) [40].

1.6 Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels

Il existe aujourd'hui des centaines de publications sur les systèmes avec rappels où des exemples concrets ont été cités (Yang et Templeton (1987) [60], Aïssani (1994) [3], Artalejo et Gómez (2008) [12], Amador et Artalejo (2009) [7]) en rapport avec les nouveaux développements technologiques dont l'intérêt porté s'accroît de jour en jour. Nous présentons quelques exemples de problèmes (extraits de [60]) pouvant être modélisés par ces systèmes. Ceux-ci vont du cas le plus simple de réservation à d'autres cas plus complexes comme les réseaux locaux *CSMA*.

1.6.1 Problème de réservation

C'est l'exemple le plus simple d'un client qui sollicite une réservation par téléphone dans un restaurant. Il y a une ligne unique qui est consacrée à répondre aux requêtes des réservations. Ainsi, si un client appelle et trouve la ligne occupée, il renouvellera sa tentative après une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité H_k qui, en pratique, est strictement inférieure à 1 car le client ne peut rappeler indéfiniment.

Cet exemple peut être modélisé par une file d'attente $M/G/1$ avec rappels et avec perte en considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien. L'étude de ce genre de problèmes permet de prédire le temps d'attente du client, le nombre de clients perdus dû à ce blocage,...

1.6.2 Système informatique à temps réel

Dans un système informatique à temps réel, on trouve M terminaux et s canaux de transmission tels que $M > s$. Pour qu'un terminal soit connecté à l'ordinateur, il suffit d'un canal de transmission libre. L'illustration de ce genre de système est le centre de calcul où arrive un étudiant pour utiliser l'ordinateur pendant une période de temps aléatoire. Celui-ci doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter. S'il n'y a aucun terminal disponible, il retentera sa chance après un temps aléatoire. Sinon, il envoie

sa demande au commutateur central pour se connecter à l'ordinateur. Le terminal est alors connecté selon que le canal serait disponible ou pas. Dans ce dernier cas, la demande est mise dans la file par le commutateur en attente de libération d'un canal.

Ce système peut être modélisé par une file $G/G/s$ avec rappels, avec un tampon (espace d'attente) de capacité M et une orbite de taille infinie, où les canaux de transmission correspondent aux serveurs et les terminaux au tampon.

1.6.3 Réseaux locaux CSMA

Dans les réseaux locaux se partageant un bus unique, l'un des protocoles de communication le plus généralement utilisé est appelé protocole non-persistant CSMA (Carrier Sense Multiple Access), c'est une méthode d'accès à un réseau local.

Un réseau local simple est composé de stations ou de terminaux interconnectés par un bus unique, qui est le canal de communication. Ainsi, les stations communiquent les unes avec les autres via le bus qui peut être utilisé par une seule station à la fois. Une telle architecture de réseau d'ordinateurs local est appelée architecture en bus.

Des messages de longueurs variables arrivent aux stations du monde extérieur. En recevant le message, la station le découpe en un nombre fini de paquets de longueur fixe, et consulte immédiatement le bus pour voir s'il est occupé ou bien libre. Si le bus est libre, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination et les autres paquets sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieure. Par contre, si le bus n'est pas libre, tous les paquets sont stockés dans le tampon (positions d'attente) et la station peut reconsulter le bus après une certaine période aléatoire.

Ce problème peut être modélisé comme un système d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les tampons des stations représentent l'orbite.

Ce système est décrit dans la Figure 1.3.

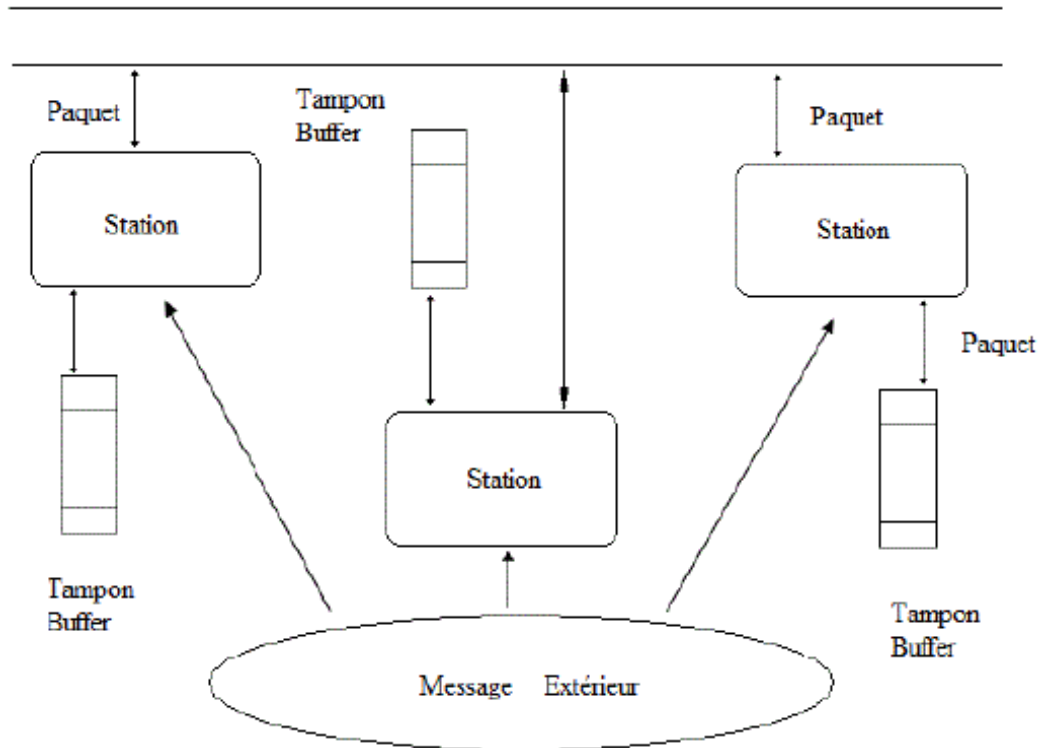


FIGURE 1.3 –Schéma d'un réseau local

1.7 Le système $M/G/1$ avec rappels

Le modèle $M/G/1$ avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés [2, 8, 50, 54].

Soit λ le taux du flot poissonnien des appels primaires. La durée de service τ est de loi générale, de moyenne $\frac{1}{\theta}$ de distribution B et de transformée de Laplace-Stieltjes \tilde{B} . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre μ . La description du système est la suivante : on suppose que le $(i-1)^{\text{ième}}$ appel termine son service à l'instant n_{i-1} (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement. Donc le $i^{\text{ième}}$ appel suivant, n'entre en service qu'après un

intervalle de temps R_i durant lequel le canal est libre, bien qu'en général il y ait des clients qui attendent. À l'instant $\zeta_i = n_{i-1} + R_i$ le $i^{\text{ème}}$ client débute le service durant un temps S_i . Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. Alors à l'instant $n_i = \zeta_i + S_i$, le $i^{\text{ème}}$ client achève son service et le canal devient encore libre et ainsi de suite.

1.7.1 Variable supplémentaire

Le premier résultat sur le système M/G/1 avec rappels a été obtenu par Keilson et al (1968) [33], en utilisant la méthode de la variable supplémentaire (la variable auxiliaire). Ils ont obtenu les probabilités d'état et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système. L'état du systèmes peut être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \zeta(t)\}, & \text{si } C(t) = 1, \end{cases}$$

où $C(t) = 0$ ou 1 selon que le serveur est libre ou actif, $\zeta(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et désignant la durée de service résiduelle à la date t si $C(t) = 1$, et $N(t)$ représente le nombre de clients dans l'orbite. Notons par :

$$P_{0j}(t) = P(C(t) = 0, N(t) = j),$$

et

$$P_{1j}(t, x) = P(C(t) = 1, N(t) = j, x < \zeta(t) < x + dx), \quad j > 0.$$

Si $\rho = \lambda/\mu < 1$, le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)\phi(z)}{\tilde{B}(\lambda - \lambda z) - z\phi(1)}, \quad (1.7.1)$$

où

$$\phi(z) = \exp \left\{ \frac{-\lambda}{\mu} \int_0^z \frac{1 - \tilde{B}(\lambda - \lambda x)}{x - \tilde{B}(\lambda - \lambda x)} dx \right\},$$

on aura alors ,

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z)-z} \exp \left\{ \frac{-\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)}{x-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)} dx \right\}. \quad (1.7.2)$$

Cette formule, appelée "décomposition stochastique", signifie que le nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels s'écrit comme somme de deux variables : l'une est le nombre de clients dans le système $M/G/1$ ordinaire et l'autre est une variable aléatoire positive de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$.

1.7.2 Chaîne de Markov induite

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la première fois par Choo et Conolly (1979) [31] : soit (X_i) la chaîne de Markov induite aux instants de départs, où $X_i = X(\eta_i)$ représente le nombre de clients dans le système après le $i^{\text{ième}}$ départ.

Il est clair que (X_i) est une chaîne de Markov et

$$X_{i+1} = X_i - \delta_{X_i} + \Delta_{i+1},$$

où Δ_i est le nombre d'appels primaires durant le service du $i^{\text{ième}}$ client. La variable aléatoire Δ_{i+1} ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant Δ_{i+1} du début de service du $(i+1)^{\text{ième}}$ client.

La distribution de Δ_i est la suivante :

$$P(\Delta_i = k) = P_k = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x).$$

La variable δ_{X_i} est une variable aléatoire de Bernoulli

$$\delta_{X_i} = \begin{cases} 1, & \text{si le } (i+1)^{\text{ième}} \text{ client servi provient de l'orbit,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle a pour distribution

$$P(\delta_{X_i} = 1/X_i = n) = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu},$$

et

$$P(\delta_{X_i} = 0/X_i = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}.$$

Les probabilités de transition en un pas s'écrivent alors :

$$P_{ij} = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} P_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} P_{j-i}.$$

En posant

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z) - z},$$

l'équation (1.7.1) s'écrira

$$\pi(z) = Q(z) \frac{\phi(z)}{\phi(1)}.$$

Cette formule est appelée "décomposition stochastique" du système $M/G/1$ avec rappels [8]. Si on note par \bar{n}_s le nombre moyen de clients dans le système, alors :

$\bar{n}_s = \bar{n}_\infty + \beta$ où β est la variable aléatoire de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$, et \bar{n}_s est le nombre moyen de clients dans le système d'attente $M/G/1$ ordinaire.

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)(1-z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z) - z}, \quad (1.7.3)$$

La formule (1.7.3) n'est autre que la formule de "Pollaczek-Khintchine" pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ ($FIFO, \infty$).

Les caractéristiques du système $M/G/1$ avec rappels sont données dans l'article de Yang et Templeton [60] comme suit :

Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}. \quad (1.7.4)$$

Nombre moyen de clients dans l'orbite : D'après les formules de Little, on a :

$$\bar{n}_0 = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}. \quad (1.7.5)$$

Temps d'attente et nombre de rappels : Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service. Pour trouver le temps moyen d'attente \bar{w} , on utilise la formule de Little $\bar{n} = \bar{w}\lambda$.

On aura :

$$\bar{w} = \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}. \quad (1.7.6)$$

Une fois \bar{w} obtenu, il est facile de déduire \bar{n} , le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{n} = \mu\bar{w} = \frac{\lambda\mu E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}. \quad (1.7.7)$$

1.8 Quelques modèles d'attente avec rappels

1.8.1 Modèles d'attente avec rappels et pannes

Les systèmes de files d'attente avec interruptions de service sont courants dans la modélisation des systèmes informatiques. Par exemple, un système fonctionne en présence d'interruptions, tandis que plusieurs terminaux répètent leurs demandes de service par un processeur central. Dans un réseau local en anneau, la propagation de l'information est unidirectionnelle. Il est donc possible d'avoir simultanément une interruption dans un segment de l'anneau et des tentatives répétées d'envoyer les paquets, effectuées par les stations.

Pour cela, Aïssani (1986) (1991) [1, 2] a obtenu les fonctions génératrices des distributions du nombre de clients dans le système et en orbite, du modèle de type $M/G/1$ avec rappels où le serveur est sujet à deux types de pannes, en utilisant la théorie des processus de Markov par morceaux. Également, le même modèle a été étudié par Choi et Kulkarni (1990) [52] en utilisant la théorie des processus régénératifs. Les deux méthodes fournissent des résultats identiques. Artalejo (1994) [9] utilise la dernière approche et calcule les probabilités stationnaires d'un système markovien avec seulement des pannes actives (si le serveur est occupé par le service d'un client). La distribution asymptotique de la taille de la file d'un système $M/G/1$ avec rappels et pannes, en régime chargé, est donnée par Aïssani (1998) [4], où il considère également les cas de maintenance préventive et corrective. Djellab (2003) [35] a vérifié pour la première fois l'hypothèse de validité de la propriété de décomposition stochastique pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable dans le cas de la distribution arbitraire du temps inter-rappels. Également, l'auteur a étudié les effets du type de distribution du temps inter-rappels, de l'intensité des rappels ainsi que des pannes sur la performance du modèle. Atencia et al. (2006) [14] ont analysé un système $M/G/1$ avec rappels et pannes actives où le client qui se sert durant la panne décide, avec une probabilité q , de rejoindre l'orbite (client impatient) et, avec une probabilité complémentaire p , de rester en service pour la réparation afin d'accomplir son service (client patient). Ils ont dérivé plusieurs mesures de performance du système et

ont évalué quelques caractéristiques d'un tel système en utilisant la technique de la variable supplémentaire. La période d'activité du modèle $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable a été examinée par Oukid et Aïssani (2009) [57]. Les auteurs ont obtenu des estimations pour les périodes d'activité et d'inactivité du serveur en utilisant la méthode de comparaison stochastique.

1.8.2 Modèles d'attente avec rappels et arrivées négatives

Il est apparu ces dernières années dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté, les arrivées négatives, dont la présence dans le système de files d'attente affecte ce dernier de différentes manières.

Plusieurs possibilités différentes ont été introduites dans la littérature à ce sujet :

- **Elimination individuelle** : Si une arrivée négative entre dans un système d'attente non vide, elle éliminera un client positif. Une arrivée négative entrant dans un système vide est sans effet.

- **Elimination par groupe** : Une arrivée négative contraint un groupe de clients à quitter le système.

- **Le désastre (la catastrophe)** : L'arrivée négative a l'effet d'une catastrophe sur le système où elle entre. En d'autres termes, tous les clients sont automatiquement éliminés [11] .

- **Elimination d'une quantité aléatoire d'activité** : Instantanément, à l'arrivée d'un client négatif, une quantité aléatoire d'activité est éliminée du système. La politique d'élimination d'une quantité aléatoire d'activité a été introduite par Boucherie et Boxma (1996) [25] dans le contexte du modèle $M/G/1$. Ce travail est une généralisation de celui de Jain et Sigman (1996) [48] pour permettre aux arrivées négatives d'éliminer une quantité aléatoire d'activité qui n'est pas nécessairement un nombre entier de clients positifs.

L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe (1989) [41], était motivé initialement par la modélisation des

réseaux de neurones où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui font croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis, leurs domaines d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatiques avec infection par virus [11], élimination des transactions dans les bases de données [42], les systèmes d'inventaires [48], les systèmes de télécommunication, les systèmes de production, etc. Gelenbe et al (1991) [43]. ont considéré un système de files d'attente avec arrivées négatives sous la discipline *FCFS*. Ils ont constaté que la condition de stabilité, dépend au delà des taux de service et d'arrivée, des distributions de temps de service et de temps inter-arrivées. Ils ont supposé que les éliminations se font avec les deux politiques suivantes :

RCE : Le client positif occupant la dernière place dans la file au moment de l'entrée du client négatif est éliminé.

RCH : Le client en tête de la file est éliminé au moment de l'arrivée du client négatif. Pour plus de détails sur ce thème, le lecteur peut se référer à Artalejo (2000) [10].

Les conditions de stabilité du système $M/M/1$ avec rappels et arrivées négatives ont été obtenues par Berdjoudj et Aïssani (2005) [24] en utilisant la méthode de la chaîne de Markov induite aux instants de départs. Sous ces conditions, ils ont construit une martingale à temps discret et ils ont démontré à nouveau la stabilité de ce système. Berdjoudj (2006) [23] a calculé la transformée de Laplace de la longueur de la période d'activité du système $M/G/1$ avec rappels et arrivées négatives via les martingales. L'intérêt de ce résultat vient du fait que les formules existantes dans la littérature sont très complexes.

1.8.3 Modèle d'attente avec rappels et priorité

Les files d'attente avec rappels ont été largement utilisés pour modéliser de nombreux problèmes dans les systèmes de commutation téléphoniques, informatiques, des réseaux locaux et des situations de la vie quotidienne.

Pour des raisons de commodité, nous classons les files d'attente avec rappels en deux catégories selon le nombre d'appels différents, modèle avec un type unique d'appels et modèles dans lequel il y a deux flux d'arrivée.

Dans ce type de système, il est assez naturel d'envisager une file d'attente avec rappels à deux types d'appels où, une fois bloqué, les appels de type I sont en attente et vont être servis dès que le serveur soit libre, et les appels de type II entrent en orbite pour retenter leur chance, de sorte que les appels de type I ont la priorité sur les appels de type II . Les files d'attente avec rappels avec deux types d'appels sont essentiellement plus difficiles que les files d'attente avec rappels à un seul type d'appels.

1.8.4 Notes bibliographiques

Les files d'attente avec rappels à un seul serveur avec appels prioritaires ont été étudiés par plusieurs auteurs [27, 28, 29, 32].

Choi et Park (1990) [30] optent pour la méthode de la variable supplémentaire pour étudier une file d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels à deux types d'appels, avec une file d'attente prioritaire infinie pour le type d'appels I et une orbite infinie de type d'appels II , et ont obtenu la fonction génératrice commune des longueurs de la file d'attente, alors que le temps d'attente virtuelle de type d'appel II dans ce modèle a été obtenu par Choi et al. (1993) [28]. Ce modèle s'est avéré être essentiellement identique à la file d'attente avec rappels à communication bidirectionnelle et une source d'appels sortants infinie étudiés par Falin (1990) [38]. Ces mêmes mesures de performance ont été obtenues par Moutzoukis et Langaris (1995) [53] pour un modèle avec deux types d'appels et priorité pré-emptive. Et en (1996) ils ont étendu le modèle du Choi et Park au modèle dans lequel il existe plusieurs types d'appels, arrivées par lots et vacances du serveur et ont obtenu la fonction génératrice des longueurs de la file d'attente, alors que Falin et al. (1993) [39] ont étendu les résultats du Choi et Park (1990) [30] du cas où deux types d'appels peuvent avoir différentes distributions du temps de service.

En utilisant la méthode de la matrice analytique, Choi et al. (1995) [27] ont étudié une file d'attente $M_1, M_2/G/1/K + 1$ avec rappels et obtiennent la fonction génératrice com-

mune des longueurs de la file d'attente. Différentes mesures de performance du système de file d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1/1$ avec rappels constant tel que, les distributions du nombre d'appels de type I perdu, le nombre de tentatives de rappels bloqués, la période d'occupation du serveur, le temps d'attente virtuelle, et la fonction génératrice commune des longueurs de la file d'attente ont été obtenues par Martin et Artalejo (1995) [55]. Han et Lee (1996) [47] ont traité une file d'attente $M/G/1$ avec rappels et politique de contrôle des taux de rappels où les temps de rappels sont distribués exponentiellement avec un taux v/n , quand il y'a n clients en orbite. Ils obtiennent explicitement la fonction génératrice commune des longueurs de la file d'attente. Choi et Kim (1997) [29] ont analysé une file d'attente $Geo1, Geo2/G/1$ avec rappels, ce qui est une contrepartie du $M_1, M_2/G/1$ avec rappels. Ils ont obtenu la fonction génératrice commune de la taille de la file d'attente et de leurs moments.

Pour les files d'attente avec rappels à deux types d'appels et aucune priorité, Kulkarni (1986) [51] a étudié une file d'attente $M_1^x, M_2^x/G_1, G_2/1$ où les temps de service et les taux de rappels sont différents pour chaque type et a obtenu la longueur moyenne de la file d'attente dans le système, le temps moyen d'attente, le nombre moyen de rappels pour chaque type d'appel. Ces résultats ont été étendu par Falin (1988) [37] au cas de plus de deux types d'appels. Grishchkin (1992) [46] a utilisé la théorie des processus de branchement pour analyser la file d'attente avec rappels à plusieurs types d'arrivées par lots. Il a obtenu la fonction génératrice de la taille de la file d'attente, le temps d'attente virtuelle, et le nombre moyen de rappels. Shin et Pearce ont considéré la file $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels avec deux types d'appels où la capacité de l'orbite est infinie et l'autre orbite a une capacité finie, ils ont obtenu la matrice de transition et ont présenté un algorithme d'approximation de la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file.

Dans la littérature ancienne, Falin (1979) [36] formula les dérivées intégrales pour les fonctions génératrices partielles et l'expression explicite de la valeur attendue de certaines caractéristiques de performance de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle en supposant que les appels entrants et sortants ont la même distribution

du temps de service. Cependant, cette hypothèse est restrictive dans la pratique, car les différents types de clients présentent généralement des comportements différents et, par conséquent, ils doivent avoir des durées de services différentes.

Récemment, Artalejo et Phung-Duc (2011) [13] ont effectué une étude détaillée de la file d'attente $M/M/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle. Ils ont obtenu des expressions explicites pour la distribution stationnaire du nombre de clients en orbite, ainsi que les moments partiels.

La plupart des formules explicites dans [13] sont exprimées en termes de séries hypergéométrique, en accord avec le rôle particulier joué par ces fonctions spéciales dans le calcul de solutions analytiques pour beaucoup d'autres files d'attente avec rappels.

1.8.5 Quelques cas modélisés par des systèmes de files d'attente avec rappels et priorité

Exemple 1. Téléphone au restaurant

Considérons un téléphone dans un restaurant qui est utilisé à la fois pour accepter une commande à l'avance pour les réservations des clients à l'extérieur et d'effectuer un appel par les clients dans le restaurant. Les clients du restaurant attendaient devant le téléphone dans une ligne pour effectuer un appel et utiliser le téléphone dès que il est libre.

Ce système peut être modélisé comme une file d'attente $M_1, M_2/G/1$ avec rappels dont les clients de l'extérieur sont considérés comme des appels de type II et les clients à l'intérieur comme des appels de type I .

Exemple 2. Modules de ligne d'abonné

Dans les échanges téléphoniques modernes, des lignes d'abonnés sont généralement connectés à ce qu'on appelle des modules de ligne d'abonné qui servent à la fois les appels entrants et sortants. Une différence importante entre ces deux types d'appels réside dans le cas de blocage du à l'ensemble des canaux occupés, les appels sortants peuvent être en file d'attente dans le tampon infini, alors que les appels entrants sont rejetés et doivent s'engager pour rétablir la connexion. Dès que l'un des canaux est libre, le cas échéant

dans le tampon, un appel sortant l'occupe immédiatement . Ainsi, les appels entrants ne peuvent pas établir la connexion aussi longtemps qu'il y'a des appels sortants dans le tampon. Cette règle implique que les appels sortants sont prioritaires par rapport au appels entrants.

Ce système peut être modélisé comme une file d'attente avec rappels et priorité à deux types d'appels où le type I sont les appels sortants et le type II sont les appels entrant.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé et présenté les concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente classiques. Plus précisément, on a exposé quelques modèles d'attente particuliers et on a donné leurs principales caractéristiques, tout en abordant les files markoviennes et les files non markoviennes.

Les modèles d'attente développés ces dernières décennies tentent de prendre en considération des phénomènes de répétition de demandes de service et de priorité à la fois.

Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques

2.1 Introduction

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'obtention de mesures de performance, tels que la longueur de la file d'attente, le temps d'attente, la distribution de la période d'occupation [19, 21].

Toutefois, ces caractéristiques de performances ont été obtenues par des méthodes d'approximation qui ont donné des expressions très complexes et les résultats obtenus ne peuvent pas être utilisés en pratique.

Lors de la dernière décennie, il y a eu une tendance à la recherche d'approximations et les limites, et les propriétés qualitatives des modèles stochastiques constituent une importante base théorique des méthodes d'approximation.

La monotonie et la comparabilité sont les plus importantes propriétés qualitatives et méthodes d'approximation qui peuvent être étudié à l'aide de la théorie générale des ordres stochastiques, voir [20, 22, 56].

L'ordonnement stochastique est utile pour étudier les changements internes de la performance en raison de variations de paramètres, à comparer des systèmes distincts, afin de se rapprocher d'un système complexe à un autre système plus simple, et pour obtenir des bornes supérieures et inférieures pour les principales mesures de performance d'un système.

Les résultats qui viennent dans ce chapitre sont extraits de Stoyan et la thèse de doctorat de Mohamed Boualem.

2.2 Propriétés générales des ordres partiels

Définition 2.2.1 On appelle un ordre partiel, noté " \prec ", une relation binaire définie sur un ensemble D d'éléments a, b, c, \dots , remplit les trois axiomes suivantes :

- (i) $a \prec a$ (réflexivité),
- (ii) si $a \prec b$ et $b \prec c$ alors $a \prec c$ (transitivité),
- (iii) si $a \prec b$ et $b \prec a$ alors $a = b$ (antisymétrie).

Notons que $a \prec b$ est équivalent à dire que $b \succ a$.

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur l'ensemble D de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ses sous-ensembles).

Pour les deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement) on a par convention :

$$F \prec G \iff X \prec Y.$$

On suppose que deux variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (iii) sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur D découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela, on utilisera la distribution de Dirac, notée par $\Theta_c(\cdot)$, définie pour tous les nombres

réels comme suit :

$$\Theta_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < c, \\ 0, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Définition 2.2.2 Soit un ordre partiel donné " \prec " défini sur (un sous ensemble de) l'espace D des fonctions de répartition.

On dit que cet ordre possède la propriété :

- **(R)** : si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors $\Theta_a \prec \Theta_b$
- **(E)** : si $F \prec G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.
- **(M)** : si $F \prec G$, alors $F^c \prec G^c$, $\forall c > 0$, où $F^c(x) = F(x/c)$, $\forall x$.
- **(C)** : si $F_1 \prec F_2$ alors $F_1 * G \prec F_2 * G$ où $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x-y) dG(y)$, $i = 1, 2$.
- **(W)** : si F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement) alors :

$$\forall n, F_n \prec G_n \implies F \prec G.$$

Remarque 2.2.1 Pour les deux variables aléatoires X et Y :

La propriété **(M)** assure que :

$$X \prec Y \iff cX \prec cY \quad \text{pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété **(C)** assure que :

$$X_1 \prec X_2 \implies X_1 + Y \prec X_2 + Y,$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété **(E)** assure que :

$$X \prec Y \implies E(X) \prec E(Y).$$

On remarque que la propriété **(E)** découle des autres propriétés.

Proposition 2.2.1 Un ordre partiel \prec sur un ensemble (ou bien sur un sous ensemble de) D qui vérifie les propriétés **(R)**, **(M)**, **(C)** et **(W)**, vérifie aussi la propriété **(E)**.

Définition 2.2.3 Pour une classe de fonctions réelles \mathfrak{S}_\prec , l'ordre partiel défini sur l'ensemble (ou sur le sous ensemble de) D est dit généré par \mathfrak{S}_\prec si :

$$F \prec G \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dG(x),$$

pour toute fonction f dans $\mathfrak{S}_<$, telle que les intégrales existent.

Définition 2.2.4 La classe ϕ de fonctions réelles définies sur la droite réelle \mathbb{R} (resp. la demi droite \mathbb{R}_+) est dite invariante par translation, si pour tout $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}_+$), lorsque $f \in \phi$, on a aussi $f_a \in \phi$, où f_a est la fonction définie par

$$f_a(x) = f(x + a), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

2.2.1 Ordre stochastique

Définition 2.2.5 On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$, lorsque

$$F(x) \geq G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

On écrit aussi $X \leq_{st} Y$ (\leq_{st} noté aussi par l'ordre \leq_d).

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , et en notant par $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$X \leq_{st} Y \iff \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que l'ordre stochastique \leq_{st} satisfait les axiomes de l'ordre partiel \prec .

Proposition 2.2.2 Si $F_1 \leq_{st} F_2$, alors il existe deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilité (Ω, A, P) pour lesquelles

$$X_1(w) \leq X_2(w), \quad \forall w \in \Omega,$$

et

$$P(w : X_k(w) \leq x) = F_k(x), \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

Notons par $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe $\mathbb{R}_{\leq st}$ des fonctions \leq -monotones est confondue avec la classe $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$, C'est-à-dire

$$\mathbb{R}_{\leq st} = \mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R}).$$

Théorème 2.2.1 L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.2.1)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ pour laquelle l'intégrale existe, si et seulement si $F_1 \leq_{st} F_2$. Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.2.1) est vérifiée pour tout F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_{st} F_2$ uniquement si f est non décroissante.

Corollaire 2.2.1 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, avec $X \leq_{st} Y$, on a

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r \geq 0,$$

$$E(X^r) \geq E(Y^r), \quad r < 0,$$

lorsque les espérances existent. Et si celles-ci sont bien définies,

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r = 1, 3, 5, \dots$$

pour des variables quelconques (pas forcément non négatives).

2.2.2 Ordre convexe

On note par $x_+ = \max(0, x)$.

Définition 2.2.6 On dit que la variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire Y , de fonction de répartition G , et on écrit $X \leq_v Y$, ou bien, $F \leq_v G$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} E((X-x)_+) &= \int_x^{+\infty} (t-x) dF(t) = \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1-G(t)) dt = E((Y-x)_+) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies.

Dans le cas discret, on a :

$$X \leq_\nu Y \iff \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}.$$

Une conséquence immédiate de cette définition :

$$\text{si } F \leq_{st} G \text{ et } E(Y_+) < \infty \text{ alors } F \leq_\nu G.$$

Théorème 2.2.2

1. L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.2.3)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_\nu(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si $F_1 \leq_\nu F_2$.

2. Pour une fonction donnée f , l'inégalité (2.2.3) a lieu pour toutes les fonctions F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_\nu F_2$ uniquement si f est une fonction convexe et non décroissante.

3. Si $F_1 \leq_\nu F_2$ et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.2.3) est vérifiée pour toute fonction convexe f donnée.

Corollaire 2.2.2 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives telles que $X \leq_\nu Y$ on a

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad (r \geq 1),$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires X et Y telles que:

$$E(X) = E(Y), \quad \text{et} \quad X \leq_\nu Y,$$

alors

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires telles que X et Y sont non négatives et $X \leq_\nu Y$, alors l'égalité $E(X) = E(Y)$ pour tout $r \geq 1$ implique l'égalité $X =_{st} Y$.

En effet

$$E(X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r(r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1 - F(y)) dy.$$

Cette propriété est l'analogie de la propriété suivante pour l'ordre stochastique

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \implies X =_{st} Y.$$

Proposition 2.2.3 Supposons que les suites de variables aléatoires X_n et Y_n convergent faiblement vers X et Y (respectivement).

Si

$$\begin{aligned} E(X_+) \text{ et } E(Y_+) & \text{ sont finis,} \\ E((X_n)_+) & \longrightarrow E(X_+), \text{ quand } n \longrightarrow +\infty, \\ E((Y_n)_+) & \longrightarrow E(Y_+), \text{ quand } n \longrightarrow +\infty, \end{aligned}$$

et si $X_n \leq_\nu Y_n$, alors

$$X \leq_\nu Y.$$

2.2.3 Ordre concave

Définition 2.2.7 On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est inférieure en moyenne de vie écoulée à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , c'est-à-dire, $X \leq_{cv} Y$ (ce qui est équivalent à $F \leq_{cv} G$), lorsque :

$$\begin{aligned} E((x - X)_+) &= \int_{-\infty}^x (x - t) dF(t) = \int_{-\infty}^x F(t) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^x G(t) dt = E((x - Y)_+), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

où les espérances mathématiques (les intégrales) sont bien définies.

Par conséquent, si

$$F \leq_{st} G \text{ et } E(X) = E(\max(0, -X)) < \infty, \text{ alors } X \leq_{cv} Y.$$

Remarquons que l'ordre concave " \leq_{cv} " est un ordre partiel sur le sous ensemble de D des fonctions vérifiant $\int_{-\infty}^0 |t| dF(t) < \infty$ comme dans le cas de l'ordre convexe.

Définition 2.2.8 On observe d'après (2.2.5) que l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $-Y \leq_{\nu} -X$.

Si on a l'égalité $E(X) = E(Y)$, alors l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $Y \leq_{\nu} X$.

2.2.4 Ordre en transformée de Laplace

Transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire X est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité $f(x)$:

$$\hat{f}(x) = E(e^{-sx}) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx,$$

où s est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour $Re(s) \geq 0$. La transformée de Laplace est notée aussi $L[f(x)]$.

Propriétés

◇ Si X et Y sont indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de Laplace de X et de Y ,

$$\diamond L[f'(x)] = s\hat{f}(s) - f(0),$$

$$\diamond L[f''(x)] = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\diamond L\left[\int_0^x f(u) du\right] = \frac{\hat{f}(s)}{s},$$

◇ Si $F(x)$ est la fonction de répartition de X et si $R(x) = 1 - F(x)$, alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{R}(s) = \int_0^{+\infty} R(x) dx.$$

Définition 2.2.9 Pour deux variables aléatoires non négatives X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement), F est dite inférieure par rapport à l'ordre laplacien à G , et on note $F \leq_L G$, si pour tout s positif on a l'inégalité suivante

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX) dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX) dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique.

Théorème 2.2.3 Soit une fonction f strictement monotone, alors $F \leq_L G$ implique

$$\int_0^{+\infty} f(t) dF(t) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dG(t).$$

Corollaire 2.2.3

1. Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, de fonctions de répartition F et G respectivement, telles que $F \leq_L G$ alors, on a l'inégalité suivante:

$$\frac{1 - E(\exp(-sX))}{s} \leq \frac{1 - E(\exp(-sY))}{s}, \quad \forall s > 0.$$

2. Lorsqu'on fait tendre s vers 0, on obtient le résultat suivant :

$$F \leq_L G \implies E(X) \leq E(Y),$$

lorsque les espérances existent.

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformée de Laplace.

Théorème 2.2.4 Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition F et G respectivement, alors :

$$F \leq_L G \iff E(f(x)) \leq E(f(y)),$$

pour toute fonction f strictement monotone, telle que les espérances existent.

2.2.5 Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $F \leq_g G$, si et seulement si :

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) z^n \text{ et } E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) z^n, \quad |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant $s = -\ln z$.

2.2.6 Relations entre les ordres partiels

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement.

Alors, on a les relations suivante :

- Si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \implies F \leq_v G$.
- Si $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \iff F \leq_{cv} G$.
- Si $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \iff F \leq_v G$.
- $F \leq_{st} G \implies F \leq_L G \implies F \leq_g G$.
- $F \leq_{cv} G \implies F \leq_L G \implies F \leq_g G$.
- Si $E(X) = E(Y)$ et $F \leq_v G \implies F \leq_L G \implies F \leq_g G$.
- $F \leq_L G \implies F \leq_g G$.

2.2.7 Propriétés de monotonie

Étudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est d'obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle Σ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i, \dots décrivent son comportement.

Soit c_Σ une caractéristique dans Σ et soit C_Σ l'ensemble des valeurs possibles de c_Σ .

Pour une structure donnée et une distribution initiale U , c_Σ dépend uniquement des F_i , et on écrit

$$c_\Sigma = c_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in C_\Sigma.$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de c_Σ . Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de c_Σ par rapport aux F_i , C'est-à-dire, la manière avec laquelle c_Σ est affectée par les changements en F_i . Parmi les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques on trouve la monotonie (C'est-à-dire, si les F_i croissent dans un certain sens, alors c_Σ croissent aussi).

2.3 Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

2.3.1 Opérateurs monotones et comparables

Soient (E, M) un espace probabilisable et P_M l'ensemble de toutes les mesures de probabilité définies sur M . Soient aussi les opérateurs $T, T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ définis de P_M dans P_M et l'ordre partiel " \prec " défini sur P_M .

Définition 2.3.1 Un opérateur T est dit \prec -monotone si pour toutes mesures de probabilités $p^{(1)}, p^{(2)}$ appartenant à P_M telles que $p^{(1)} \prec p^{(2)}$, on a

$$Tp^{(1)} \prec Tp^{(2)}.$$

L'opérateur $T^{(1)}$ est inférieur à $T^{(2)}$ si $T^{(1)}p \prec T^{(2)}p$ pour tout $p \in P_M$ et on écrit,

$$T^{(1)} \prec T^{(2)}$$

Pour des applications aux processus de Markov homogènes, on s'intéresse à la comparabilité des distributions $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ définies par

$$p_n^{(k)} = (T^{(k)}p^{(k)})_n, \quad k = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

pour deux distributions initiales $p^{(k)}$ et les opérateurs $T^{(k)}$, pour $k = 1, 2$.

Théorème 2.3.1 Soient $T^{(1)}, T^{(2)}$ deux opérateurs définis sur P_M et $p^{(1)}, p^{(2)}$ deux mesures de probabilité définies sur M , alors

$$p^{(1)} \prec p^{(2)} \quad \text{implique} \quad p_n^{(1)} \prec p_n^{(2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

s'il existe un opérateur T \prec -monotone défini sur P_M tel que

$$T^{(1)} \prec T \prec T^{(2)}.$$

Remarquons que ce Théorème reste vrai, en général, pour les opérateurs définis dans un espace partiellement ordonné.

À présent, on considère les opérateurs de transition d'une chaîne de Markov homogène $X(n)$ d'espace d'état (E, M) . Les opérateurs de transition sont décrits par leurs fonctions de transition $p(x, \beta)$,

$$p(x, \beta) = P(X_{n+1} \in \beta / X_n = x), \quad x \in E \text{ et } \beta \in M,$$

ou bien, dans le cas où les processus sont à valeurs réelles, par leurs distributions de transition

$$p(x, y) = P(X_{n+1} < y / X_n = x), \quad x, y \in E \subseteq \mathbb{R}.$$

Maintenant, on donne des conditions sur les fonctions de transition, qui assurent la monotonie ou la comparabilité des opérateurs de transition.

Théorème 2.3.2 Les opérateurs de transition $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ satisfont l'inégalité $T^{(1)} \prec T^{(2)}$ si et seulement si leurs fonctions $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ satisfont

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in E.$$

2.3.2 Conditions de monotonie et de comparabilité

Pour l'étude de la monotonie et de la comparabilité des chaînes de Markov homogènes, on peut énoncer les deux Théorèmes suivants qui constituent un outil important pour prouver la monotonie interne et/ou externe de ces modèles stochastiques.

Théorème 2.3.3 Une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$, de fonction de transition p , est non décroissante (respectivement. non croissante) par rapport à l'ordre partiel " \prec " si :

$$X_1 \prec X_2 \quad (\text{ resp. } X_2 \prec X_1),$$

et si p est $\prec -$ monotone.

Théorème 2.3.4 Deux chaînes de Markov homogènes $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$, de fonctions de transition $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ respectivement, satisfont l'inégalité :

$$X_n \prec Y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

si $X_1 \prec X_2$ et s'il existe une fonction de transition $p \prec -$ monotone telle que :

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in E.$$

2.4 Distributions non-paramétriques

Les notions de vieillissement et de relations d'ordre entre variables aléatoires sont étroitement liées. Nous présentons les principaux ordres permettant de comparer des variables aléatoires puis les notions de vieillissement. Cette présentation sera cependant partielle car l'activité scientifique sur ces sujets est importante. Il est donc difficile de prétendre faire un exposé exhaustif. L'un des états de l'art les plus récents sur ce sujet est [6, 45], mais on peut citer aussi [44, 45, 59, 58].

En théorie de fiabilité, les classes de distributions nous renseignent sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de sa durée de vie résiduelle connaissant son âge (propriété qualitative). La connaissance de la classe (d'âge) de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision.

Dans cette section, sont présentées aussi les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité ces dernières années.

Les distributions non-paramétriques ont été introduites pour l'étude de certains problèmes en relation avec la théorie de fiabilité. Elles permettent ainsi de modéliser et caractériser des propriétés qualitatives telles que le vieillissement et le rajeunissement du système.

Ces distributions sont utilisées actuellement dans divers domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie (médecine), files d'attente, ordonnancement, théorie de décision, économie, gestion des stocks .

Définition 2.4.1 Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément, et soient F et F_τ leurs distributions respectives.

On dit que F est :

- ▶ *NBU (New Better than Used)*, si $F_\tau \leq_{st} F$, $(0 < \tau < \infty)$.
- ▶ *NWU (New Worse than Used)*, si $F \leq_{st} F_\tau$, $(0 < \tau < \infty)$.
- ▶ *NBUE (New Better than Used in Expectation)*, si $E(X_\tau) \leq E(X)$, $(0 < \tau < \infty)$.
- ▶ *NWUE (New Worse than Used in Expectation)*, si $E(X) \leq E(X_\tau)$, $(0 < \tau < \infty)$.
- ▶ *IFR (Increasing Failure Rate)*, si $F_y \leq_{st} F_x$, $(0 \leq x < y < \infty)$.

- ▶ *IFRA* (*Increasing Failure Rate in Average*), si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ croissante, $t \geq 0$.
- ▶ *DFR* (*Decreasing Failure Rate*), si $F_x \leq_{st} F_y$, $(0 \leq x < y < \infty)$.
- ▶ *DFRA* (*Decreasing Failure Rate in Average*), si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ décroissante, $t \geq 0$.

- ▶ *IMRL* (*Increasing Mean Residual Life*), si

$$E(X_\tau) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_\tau^{+\infty} (1 - F(u)) du, \quad \text{croissante} \quad (0 < \tau < \infty).$$

- ▶ *DMRL* (*Decreasing Mean Residual Life*), si

$$E(X_\tau) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_\tau^{+\infty} (1 - F(u)) du, \quad \text{décroissante} \quad (0 < \tau < \infty).$$

Proposition 2.4.1 Soit la variable aléatoire X de fonction de répartition F ayant une moyenne finie m .

1. Si F est *NBU* (resp. *NWU*), alors :

$$F \leq_{st} \exp(\lambda), \quad (\text{resp. } F \geq_{st} \exp(\lambda)),$$

pour un certain $\lambda \leq m^{-1}$ (resp. $\lambda \geq m^{-1}$), avec la possibilité d'avoir une égalité seulement si $F = \exp(m^{-1})$.

2. Si F est *NBUE* (resp. *NWUE*), alors

$$F \leq_v \exp(m^{-1}), \quad (\text{resp. } F \geq_v \exp(m^{-1})).$$

2.4.1 Relation avec les distributions paramétriques

- ◆ La loi d'Erlang E_k est *IFR*.
- ◆ La loi de Weibull $W(a)$, pour $a > 1$ (paramètre de la forme), est *IFR*.
- ◆ La loi de Weibull $W(a)$, pour $a \leq 1$, est *DFR*.
- ◆ La loi Gamma $\Gamma(a)$, avec $0 \leq a < 1$, est *DFR*.
- ◆ La loi exponentielle est à la fois *IFR* et *DFR*.
- ◆ La distribution Hyper-exponentielle H est *DFR*.

2.4.2 Relation entre les classes de distributions non-paramétriques

La figure 2.1 illustre les relations d'implication existantes entre certaines classes de distributions non-paramétriques.

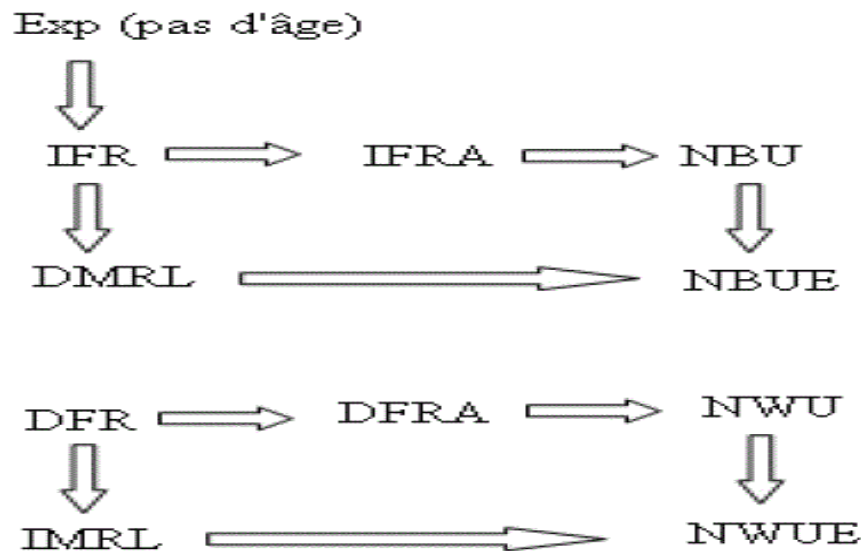


FIGURE 2.1 – Relations entre les classes de distributions d'âge

2.5 Conclusion

On a présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques et de la monotonie des processus stochastiques. On a donné aussi les classes de distributions d'âge issues de la théorie de la fiabilité. La méthode de comparaison stochastique sera appliquée, dans le chapitre suivant, pour l'étude des propriétés de monotonie du modèle d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité.

Inégalités stochastiques pour le système d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité

Introduction

Dans ce chapitre, on utilise la théorie générale des ordres partiels pour étudier les propriétés de monotonie du système d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité relativement aux ordres : stochastique " \leq_{st} ", laplacien " \leq_L " et convexe " \leq_v ".

Afin d'obtenir des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite liée au modèle considéré.

3.1 Description du modèle

Nous considérons un système de files d'attente $M_2/G_2/1$ à un seul serveur, auquel deux types différents de clients primaires arrivent selon des processus de Poisson indépendants de taux α et λ , respectivement. Les clients du premier flux de taux $\alpha > 0$, ont une priorité sur les clients du deuxième flux de taux $\lambda > 0$.

Tous les clients prioritaires, qui trouvent le serveur occupé à leur arrivée, par le service d'un client (prioritaire ou non prioritaire) prennent une place dans la file d'attente, puis servi, dès que le serveur soit libre.

D'autre part, tous les clients non prioritaires (ceux du second flux) qui trouvent le serveur occupé à leur arrivée quittent immédiatement le système, ou bien, entrent en orbite pour retenter leur chance jusqu'à ce qu'ils trouvent le serveur disponible.

Les clients en orbite ne seront servis sauf s'il n'y a aucun client dans la file d'attente.

La durée entre deux rappels successifs d'un même client en orbite suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Les durées de service des deux types de clients suivent une distribution générale de fonction de répartition $B_k(x)$, $k = 1, 2$. (où le nombre "1", est associé au clients prioritaires, et "2", est associé au clients non prioritaires). et de transformée de Laplace-Stieltjes

$$\tilde{B}_k(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sx) dB_k(x),$$

Soient les moments d'ordre k ,

$$B_n^{(k)} = (-1)^n \tilde{B}_k^n(0),$$

du durée de service à partir de l'origine, et

$$K^{(k)}(y, z) = \tilde{B}_k(\alpha(1-y) + \lambda(1-z)),$$

La fonction génératrice du nombre de clients primaires des deux types de clients arrivant dans le système durant le temps de service d'un client de type k , ($k \in \{1, 2\}$), et

$$b_k(x) = B_k'(x)/(1 - B_k(x)).$$

$$\delta = \alpha B_1^{(1)}, \quad \text{et} \quad \rho = \lambda B_1^{(2)}$$

où $|y| \leq 1, |z| \leq 1, n \in \mathbb{N}$ et $k = 1, 2$.

Finalement, nous admettons l'hypothèse de l'indépendance mutuelle entre toutes les variables aléatoires définies précédemment [39].

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus markovien:

$$X(t) = (A(t), C(t), N(t), \xi(t)), \quad t \geq 0,$$

où :

$C(t)$: nombre de clients dans la file,

$N(t)$: nombre de clients en orbite,

$A(t)$: le type des clients en service,

$\xi(t)$: temps de service écoulé,

$B_1(x)$: distribution de temps de service des clients de type 1,

$B_2(x)$: distribution de temps de service des clients de type 2.

3.2 Chaîne de Markov incluse

Soit η_d , $d \in \{0, 1, 2, \dots\}$ qui représentent les instants de départs des clients, il est facile de remarquer que la séquence aléatoire

$$X_d = (A(\eta_d - 0), C(\eta_d - 0), N(\eta_d - 0)),$$

forme une chaîne de Markov incluse [39], à espace d'états $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}_+^2$ et ces probabilités de transition en un pas:

$$r_{(k,n,m)(l,i,j)} = P \{X_{d+1} = (l, i, j) / X_d = (k, n, m)\}, \text{ où } l \in \{1, 2\},$$

sont données par les formules suivantes :

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^1 & , & \text{si } n = 0, \\ a_{i-n+1,j-m}^1 & , & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

$$r_{(k,n,m)(2,i,j)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m+1}^2 & , & \text{si } n = 0, \\ 0 & , & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

où :

$$a_{ij}^k = \int_0^\infty \frac{(\alpha x)^i}{i!} \exp(-\alpha x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} \exp(-\lambda x) dB_k(x), \quad k = 1, 2$$

est la probabilité du nombre de clients de deux type arrivent dans le système durant le temps de service d'un client de type $k = 1, 2$.

Le Théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov induite soit ergodique.

Théorème 3.2.1 [39]

La chaîne de Markov induite est ergodique si et seulement si $\delta + \rho < 1$,

où:

$$\delta = \alpha B_1^{(1)} \quad \text{et} \quad \rho = \lambda B_1^{(2)}.$$

3.3 Inégalités préliminaires

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité de paramètres (respectivement, pour $p = 1, 2$):

$\alpha^{(p)}$: taux d'arrivées des clients prioritaires dans Σ_p ,

$\lambda^{(p)}$: taux d'arrivées des clients non prioritaires dans Σ_p ,

$\mu^{(p)}$: taux de rappels dans Σ_p ,

$B_k^{(p)}(x)$: la distribution de temps de service dans Σ_p , et $k = 1, 2$,

$a_{ij}^{k,(p)}$: la probabilité de $i^{\text{ème}}$ client prioritaire et $j^{\text{ème}}$ client non prioritaire entrant dans le système durant le service de $i^{\text{ème}}$ ou $j^{\text{ème}}$ client dans Σ_p ,

$\pi_{ij}^{(p)}$: la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_p .

Maintenant, on compare dans cette section, les probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service $\{a_{ij}^{k,(p)}, p = 1, 2\}$, dans le système Σ_p , suivant les ordres partiels : stochastique (\leq_{st}), convexe (\leq_v), et en transformée de Laplace (\leq_L).

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables aux sens des ordres cité ci-dessus :

Lemme 3.3.1 Si $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_k^{(1)} \leq_{st} B_k^{(2)}$ alors $\{a_{ij}^{k,(1)}\} \leq_{st} \{a_{ij}^{k,(2)}\}$,

où :

$$a_{ij}^{k,(p)} = \int_0^\infty \frac{(\alpha^{(p)}x)^i}{i!} \exp(-\alpha^{(p)}x) \frac{(\lambda^{(p)}x)^j}{j!} \exp(-\lambda^{(p)}x) dB_k^{(p)}(x), k = 1, 2, p = 1, 2.$$

Preuve Par définition de l'ordre stochastique " \leq_{st} ", on a pour une loi discrète les équivalences suivantes :

$$\{a_{ij}^{k,(1)}\} \leq_{st} \{a_{ij}^{k,(2)}\} \iff \overline{a_{ij}^k}^{(1)} = \sum_{m=i}^\infty \sum_{n=j}^\infty a_{m,n}^{k,(1)} \leq \sum_{m=i}^\infty \sum_{n=j}^\infty a_{m,n}^{k,(2)} = \overline{a_{ij}^k}^{(2)},$$

ce qui équivalent, pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \overline{a_{ij}^k}^{(1)} &= \sum_{m=i}^\infty \sum_{n=j}^\infty \int_0^\infty \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB_k^{(1)}(x) \\ &= \int_0^\infty \sum_{m=i}^\infty \sum_{n=j}^\infty \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB_k^{(1)}(x) \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{m=i}^\infty \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \right] \left[\sum_{n=j}^\infty \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) \right] dB_k^{(1)}(x) \\ &\leq \int_0^\infty \left[\sum_{m=i}^\infty \frac{(\alpha^{(2)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(2)}x) \right] \left[\sum_{n=j}^\infty \frac{(\lambda^{(2)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(2)}x) \right] dB_k^{(2)}(x) = \overline{a_{ij}^k}^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Pour prouver l'inégalité (3.3.1), on considère les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} h_i(x, \alpha) &= \sum_{m=i}^\infty \frac{(\alpha x)^m}{m!} \exp(-\alpha x), \\ g_j(x, \lambda) &= \sum_{n=j}^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

En prenant les dérivées de la fonction $h_i(x, \alpha)$ par rapport à x et α , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_i(x, \alpha)}{\partial x} &= \sum_{m=i}^{\infty} \alpha m \frac{(\alpha x)^{m-1}}{m(m-1)!} \exp(-\alpha x) - \sum_{m=i}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha x)^m}{m!} \exp(-\alpha x) \\
 &= \sum_{m=i}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\alpha x) - \sum_{m=i}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha x)^m}{m!} \exp(-\alpha x) \\
 &= \alpha \frac{(\alpha x)^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-\alpha x) + \sum_{m=i+1}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\alpha x) - \sum_{m=i}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha x)^m}{m!} \exp(-\alpha x) \\
 &= \alpha \frac{(\alpha x)^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-\alpha x) > 0, \quad \forall x > 0,
 \end{aligned}$$

donc $h_i(x, \alpha)$ est une fonction croissante en x .

$$\frac{\partial h_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x \frac{(\alpha x)^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-\alpha x) > 0,$$

donc $h_i(x, \alpha)$ est une fonction croissante en α .

Les dérivées de $g_j(x, \lambda)$ par rapport à x et λ , sont comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_j(x, \lambda)}{\partial x} &= \lambda \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \exp(-\lambda x) > 0, \quad \forall x > 0, \\
 \frac{\partial g_j(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= x \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!} \exp(-\lambda x) > 0, \quad \forall x > 0.
 \end{aligned}$$

On remarque que les dérivées des fonctions $h_i(x, \alpha)$ et $g_j(x, \lambda)$ sont positives pour toutes les valeurs positives que peuvent prendre les paramètres α et λ , alors les fonctions $h_i(x, \alpha)$ et $g_j(x, \lambda)$ sont croissantes.

Comme $h_i(x, \alpha)$ et $g_j(x, \lambda)$ sont des fonctions croissantes alors leur produit est une fonction croissante (car le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante), et comme $B_k^{(1)} \leq_{st} B_k^{(2)}$ alors d'après le Théorème 2.2.1 énoncé dans le chapitre 2,

l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{\infty} h_i(x, \alpha^{(1)}) g_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(1)} \leq \int_0^{\infty} h_i(x, \alpha^{(1)}) g_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(2)} \quad k = 1, 2. \quad (3.3.2)$$

D'autre part, puisque la fonction $h_i(x, \alpha) * g_j(x, \lambda)$ est monotone par rapport à α et λ , et que $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$ et $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, on a :

$$\int_0^{\infty} h_i(x, \alpha^{(1)}) g_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(2)}(x) \leq \int_0^{\infty} h_i(x, \alpha^{(2)}) g_j(x, \lambda^{(2)}) dB_k^{(2)}(x), \quad (3.3.3)$$

Par conséquent, des inégalités (3.3.2) et (3.3.3), l'inégalité (3.3.1) est vérifiée par transitivité.

Lemme 3.3.2 Si $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $B_k^{(1)} \leq_v B_k^{(2)}$ alors $\{a_{ij}^{k,(1)}\} \leq_v \{a_{ij}^{k,(2)}\}$.

Preuve Par définition de l'ordre convexe " \leq_v ", on a :

$$\{a_{ij}^{k,(1)}\} \leq_v \{a_{ij}^{k,(2)}\} \iff \overline{\overline{a_{ij}^k}}^{(1)} = \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \overline{\overline{a_{sr}^k}}^{(1)} \leq \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \overline{\overline{a_{sr}^k}}^{(2)} = \overline{\overline{a_{ij}^k}}^{(2)}, \quad (3.3.4)$$

ce qui équivaut à écrire, pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{a_{ij}^k}}^{(1)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB_k^{(1)}(x) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB_k^{(1)}(x) \\ &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{s=i}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \frac{(\alpha^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\alpha^{(1)}x) \right] \left[\sum_{r=j}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^n}{n!} \exp(-\lambda^{(1)}x) \right] dB_k^{(1)}(x) \\ &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{s=i}^{\infty} h_s(x, \alpha^{(1)}) \right] \left[\sum_{r=j}^{\infty} g_r(x, \lambda^{(1)}) \right] dB_k^{(1)}(x) \\ &\leq \int_0^{\infty} \left[\sum_{s=i}^{\infty} h_s(x, \alpha^{(2)}) \right] \left[\sum_{r=j}^{\infty} g_r(x, \lambda^{(2)}) \right] dB_k^{(2)}(x) = \overline{\overline{a_{ij}^k}}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

avec

$$h_s(x, \alpha) = \sum_{m=s}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{m!} \exp(-\alpha x), \quad (3.3.6)$$

$$g_r(x, \lambda) = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \exp(-\lambda x). \quad (3.3.7)$$

Les fonctions $h_s(x, \alpha)$ et $g_r(x, \lambda)$ sont croissantes par rapport à α et λ (respectivement), alors les fonctions définies par :

$$\begin{aligned} \bar{h}_i(x, \alpha) &= \sum_{s=i}^{\infty} h_s(x, \alpha), \\ \bar{g}_j(x, \lambda) &= \sum_{r=j}^{\infty} g_r(x, \lambda), \end{aligned}$$

le sont aussi, d'autre part, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{h}_i(x, \alpha) = \alpha^2 \frac{(\alpha x)^{i-2}}{(i-2)!} \exp(-\alpha x) > 0, \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{g}_j(x, \lambda) = \lambda^2 \frac{(\lambda x)^{j-2}}{(j-2)!} \exp(-\lambda x) > 0. \quad (3.3.9)$$

Par conséquent, $\bar{h}_i(x, \alpha)$ et $\bar{g}_j(x, \lambda)$ sont croissantes et convexes par rapport à la variable x , ce qui implique la croissance et la convexité de leur produit.

D'après le Théorème 2.2.2 énoncé dans chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^\infty \bar{h}_i(x, \alpha^{(1)}) \bar{g}_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(1)}(x) \leq \int_0^\infty \bar{h}_i(x, \alpha^{(1)}) \bar{g}_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(2)}(x). \quad (3.3.10)$$

En outre, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{h}_i(x, \alpha) * \bar{g}_j(x, \lambda)$ par rapport α et λ , on trouve que:

$$\int_0^\infty \bar{h}_i(x, \alpha^{(1)}) \bar{g}_j(x, \lambda^{(1)}) dB_k^{(2)}(x) \leq \int_0^\infty \bar{h}_i(x, \alpha^{(2)}) \bar{g}_j(x, \lambda^{(2)}) dB_k^{(2)}(x). \quad (3.3.11)$$

Finalement, l'inégalité (3.3.4) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.3.10) et (3.3.11).

Lemme 3.3.3 Si $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $B_k^{(1)} \leq_L B_k^{(2)}$ alors $\{a_{ij}^{k,(1)}\} \leq_L \{a_{ij}^{k,(2)}\}$.

Preuve Par définition on a :

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}^k z^i z^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(\alpha x)^i}{i!} \exp(-\alpha x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} \exp(-\lambda x) z^i z^j dB_k(x) \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha x z)^i}{i!} \exp(-\alpha x) \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^j}{j!} \exp(-\lambda x) \right] dB_k(x) \\ &= \int_0^\infty [\exp(-\alpha x(1-z))] [\exp(-\lambda x(1-z))] dB_k(x) \\ &= \int_0^\infty [\exp(-x(\alpha + \lambda)(1-z))] dB_k(x) \\ &= \tilde{B}_k((\alpha + \lambda)(1-z)). \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\left\{ a_{ij}^{k,(1)} \right\} \leq_L \left\{ a_{ij}^{k,(2)} \right\}$ à lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes :

$$a^{k,(1)}(z) \geq a^{k,(2)}(z), \quad (3.3.12)$$

Ce qui équivalent à montrer que :

$$\tilde{B}_k^{(1)}((\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z)) \geq \tilde{B}_k^{(2)}((\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)})(1 - z)), \quad (3.3.13)$$

C'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante :

$$\left\{ a_{ij}^{k,(1)} \right\} \leq_L \left\{ a_{ij}^{k,(2)} \right\} \iff \tilde{B}_k^{(1)}((\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z)) \geq \tilde{B}_k^{(2)}((\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)})(1 - z)), \quad (3.3.14)$$

De plus, on a :

$$B_k^{(1)} \leq_L B_k^{(2)} \Rightarrow \tilde{B}_k^{(1)}(s) \geq \tilde{B}_k^{(2)}(s) \quad \forall s > 0,$$

et pour

$$s = (\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z),$$

on obtient

$$\tilde{B}_k^{(1)}((\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z)) \geq \tilde{B}_k^{(2)}((\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z)). \quad (3.3.15)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, impliquent l'inégalité suivante:

$$\tilde{B}_k^{(2)}((\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - z)) \geq \tilde{B}_k^{(2)}((\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)})(1 - z)). \quad (3.3.16)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.3.13) découle des inégalités (3.3.15)(3.3.16).

3.4 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité sont données par les formules suivantes :

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^1, & \text{si } n = 0, \\ a_{i-n+1,j-m}^1, & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad (*)$$

$$r_{(k,n,m)(2,i,j)} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha+\lambda+m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha+\lambda+m\mu} a_{i,j-m+1}^2, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (**)$$

Soit l'opérateur de transition τ de la chaîne de Markov incluse (X_d) . Pour chaque distribution $r = r_{(k,n,m)}$, associée une distribution : $\tau_r = q = q_{(l,i,j)}$, $l = 1, 2$, telle que :

$$q_{(l,i,j)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_{(k,n,m)} r_{(k,n,m)(l,i,j)}, \quad l = 1, 2.$$

Les deux Théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 3.4.1 L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$, l'inégalité $r^{(1)} \leq_{st} r^{(2)}$ implique la suivante : $\tau r^{(1)} \leq_{st} \tau r^{(2)}$.

Preuve L'opérateur de transition est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} &\leq \bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}, \quad l = 1, 2 \\ \iff \bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Dans (*), si $n = 0$

Dans ce cas, on a

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^1,$$

en effet :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{s,r-m}^1 - \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{s,r-m+1}^1 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^1 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} (a_{i,j-m}^1 + \bar{a}_{i,j-m+1}^1) - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^1 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^1 + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^1 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^1 - \frac{\alpha\mu}{(\alpha + \lambda + m\mu)(\alpha + \lambda + (m-1)\mu)} \bar{a}_{i,j-m+1}^1. \end{aligned}$$

Dans cette situation, on ne peut pas conclure.

Si $n \geq 1$

Dans ce cas, on a

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = a_{i-n+1,j-m}^1,$$

et

$$\begin{aligned} \bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} r_{(k,n,m)(1,s,r)} = \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+1,r-m}^1, \\ \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+2,r-m+1}^1, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+1,r-m}^1 - \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+2,r-m+1}^1 \\ &= \sum_{s=i}^{\infty} \left[a_{s-n+1,j-m}^1 + \sum_{r=j+1}^{\infty} a_{s-n+1,r-m}^1 \right] - \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+2,r-m+1}^1 \\ &= a_{i-n+1,j-m}^1 + \sum_{s=i+1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} a_{s-n+1,r-m}^1 - \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} a_{s-n+2,r-m+1}^1 \\ &= a_{i-n+1,j-m}^1 \geq 0 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3.4.1) est vérifiée pour $n \geq 0$.

Dans (), si** $n = 0$

$$r_{(k,n,m)(2,i,j)} = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m+1}^2$$

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} r_{(k,n,m)(2,s,r)} \\
 &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{s,r-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{s,r-m+1}^2 \right] \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &= \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 \tag{3.4.2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(2,i,j)} &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2 + \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+2}^2 \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2 + \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} [\bar{a}_{i,j-m+1}^2 - a_{i,j-m+1}^2] \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2 + \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &\quad - \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2 \\
 &= \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 - \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(2,i,j)} &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &\quad - \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 + \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2 \\
 \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(2,i,j)} &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{\alpha\mu}{(\alpha + \lambda + m\mu)(\alpha + \lambda + (m-1)\mu)} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 &\quad + \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m+1}^2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)} - \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(2,i,j)} \geq 0$$

Ainsi, l'inégalité (3.4.1) est vérifiée pour $n = 0$.

En conclusion, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre " \leq_{st} ".

Théorème 3.4.2 L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconque $r^{(1)}$ et $r^{(2)}$, l'inégalité $r^{(1)} \leq_v r^{(2)}$ implique la suivante : $\tau r^{(1)} \leq_v \tau r^{(2)}$.

Preuve L'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} &\leq \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)}, l = 1, 2 \\ \iff \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Dans (*), si $n = 0$

On va montrer que :

$$\bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(1,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} \geq 0. \quad (3.4.4)$$

On a

$$\begin{aligned}
 & \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(1,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-1} + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^{-1} \\
 & - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} (\bar{a}_{i,j-m}^{-1} - \bar{a}_{i,j-m}^{-1}) \\
 & + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} (\bar{a}_{i,j-m-1}^{-1} + \bar{a}_{i,j-m}^{-1}) \\
 & - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 & + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^{-1} + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 & - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 &= \left[\frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} - 2 \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu} \right] \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 & + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 &= \frac{2\alpha\mu^2}{((\alpha + \lambda + (m-1)\mu)(\alpha + \lambda + (m+1)\mu)(\alpha + \lambda + m\mu))} \bar{a}_{i,j-m}^{-1} \\
 & + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^{-1} - \frac{2\alpha\mu}{((\alpha + \lambda + (m+1)\mu)(\alpha + \lambda + (m-1)\mu))} \bar{a}_{i,j-m}^{-1}
 \end{aligned}$$

Dans cette situation, on ne peut pas conclure.

Si $n \geq 1$

Dans ce cas, on a

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = a_{i-n+1,j-m}^1,$$

telle que:

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{r}_{(k,n,m)(1,s,r)} = \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+1,r-m}^1 \\
 \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(1,i,j)} &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+2,r-m+1}^1
 \end{aligned}$$

Et

$$\bar{r}^{(k,n+1,m+1)}(l,i,j) = \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n,r-m-1}^1$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} & \bar{r}^{(k,n-1,m-1)}(l,i,j) + \bar{r}^{(k,n+1,m+1)}(l,i,j) - 2\bar{r}^{(k,n,m)}(l,i,j) = \\ &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+2,r-m+1}^1 + \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n,r-m-1}^1 - 2 \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+1,r-m}^1 \\ &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+2,r-m+1}^1 + \bar{a}_{i-n,j-m-1}^1 + \sum_{s=i+1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \bar{a}_{s-n,r-m-1}^1 - 2 \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+1,r-m}^1 \\ &= \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+2,r-m+1}^1 + \bar{a}_{i-n,j-m-1}^1 - \sum_{s=i}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \bar{a}_{s-n+1,r-m}^1 \\ &= \bar{a}_{i-n,j-m-1}^1 - \bar{a}_{i-n+1,j-m}^1 \\ &= \bar{a}_{i-n,j-m-1}^1 \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité (3.4.4) est vérifiée.

Dans (), si $n = 0$**

Dans ce cas, on a

$$r^{(k,n,m)}(2,i,j) = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 + \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2,$$

telle que :

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(k,n,m)}(2,i,j) &= \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} \\ &= \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \bar{a}_{i,j-m}^{-2} \right] + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} \\ &= \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2}, \end{aligned}$$

$$\bar{r}^{(k,n-1,m-1)}(l,i,j) = \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} - \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2},$$

et

$$\bar{r}^{(k,n+1,m+1)}(l,i,j) = \frac{\lambda + (m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \frac{(m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^{-2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 & \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} = \\
 & = \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} - \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 + \frac{\lambda + (m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m}^{-2} + \bar{a}_{i,j-m-1}^2 \right] \\
 & - \frac{(m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^2 - \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} + \bar{a}_{i,j-m}^2 \right] \\
 & - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \left[\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} =$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} - \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^2 \\
 & + \frac{\lambda + (m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m-1}^2 \\
 & - \left[\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m+1}^{-2} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 \right] \\
 & - \left[\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \bar{a}_{i,j-m}^2 \right] - \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m}^2 - \bar{a}_{i,j-m}^2 \right] \\
 & + \frac{\lambda + (m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} \left[\bar{a}_{i,j-m}^2 - \bar{a}_{i,j-m-1}^2 \right] \\
 & - \left[\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \left(\bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \bar{a}_{i,j-m}^2 \right) + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 \right] \\
 & - \left[\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^{-2} - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} \\
 &= \left[\frac{\lambda + (m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} + \frac{\lambda + (m+1)\mu}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} - 2\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \right] \bar{a}_{i,j-m}^{-2} \\
 &+ \left[\frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} + 2\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \right] \bar{a}_{i,j-m}^2 \\
 &+ \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} a_{i,j-m}^2 + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} a_{i,j-m-1}^2
 \end{aligned}$$

$$\bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{a}_{i,j-m}^{-2} \left[-\frac{2\mu^2\alpha}{(\alpha + \lambda + m\mu)(\alpha + \lambda + (m-1)\mu)(\alpha + \lambda + (m+1)\mu)} \right] \\
 &+ \bar{a}_{i,j-m}^2 \left[\frac{2\mu(m\mu\alpha + \alpha\lambda + \mu\lambda + \alpha^2 + \mu\alpha)}{(\alpha + \lambda + m\mu)(\alpha + \lambda + (m-1)\mu)(\alpha + \lambda + (m+1)\mu)} \right] \\
 &+ a_{i,j-m}^2 \frac{(m-1)\mu}{\alpha + \lambda + (m-1)\mu} + a_{i,j-m-1}^2 \frac{\lambda}{\alpha + \lambda + (m+1)\mu} ,
 \end{aligned}$$

alors

$$\bar{r}_{(k,n-1,m-1)(l,i,j)} + \bar{r}_{(k,n+1,m+1)(l,i,j)} - 2\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)} \geq 0 .$$

Ainsi, l'inégalité (3.4.3) est vérifiée pour $l = 1, 2$.

En conclusion l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe.

Maintenant, notons par $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov incluses de chaque système. Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.4.3 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité.

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, B_1^{(1)} \leq_{st} B_1^{(2)}, B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$ alors $\tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)}$.

C'est-à-dire, pour une distribution quelconque r on a $\tau^{(1)} r \leq_{st} \tau^{(2)} r$.

Preuve D'après le Théorème 2.3.2, nous devons vérifier l'inégalité suivante pour l'ordre stochastique,

$$\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(1)} \leq \bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(2)}, \quad l = 1, 2.$$

Dans (), si $n = 0$**

ce qui revient à montrer:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2(1)} - \frac{m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} a_{i,j-m}^{2(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2(2)} - \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} a_{i,j-m}^{2(2)} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

d'après le lemme 3.3.1, on a

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_{st} \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\}. \quad (3.4.6)$$

De plus, on a $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, impliquent que :

$$\frac{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}},$$

et puisque la fonction: $\frac{m}{x+m}$ est décroissante alors :

$$\frac{m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \geq \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}. \quad (3.4.7)$$

Aussi que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$ impliquent que $\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}$ comme la fonction $\frac{x}{x+m}$ est croissante, il est vrai que

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}.$$

De la dernière inégalité nous pouvons trouver $\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)} \geq \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}$.

Les inégalités $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$ et $\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)} \geq \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}$ donnent

$$\frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)}},$$

et comme, la fonction $\frac{x}{x+m}$ est croissante, alors

$$\frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}, \quad \text{a lieu.} \quad (3.4.8)$$

Des inégalités (3.4.6), (3.4.7) et (3.4.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(1)} - \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(2)} &= \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2,(1)} - \frac{m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} a_{i,j-m}^{2,(1)} \\ &\quad - \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2,(2)} + \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} a_{i,j-m}^{2,(2)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2,(1)} - \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} a_{i,j-m}^{2,(2)} \\ &\quad - \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \bar{a}_{i,j-m}^{2,(1)} + \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} a_{i,j-m}^{2,(2)} = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(1)} \leq \bar{r}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(2)}.$$

Ainsi l'inégalité (3.4.5) est obtenue.

Dans (*), si $n = 0$

ce qui revient à montrer:

$$\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \bar{a}_{i,j-m}^{1,(1)} \leq \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \bar{a}_{i,j-m}^{1,(2)} \quad (3.4.9)$$

d'après le lemme 3.3.1 on a

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_{st} \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\}. \quad (3.4.10)$$

De la relation $\frac{\alpha + \lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} = 1$, on trouve que $\frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda + m\mu}$. alors l'inégalité

$$\frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \geq \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}},$$

peut être réécrite comme suit

$$1 - \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \geq 1 - \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}$$

D'où, on constate que

$$\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \leq \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \quad (3.4.11)$$

D'après (3.4.10) et (3.4.11) l'inégalité (3.4.9) est vérifiée.

Si $n \geq 1$:

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = a_{i-n+1,j-m}^1 ,$$

on va montrer que

$$\bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(1)} \leq \bar{r}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(2)} ,$$

ce que revient à montrer

$$\bar{a}_{i-n+1,j-m}^{(1)} \leq \bar{a}_{i-n+1,j-m}^{(2)} ,$$

d'après le lemme 3.3.1 on a

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_{st} \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\} ,$$

alors

$$\bar{a}_{i-n+1,j-m}^{(1)} \leq \bar{a}_{i-n+1,j-m}^{(2)} .$$

Par conséquent, si $B_1^{(1)} \leq_{st} B_1^{(2)}$, $B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$, alors l'inégalité $\bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(1)} \leq \bar{r}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(2)}$, $l = 1, 2$, est vérifiée.

Théorème 3.4.4 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $B_1^{(1)} \leq_v B_1^{(2)}$, $B_2^{(1)} \leq_v B_2^{(2)}$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, pour une distribution quelconque r on a $\tau^{(1)}r \leq_v \tau^{(2)}r$.

Preuve D'après le Théorème 2.3.2 nous devons vérifier l'inégalité suivante pour l'ordre convexe,

$$\bar{\bar{r}}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(1)} \leq \bar{\bar{r}}_{(k,n,m)(l,i,j)}^{(2)}, l = 1, 2. \quad (3.4.12)$$

Dans (**), si $n = 0$

$$\bar{\bar{r}}_{(k,n,m)(2,i,j)} = \frac{\lambda + m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{\bar{a}}_{i,j-m}^{(2)} - \frac{m\mu}{\alpha + \lambda + m\mu} \bar{a}_{i,j-m}^1 ,$$

ce qui est équivalent à montrer

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} - \frac{m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} &\leq \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} \\ &- \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

En effet, d'après le lemme 3.3.2, on a

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_v \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\},$$

et d'après les inégalités (3.4.7) et (3.4.8), on a

$$\begin{aligned} \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(1)} - \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(2)} &= \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} - \frac{m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} \\ &- \frac{\lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} + \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} - \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} \\ &- \frac{\lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} + \frac{m\mu^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Donc

$$\overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(1)} \leq \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(2,i,j)}^{(2)}.$$

Dans (*), si $n = 0$

On commence par vérifier la relation suivante :

$$\overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(1)} \leq \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(2)},$$

ce qui équivaut à montrer :

$$\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} \leq \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)}.$$

En effet, d'après le lemme 3.3.2, on a

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_v \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\},$$

et d'après l' inégalité (3.4.11) on trouve que

$$\begin{aligned} \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(1)} &= \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} + \lambda^{(1)} + m\mu^{(1)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(1)} \\ &\leq \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(2)} + \lambda^{(2)} + m\mu^{(2)}} \overline{\overline{a}}_{i,j-m}^{(2)} = \overline{\overline{r}}_{(k,m,n)(1,i,j)}^{(2)}. \end{aligned}$$

d'où l'inégalité est obtenue.

Si $n \geq 1$

Dans ce cas, on a

$$r_{(k,n,m)(1,i,j)} = a_{i-n+1,j-m}^1.$$

On vérifié que

$$\overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(1)} \leq \overline{\overline{r}}_{(k,n,m)(1,i,j)}^{(2)},$$

ce qui équivalent à montrer :

$$\overline{\overline{a}}_{i-n+1,j-m}^{(1)} \leq \overline{\overline{a}}_{i-n+1,j-m}^{(2)}, \quad (3.4.15)$$

d'après le lemme 3.3.2 on a:

$$\left\{ a_{i,j}^{k,(1)} \right\} \leq_v \left\{ a_{i,j}^{k,(2)} \right\},$$

d'où

$$\overline{\overline{a}}_{i-n+1,j-m}^{(1)} \leq \overline{\overline{a}}_{i-n+1,j-m}^{(2)}.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.4.12) est vérifiée.

3.5 Bornes stochastique des distributions stationnaires

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, par rapport aux ordres partiels : stochastiques et convexe

Théorème 3.5.1 On considère Σ_1 et Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité ayant les paramètres $\alpha^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $B_1^{(1)}(x)$, $B_2^{(1)}(x)$ et $\alpha^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$,

$\mu^{(2)}, B_1^{(2)}(x), B_2^{(2)}(x)$ respectivement, et soient $\pi_{i,j}^{(1)}$ et $\pi_{i,j}^{(2)}$ les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivantes ont lieu

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, B_1^{(1)} \leq_{so} B_1^{(2)}, B_2^{(1)} \leq_{so} B_2^{(2)}, \quad (3.5.1)$$

on a aussi les inégalités suivantes sur les distributions stationnaires

$$\left\{ \pi_{i,j}^{(1)} \right\} \leq_{so} \left\{ \pi_{i,j}^{(2)} \right\} \quad \text{où } \leq_{so} = \leq_{st} \text{ (ou } \leq_v \text{)}. \quad (3.5.2)$$

Preuve D'après les Théorèmes 3.3.3 et 3.3.4, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, B_1^{(1)} \leq_{so} B_1^{(2)}, B_2^{(1)} \leq_{so} B_2^{(2)}$ impliquent $\tau^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)}$, C'est- a-dire, pour une distribution quelconque r on a l'inégalité suivante:

$$\tau^{(1)} r \leq_{so} \tau^{(2)} r. \quad (3.5.3)$$

Des Théorème 3.3.1 et 3.3.2, l'opérateur $\tau^{(2)}$ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est- a-dire, pour deux distributions quelconques $r_1^{(2)}, r_2^{(2)}$ telles que $r_1^{(2)} \leq_{so} r_2^{(2)}$, on a

$$\tau^{(2)} r_1^{(2)} \leq_{so} \tau^{(2)} r_2^{(2)}, \quad (3.5.4)$$

cependant, de l'inégalité (3.5.3), on obtient

$$\tau^{(1)} r^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)} r^{(1)}. \quad (3.5.5)$$

Il existe une probabilité $r_1^{(2)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)} r^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)} r_1^{(2)}. \quad (3.5.6)$$

En combinant les inégalités (3.5.4) et (3.5.6), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)} r^{(1)} \leq_{so} \tau^{(2)} r^{(2)}, \quad (3.5.7)$$

pour deux distributions quelconques $r^{(1)}, r^{(2)}$.

L'inégalité (3.5.7) peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned}\tau^{(1)r^{(1)}} &= P\left(X_d^{(1)} = (1, i, j)\right) = P\left(X_d^{(1)} = (2, i, j)\right) \\ &\leq_{so} P\left(X_d^{(2)} = (1, i, j)\right) = P\left(X_d^{(2)} = (2, i, j)\right) = \tau^{(2)r^{(2)}}\end{aligned}$$

Finalement, quand $d \rightarrow \infty$, nous avons $\left\{\pi_{i,j}^{(1)}\right\} \leq_{so} \left\{\pi_{i,j}^{(2)}\right\}$.

Théorème 3.5.2 Si pour le modèle $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité la distribution de temps de service $B_1(x)$, $B_2(x)$ sont (*NBUE* respectivement *NWUE*), alors la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ du nombre de clients dans ce système est inférieure, (respectivement supérieure) par rapport à l'ordre \leq_v , à la distribution stationnaire, $\pi_{i,j}^*$ du nombre de clients dans le système $M_2/M_2/1$ avec rappels et priorité.

Preuve Considérons un système de files d'attente $M_2/M_2/1$ ayant les mêmes paramètres:

taux d'arrivées des clients prioritaires α .

taux d'arrivées des clients non prioritaires λ .

taux de rappels μ .

temps moyen de service β_1^1 et β_2^1 , que le système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, mais avec des temps de service exponentiellement distribués avec des taux $\theta_1 = \frac{1}{\beta_1^1}$, $\theta_2 = \frac{1}{\beta_2^1}$.

$$B_1^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta_1^1}\right), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$B_2^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta_2^1}\right), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'après la proposition 2.4.1, si $B_k(x)$, $k = 1, 2$ est *NBUE* (respectivement *NWUE*) alors $B_k(x) \leq_v B_k^*(x)$

(respectivement $B_k(x) \geq_v B_k^*(x)$), alors d'après le *Théorème 3.5.1*, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M_2/M_2/1$ avec rappels et priorité.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés de monotonie d'une file $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques.

Nous avons montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse par rapport à l'ordre stochastique et convexe. De plus, nous avons obtenu des conditions de comparabilité des deux opérateurs de transition. Ainsi on a montré que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_2/M_2/1$ avec rappels et priorité, si la distribution des temps de service est *NBUE* (respectivement *NWUE*).

Conclusion générale

Le phénomène de répétition de demandes du service est étudié par la théorie de files d'attente avec rappels dont nous avons actualisé une synthèse des résultats connus. Nous nous sommes intéressés au modèle d'attente $M_2/G_2/1$ avec rappels et clients prioritaires.

Nous avons aussi étudié quelques problèmes de comparabilité pour l'analyse du système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorités en utilisant la méthode de comparaison stochastique. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative.

Ceci nous a permis d'obtenir les conditions qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov induite.

Nous avons aussi établi des conditions sous lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires de deux chaînes de Markov incluses associées à deux systèmes $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, ayant la même structure mais avec des paramètres déférents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe. On a montré aussi que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_2/G_2/1$ avec rappels et priorité, est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M_2/M_2/1$ avec rappels et priorité, si la distribution des temps de service est *NBUE* (respectivement *NWUE*).

Les travaux réalisés durant cette mémoire et les résultats obtenus ouvrent un ensemble de perspectives :

- ▶ Obtention de bornes stochastiques pour d'autres mesures de performance (par exemple, pour la durée moyenne de la période d'activité ou pour le temps moyen d'attente).
- ▶ l'étude de l'influence de différents paramètres définissant le système donné sur la qualité des bornes.
- ▶ En utilisant d'autres ordres partiels (concave, en fonction génératrice)

Bibliographie

- [1] Aïssani, A. (1988). On the $M/G/1/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology* **6**, 98–123.
- [2] Aïssani, A. (1991). Influence des pannes des serveurs sur la distribution de nombre de clients en orbite et dans un système $M/G/1/0$ avec rappels. *Technologies Avancées* **2**, 23–38.
- [3] Aïssani, A. (1994). A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées Statistiques Appliquées, U.S.T.H.B., Alger*, 1–11.
- [4] Aïssani, A. (1995). On retrial queues with breakdowns. *Blida Scientific Journal* **1**, 7–13.
- [5] Aïssani, D. (1988). *Evaluation des performances des systèmes informatiques*. Cours de Post-Graduation, Institut d’Informatique, U.S.T.H.B. Alger.
- [6] Aïssani, D. and Aïssani, A. (2005). Méthodes statistiques en fiabilité. Cours de Post-Graduation ”*Statistiques des Processus Aléatoires*”, Université de Constantine.
- [7] Amador, J. and Artalejo, J. R. (2009). The $M/G/1$ retrial queue : New descriptors of the customer’s behavior. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **223**, 15–26.
- [8] Artalejo, J. R. (1992). A unified cost function for $M/G/1$ queueing systems with removable server. *Trabajo de Investigacion Operativa* **7**, 95–104.

-
- [9] Artalejo, J. R. (1994). New results in retrial queueing systems with breakdown of the server. *Statistica Neerlandica* **48**, 23–36.
- [10] Artalejo, J. R. (2000). G-Networks : A versatile approach for work removal in queueing networks. *European Journal of Operational Research* **126**, 233–249.
- [11] Artalejo, J. R. and Gómez-Corral, A. (1999). On a single server queue with negative arrivals and request repeated. *Journal of Applied Probability* **36**, 907–918.
- [12] Artalejo, J. R. AND Gómez-Corral, A. (2008). Retrial queueing system : *A computation approach*. Berlin, Springer Edition.
- [13] Artalejo, J. R., Phing-Duc, T (2011). *Markovian single server retrial queues with two way communication*, in : *Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, Seoul*, pp. 1–7.
- [14] Atencia, I., Fortes, I., Moreno, P. AND Sánchez, S. (2006). An $M/G/1$ retrial queue with active breakdowns and bernoulli schedule in the server. *Information and Management Sciences* **17 (1)**, 1–17.
- [15] Boualem, M. and Aïssani, A. (2004). Inégalités pour les systèmes de files d’attente avec rappels et vacances du serveur, Actes du Colloque International MSS’. (*Modélisation Statistique et Stochastique*), U.S.T.H.B., ISBN : 978-9947-0-173, Alger, 52-57.
- [16] Boualem, M., Aïssani, D. et Djellab, N. (2005). Bornes pour la distribution stationnaire de la file $M/G/1$ avec rappels et vacances, Actes du Colloque International COSI’05 (*2^{ème} Colloque International sur l’Optimisation et les Systèmes d’Information*), Béjaïa, 558-570.
- [17] Boualem, M. and Aïssani, D. (2006). Bornes stochastiques pour les caractéristiques du modèle $M/G/1$ avec rappels et vacances, *Actes de la Conférence ROADEF’*. (*7^{ème} Congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d’Aide à la Décision*), Lille, [http : www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme.html](http://www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme.html).

-
- [18] Boualem, M., Djellab, N. and Aïssani, D. (2009). Stochastic qualities for $M/G/1$ retrial queues with vacations and constant retrial policy, *International Journal MCM (Mathematical and Computer Modelling)*, Doi : 10:1016/j. mcm. 2009.03.009, ElsevierEd, **50**, 207-212.
- [19] Boualem, M., Djellab, N. et Aïssani, D. (2011). Approche régénérative de la file d'attente $M/G/1$ avec rappels classiques et vacances exhaustives du serveur. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 45 (1- 3), pp: 253 – 267.
- [20] Boualem, M., Djellab, N. and Aïssani, D. (2012). *Stochastic Approximations and Monotonicity of a Single Server Feedback Retrial Queue. Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2012, Article ID 536982, pp. 1-13.
- [21] Boualem, M., Cherfaoui, M., Djellab, N. et Aïssani, D. (2013). Analyse des performances du système $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, *Journal européen des systèmes automatisés*, vol. 45 (1- 2 -3), 181- 193, pp: 1 -13.
- [22] Boualem, M., Djellab, N. and Aïssani, D. (2014). Stochastic bounds for a single server queue with general retrial times, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 40, No. 1, pp. 183-198.
- [23] Berdjoudj, L. (2006). Analyse des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées négatives. *Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Tizi Ouzou*.
- [24] Berdjoudj, L. and Aïssani, D. (2005). Martingale methods for analysing the $M/M/1$ retrial queue with negative arrivals. *Journal of Mathematical Sciences* **131 (3)**, 5595–5599.
- [25] Boucherie, R. J. and Boxma, O. J. (1996). The workload in the $M/G/1$ queue with work removal. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **10**, 261–277.

-
- [26] Choi, B. D. and Chang, Y. (1999). *Single server retrial queues with priority calls*, *Mathematical and Computer Modelling*, **30**, 7-32.
- [27] Choi, B.D., Choi, K.B. and Lee, Y.W. (1995). *M/G/l retrial queueing system with two types of calls and finite capacity*, *Queueing Systems*, **19**, 215-229.
- [28] Choi, B.D., Han, D.H. and Falin, G. (1993). *On the virtual waiting time for an M/G/l retrial queue with two types of calls*, *J. Appl. Math. Stoch. Anal*, **6**, 11-24.
- [29] Choi, B.D. and Kim, J.W. (1997). *Discrete-time Geo1, Geo2/G/1 retrial queueing system with two types of calls*, *Computers Math. Applic*, **33** (10), 79-88.
- [30] Choi, B.D. and Park, K.K. (1990). *The M/G/1 retrial queue with Bernoulli schedule*, *Queueing Systems*, **7**, 219-227.
- [31] Choo, Q. H. AND Conolly, B. (1979). New results in the theory of repeated orders queueing systems. *Journal of Applied Probability* **16**, 335–356.
- [32] Cinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, New York.
- [33] Cozzolino, J. K. and Yang, H. (1968). A service system with unfilled requests repeated. *Operations Research* **16**, 1126–1137.
- [34] Delyon, B. (2002). Simulation et modélisation. *Cours de DEA/DESS*, IRMAR, Université de Rennes-I, France.
- [35] Djellab, N. (2003). Système de files d'attente avec rappels. Méthode d'approximation pour un système M/G/1 avec rappels et pannes. *Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées*, Université de Annaba.
- [36] Falin, G.I. (1979). *Model of coupled switching in presence of recurrent calls*, *Eng. Cybernet. Rev*, **17**, 53-59.
- [37] Falin, G.I. (1988). *On a multiclass batch arrival retrial queue*, *Adv. Appl. Prob* **20**, 483-487.

-
- [38] Falin, G.I. (1990). *A survey of retrial queues. Queueing Systems*, **7**, 127-168.
- [39] Falin, G.I. and Artalejo, J.R. and Martin. M. (1993). *On the single server retrial queue with priority Customers, Queueing Systems*, **14**, 439-455.
- [40] Fayolle, G. (1986). A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In : Boxma, O.J. Cohen, J.W. Tijms, H.C.(Eds.), *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation. Elsevier Science, Amsterdam*, 245–253.
- [41] Gelenbe, E. (1989). Random neural network with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation* **1**, 502–510.
- [42] Gelenbe, E. (1991). Product form queueing network with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability* **28**, 656–663.
- [43] Gelenbe, E., Glynn, P. and Sigman, K. (1991). Queues with negative arrivals. *Journal of Applied Probability* **28**, 245–250.
- [44] Genedenko, B., Beliaev, Y. and Soloviev, A. (1972). *Méthodes Mathématiques en théorie de la fiabilité*, Chapman and Hall, London.
- [45] Gine, E., Houdre.C and Nualart, D. (2003). *Stochastic inequalities and applications*, Progress in Probability 56, Birkhauser.
- [46] Grishechkin, S. A. (1992). *Multiclass batch arrival retrial queues analysed as branching processes with immigration*, Queueing Systems **11**, 395-418.
- [47] Han, D. H. and Lee, Y.W. (1996). *MMPP, M/G/1 retrial queue with two classes of customers*, *Comm. Kor. Math.Sot*, **11**, 481-493.
- [48] Jain, G. and Sigman, K. (1996). A Pollaczek-Khintchine formula for $M/G/1$ queue with desasters. *Journal of Applied Probability* **33**, 1191–1200.
- [49] Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occuring in theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. *Annals of Mathematical Statistics* **24**, 338–354.

-
- [50] Khalil, Z. and Falin, G. (1994). Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues. *Operations Research Letters* **16**, 285–290.
- [51] Kulkarni, V. G. (1986). *Expected waiting time in a multi-class batch arrival retrial queue*, J. Appl. Prob **23**, 144-154.
- [52] Kulkarni, V. G. AND Choi, B. D. (1990). Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* **7**, 191–208.
- [53] Langaris, C and Moutzoukis, E. (1995). A retrial queue with structured batch arrivals priorities and vacations, *Queueing Systems*, **20**, 341-368.
- [54] Lopez-Herrero (2002). On the number of customers served in $M/G/1$ retrial queue : first moments and maximum entropy approach. *Computers and Operations Research* **29**, 1739–1757.
- [55] Martin, M and Artalejo, J.R. (1995). *Analysis of an $M/G/l$ queue with two types of impatient units*, Adv. Appl. Prob, **27**, 840-861.
- [56] Muller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison methods for stochastic models and risk*, John Wiley and Sons, LTD.
- [57] Oukid, N. and Aïssani, A. (2009). Bounds on busy period for queues with breakdowns. *Advances and Applications in Statistics* **11 (2)**, 137–156.
- [58] Shaked, M. and Shantikumar, J.G. (1994). *Stochastic orders and their applications*, Probability and Mathematical Statistics.
- [59] Theodore, P.H. and Christian, H (1999). *Stochastic inequalities and their applications*, Contemporary Mathematics, 234, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [60] Yang, T. and Templeton, J. G. C. (1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems* **2**, 201–233.